

Fundamentos da Lógica

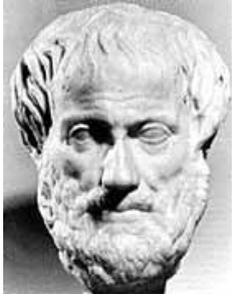
Lógica Proposicional

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

`loureiro@dcc.ufmg.br`

`http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro`

Fundamentos da lógica: Alguns fatos históricos



Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), filósofo grego. Produziu uma obra rica e multifacetada. Nela encontramos uma exaustiva compilação dos conhecimentos do seu tempo, mas também, uma filosofia que ainda hoje influencia a nossa maneira de pensar.

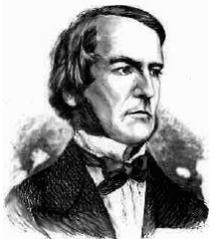
Responsável por escrever os primeiros grandes trabalhos de lógica:

- Coleção de regras para raciocínio dedutivo que pode ser usado em qualquer área do conhecimento.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), filósofo e matemático alemão, provavelmente mais conhecido por ter inventado o cálculo integral e diferencial independentemente de Isaac Newton.

Propõe o uso de símbolos para mecanizar o processo de raciocínio dedutivo.



George Boole (1815–1864), matemático e filósofo inglês.



Augustus De Morgan (1806–1871), matemático inglês.

Propõem as bases da lógica simbólica moderna usando as idéias de Leibniz.

Fundamentos da lógica: Atualidade

Pesquisa continua sendo aplicada em áreas como:

- inteligência artificial;
- projeto de circuito lógico;
- teoria de autômatos e computabilidade;
- teoria de bancos de dados relacionais;
- teoria de linguagens;
- teoria de sistemas distribuídos.

Forma de um Argumento × Seu Conteúdo

- Forma de um argumento: conceito central da lógica dedutiva.
- Argumento: sequência de afirmações para demonstrar a validade de uma asserção.
- Como saber que a conclusão obtida de um argumento é válida?
 - As afirmações que compõem o argumento
 - são aceitas como válidas, ou
 - podem ser deduzidas de afirmações anteriores.
- Em lógica, forma de um argumento \neq seu conteúdo.
- “Análise lógica” não determina a validade do conteúdo de um argumento.
- “Análise lógica” determina se a verdade de uma conclusão pode ser obtida da verdade de argumentos propostos.
- Lógica: Ciência do Raciocínio.

Forma de um Argumento × Seu Conteúdo

- Exemplo 1:

se a sintaxe de um programa está errada **ou**
se a execução do programa resulta em divisão por zero
então o computador irá gerar uma mensagem de erro.
 \therefore Computador não gera mensagem de erro



Sintaxe do programa está correta **e**
Execução do programa não resulta em divisão por zero.

- Exemplo 2:

se $x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ **ou** $x > 2$

então $x^2 > 4$.

$\therefore x^2 \leq 4$



$x \geq -2$ **e** $x \leq 2$.

Forma de um Argumento × Seu Conteúdo

- Nos exemplos, temos que o conteúdo dos argumentos é diferente.

- No entanto, a “forma lógica” é a mesma:

se p **ou** q

então r .

∴ não r



não p **e não** q .

- Argumentos na forma lógica são normalmente representados por letras minúsculas do alfabeto.
Exemplo: p , q , r .
- Em geral, as definições da lógica formal estão de acordo com a lógica natural ou intuitiva das pessoas de bom senso.
- O formalismo é introduzido para evitar ambiguidade e garantir consistência.

Proposições

- Em toda teoria matemática, usam-se termos já definidos na concepção de novas definições.
- Mas como fazer com os termos mais “primitivos”?
 - Termos “primitivos” ou iniciais não são definidos.
 - Em lógica, os termos *sentença*, *verdadeiro*, e *falso* são os termos iniciais não definidos.
- Definição: uma afirmação ou proposição é uma sentença que é verdadeira (V) ou falsa (F) mas não ambas.
- Exemplo 3:
 - $2 + 2 = 4$
 - $2 + 2 = 5$são proposições, onde a primeira é V e a segunda é F.

Proposições

- Exemplo 4:

- Ele é um estudante universitário.

não é uma proposição já que depende da referência ao pronome “ele.”

- Exemplo 5:

- $x + y > 0$.

também não é uma proposição já que depende dos valores de x e y .

- É possível transformar uma sentença como nos exemplos 4 ou 5 numa proposição?

- Sim, através de quantificadores, como será visto em lógica de predicados.

Proposições compostas

- Nos exemplos usados daqui para frente, usaremos as letras minúsculas (por exemplo, p , q , r) para representar afirmações.
- Os seguintes símbolos podem ser usados para definir expressões lógicas mais complexas a partir de expressões mais simples:
 - \neg ou \sim ou “barra sobre a letra” ou “linha”: **não**
 $\neg p$ é lido como “não p ” e é chamado de negação de p .
Outras formas: $\sim p$, \bar{p} , p'
 - \wedge : **e**
 $p \wedge q$ é lido como “ p e q ” e é chamado de conjunção de p e q .
 - \vee : **ou**
 $p \vee q$ é lido como “ p ou q ” e é chamado de disjunção de p e q .

Proposições compostas

- \neg é um operador unário e \wedge e \vee são operadores binários.
- Avaliação na seguinte ordem:
 1. \neg (negação);
 2. \wedge, \vee (conjunção, disjunção).

Observação: Alguns autores consideram que a conjunção tem prioridade sobre a disjunção, enquanto outros definem a mesma prioridade para os dois operadores. O melhor é usar parêntesis para indicar a prioridade, evitando esse problema.

- **Exemplo 6:**

– $\neg p \vee q = (\neg p) \vee q$

– $p \vee q \wedge r$ é ambíguo pela discussão acima.

Melhor solução: $(p \vee q) \wedge r$ ou $p \vee (q \wedge r)$.

Proposições:

Tradução de sentenças em linguagens natural e algébrica para símbolos

- Mas e Não/nem ... nem

p = Está quente.

q = Está ensolarado.

Exemplo 7:

(a) Não está quente mas está ensolarado.

“Mas” = $\wedge \quad \rightsquigarrow \quad \neg p \wedge q$.

(b) Não está quente nem ensolarado.

“Nem A nem B” = $\neg A \wedge \neg B \quad \rightsquigarrow \quad \neg p \wedge \neg q$.

Proposições: Tradução de sentenças em linguagens natural e algébrica para símbolos

- **e** (\wedge), **ou** (\vee), e desigualdades

Sejam três números reais representados por a , b , e x .

- $x \leq a \equiv x < a \vee x = a$
- $a \leq x \leq b \equiv x \geq a \wedge x \leq b$
- $2 \leq x \leq 1 \equiv x \geq 2 \wedge x \leq 1$, que é F.

- Sejam os predicados:

$p: x > 0$; $q: x < 3$; $r: x = 3$.

(a) $x \leq 3 \equiv q \vee r$

(b) $0 < x < 3 \equiv p \wedge q$

(c) $0 < x \leq 3 \equiv p \wedge (q \vee r)$

Proposições e os “valores-verdade”

- Para uma sentença ser uma proposição é necessário ter um valor-verdade bem definido, i.e., V ou F.

- Negação (\neg) e sua tabela da verdade:

p	$\neg p$
V	F
F	V

- Conjunção (\wedge) e sua tabela da verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Proposições e os “valores-verdade”

- Disjunção (\vee)

Possíveis significados:

- **inclusive**: p ou q ou ambos (significado assumido para este operador), e
- exclusivo: p ou q , mas não ambos.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposições mais complexas

- Exemplo 8:

Construa a tabela da verdade para a expressão:

$$E = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	E
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

$$E = p \oplus q = p \text{ **xor** } q \text{ (ou exclusivo)}$$

- O ponto fundamental em assinalar “valores-verdade” para proposições compostas é que permite o uso da lógica para decidir a verdade de uma proposição usando somente o conhecimento das partes.
- A lógica não ajuda a determinar a verdade ou falsidade de uma afirmação em si, ou seja, seu conteúdo.

Equivalência lógica

- As proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$ possuem os mesmos valores-verdade.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

- Por essa razão, $p \wedge q$ e $q \wedge p$ são equivalentes logicamente.
- Definição: duas proposições P e Q são equivalentes logicamente se e somente se os valores-verdade obtidos forem idênticos para cada combinação possível das variáveis que formam as proposições.

Equivalência lógica

- Como verificar se duas proposições P e Q são equivalentes logicamente?
 1. Construa a tabela da verdade para P .
 2. Construa a tabela da verdade para Q usando os mesmos valores de variáveis para as afirmações que formam a proposição.
 3. Verifique se as tabelas da verdade de P e Q são idênticas para cada combinação de valores-verdade. Se forem, P e Q são equivalentes logicamente, caso contrário não.

- Exemplo 9:

- $\neg(\neg p) \equiv p$

- $\neg(p \wedge q) \not\equiv \neg p \wedge \neg q$

Equivalência lógica

Leis de “De Morgan”

- Negação de \wedge e \vee : Leis de “De Morgan.”

Sejam as afirmações:

- p = João é alto.
- q = José é ruivo.

A proposição $p \wedge q$ é verdadeira sse os componentes forem verdadeiros.

- Quando a proposição é falsa?

Quando um dos componentes ou ambos forem falsos, i.e.,

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

- Mostre as seguintes equivalências:

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Essas duas equivalências são conhecidas como leis de “De Morgan” que foi o primeiro a expressá-las em termos matemáticos.

Leis de De Morgan: Exemplos

Exemplo 10:

$p =$ João tem 2 m de altura e ele pesa pelo menos 90 kg.

$\neg p =$ João não tem 2 m de altura ou ele pesa menos de 90 kg.

Exemplo 11:

$p = x < 2$

$\neg p = x \not< 2 \equiv x \geq 2$

Exemplo 12:

$p = -1 < x \leq 4$

$\neg p = \neg(-1 < x \leq 4) \equiv \neg(x > -1 \wedge x \leq 4) \equiv$
 $x \not> -1 \vee x \not\leq 4 \equiv x \leq -1 \vee x > 4.$

Exemplo 13:

$p =$ João é alto e João é magro.

$\neg p =$ João não é alto ou João não é magro.

Leis de De Morgan: Exemplos

Exemplo 14:

$t =$ João é alto e magro.

$\neg t =$ João não é alto e magro.

Em lógica formal os vocábulos “e” e “ou” são permitidos somente entre afirmações completas e não entre partes de uma sentença.

- Apesar das leis da lógica serem extremamente úteis, elas devem ser usadas como uma ajuda ao raciocínio e não como um substituto mecânico a inteligência.
- Equivalência lógica é muito útil na construção de argumentos.

Tautologias e contradições

- Uma tautologia é uma proposição que é sempre verdadeira independente dos valores-verdade das afirmações que compõem a proposição.
- Uma contradição é uma proposição que é sempre falsa independente dos valores-verdade das afirmações que compõem a proposição.
- De acordo com essas definições, a verdade de uma tautologia ou falsidade de uma contradição se devem a estrutura lógica da proposição em si e são independentes dos significados das afirmações que compõem a proposição.

Tautologias e contradições

- Mostre que a proposição $p \vee \neg p$ é uma tautologia e que a proposição $p \wedge \neg p$ é uma contradição.
- Se t é uma tautologia e c uma contradição mostre que $p \wedge t \equiv p$ e $p \wedge c \equiv c$

Sumário da equivalência lógica

Comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv$ $p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv$ $p \vee (q \vee r)$
Distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identidade	$p \wedge t \equiv p$	$p \vee c \equiv p$
Negação	$p \vee \neg p \equiv t$	$p \wedge \neg p \equiv c$
Dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Idempotência	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv$ $\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv$ $\neg p \wedge \neg q$
Limite universal	$p \vee t \equiv t$	$p \wedge c \equiv c$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negações	$\neg t \equiv c$	$\neg c \equiv t$

Equivalência lógica: Exemplo

Exemplo 15:

Mostre que

$$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

através dos axiomas acima.

Proposição condicional ou Implicação

- Sejam p e q proposições.
 - “Se p então q ” (ou p implica q) é representado simbolicamente por
$$p \rightarrow q.$$
 - p é chamado de hipótese e q de conclusão.
- Essa sentença é chamada de condicional.
- Sobre o “uso típico” de uma proposição condicional ou implicação:
 - Este tipo de sentença é usado tanto em linguagem natural quanto em raciocínio matemático para dizer que a verdade da proposição q (conclusão) está condicionada à verdade da proposição p (hipótese).
 - No entanto, uma proposição condicional (do ponto de vista matemático) é independente de uma relação causa-efeito entre hipótese e conclusão.
- Exemplo 16:
 - Se (48 é divisível por 6)_{=[p]} então (48 é divisível por 3)_{=[q]}.

Proposição condicional

- \rightarrow é um conectivo lógico binário para o qual podem ser definidos valores-verdade.
- Determinando a tabela da verdade para \rightarrow (se-então).
 - A única combinação em que a sentença condicional é falsa é quando a hipótese é V e a conclusão é F (por definição).

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição condicional

- Seja a seguinte sentença que descreve uma promessa:
Se (você se apresentar para trabalhar na segunda-feira pela manhã)_{= p} então (você terá o emprego)_{= q} .
- Em que situação o empregador não falou a verdade, ou seja, a promessa (sentença) é falsa?

$$p = V \wedge q = F.$$

- E se a afirmação p não for satisfeita?
 - Não é justo dizer que a promessa é falsa.

Proposição condicional e linguagem natural

- Seja a seguinte implicação:
Se hoje estiver ensolarado então nós iremos à praia.
 - Implicação “típica” de uma conversação já que há uma relação entre a hipótese e a conclusão.
- Implicação não é considerada válida quando o dia estiver ensolarado e nós não formos à praia.

Proposição condicional e linguagem natural

- Seja a seguinte implicação:
Se hoje é sexta-feira então $2 + 3 = 5$.
 - Implicação que é sempre verdadeira pela definição (tabela da verdade) da proposição condicional.
- Por outro lado, a implicação:
Se hoje é sexta-feira então $2 + 3 = 6$.
 - É verdadeira todos os dias da semana, exceto sexta-feira, apesar de $2 + 3 \neq 6$, ou seja, a conclusão ser sempre falsa.
- Nós não usaríamos essas implicações em linguagem natural já que não existe uma relação entre hipótese e conclusão.
- O conceito matemático de implicação está baseado na tabela-verdade, ou seja, nos valores que a hipótese e a conclusão podem assumir.

Proposição condicional

- Prioridade para o conectivo lógico \rightarrow :
 - Último a ser avaliado em expressões que contêm

$$\neg, \vee, \wedge.$$

- Exemplo 17:

Construa a tabela da verdade para a sentença $p \vee \neg q \rightarrow \neg p$.

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg p$	$p \vee \neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Proposição condicional

- Exemplo 18:

Mostre que $p \vee q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

→ Para todas as combinações de valores-verdade de p , q e r , a expressão da esquerda tem o mesmo valor-verdade da direita.

Proposição condicional

- É possível representar $p \rightarrow q$ em termos dos conectivos \neg , \vee , \wedge ?
 - Sim.

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

- Negação:

$$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \\ &\equiv p \wedge \neg q\end{aligned}$$

- Exemplo 19:

a : Se o (meu carro está na oficina)_{= $[p]$} então (eu não posso ir à aula)_{= $[q]$} .
 $\neg a$: (Meu carro está na oficina)_{= $[p]$} e (eu posso ir à aula)_{= $[\neg q]$} .

Proposição condicional: Contrapositiva

- A proposição contrapositiva de $(p \rightarrow q)$ é $(\neg q \rightarrow \neg p)$.

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

Exemplo 20:

$p \rightarrow q$: Se hoje é Páscoa então amanhã é segunda-feira.

$\neg q \rightarrow \neg p$: Se amanhã não é segunda-feira então hoje não é Páscoa.

Proposição condicional: *Converse*

Nota: A *converse* opinion or statement is one that is the opposite to the one that has just been stated. — Collins Cobuild English Language Dictionary.

- O termo *converse* é traduzido em
 - “Matemática Discreta e suas Aplicações, Kenneth H. Rosen, 6ª edição”, por ***oposta***,
 - “Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação, Judith L. Gersting, 5ª edição”, por ***recíproca***.
 - “Matemática Discreta, Seymour Lipschutz & Marc Lipson, 2ª edição”, por ***conversa***.
- Nesta disciplina, iremos usar a primeira tradução.
- A proposição oposta de $(p \rightarrow q)$ é $(q \rightarrow p)$.

$$p \rightarrow q \stackrel{?}{\equiv} q \rightarrow p$$

Não.

Proposição condicional: Inversa

- A proposição inversa de $(p \rightarrow q)$ é $(\neg p \rightarrow \neg q)$.

$$p \rightarrow q \stackrel{?}{\equiv} \neg p \rightarrow \neg q$$

Não.

- Exemplo 21:

Original: Se hoje é Páscoa então amanhã é segunda-feira.

Oposta: Se amanhã é segunda-feira então hoje é Páscoa.

Inversa: Se hoje não é Páscoa então amanhã não é segunda-feira.

Proposição condicional e proposições derivadas: Sumário

$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ Proposição contrapositiva

$(p \rightarrow q) \not\equiv (q \rightarrow p)$ Proposição oposta

$(p \rightarrow q) \not\equiv (\neg p \rightarrow \neg q)$ Proposição inversa

$(q \rightarrow p) \equiv (\neg p \rightarrow \neg q)$ contrapositiva
oposta de $(p \rightarrow q)$ inversa de $(p \rightarrow q)$

Proposição condicional: Somente se

- A sentença “ p somente se q ” significa que (acrescentado verbos):

p [pode ocorrer] somente se q [ocorre].

∴ Se q não ocorre então p não pode ocorrer, i.e.,

Se $\neg q$ então $\neg p \equiv$ Se p então q ou $p \rightarrow q$.

- Proposições condicionais:
 - p somente se $q \not\equiv p$ se q .
 - p somente se $q \equiv p \rightarrow q$.
 - p se $q \equiv q \rightarrow p$.

Proposição condicional: Somente se

- Exemplo 22:

$(48 \text{ é divisível por } 6)_{=[p]}$ somente se $(48 \text{ é divisível por } 3)_{=[q]} \equiv$
Se $(48 \text{ é divisível por } 6)_{=[p]}$ então $(48 \text{ é divisível por } 3)_{=[q]}$.

- Neste caso, a proposição condicional $p \rightarrow q$ é sempre verdadeira já que p e q sempre assumem o valor verdadeiro.
- Suponha que x seja um número inteiro e a seguinte proposição:
 $(x \text{ é divisível por } 6)_{=[p]}$ somente se $(x \text{ é divisível por } 3)_{=[q]} \equiv$
Se $(x \text{ é divisível por } 6)_{=[p]}$ então $(x \text{ é divisível por } 3)_{=[q]}$.
→ Claramente existem valores para x que fazem com que a proposição seja verdadeira e outros que seja falsa.

Proposição condicional: Somente se

- Exemplo 23:

A soma de 1 a n é $[\frac{n \cdot (n+1)}{2}]$ somente se a soma de 1 a $n + 1$ é

$$[\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}] \equiv$$

Se a soma de 1 a n é $[\frac{n \cdot (n+1)}{2}]$ então a soma de 1 a $n + 1$ é $[\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}]$

- Exemplo 24:

Posso comprar o livro de MD somente se tenho dinheiro \equiv

Se posso comprar o livro de MD então tenho dinheiro.

Proposição condicional: Bicondicional (se e somente se)

- A sentença “bicondicional” entre p e q é expressa como

p se e somente se q

e é representada por

$$p \leftrightarrow q$$

e tem a seguinte tabela da verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- O conectivo \leftrightarrow tem a mesma prioridade do conectivo \rightarrow .

- Exemplo 25:

Mostre que $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- Exemplo 26:

Este programa está correto se somente se ele produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada.

- Reescrevendo como uma conjunção de duas sentenças se–então:
Se este programa está correto então ele produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada
e
se o programa produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada então ele está correto.

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \vee q)$	$(\neg q \vee p)$	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Proposição condicional: Condição necessária & Condição suficiente

Sejam r e s afirmações.

- r é uma condição suficiente para s :
 - se r então s .
 - ∴ A ocorrência de r é suficiente para garantir a ocorrência de s .
- r é uma condição necessária para s :
 - se não r então não $s \equiv$
se s então r .
 - ∴ Se r não ocorrer então s também não pode ocorrer, i.e., a ocorrência de r é necessária para se ter a ocorrência de s .
- A frase
 r é uma condição necessária e suficiente para s significa “ r se e somente se s .”

Proposição condicional: Condição necessária & Condição suficiente

- Exemplo 27:

Considere a sentença condicional $p \rightarrow q$:

Se João é elegível para votar então ele tem pelo menos 16 anos.

p : João é elegível para votar.

q : João tem pelo menos 16 anos.

- A verdade de p é suficiente para garantir a verdade de q , ou seja, João ser elegível para votar é condição suficiente para que ele tenha pelo menos 16 anos.
- A condição q é necessária para a condição p ser verdadeira, ou seja, João ter pelo menos 16 anos é condição necessária para que ele seja elegível para votar.

Proposição condicional: Condição necessária & Condição suficiente

- Exemplo 28:

Converta uma condição suficiente para a forma se–então

- O nascimento de João em solo brasileiro é uma condição suficiente para ele ser cidadão brasileiro.
- Se João nasceu em solo brasileiro então ele é um cidadão brasileiro.

- Exemplo 29:

Converta uma condição necessária para a forma se–então

- João ter 35 anos é uma condição necessária para ser presidente do Brasil.
- Se João não tem 35 anos então ele não pode ser presidente do Brasil.
- Se João pode ser o presidente do Brasil então ele já tem pelo menos 35 anos.

Argumentos válidos e inválidos

- Alguns fatos sobre argumentos do ponto de vista da matemática e da lógica:
 - Um argumento não é uma disputa.
 - Um argumento é uma sequência de comandos que termina numa conclusão.
 - Um argumento ser válido significa que a conclusão pode ser obtida necessariamente das afirmações que precedem.
- Argumento (definição):
 - Um argumento é uma sequência de afirmações.
 - Todas as afirmações, exceto a última, são chamadas de premissas ou suposições ou hipóteses.
 - A última afirmação é chamada de conclusão.
 - O símbolo \therefore , que é lido como “de onde se conclui” é normalmente colocado antes da conclusão.

Argumentos válidos e inválidos

- Exemplo 30:

Se Sócrates é um ser humano então Sócrates é mortal;

Sócrates é um ser humano;

∴ Sócrates é mortal.

- Forma simbólica:

Se p então q ;

p ;

∴ q .

→ É conveniente pensar em p e q como variáveis que podem ser substituídas por argumentos.

- A forma de um argumento é válida sse

para todas as combinações de argumentos que levam a premissas verdadeiras então a conclusão também é verdadeira.

→ A verdade da conclusão é obtida analisando os valores-verdade da forma lógica em si.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

A validade da forma de um argumento pode ser feita seguindo os seguintes passos:

1. Identifique as premissas e conclusão do argumento.
2. Construa a tabela da verdade identificando as colunas das premissas e da conclusão.
3. Identifique as linhas onde todas as premissas são verdadeiras (linhas críticas).
4. Para cada linha crítica verifique se a conclusão do argumento é verdadeira.
 - (a) Se for para todas as linhas críticas então a forma do argumento é válida.
 - (b) Se existir pelo menos uma linha crítica com conclusão falsa então a forma do argumento é inválida.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

- Exemplo 31:

Tabela da verdade:

$$p \vee (q \vee r);$$

$$\neg r;$$

$$\therefore p \vee q.$$

						Premissas		Conclusão
		p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
1.		V	V	V	V	V	F	
2.	→	V	V	F	V	V	V	V
3.		V	F	V	V	V	F	
4.	→	V	F	F	F	V	V	V
5.		F	V	V	V	V	F	
6.	→	F	V	F	V	V	V	V
7.		F	F	V	V	V	F	
8.		F	F	F	F	F	V	

→ Para todas linhas críticas a conclusão é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

- Todas as linhas exceto as linhas críticas são irrelevantes para verificar a validade de um argumento.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

- Exemplo 32 argumento inválido:

$$p \rightarrow q \vee \neg r;$$

$$q \rightarrow p \wedge r;$$

$$\therefore p \rightarrow r;$$

						Premissas		Conclusão
						$p \rightarrow q \vee \neg r$	$q \rightarrow p \wedge r$	$p \rightarrow r$
	p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$		
1. →	V	V	V	F	V	V	V	V
2.	V	V	F	V	V	F	V	F
3.	V	F	V	F	F	V	F	V
4. →	V	F	F	V	V	F	V	F
5.	F	V	V	F	V	F	V	F
6.	F	V	F	V	V	F	V	F
7. →	F	F	V	F	F	F	V	V
8. →	F	F	F	V	V	F	V	V

- Para todas linhas críticas, exceto a 4, a conclusão é verdadeira. Logo, o argumento é inválido.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

● Exemplo 33:

Tabela da verdade:

$p \rightarrow q;$
 $q \rightarrow r;$
 $r \rightarrow p;$
 $\therefore p \wedge q \wedge r.$

					Premissas			Conclusão
		p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$r \rightarrow p$	$p \wedge q \wedge r$
1.	\rightarrow	V	V	V	V	V	V	V
2.		V	V	F	V	F	V	
3.		V	F	V	F	V	V	
4.		V	F	F	F	V	V	
5.		F	V	V	V	V	F	
6.		F	V	F	V	F	V	
7.		F	F	V	V	V	F	
8.	\rightarrow	F	F	F	V	V	V	F

\rightarrow Existem duas linhas críticas, uma delas com conclusão falsa. Logo, o argumento é inválido.

Argumentos válidos: Modus Ponens

- Seja o seguinte argumento:

$$p \rightarrow q;$$

$$p;$$

$$\therefore q.$$

e um exemplo dessa forma:

Se o último dígito de um n° é 0 então este n° é divisível por 10.

O último dígito deste n° é 0.

\therefore Este n° é divisível por 10.

- Um argumento válido que tem essa forma é chamado de modus ponens em Latim e que significa “método de afirmar.”

Argumentos válidos: Modus Ponens

- Exemplo 34:

Forma do argumento:

$$p \rightarrow q;$$

$$p;$$

$$\therefore q.$$

		Premissas		Conclusão		
		p	q	$p \rightarrow q$	p	q
1.	\rightarrow	V	V	V	V	V
2.		V	F	F	V	
3.		F	V	V	F	
4.		F	F	V	F	

Argumentos válidos: Modus Tollens

- Seja o seguinte argumento:

$$p \rightarrow q;$$

$$\neg q;$$

$$\therefore \neg p.$$

e um exemplo dessa forma:

Se Zeus é humano então Zeus é mortal. (1)

Zeus não é mortal. (2)

\therefore Zeus não é humano.

- Suponha que as afirmações (1) e (2) sejam verdadeiras.
 - Zeus deve ser necessariamente não-humano?
 - Sim!
 - Porque se Zeus fosse humano então de acordo com (1) ele seria mortal.
 - Mas por (2) ele não é mortal.
 - Dessa forma, Zeus não pode ser humano.
- Um argumento válido que tem essa forma é chamado de **modus tollens** em Latim e que significa “método de negar.”

Argumentos válidos: Exemplos

- Exemplo 35:

Se existem mais pássaros que ninhos
então dois pássaros terão que chocar no mesmo ninho;

Existem mais pássaros que ninhos;

∴ Dois pássaros chocam no mesmo ninho.

∴ De acordo com modus ponens.

- Exemplo 36:

Se este n^o é divisível por 6
então o n^o é divisível por 2;

Este n^o não é divisível por 2;

∴ Este n^o não é divisível por 6.

∴ De acordo com modus tollens.

Outras formas de argumentos válidos: Adição disjuntiva

- As formas de argumentos

$$(a) \quad \begin{array}{l} p; \\ \therefore p \vee q. \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{l} q; \\ \therefore p \vee q. \end{array}$$

são válidas.

Forma do argumento:

$$\begin{array}{l} p; \\ \therefore p \vee q. \end{array}$$

		Premissa	Conclusão
		p	$p \vee q$
1.	→	V	V
2.	→	V	F
3.		F	V
4.		F	F

- Essas duas formas servem para fazer generalizações, i.e., se p é verdadeiro — caso (a) — então mais genericamente $p \vee q$ é verdadeiro para qualquer afirmação q .

Outras formas de argumentos válidos: Simplificação conjuntiva

- As formas de argumentos

$$(a) \quad \begin{array}{l} p \wedge q; \\ \therefore p. \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{l} p \wedge q; \\ \therefore q. \end{array}$$

são válidas.

Forma do argumento:

$$\begin{array}{l} p \wedge q; \\ \therefore p. \end{array}$$

		Premissa	Conclusão
p	q	$p \wedge q$	p
1.	→ V	V	V
2.	V	F	
3.	F	V	
4.	F	F	

- Essas duas formas servem para fazer particularizações, i.e., se p e q são verdadeiros então em particular p é verdadeiro—para o caso (a).

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo disjuntivo

- Silogismo = dedução formal tal que, postas duas premissas, delas se tira uma conclusão, nelas logicamente implicada.
- As formas de argumentos

$$(a) \quad \begin{array}{l} p \vee q; \\ \neg q; \\ \therefore p. \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{l} p \vee q; \\ \neg p; \\ \therefore q. \end{array}$$

são válidas.

Forma do argumento:

$$\begin{array}{l} p \vee q; \\ \neg q; \\ \therefore p. \end{array}$$

		Premissas		Conclusão		
		p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
1.		V	V	V	F	
2.	→	V	F	V	V	V
3.		F	V	V	F	
4.		F	F	F	V	

- Essas formas de argumento expressam a situação onde existem somente duas possibilidades e uma pode ser excluída o que leva ao fato que a outra deve prevalecer.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo disjuntivo

- Exemplo 37:

Seja x um número inteiro e os seguintes argumentos:

$$p: x - 3 = 0$$

$$q: x + 2 = 0$$

$p \vee q$: Um dos argumentos pode ser eliminado.

$\neg q$: $x \neq -2$. Sabe-se que x não é negativo e por essa razão é o argumento a ser eliminado.

$\therefore p$, de acordo com o silogismo disjuntivo.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo hipotético

Forma do argumento:

$$p \rightarrow q;$$

$$q \rightarrow r;$$

$$\therefore p \rightarrow r.$$

é válida.

					Premissas		Conclusão
		p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1.	\rightarrow	V	V	V	V	V	V
2.		V	V	F	V	F	
3.		V	F	V	F	V	
4.		V	F	F	F	V	
5.	\rightarrow	F	V	V	V	V	V
6.		F	V	F	V	F	
7.	\rightarrow	F	F	V	V	V	V
8.	\rightarrow	F	F	F	V	V	V

- Muitos argumentos em matemática são definidos por cadeias de sentenças se-então, onde o primeiro implica no último.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo hipotético

- Exemplo 38:

Se 18.486 é divisível por 18
então 18.486 é divisível por 9;

Se 18.486 é divisível por 9
então a soma dos dígitos de 18.486 é divisível por 9;

∴ Se 18.486 é divisível por 18
então a soma dos dígitos de 18.486 é divisível por 9.

Outras formas de argumentos válidos: Dilema: Prova por divisão em casos

- Dilema = raciocínio cuja premissa é alternativa, de tal forma que qualquer dos seus termos conduz à mesma consequência.

Forma do argumento:

$p \vee q$;
 $p \rightarrow r$;
 $q \rightarrow r$;
 $\therefore r$.

é válida.

					Premissas			Conclusão
		p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	r
1.	\rightarrow	V	V	V	V	V	V	V
2.		V	V	F	V	F	F	
3.	\rightarrow	V	F	V	V	V	V	V
4.		V	F	F	V	F	V	
5.	\rightarrow	F	V	V	V	V	V	V
6.		F	V	F	V	V	F	
7.		F	F	V	F	V	V	
8.		F	F	F	F	V	V	

Outras formas de argumentos válidos: Dilema: Prova por divisão em casos

- Exemplo 39:

x é positivo ou x é negativo;

Se x é positivo então $x^2 > 0$;

Se x é negativo então $x^2 > 0$;

$\therefore x^2 > 0$.

- Neste caso já foi mostrado que existe uma dicotomia dos números reais: positivos, negativos ou zero. Por silogismo disjuntivo sabe-se x é positivo ou x é negativo e chega-se à conclusão acima.

Dedução mais complexa

Exemplo 40:

Você está saindo para a escola de manhã e percebe que não está usando os óculos. Ao tentar descobrir onde estão os óculos você começa a pensar sobre os seguintes fatos que são verdadeiros:

- (a) Se os meus óculos estão na mesa da cozinha então eu os vi no café da manhã;
- (b) Eu estava lendo o jornal na sala de estar ou eu estava lendo o jornal na cozinha;
- (c) Se eu estava lendo o jornal na sala de estar então meus óculos estão na mesa do café;
- (d) Eu não vi meus óculos no café da manhã;
- (e) Se eu estava lendo um livro na cama então meus óculos estão no criado-mudo;
- (f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha então meus óculos estão na mesa da cozinha;

Sejam os seguintes argumentos:

p = Os meus óculos estão na mesa da cozinha.

q = Eu vi meus óculos no café da manhã.

r = Eu estava lendo o jornal na sala de estar.

s = Eu estava lendo o jornal na cozinha.

t = Meus óculos estão na mesa do café.

u = Eu estava lendo um livro na cama.

v = Meus óculos estão no criado-mudo.

Tradução dos fatos para as proposições:

(a) $p \rightarrow q$ (b) $r \vee s$ (c) $r \rightarrow t$

(d) $\neg q$ (e) $u \rightarrow v$ (f) $s \rightarrow p$

Dedução mais complexa

Tradução dos fatos para as proposições:

$$(a) p \rightarrow q$$

$$(b) r \vee s$$

$$(c) r \rightarrow t$$

$$(d) \neg q$$

$$(e) u \rightarrow v$$

$$(f) s \rightarrow p$$

As seguintes deduções podem ser feitas:

$$1. \quad p \rightarrow q;$$

$$\neg q$$

$$\therefore \neg p$$

(a)

(d)

Modus Tollens

$$3. \quad r \vee s;$$

$$\neg s$$

$$\therefore r$$

(b)

Conclusão de 2.

Silogismo disjuntivo

$$2. \quad s \rightarrow p;$$

$$\neg p$$

$$\therefore \neg s$$

(f)

Conclusão de 1.

Modus Tollens

$$4. \quad r \rightarrow t;$$

$$r$$

$$\therefore t$$

(c)

Conclusão de 3.

Modus Ponens

$\therefore t$ é verdadeiro e os óculos estão na mesa do café.

Uso de proposições em especificações

- Traduzir sentenças numa linguagem natural, como o português, em expressões lógicas é uma parte importante da especificação de sistemas computacionais (hardware e software).
- Profissionais que fazem a especificação de tais sistemas computacionais devem traduzir requisitos expressos numa linguagem natural em uma especificação precisa e não ambígua.
- Essa especificação pode ser usada como base para o desenvolvimento do sistema.

Uso de proposições em especificações

Exemplo 41:

- Requisito:
 - (a) Uma resposta automática não pode ser enviada se o sistema de arquivos está cheio.
- Proposições:

$a =$ Uma resposta automática não pode ser enviada.
 $b =$ O sistema de arquivos está cheio.
- Tradução do requisito para a proposição:
 - (a) $b \rightarrow a$

Uso de proposições em especificações

Exemplo 42:

- Requisitos:
 - (a) A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou a mensagem de diagnóstico é retransmitida.
 - (b) A mensagem de diagnóstico não é armazenada no buffer.
 - (c) Se a mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer então a mensagem de diagnóstico é retransmitida.
- Proposições:

$p =$ A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer.
 $q =$ A mensagem de diagnóstico é retransmitida.
- Tradução dos requisitos para as proposições:
 - (a) $p \vee q$
 - (b) $\neg p$
 - (c) $p \rightarrow q$

Uso de proposições em especificações

- Deduções:

$$p \vee q; \quad (a)$$

$$\neg p \quad (b)$$

$$\therefore q \quad \text{Silogismo disjuntivo}$$

$$q \quad \text{Conclusão acima}$$

$$\neg p \quad (b)$$

$$p \rightarrow q \quad (c)$$

$$\therefore \neg p \wedge q \quad p = F \text{ e } q = V$$

→ Os requisitos são consistentes para $p = F$ e $q = V$

→ O que acontece com a especificação se o requisito “A mensagem de diagnóstico não é retransmitida” é acrescentada?

Falácias

- Falácia = erro no raciocínio que resulta num argumento inválido.
- Falácias comuns:
 - Usar uma premissa vaga ou ambígua;
 - Assumir como verdadeiro o que deve ser provado;
 - Concluir uma premissa sem uma argumentação adequada;
 - Erro oposto;
 - Erro inverso.
- Como mostrar que um argumento é inválido?
 - Construir a tabela da verdade e achar uma linha crítica com a conclusão falsa.
 - Achar um argumento com premissas verdadeiras e conclusão falsa.
- ➔ Para um argumento ser válido, qualquer argumento da mesma forma que tem premissas verdadeiras deve ter uma conclusão verdadeira.

Erro oposto

- Exemplo 43:

Se Zeca é um gênio

então Zeca senta na primeira carteira na sala de aula;

Zeca senta na primeira carteira na sala de aula;

∴ Zeca é um gênio.

- A forma geral do argumento acima é:

$p \rightarrow q;$

$q;$

∴ $p.$

Erro oposto

Forma do argumento é:

$$p \rightarrow q;$$

$$q;$$

$$\therefore p.$$

		Premissas		Conclusão		
		p	q	$p \rightarrow q$	q	p
1.	\rightarrow	V	V	V	V	V
2.		V	F	F	F	
3.	\rightarrow	F	V	V	V	F
4.		F	F	V	F	

- Este argumento lembra a forma geral do argumento “Modus ponens.”
- Forma deste argumento é inválida.

Erro inverso

- Exemplo 44:

Se as taxas de juro subirem
então os preços das ações irão cair;

As taxas de juro não estão subindo;

∴ Os preços das ações não irão cair.

- A forma geral do argumento acima é:

$$p \rightarrow q;$$

$$\neg p;$$

$$\therefore \neg q.$$

Erro inverso

Forma do argumento é:

$$p \rightarrow q;$$

$$\neg p;$$

$$\therefore \neg q.$$

		Premissas		Conclusão		
		p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
1.		V	V	V	F	
2.		V	F	F	F	
3.	\rightarrow	F	V	V	V	F
4.	\rightarrow	F	F	V	V	V

- Este argumento lembra a forma geral do argumento “Modus tollens.”
- Forma deste argumento é inválida.

Validade × Verdade

- Validade é uma propriedade da forma de um argumento.
 - Se um argumento é válido
então também é todo argumento que tem a mesma forma.
- **Exemplo 45** Argumento válido com uma conclusão falsa:
 - Se John Lennon era uma estrela do rock
então ele tinha cabelo ruivo;
 - John Lennon era uma estrela do rock;
 - ∴ John Lennon tinha cabelo ruivo.
 - Argumento válido de acordo com modus ponens. No entanto, a primeira premissa é falsa assim como a conclusão.
- **Exemplo 46** Argumento inválido com uma conclusão verdadeira:
 - Se Nova York é uma cidade grande
então Nova York tem edifícios altos;
 - Nova York tem edifícios altos;
 - ∴ Nova York é uma cidade grande.
 - Argumento inválido (erro oposto) mas com a conclusão verdadeira.

Contradições e argumentos válidos

- Regra da contradição:

Se pode ser mostrado que a suposição da afirmação “ $p = F$ ” leva logicamente a uma contradição, então pode-se concluir que “ $p = V$.”

- $\neg p \rightarrow c$, onde c é uma contradição
 $\therefore p$.

- Tabela da verdade:

				Premissa	Conclusão
	p	$\neg p$	c	$\neg p \rightarrow c$	p
1. \rightarrow	V	F	F	V	V
2.	F	V	F	F	

Honestos × Desonestos

Exemplo 47 Uma ilha possui um de dois tipos de pessoas:

- A diz: B é honesto.
- B diz: A e eu somos de tipos opostos.

Suponha que A é honesto.

∴ O que A diz é verdade;

∴ B também é honesto;

∴ O que B diz é verdade;

∴ A e B são de tipos honestos;

∴ Chegou-se a uma contradição:

→ A e B são honestos e A e B são desonestos.

∴ A suposição é falsa;

∴ A não é honesto;

∴ A é desonesto;

∴ O que A diz é falso;

∴ B não é honesto;

∴ B também é desonesto.

Regras de inferência: Sumário

MODUS PONENS

$p \rightarrow q;$ $p;$ $\therefore q.$

MODUS TOLLENS

$p \rightarrow q;$ $\neg q;$ $\therefore \neg p.$

ADIÇÃO DISJUNTIVA

$p;$ $\therefore p \vee q.$	$q;$ $\therefore p \vee q.$
--------------------------------	--------------------------------

SIMPLIFICAÇÃO CONJUNTIVA

$p \wedge q;$ $\therefore p.$	$p \wedge q;$ $\therefore q.$
----------------------------------	----------------------------------

ADIÇÃO CONJUNTIVA

$p;$ $q;$ $\therefore p \wedge q.$
--

SILOGISMO DISJUNTIVO

$p \vee q;$ $\neg q;$ $\therefore p.$	$p \vee q;$ $\neg p;$ $\therefore q.$
---	---

SILOGISMO HIPOTÉTICO

$p \rightarrow q;$ $q \rightarrow r;$ $\therefore p \rightarrow r.$

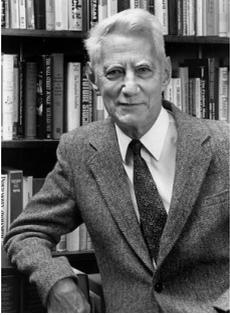
DILEMA

$p \vee q;$ $p \rightarrow r;$ $q \rightarrow r;$ $\therefore r.$
--

CONTRADIÇÃO

$\neg p \rightarrow c;$ $\therefore p.$
--

Aplicação: Circuito lógico



Claude Shannon (1916–2001), matemático americano, é considerado o cientista que estabeleceu os fundamentos da teoria da informação moderna, com a publicação em 1948 do trabalho intitulado “*Mathematical Theory of Communication*”. Nesse trabalho ele observa que “*the fundamental problem of communication is that of reproducing at one point either exactly or approximately a message selected at another point*”. Os fundamentos propostos nesse trabalho são usados integralmente hoje em dia em áreas como redes de computadores e recuperação da informação.

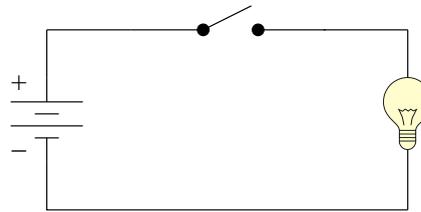
Antes disso, Shannon observa a analogia entre operações de dispositivos de “chaveamento” (por exemplo, chaves ou interruptores) e operações de conectivos lógicos. Ele usa essa analogia com muito sucesso para resolver problemas de projetos de circuitos lógicos e apresenta os resultados na sua dissertação de mestrado (*A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*) do MIT em 1938.

Aplicação: Circuito lógico

- Uma chave pode estar em uma de duas possíveis posições:



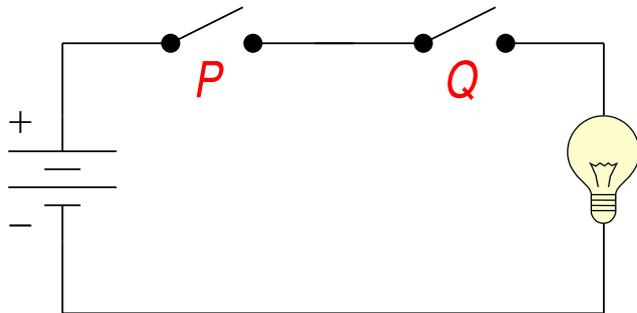
- Chave fechada: corrente pode passar.
 - Chave aberta: há interrupção de corrente.
- Exemplo de uma chave num circuito:



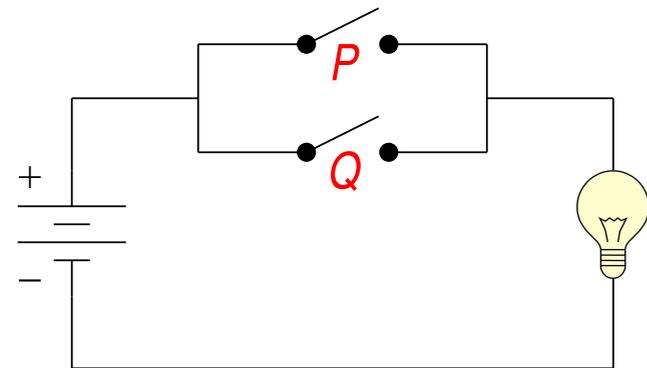
- Lâmpada acende sse corrente passa por ela.
 - Isto acontece, sse a chave está fechada.
- Observe que nesse modelo está sendo assumido que a bateria tem sempre energia e a chave e a lâmpada nunca falham.
 - Considerações como essas são importantes sempre que um modelo é proposto.

Aplicação: Circuito lógico

Sejam os circuitos abaixo e os possíveis comportamentos:



Chaves		Lâmpada <i>Estado</i>
<i>P</i>	<i>Q</i>	
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Aberta	Aberta	Apagada



Chaves		Lâmpada <i>Estado</i>
<i>P</i>	<i>Q</i>	
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Acesa
Aberta	Aberta	Apagada

Aplicação: Circuito lógico

Chaves		Lâmpada <i>Estado</i>
<i>P</i>	<i>Q</i>	
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Aberta	Aberta	Apagada

Chaves		Lâmpada <i>Estado</i>
<i>P</i>	<i>Q</i>	
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Acesa
Aberta	Aberta	Apagada

Observe que se as expressões “fechada” e “acesa” forem substituídas pelo valor-verdade **V** e “aberta” e “apagada” forem substituídas pelo valor-verdade **F**, então as tabelas da esquerda e da direita correspondem, respectivamente, às expressões lógicas:

- $P \wedge Q$ (conjunção);
- $P \vee Q$ (disjunção).

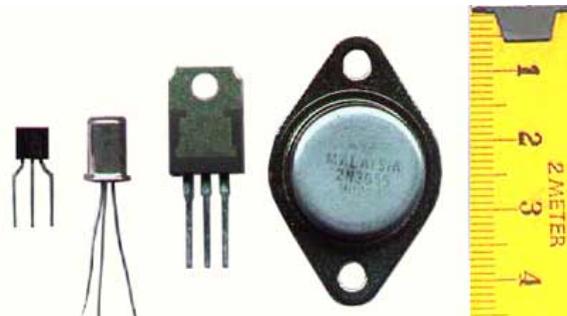
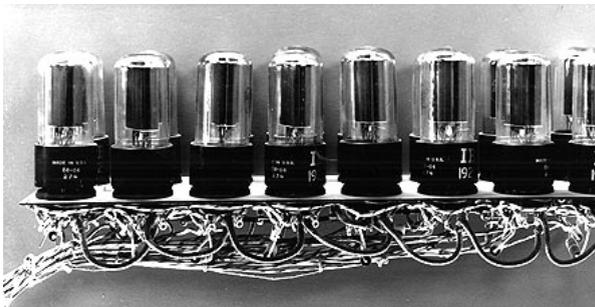
Aplicação: Circuito lógico

A partir da década de 1940, relés eletro-mecânicos (chaves) foram substituídos por dispositivos eletrônicos como válvulas, transistores e circuitos integrados.

Válvula. O computador “moderno” (primeira geração) surgiu a partir da válvula, que permitiu executar uma operação muito mais rápida que os sistemas de relé eletro-mecânicos. Abaixo está um sistema de válvulas da IBM de 1946 que podia multiplicar dois números de 10 algarismos em $\frac{1}{40}$ s.

Transistor. Dispositivo semicondutor de estado sólido que passou a ser usado largamente na segunda geração de computadores a partir do início da década de 1960.

Circuito integrado. Também chamado de “microchip” ou “chip” é uma miniaturização de dispositivos semicondutores e componentes passivos manufaturados na superfície de um substrato extremamente fino de um material semicondutor. Abaixo, uma imagem do processador Intel Core Duo otimizado para aplicações multi-threaded e multi-tarefa.



Aplicação: Circuito lógico

- Os estados (fechado e aberto) foram substituídos por outras representações apropriadas para os novos dispositivos.
 - Por exemplo, diferentes valores de tensão.
 - Ponto importante: modelagem anterior continua válida!
- No projeto de circuitos digitais, os valores lógicos **verdadeiro** e **falso** são normalmente substituídos pelos símbolos **1** e **0**.
 - Estes símbolos são chamados de *bits* (*binary digits*).

Aplicação: Circuito lógico

- A partir do surgimento dos computadores digitais, uma questão fundamental passa a ser a representação (codificação) da informação usando bits.
- Por exemplo, como bits são representados/codificados quando estão em:
 - Memória de ferrite?
 - Memória eletrônica?
 - Disco magnético?
 - Disco óptico?
 - Cabo coaxial?
 - Cabo metálico?
 - Cabo de fibra óptica?
 - Canal de comunicação sem fio?