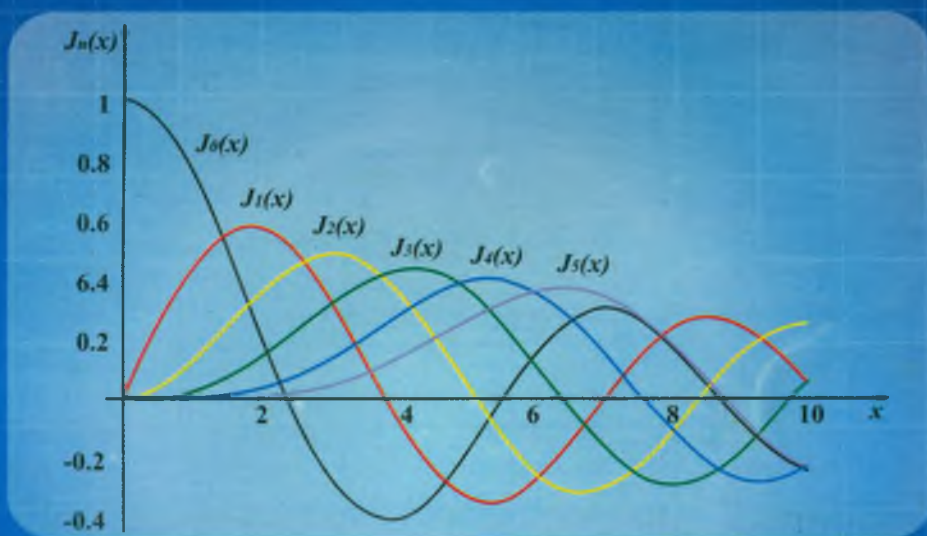


# ANÁLISIS MATEMÁTICO IV

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA



$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Nueva  
Edición

**Eduardo Espinoza Ramos**

Lima - Perú

53 - 02 - 2008

5da. EDICIÓN

# ANÁLISIS MATEMÁTICO IV

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

DERECHOS RESERVADOS

- ◆ ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
- ◆ TRANSFORMADA DE LAPLACE
- ◆ ANALISIS DE SERIES DE FOURIER

REC.  
Ley de Derechos del Autor  
Registro Comercial  
Escritura Pública  
Hacer el depósito en la Biblioteca Nacional del Perú  
con el número

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA - PERÚ

IMPRESO EN EL PERÚ  
22 - 03 - 2008

2da. EDICIÓN

### DERECHOS RESERVADOS

Este libro no puede reproducirse total ó parcialmente por ningún método gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo los sistemas de fotocopia, registros magnéticos o de alimentación de datos, sin expreso consentimiento del autor y Editor.

RUC N° 10070440607

Ley de Derechos del Autor N° 13714

Registro comercial N° 10716

Escritura Publica N° 4484

Hecho el depósito legal en la  
Biblioteca Nacional del Perú  
con el número N° 2007-12588

# PRÓLOGO

Esta obra que presento en su segunda edición está orientada básicamente para todo estudiante de ciencias matemáticas, físicas, Ingeniería, Economía y para toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos. Teniendo en cuenta que el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias así como la Transformada de Laplace y la Serie de Fourier es muy importante en la formación de los estudiantes de ciencias e ingeniería, debido a que con frecuencia aparecen en el estudio de los fenómenos naturales.

Por este motivo en ésta obra titulada "Análisis Matemático IV, para Estudiante de Ciencias e Ingeniería" he usado la experiencia adquirida en la docencia universitaria, dictando en las facultades de Ingeniería de las diversas universidades donde presto mis servicios. La obra esta cuidadosamente corregida y comentada tanto en sus ejercicios y problemas resueltos y propuestos con sus respectivas respuestas. La teoría expuesta es precisa y necesaria para la solución de los diversos problemas abordados.

La lectura del presente libro requiere de un conocimiento del Cálculo Diferencial e Integral así como las Series de Potencia.

El libro empieza en su Capítulo I con los Conceptos Básicos de Ecuaciones Diferenciales, en el Capítulo II se estudia las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y Primer Grado, dando métodos analíticos para su solución, en el Capítulo III se presenta algunas aplicaciones importantes, en el Capítulo IV está relacionado con las Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior, en el Capítulo V se realiza la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden  $n$ , en el Capítulo VI se aborda los Operadores Diferenciales usando los métodos abreviados, en el Capítulo VII se estudia las Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Variables, tratando el estudio de las aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden, en el Capítulo VIII se estudia los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Constantes, en el Capítulo IX



estudiaremos las Ecuaciones Diferenciales mediante Series de Potencias aplicando el Método de FROBENIUS, así como las Ecuaciones de Bessel y Legendre, en el Capítulo X se dan los conceptos básicos de la Transformada de Laplace, en el Capítulo XI se estudian las Funciones Especiales: Periódicas, Escalón Unidad, Impulso Unitario, Gama, Beta, Bessel y su Transformada de Laplace, en el Capítulo XII se estudia la Transformada Inversa de Laplace, así como el Teorema de Convolución, en el Capítulo XIII se trata de las Aplicaciones de la Transformada de Laplace en la solución de Ecuaciones Diferenciales, en el Capítulo XIV se estudia los Conceptos Básicos de la Serie de Fourier, en el Capítulo XV se estudia la Serie de Fourier, de funciones pares, impares, simetría de media onda, cuarto de onda par y cuarto de onda impar, en el Capítulo XVI se estudia la forma compleja de la Serie de Fourier y la Transformada de Fourier.

En esta 2da. edición se ha mejorado los conceptos y algunas correcciones sugeridas por los señores catedráticos así mismo se ha incluido ejercicios y problemas tomados en los exámenes en las diversas facultades de ingeniería.

Deseo expresar mis más profundo agradecimiento a mis colegas por sus sugerencias y apoyo en la realización de esta obra.

- **DOCTOR PEDRO CONTRERAS CHAMORRO**

Ex-Director de la Escuela Profesional de Matemática Pura de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Catedrático Principal en Pos-Grado de la Facultad de Matemática Pura de la UNMSM

Miembro Fundador de la Academia Nacional de Ciencia y tecnología del Perú.

Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma.

- **DOCTOR EUGENIO CABANILLAS LAPA**

Doctor en matemática Pura, Universidad Federal de Río de Janeiro – Brasil.

Director de Pos-Grado en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.

- **LIC. ANTONIO CALDERON LEANDRO**  
Ex-Jefe de Departamento Académico de la Facultad de Ing. Pesquera y Alimentos de la Universidad Nacional del Callao.  
Jefe de Departamento Académico de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.  
Coordinador del Area de Matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Ricardo Palma.
- **LIC. SERGIO LEYVA HARO**  
Ex Jefe del Centro de Computo de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.  
Catedrático en la Facultad de Ingeniería Ambiental y de Recursos Naturales de la Universidad Nacional del Callao.
- **LIC. JUAN BERNUI BARROS**  
Director del Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.  
Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- **LIC. PALERMO SOTO SOTO**  
Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.  
Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma.
- **Mg. JOSE QUIKE BRONCANO**  
Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.  
Coordinador del área de matemática en la Facultad de Ciencias Matemáticas Puras.
- **Lic. GUILLERMO MAS AZAHUANCHE**  
Catedrático de la Universidad Nacional del Callao  
Catedrático de la Universidad Nacional de Ingeniería.  
Catedrático de la Universidad Ricardo Palma.

**EDUARDO ESPINOZA RAMOS**

## **DEDICATORIA**

Este libro lo dedico a mis hijos:

**RONALD, JORGE y DIANA**

que Dios ilumine sus caminos para que puedan  
ser guías de su prójimo

# INDICE

## CAPÍTULO I

### 1. CONCEPTOS BÁSICOS Y TERMINOLOGIA.

1.1.	Introducción	1
1.2.	Definición	1
1.3.	Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales	2
1.4.	Orden de una Ecuación Diferencial Ordinaria	3
1.5.	Grado de una Ecuación Diferencial Ordinaria	4
1.6.	Solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria	5
1.7.	Origen de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	13
1.7.1.	Ecuaciones Diferenciales de una familia de curva	13
1.7.2.	Ecuaciones Diferenciales de problemas físicos	17

## CAPÍTULO II

### 2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIA DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO.

2.1.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Variable Separable	27
2.2.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Reducibles a Variable Separable	36
2.3.	Otras Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	44
2.4.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Homogéneas	46
2.5.	Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Homogéneas	59



# INDICE

## CAPÍTULO I

### 1. CONCEPTOS BÁSICOS Y TERMINOLOGIA.

1.1.	Introducción	1
1.2.	Definición	1
1.3.	Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales	2
1.4.	Orden de una Ecuación Diferencial Ordinaria	3
1.5.	Grado de una Ecuación Diferencial Ordinaria	4
1.6.	Solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria	5
1.7.	Origen de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	13
1.7.1.	Ecuaciones Diferenciales de una familia de curva	13
1.7.2.	Ecuaciones Diferenciales de problemas físicos	17

## CAPÍTULO II

### 2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIA DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO.

2.1.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Variable Separable	27
2.2.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Reducibles a Variable Separable	36
2.3.	Otras Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	44
2.4.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Homogéneas	46
2.5.	Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Homogéneas	59

2.6.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Exactas	72
2.7.	Factor de Integración	87
2.8.	Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden	118
2.9.	Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli	134
2.10.	Ecuaciones Diferenciales de Riccati	149
2.11.	Ecuaciones Diferenciales de Lagrange y Clairouts	153
2.12.	Ecuaciones Diferenciales no resueltas con respecto a la primera derivada	160
2.13.	Soluciones Singulares	168

## CAPÍTULO IV

<b>3.</b>	<b>APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES</b>	<b>177</b>
3.1.	Problemas Geométricos	177
3.2.	Trayectorias Ortogonales	198
3.3.	Cambio de Temperatura	206
3.4.	Descomposición, Crecimiento y Reacciones Químicas	206
3.5.	Aplicaciones a los Circuitos Eléctricos Simples	221
3.6.	Aplicaciones a la Economía	241

## CAPÍTULO IV

<b>4.</b>	<b>ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.</b>	<b>249</b>
-----------	--	------------

## CAPÍTULO V

<b>5.</b>	<b>ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN <math>n</math></b>	260
5.1.	Independencia Lineal de la Función	261
5.2.	El Wronskiano	262
5.3.	Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Coeficientes Constantes	267
5.4.	Ecuaciones Diferenciales Lineales no Homogéneas de Coeficientes Constantes	279
5.5.	Método de Variación de Parámetro	302
5.6.	Ecuaciones Diferenciales de Euler	311

## CAPÍTULO VI

<b>6.</b>	<b>OPERADORES DIFERENCIALES</b>	321
6.1.	Leyes Fundamentales de Operadores	321
6.2.	Propiedades	322
6.3.	Métodos Abreviados	323
6.4.	Solución de la Ecuación de Euler mediante operadores	327

## CAPÍTULO VII

<b>7.</b>	<b>ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES</b>	346
7.1.	Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden	356
7.1.1.	Aplicaciones al Péndulo Simple	362

## CAPÍTULO VIII

### 8. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

381

## CAPÍTULO IX

### 9. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

392

- 9.1. Solución de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden 394
  - 9.1.1. Solución entorno a puntos singulares 420
  - 9.1.2. Puntos Singulares Regulares e Irregulares 421
- 9.2. Método de FROBENIUS 422
  - 9.2.1. Casos de Raíces Indiciales 427
- 9.3. Dos Ecuaciones Diferenciales Especiales 448
  - 9.3.1. Ecuaciones de Bessel y Función de Bessel de primer tipo 448
  - 9.3.2. Ecuación paramétrica de Bessel 453
  - 9.3.3. Ecuación de Legendre 454
    - 9.3.3.1. Solución de la Ecuación de Legendre 454
    - 9.3.3.2. Polinomios de Legendre 457

## CAPÍTULO X

### 10. CONCEPTOS BÁSICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

464

- 10.1. Introducción 464
- 10.2. Definición 465
- 10.3. Condición suficiente para la existencia de  $L\{F(t)\}$ . 466
- 10.4. Funciones continuas por tramos o Seccionalmente Continuas. 466



10.5.	Funciones de orden exponencial	469
10.6.	Teorema	472
10.7.	Teorema	473
10.8.	Transformada de Laplace de algunas funciones elementales.	473
10.9.	Propiedades de la Transformada de Laplace.	476
10.10.	Transformada de Laplace de la multiplicación por potencia de $t^n$ .	480
10.11.	Transformada de Laplace de la división por $t$ .	481
10.12.	Transformada de Laplace de la derivada.	483
10.13.	Transformada de Laplace de integración	486
10.14.	Aplicación de la Transformada en la Evaluación de Integrales	488
10.15.	Ejercicios Desarrollados	490
10.16.	Ejercicios Propuestos	509

## CAPÍTULO XI

<b>11.</b>	<b>FUNCIONES ESPECIALES</b>	<b>523</b>
11.1.	Función Periódica	523
11.2.	Teorema	523
11.3.	Función Escalón Unidad	526
11.4.	Función Impulso Unitario o Función de Dirac	530
11.5.	La Función Gamma	532
11.6.	Propiedades de la Función Gamma	533
11.7.	Teorema	533
11.8.	La Función Beta	535
11.9.	Propiedades de la Función Beta	535
11.10.	La Función Bessel	537

11.11.	Ejercicios Desarrollados	543
11.12.	Ejercicios Propuestos.	580

## CAPÍTULO XII

### 12. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE 601

12.1.	Propiedades de la Transformada Inversa de Laplace	601
12.2.	Transformada Inversa de Laplace de la Derivada	604
12.3.	Transformada Inversa de Laplace de las Integrales	604
12.4.	Transformada Inversa de Laplace de la multiplicación por S	605
12.5.	Transformada Inversa de Laplace de la división por S	606
12.6.	Transformada inversa de Laplace por el método de las fracciones parciales	606
12.7.	Teorema (Fórmula del desarrollo de HEAVISIDE)	607
12.8.	La Convolución	609
12.9.	Teorema de la Convolución.	610
12.10.	Teorema de Convulación para las Transformadas Inversas	611
12.11.	La Función Error	614
12.12.	La Función Complementaria de Error	615
12.13.	Las Integrales del Seno y Coseno	615
12.14.	La Integral exponencial	615
12.15.	Teorema	615
12.16.	Ejercicios Desarrollados	616
12.17.	Ejercicios Propuestos	639

## CAPÍTULO XIII

<b>13. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES</b>	652
13.1. Solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales por el método de la Transformada de Laplace.	655
13.2. Una Ecuación Integral.	658
13.3. Una Ecuación Integral – Diferencial	659
13.4. Resortes Acoplados	661
13.5. Redes Eléctricas	664
13.6. Problemas de Entrenamiento para el alumno	665
13.7. Ejercicios Desarrollados	667
13.8. Ejercicios y Problemas Propuestos	691

## CAPÍTULO XIV

<b>14. SERIES DE FOURIER</b>	705
14.1. Funciones Periódicas	705
14.2. Funciones Ortogonales	711
14.3. Ejercicios Propuestos	713
14.4. Series de Fourier	714
14.5. Evaluación de los Coeficientes de Fourier	715
14.6. Aproximación mediante una serie finita de Fourier	724
14.7. Teorema	725
14.8. Teorema	726
14.9. Teorema de Parseval	729
14.10. Convergencia de la Serie de Fourier	733

14.11.	Lema de Riemann Labesgue	737
14.12.	Diferenciación e integración de la Serie de Fourier	741
14.13.	Ejercicios Desarrollados	749
14.14.	Ejercicios Propuestos	764

## CAPÍTULO XV

### 15. SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES: PARES, IMPARES, SIMETRÍA DE MEDIA ONDA, CUARTO DE ONDA PAR Y CUARTO DE ONDA IMPAR

15.1.	Funciones pares e impares	772
15.2.	Propiedades de las Funciones Pares e Impares	773
15.3.	Simetría de Media Onda	776
15.4.	Simetría de Cuarto de Onda	777
15.5.	Simetría escondida	777
15.6.	Coefficientes de Fourier de Ondas Simétricas	778
15.7.	Expansiones de Medio Rango	789
15.8.	Función Impulso Unitario (Delta de Dirac)	792
15.9.	Espacio de las Funciones de Prueba $C_0^\infty$	793
15.10.	El Conjunto de las Funciones Especiales	793
15.11.	Propiedades	794
15.12.	Derivadas de la Función $\delta$	796
15.13.	Propiedades de las Derivadas de la Función $\delta$	798
15.14.	Funciones Escalonada Unitaria	800
15.15.	Evaluación de los Coeficientes de Fourier por diferenciación	804
15.16.	Ejercicios Desarrollados	807
15.17.	Ejercicios Propuestos	820



## CAPÍTULO XVI

<b>16. ESPECTROS DE FRECUENCIA DISCRETA</b>	829
16.1. Forma Compleja de las Series de Fourier	829
16.2. Ortogonalidad de Funciones Complejas	835
16.3. Integral de Fourier y Espectros Continuos de la Serie de Fourier a la integral de Fourier	837
16.4. Transformada de Fourier	841
16.5. Transformada de seno y coseno de Fourier	846
16.6. Propiedades de la Transformada de Fourier	848
16.7. Convolución	853
16.8. Propiedades de Convolución	853
16.9. Teorema de Convolución en el tiempo	855
16.10. Teorema de Convolución en la Frecuencia	855
16.11. Teorema de Parseval y Espectro de Energía	857
16.12. El Teorema de Parseval	858
16.13. La Transformada de Fourier de una Función Impulso	859
16.14. La Transformada de Fourier de una constante	860
16.15. La Transformada de Fourier del Escalón Unitario	861
16.16. Ejercicios Desarrollados	862
16.17. Ejercicios Propuestos	872
BIBLIOGRAFIA	876

# CAPITULO VII

## 16. ASPECTOS DE LA CIENCIA DISCRETA

16.1		Forma Completa de las Series de Fourier	16.1
16.2		Ortogonalidad de Funciones Complejas	16.2
16.3		Integral de Fourier y Series Continuas de la Serie de Fourier	16.3
16.4		Integral de Fourier	16.4
16.5		Transformada de Fourier	16.5
16.6		Transformada de seno y coseno de Fourier	16.6
16.7		Propiedades de la Transformada de Fourier	16.7
16.8		Convolución	16.8
16.9		Propiedades de Convolución	16.9
16.10		Formas de Convolución en el tiempo	16.10
16.11		Formas de Convolución en la Frecuencia	16.11
16.12		Formas de Fourier y Laplace de Fourier	16.12
16.13		El Problema de Inversa	16.13
16.14		La Transformada de Fourier de una Función Periódica	16.14
16.15		La Transformada de Fourier de una Señal	16.15
16.16		La Transformada de Fourier del Señal Cuadrado	16.16
16.17		El Problema de Inversa	16.17
16.18		El Problema de Inversa	16.18
16.19		El Problema de Inversa	16.19
16.20		El Problema de Inversa	16.20
16.21		El Problema de Inversa	16.21
16.22		El Problema de Inversa	16.22
16.23		El Problema de Inversa	16.23
16.24		El Problema de Inversa	16.24
16.25		El Problema de Inversa	16.25
16.26		El Problema de Inversa	16.26
16.27		El Problema de Inversa	16.27
16.28		El Problema de Inversa	16.28
16.29		El Problema de Inversa	16.29
16.30		El Problema de Inversa	16.30
16.31		El Problema de Inversa	16.31
16.32		El Problema de Inversa	16.32
16.33		El Problema de Inversa	16.33
16.34		El Problema de Inversa	16.34
16.35		El Problema de Inversa	16.35
16.36		El Problema de Inversa	16.36
16.37		El Problema de Inversa	16.37
16.38		El Problema de Inversa	16.38
16.39		El Problema de Inversa	16.39
16.40		El Problema de Inversa	16.40
16.41		El Problema de Inversa	16.41
16.42		El Problema de Inversa	16.42
16.43		El Problema de Inversa	16.43
16.44		El Problema de Inversa	16.44
16.45		El Problema de Inversa	16.45
16.46		El Problema de Inversa	16.46
16.47		El Problema de Inversa	16.47
16.48		El Problema de Inversa	16.48
16.49		El Problema de Inversa	16.49
16.50		El Problema de Inversa	16.50
16.51		El Problema de Inversa	16.51
16.52		El Problema de Inversa	16.52
16.53		El Problema de Inversa	16.53
16.54		El Problema de Inversa	16.54
16.55		El Problema de Inversa	16.55
16.56		El Problema de Inversa	16.56
16.57		El Problema de Inversa	16.57
16.58		El Problema de Inversa	16.58
16.59		El Problema de Inversa	16.59
16.60		El Problema de Inversa	16.60
16.61		El Problema de Inversa	16.61
16.62		El Problema de Inversa	16.62
16.63		El Problema de Inversa	16.63
16.64		El Problema de Inversa	16.64
16.65		El Problema de Inversa	16.65
16.66		El Problema de Inversa	16.66
16.67		El Problema de Inversa	16.67
16.68		El Problema de Inversa	16.68
16.69		El Problema de Inversa	16.69
16.70		El Problema de Inversa	16.70
16.71		El Problema de Inversa	16.71
16.72		El Problema de Inversa	16.72
16.73		El Problema de Inversa	16.73
16.74		El Problema de Inversa	16.74
16.75		El Problema de Inversa	16.75
16.76		El Problema de Inversa	16.76
16.77		El Problema de Inversa	16.77
16.78		El Problema de Inversa	16.78
16.79		El Problema de Inversa	16.79
16.80		El Problema de Inversa	16.80
16.81		El Problema de Inversa	16.81
16.82		El Problema de Inversa	16.82
16.83		El Problema de Inversa	16.83
16.84		El Problema de Inversa	16.84
16.85		El Problema de Inversa	16.85
16.86		El Problema de Inversa	16.86
16.87		El Problema de Inversa	16.87
16.88		El Problema de Inversa	16.88
16.89		El Problema de Inversa	16.89
16.90		El Problema de Inversa	16.90
16.91		El Problema de Inversa	16.91
16.92		El Problema de Inversa	16.92
16.93		El Problema de Inversa	16.93
16.94		El Problema de Inversa	16.94
16.95		El Problema de Inversa	16.95
16.96		El Problema de Inversa	16.96
16.97		El Problema de Inversa	16.97
16.98		El Problema de Inversa	16.98
16.99		El Problema de Inversa	16.99
17.00		El Problema de Inversa	17.00

# CAPÍTULO I

## 1. CONCEPTOS BÁSICOS Y TERMINOLOGÍA.-

### 1.1. INTRODUCCIÓN.-

En los cursos básicos el lector aprendió que, dada una función  $y = f(x)$  su derivada

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$  es también una función de  $x$ ; y que se calcula mediante alguna regla apropiada. El problema que enfrentamos en este curso, no es, dada una función  $y = f(x)$

encontrar su derivada, más bien el problema es, si se da una ecuación como

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ , encontrar de alguna manera una función  $y = f(x)$  que satisfaga a la

ecuación, en una palabra se desea resolver ecuaciones diferenciales.

### 1.2. DEFINICIÓN.-

Una ecuación diferencial es la que contiene derivadas o diferenciales de una función incógnita.

**Ejemplos de Ecuaciones diferenciales:**

$$\textcircled{1} \quad \frac{dy}{dx} = 4x + 7$$

$$\textcircled{2} \quad y^2 dx - x^2 dy = 0$$

$$\textcircled{3} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - K \frac{dy}{dx}$$

$$\textcircled{4} \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 - \cos x \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0, \text{ donde } \omega = f(x, y, z)$$

$$\textcircled{6} \quad x^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0, \text{ donde } \omega = f(x, y, z)$$

### 1.3. CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.-

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en dos tipos:

**1er.** Si la función incógnita depende de una sola variable independiente, en la cual sólo aparecen derivadas ordinarias, la ecuación diferencial se llama “**Ecuación diferencial ordinaria**”.

**Ejemplos:** Son ecuaciones diferenciales ordinarias las siguientes ecuaciones:

a)  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$ , donde  $k = m\omega^2$  es una magnitud positiva,  $m$  la masa (Ecuación diferencial del movimiento armónico simple)

b)  $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0$  (Ecuación diferencial de Legendre)

c)  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$  (Ecuación diferencial de Bessel)

d)  $(x - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$  (Ecuación diferencial de Gauss)

e)  $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$  (Ecuación diferencial de la corriente eléctrica, donde  $q$  es la carga eléctrica,  $R$  la resistencia,  $L$  la inductancia,  $C$  la capacitancia).

#### NOTACIÓN.-

A las ecuaciones diferenciales ordinarias se representa mediante el símbolo:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$



Donde F indica la relación que existe entre las variables  $x, y$ , así como también sus derivadas

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$$

**2do.** Si la función incógnita depende de varias variables independientes y las derivadas son derivadas parciales, la ecuación diferencial se llama “**Ecuación Diferencial Parcial**”.

**Ejemplos:** Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales.

a)  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0$ , donde  $\omega = f(x, y, z)$  (Ecuación diferencial de Laplace)

b)  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  (Ecuación diferencial de la onda unidimensional)

c)  $\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (Ecuación diferencial térmica unidimensional)

d)  $a^2 \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial t}$  (Ecuación diferencial del calor)

e)  $a^2 \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$  (Ecuación diferencial de la onda)

f)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$  (Ecuación diferencial bidimensional de Poisson)

#### 1.4. ORDEN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.-

El orden de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el orden mayor de su derivada.

## 1.5. GRADO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.-

El grado de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el exponente del mayor orden de su derivada.

### Ejemplos:

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

①  $e^x \frac{d^2 y}{dx^2} + \operatorname{sen} x \cdot \frac{dy}{dx} = x$ , es de 2do. orden y de 1er. grado.

②  $\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x$ , es de 3er. orden y de 1er. grado.

③  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ , es de 1er. orden y de 1er. grado.

④  $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$ , es de 3er. orden y de 2do. grado.

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias.

①  $\frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$

②  $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^4 - \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^5 + y = 0$

③  $\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$

④  $\sqrt{y^4 + y} = \cos x$

⑤  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt[4]{y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

⑥  $(D_x y)^3 = 3x^2 - 1$

⑦  $x^4 \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = y^4 \frac{d^3 y}{dx^3}$

⑧  $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - x^7 y = \cos x$

⑨  $x(y''')^3 + (y')^4 - y = 0$

⑩  $\cos x \cdot (y''')^2 + \operatorname{sen} x (y')^4 = 1$

## 1.6. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.-

Si  $y = F(x)$  es una función y  $f$  es la derivada de  $F$ , es decir:  $\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$ , de donde:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \dots (\alpha)$$

La ecuación  $(\alpha)$  es una ecuación diferencial ordinaria.

La solución de la ecuación  $(\alpha)$  consiste en buscar una función  $y = G(x)$  de tal manera que verifique a la ecuación  $(\alpha)$ .

Como  $F$  es la antiderivada de  $f$ , entonces  $G(x) = F(x) + C$ , donde  $C$  es una constante, es decir:

$$d(G(x)) = d(F(x) + c) = F'(x) dx = f(x) dx$$

$$\text{Luego: } y = G(x) = F(x) + C \quad \dots (\beta)$$

Se llama solución completa o solución general de la ecuación diferencial  $(\alpha)$ .

La solución general  $(\beta)$  nos representa una familia de curvas que dependen de una constante arbitraria que se llama familia de un parámetro.

En los problemas que incluyen ecuaciones diferenciales, se trata de obtener soluciones particulares, luego de la solución general de la ecuación diferencial, mediante ciertas restricciones, llamadas condiciones iniciales o de la frontera, se obtiene la solución particular.

**Nota.-** En la Solución General de la ecuación diferencial que llamamos no se considera las soluciones escondidas es decir que no están todas las soluciones.

**Ejemplos:**

- ① Verificar que las funciones  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = \cosh x$  son soluciones de la ecuación diferencial  $y'' - y = 0$ .

**Solución**

$$y_1 = e^x \Rightarrow y'_1 = e^x \Rightarrow y''_1 = e^x$$

$$y_2 = \cosh x \Rightarrow y'_2 = \sinh x \Rightarrow y''_2 = \cosh x$$

$$\text{Como } y'' - y = 0 \Rightarrow e^x - e^x = 0, \quad y'' - y = 0 \Rightarrow \cosh x - \cosh x = 0$$

- ② Verificar que la función  $y = \varphi(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2}$ , es solución de la ecuación diferencial  $y' - 2xy = 1$

**Solución**

$$y = \varphi(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \Rightarrow y' = \varphi'(x) = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1 + 2xe^{x^2}$$

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1 + 2xe^{x^2} - 2x(e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2})$$

$$= 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1 + 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{x^2} = 1, \quad \therefore y' - 2xy = 1$$

- ③ Verificar si la función  $J_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(t \operatorname{sen} \theta) d\theta$ , satisface a la ecuación diferencial

$$J''_0(t) + \frac{J'_0(t)}{t} + J_0(t) = 0$$

**Solución**

$$J_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(t \operatorname{sen} \theta) d\theta \Rightarrow J'_0(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$J''_0(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(t \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}^2 \theta d\theta$$

$$J''_0(t) + \frac{J'_0(t)}{t} + J_0(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(t \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{t} d\theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \text{ sen } \theta) d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \text{ sen } \theta) (1 - \cos^2 \theta) d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{t} d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \text{ sen } \theta) \cos^2 \theta d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{t} d\theta \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

Integrando por partes  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \text{ sen } \theta) \cos^2 \theta d\theta$ .

$$\begin{cases} u = \cos \theta \\ dv = \cos(t \text{ sen } \theta) \cos \theta d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\text{sen } \theta d\theta \\ v = \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta)}{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \text{ sen } \theta) \cos^2 \theta d\theta &= \frac{\cos \theta \cdot \text{sen}(t \text{ sen } \theta)}{t} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{t} d\theta \\
 &= (0 - 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{t} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \text{ sen } \theta) \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{t} d\theta \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$J_0''(t) + \frac{J_0'(t)}{t} + J_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{t} d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(t \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{t} d\theta = 0$$

$$\therefore J_0''(t) + \frac{J_0'(t)}{t} + J_0(t) = 0$$

- ④ Dada la función  $F(x) = \int_0^x e^{-x \cosh \theta} d\theta$ ,  $x > 0$ , verificar que  $F$  satisface a la ecuación diferencial.  $x F''(x) + F'(x) - x F(x) = 0$ .



Solución

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} d\theta \Rightarrow F'(x) = - \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta$$

$$F''(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh^2 \theta d\theta$$

$$xF''(x) + F'(x) - xF(x) = x \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh^2 \theta d\theta - \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta$$

$$- \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} d\theta$$

$$= x \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} (\cosh^2 \theta - 1) d\theta - \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta$$

$$= x \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \sinh^2 \theta d\theta - \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta \quad \dots (1)$$

Integrando por partes  $\int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \sinh^2 \theta d\theta$

$$\begin{cases} u = \sinh \theta \\ dv = e^{-x \cosh \theta} \sinh \theta d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cosh \theta d\theta \\ v = -\frac{e^{-x \cosh \theta}}{x} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \sinh^2 \theta d\theta = -\frac{\sinh \theta \cdot e^{-x \cosh \theta}}{x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta$$

$$= -(0-0) + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta$$

Luego  $\int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \sinh^2 \theta d\theta = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta \quad \dots (2)$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$xF''(x) + F'(x) - xF(x) = x \left( \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta \right) - \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta \, d\theta - \int_0^{\infty} e^{-x \cosh \theta} \cosh \theta \, d\theta = 0$$

$$\therefore xF''(x) + F'(x) - xF(x) = 0$$

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- ① Verificar que la función  $y = x \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ , satisface a la ecuación diferencial

$$x \frac{dy}{dx} = y + x \operatorname{sen} x.$$

- ② Comprobar que la función  $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + ce^x$ , satisface a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{x+x^2}$$

- ③ Dada la función  $H(a) = \int_{-1}^1 \frac{\cos at \, dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $a \neq 0$ , probar que H(a) satisface a la ecuación

$$\text{diferencial } H''(a) + \frac{1}{a} H'(a) + H(a) = 0.$$

- ④ Verificar que la función  $y = \operatorname{arcsen}(x y)$ , satisface a la ecuación diferencial

$$x y' + y = y' \sqrt{1-x^2 y^2}$$

- ⑤ Comprobar que la función  $x = y \int_0^x \operatorname{sen} t \, dt$ , satisface a la ecuación diferencial

$$y = x y' + y^2 \operatorname{sen} x^2$$

- ⑥ Comprobar que la función  $y = C_1 x + C_2 x \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ , satisface a la ecuación diferencial

$$x \operatorname{sen} x \cdot y'' - x \cos x \cdot y' + y \cos x = 0.$$

- ⑦ Sea  $h(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{e^z}{z} dz$ ,  $x > 0$ , hallar los valores de "a" tal que la función f definida por

$$f(x) = \frac{e^{ah(x)}}{x} \text{ satisface a la ecuación diferencial } x^2 y'' + (3x - x^2) y' + (1 - x - 3e^{2x}) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } a = \pm \sqrt{3}$$

- 8) Verificar que la función  $x = y + \ln y$ , satisface a la ecuación diferencial  $yy'' + y'^3 - y'^2 = 0$ .
- 9) Dada la función  $H(a) = \int_{-1}^a \frac{\operatorname{sen} at dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $a \neq 0$  probar que  $H(a)$  satisface a la ecuación diferencial  $H''(a) + \frac{1}{a}H'(a) + H(a) = 0$
- 10) Si  $x(t) = \int_1^t (t-s)e^{-(t-s)}e^s ds$ , calcular el valor de:  $x''(t) + 2x'(t) + x(t)$
- 11) Probar que la función  $y = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \operatorname{senh} k(x-t) dt$ , satisface a la ecuación diferencial  $y'' - k^2 y = R(x)$
- 12) Probar que la función  $y = C_1 x + C_2 x \int_x^2 \frac{e^t}{t} dt$ ,  $x > 0$ , satisface a la ecuación diferencial  $x^2 y'' - (x^2 + x)y' + (x+1)y = 0$ .
- 13) Dada la función  $y = C_1 \operatorname{Ln} x + C_2 x \int_x^2 \frac{dt}{\operatorname{Ln}(t)}$ ,  $x > 1$ , satisface a la ecuación diferencial  $x^2 \operatorname{Ln}^2 x \cdot y'' - x \operatorname{Ln} x \cdot y' + (\operatorname{Ln} x + 1)y = 0$ .
- 14) Demostrar que la función  $\phi(x) = x^{-1} e^{\int_{x_0}^x u^{-1} e^u du}$  para  $x > 0$ , satisface a la ecuación diferencial  $x^2 \phi''(x) + (3x - x^2) \phi'(x) + (1 - x - e^{2x}) \phi(x) = 0$ .
- 15) Dada la función  $y \ln y = x + \int_0^x e^t dt$ , satisface a la ecuación diferencial y  $(1 + \ln y)y'' + y'^2 = 2xy \cdot e^{x^2}$ .
- 16) Demostrar que la función  $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^k$ , satisface a la ecuación diferencial  $(1 + x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0$ .

- (17) Probar que la función  $x(t)$  definida por:  $x(t) = \int_0^t \frac{dx}{(x^2+t^2)^2}$ , satisface a la ecuación diferencial  $t x' + 3x(t) + \frac{1}{(1+t^2)^2} = 0$
- (18) Demostrar que la función  $f(a,b) = \int_0^a e^{-ax^3-bx^2} dx$ , satisface a la ecuación diferencial  $3ab \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - 3a \frac{\partial f}{\partial b} - 2b^2 \frac{\partial f}{\partial a} = 1$
- (19) Probar que  $\frac{y}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(mx^n \sin \theta) \cos^{\frac{1}{n}} \theta d\theta$ , satisface a la ecuación diferencial  $y'' + m^2 n^2 x^{2n-2} y = 0$
- (20) Probar que  $y = \int_0^x \frac{a \sin z + b \cos z}{x+z} dz$ , satisface a la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$
- (21) Verificar que las funciones  $y_1 = \sqrt{x}$ ,  $y_2 = x^{-1/2}$ ,  $x > 0$ , satisfacen a la ecuación diferencial  $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0$ .
- (22) Verificar que las funciones  $y_1 = x^2$ ,  $y_2 = x^{-2} \ln x$ ,  $x > 0$ , satisfacen a la ecuación diferencial  $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$ .
- (23) Demostrar que la función  $y = \int_0^{\pi} \log(\sin^2 \theta + x^2 \cos^2 \theta) d\theta$ , satisface a la ecuación diferencial  $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = \pi \log\left(\frac{x+1}{2}\right)$ .
- (24) Dada la función  $u = \int_0^{\pi} e^{qx \cos \theta} (A + B \log(x \sin^2 \theta)) d\theta$  satisface a la ecuación diferencial  $x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - q^2 x u = 0$

- 25) Demuestre que la función  $y = \int_0^x \frac{e^{-xz} dz}{(1+z^2)^{n+1}}$ , satisface a la ecuación diferencial  $xy'' - 2ny' + xy = 1$ .
- 26) Si  $H(t) = \int_0^x e^{-x^2} \cos(tx) dx$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , probar que  $H'(t) + \frac{t}{2}H(t) = 0$
- 27) Si  $G(t) = \int_0^x e^{-x^2 - (\frac{t}{x})^2} dx$ ,  $t > 0$ , probar que:  $G'(t) + 2G(t) = 0$
- 28) Verificar si la función  $y = C_1 e^{b \arcsen x} + C_2 e^{-b \arcsen x}$  es la solución de la ecuación diferencial  $(1-x^2)y'' - xy' - b^2 y = 0$ .
- 29) Verificar que  $(y')^2 = [1 + (y')^2]^3$  es la solución diferencial de las circunferencias de radio  $r = 1$
- 30) Demostrar que:  $y = e^{x^2} (C_1 + C_2 \int e^{-x^2} dx)$  es la solución de la ecuación diferencial  $y'' - 2xy' - 2y = 0$ .
- 31) Probar que la función  $y(t) = \int_0^t \text{sen}(t-s)f(s)ds$  es una solución en  $I$  de  $y''(t) + y(t) = f(t)$ , que satisface  $y(0) = y'(0) = 0$ , donde  $f$  es una función continua sobre el intervalo  $I$ , el cual contiene al cero.
- 32) Demostrar que  $y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds$  es solución de  $y^{(n)}(t) = f(t)$  con  $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$  donde  $f$  es continua sobre un intervalo  $I$  que contiene al cero.
- 33) Comprobar que  $y = 2 \int_0^{\sqrt{x}} e^{-s^2} ds + c$  es solución de  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$



## 1.7. ORIGEN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.-

Las ecuaciones diferenciales aparecen no sólo a partir de las familias de curvas geométricas, sino también del intento de describir en términos matemáticos, problemas físicos en ciencias e ingeniería.

Se puede afirmar que las ecuaciones diferenciales son la piedra angular de disciplinas como la física y la ingeniería eléctrica, e incluso proporcionan un importante instrumento de trabajo en áreas tan diversas como la biología y la economía.

Veremos la obtención de ecuaciones diferenciales que se origina de diversos problemas los cuales pueden ser geométricos, físicos o por primitivas.

### 1.7.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UNA FAMILIA DE CURVAS.-

Si se tiene la ecuación de una familia de curvas, se puede obtener su ecuación diferencial mediante la eliminación de las constantes (o parámetros) y esto se obtiene aislando la constante en un miembro de la ecuación y derivando. También se puede eliminar la constante derivando la ecuación dada, tantas veces como constantes arbitrarias tenga, y se resuelve el sistema formado con la ecuación original.

**Ejemplos.-**

- ① Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es  $y = C_1 \cos(x + C_2)$ .

**Solución**

$$y = C_1 \cos(x + C_2) \Rightarrow y' = -C_1 \sin(x + C_2)$$

$$y'' = -C_1 \cos(x + C_2)$$

donde 
$$\begin{cases} y'' = -C_1 \cos(x + C_2) \\ y = C_1 \cos(x + C_2) \end{cases} \Rightarrow y'' + y = 0$$

- ② Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es  $y = A \sin x + B \cos x$

**Solución**

$$y = A \operatorname{sen} x + B \cos x \Rightarrow y' = A \cos x - B \operatorname{sen} x$$

$$y'' = -A \operatorname{sen} x - B \cos x$$

de donde 
$$\begin{cases} y'' = -A \operatorname{sen} x - B \cos x \\ y = A \operatorname{sen} x + B \cos x \end{cases} \Rightarrow y'' + y = 0$$

Otra manera de eliminar las constantes es, considerando el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y = -A \operatorname{sen} x + B \cos x \\ y' = A \cos x - B \operatorname{sen} x \\ y'' = -A \operatorname{sen} x - B \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + A \operatorname{sen} x + B \cos x = 0 \\ -y' + A \cos x - B \operatorname{sen} x = 0 \\ -y'' - A \operatorname{sen} x - B \cos x = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones en dos incógnitas A y B tienen la solución sí y sólo sí:

$$\begin{vmatrix} -y & \operatorname{sen} x & \cos x \\ -y' & \cos x & -\operatorname{sen} x \\ -y'' & -\operatorname{sen} x & -\cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y'' + y = 0$$

- ③ Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$

**Solución**

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} \Rightarrow e^x y = C_1 + C_2 e^{-2x} \quad \text{derivando} \quad e^x y' + e^x y = -2C_2 e^{-2x}$$

$$e^{3x} y' + e^{3x} y = -2C_2 \Rightarrow 3e^{3x} y' + e^{3x} y'' + 3e^{3x} y + e^{3x} y' = 0$$

$$3y' + y'' + 3y + y' = 0 \Rightarrow y'' + 4y' + 3y = 0$$

Otra manera es: 
$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} \\ y' = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} \\ y'' = C_1 e^{-x} + 9C_2 e^{-3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} = 0 \\ -y' - C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} = 0 \\ -y'' + C_1 e^{-x} + 9C_2 e^{-3x} = 0 \end{cases}$$

el sistema tiene solución sí y solo sí:

$$\begin{vmatrix} -y & e^{-x} & e^{-3x} \\ -y' & -e^{-x} & -3e^{-3x} \\ -y'' & e^{-x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^{-4x} \begin{vmatrix} -y & 1 & 1 \\ -y' & -1 & -3 \\ -y'' & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

de donde  $y'' + 4y' + 3y = 0$

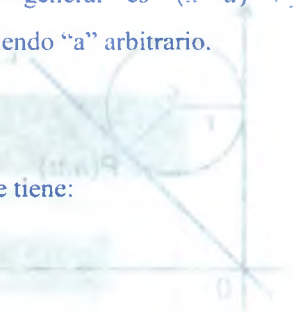
- 4) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es  $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ , circunferencias de radio fijo  $r$ , con centro en el eje  $x$ , siendo "a" arbitrario.

**Solución**

$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x-a = \sqrt{r^2 - y^2}$  derivando se tiene:

$1-0 = \frac{-yy'}{\sqrt{r^2 - y^2}} \Rightarrow \sqrt{r^2 - y^2} = -yy'$

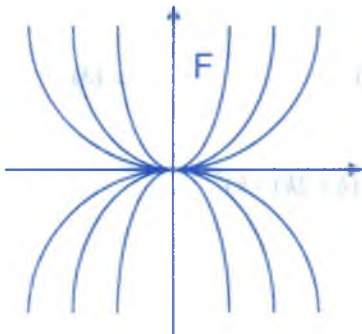
de donde  $r^2 - y^2 = y^2 y'^2 \Rightarrow (1 + y'^2)y^2 = r^2$



- 5) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas las que tienen sus vértices en el origen y sus focos sobre el eje  $y$ .

**Solución**

De acuerdo a los datos del problema, la gráfica de estas parábolas es:



La ecuación de ésta familia de parábolas es:

$x^2 = 4py$  ... (1)

donde el vértice es  $v(0,0)$  y el foco  $F(0,p)$ .

Com el parámetro es  $P$  entonces lo eliminamos

$\frac{x^2}{y} = 4p$ , derivando se tiene  $\frac{2yx - x^2 y'}{y^2} = 0$

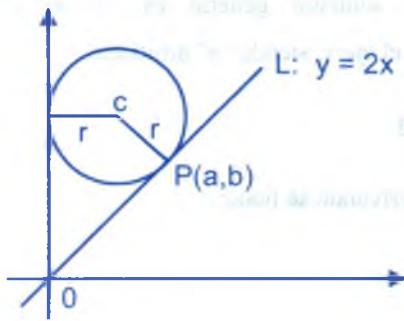
simplificando

$\therefore xy' = 2y$  ecuación diferencial pedida

- 6) Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencia en el primer cuadrante, tangentes a las rectas  $x = 0$  e  $y = 2x$

**Solución**

De los datos del problema, el gráfico es:



Sí  $c(h,k)$  el centro  $\Rightarrow r = h$  por ser tangente el eje Y.

$$r^2 = d^2(c, p) = d^2(c, p) = (a-h)^2 + (b-k)^2$$

$$r^2 = (a-h)^2 + (b-k)^2$$

pero  $p(a,b) \in L: y = 2x \Rightarrow b = 2a$

$$\text{Luego } r^2 = (a-h)^2 + (2a-k)^2 \quad \dots (1)$$

Además la ecuación de la circunferencia de radio  $r$ , centro  $c(h,k)$  es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \dots (2)$$

Ahora derivamos la ecuación (2) se tiene;  $(x-h) + (y-k)y' = 0$

Como en el punto  $p(a,b)$  es tangente a la recta  $y = 2x$

$$\Rightarrow y'|_{x=a} = 2 \text{ entonces } (a-h) + 2(2a-k) = 0 \Rightarrow 5a = h + 2k$$

$$a = \frac{h+2k}{5} \quad \text{y} \quad b = \frac{2}{5}(h+2k) \quad \dots (3)$$

Reemplazando (3) en (1)  $h^2 = \left(\frac{h+2k}{5} - h\right)^2 + \left(\frac{2}{5}(h+2k) - k\right)^2$

$$h^2 = \left(\frac{2k-4h}{5}\right)^2 + \left(\frac{2h-k}{5}\right)^2, \text{ simplificando}$$

$$5h^2 + 20kh - 5k^2 = 0 \Rightarrow h^2 + 4kh - k^2 = 0 \Rightarrow h = (\sqrt{5}-2)k \quad \text{ó} \Rightarrow k = \frac{h}{\sqrt{5}-2}$$

$$(x-h)^2 + \left(y - \frac{h}{\sqrt{5}-2}\right)^2 = h^2 \quad \dots (4)$$

La expresión (4) es la ecuación de la familia de circunferencias, para hallar la ecuación diferencial, eliminamos el parámetro  $h$  de la ecuación (4) para esto derivamos:

$$2(x-h) + 2\left(y - \frac{h}{\sqrt{5}-2}\right)y' = 0 \quad \text{despejando } h \text{ tenemos:}$$

$$h = \frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}-2+y'} \quad \text{reemplazando en (4)}$$

$$\left[x - \frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}-2+y'}\right]^2 + \left[y - \frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2+y')}\right]^2 = \frac{(\sqrt{5}-2)(x+yy')}{\sqrt{5}-2+y'}$$

$$\text{Simplificando se tiene: } (x - (\sqrt{5}-2)y)^2(1+y'^2) = [(\sqrt{5}-2)(x+yy')]^2$$

### 1.7.2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PROBLEMAS FÍSICOS.-

Las ecuaciones diferenciales de problemas físicos provienen de diferentes fuentes, tales como la mecánica, eléctrica, química, etc.

#### Ejemplos:

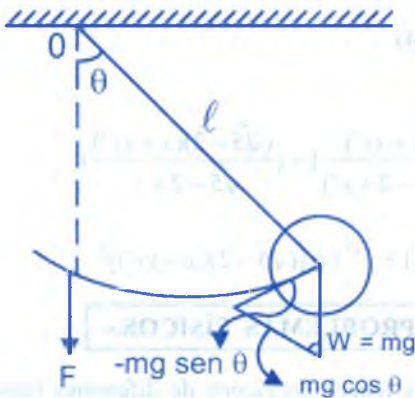
① Se sabe que los objetos en caída libre cercanos a la superficie de la tierra tiene una aceleración constante  $g$ . Ahora bien, la aceleración es la derivada de la velocidad y esta a su vez, es la derivada de la distancia  $S$ . Luego, si se toma como dirección positiva la dirección vertical hacia arriba, tenemos que la fórmula  $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$  es la ecuación diferencial de la distancia vertical recorrida por el cuerpo que cae. Se usa el signo menos puesto que el peso del cuerpo es una fuerza de dirección opuesta a la dirección positiva.

② Una masa  $m$  de peso  $w$  se suspende del extremo de una varilla de longitud constante  $L$ . Suponiendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, se trata de determinar el ángulo de desplazamiento  $\theta$ , medido con respecto a la vertical, en función del tiempo  $t$ , (se considera  $\theta > 0^\circ$  a la derecha de op y  $\theta < 0^\circ$  a la izquierda de op). Recuérdese que el arco  $s$  de un círculo de radio  $L$  se relaciona con el ángulo del centro  $\theta$  por la fórmula  $s = L\theta$ .

$$\text{Por lo tanto, la aceleración angular es: } a = \frac{d^2s}{dt^2} = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



por la segunda ley de Newton:  $F = ma = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$



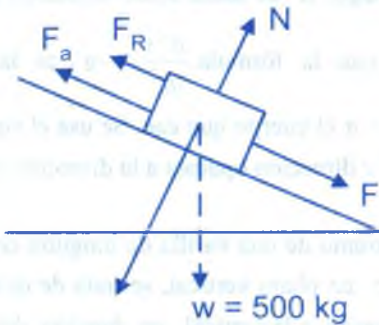
En la figura vemos que la componente tangencial de la fuerza debida al peso  $w$  es  $mg \sin \theta$ , si no se tiene en cuenta la masa de la varilla y se igualan las dos expresiones de la fuerza tangencial se obtiene:

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

- 3 Una lancha que pesa 500kg. se desliza por un plano inclinado a  $5^\circ$ . Si la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es 20kg. y la resistencia de aire expresado en kilogramos equivale a 0.05 veces la velocidad en centímetros por segundo, hallar la ecuación del movimiento.

#### Solución



En la figura mostramos a la lancha sobre un plano inclinado; tomemos los siguientes datos:

$F$  = Componente de peso en la dirección del movimiento.

$F_R$  = Fuerza de rozamiento

$F_a$  = Resistencia del aire

De acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene:

Suma de fuerzas en la dirección del movimiento = (masa) x (aceleración)

Luego se tiene:  $F - F_R - F_a = m.a$  ... (1)

donde  $F = 500 \sin 5^\circ = 43.6$ ,  $F_R = 20$

$Fa = 0.05v$ ,  $m = \frac{500}{981}$  siendo  $v$  = la velocidad,  $a$  = aceleración,  $m$  = la masa.

ahora reemplazamos en la ecuación (1)

$$43.6 - 20 - 0.05v = \frac{500}{981}a \quad \text{entonces} \quad 23.6 - 0.05v = \frac{500}{981}a \quad \dots (2)$$

como  $a = \frac{dv}{dt}$  que al reemplazar en (2)

se tiene:  $\frac{500}{981} \cdot \frac{dv}{dt} + 0.05v = 23.6$  que es la ecuación diferencial del movimiento.

4 Considere el circuito simple conectado en serie que se muestra en la figura y que consta de un inductor, un resistor y un capacitor. La segunda Ley de Kirchoff dice que la suma de las caídas de voltaje a través de cada uno de los componentes del circuito es igual a la tensión  $E(t)$  aplicada. Si llamamos  $q(t)$  a la carga del capacitor en un instante cualquiera, entonces la corriente  $i(t)$  está dada por  $i = \frac{dq}{dt}$ , ahora bien, se sabe que las caídas del voltaje son:



En un inductor  $= L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$

En un capacitor  $= \frac{1}{c}q$

En un resistor  $= iR = R \frac{dq}{dt}$

en donde  $L$ ,  $C$  y  $R$  son constantes llamadas inductancia, capacitancia y resistencia respectivamente.

Para determinar  $q(t)$  debemos por lo tanto, resolver la ecuación diferencial de segundo orden que se obtiene mediante la Ley de Kirchoff, es decir:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E(t)$$

- ⑤ Según la Ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Obtener la ecuación diferencial respectiva.

**Solución**

Consideremos los siguientes datos:

$T$  = Temperatura de la sustancia en el instante  $t$

$T_a$  = Temperatura del aire

$\frac{dT}{dt}$  = La velocidad a la que se enfría una sustancia

de la condición del problema se tiene:  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ ,  $k > 0$

que es la ecuación diferencial pedida donde  $k$  es la constante de proporcionalidad.

El signo negativo se debe a que la temperatura de la sustancia disminuye al transcurrir el tiempo.

**EJERCICIOS PROPUESTOS.-**

- ① Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  en el plano  $xy$ , siendo  $a$ ,  $b$  y  $r$  constantes arbitrarias.

**Rpta.**  $(1 + y'^2)y'' = 3y'y''^2$

- ② Hallar la ecuación diferencial correspondiente a la cisoides,  $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$

**Rpta.**  $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

- ③ Hallar la ecuación diferencial correspondiente a las rectas con pendientes y la intercepción con el eje  $x$  iguales.

**Rpta.**  $y'^2 = xy' - y'$

- ④ Hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas cuyas pendientes y sus intercepciones con el eje  $Y$  son iguales.

**Rpta.**  $yx - (x + 1)dy = 6$

- 5) Hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas cuya suma algebraica de las intercepciones con los ejes coordenados es igual a  $k$ . **Rpta.**  $(xy' - y)(y' - 1) + ky' = 0$
- 6) Hallar la ecuación diferencial correspondiente a las estrofoides  $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$   
**Rpta.**  $(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)dx + 4x^3y dy = 0$
- 7) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ , de radio fijo  $r$  en el plano  $xy$  siendo  $a$  y  $b$  constantes arbitrarias.  
**Rpta.**  $(1 + y'^2)^3 = r^2 y''^2$
- 8) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es dada.
- a)  $y = x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$  **Rpta.**  $y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$
- b)  $y = C_1 x + C_2 e^{-x}$  **Rpta.**  $(x + 1)y'' + xy' - y = 0$
- c)  $y = x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$  **Rpta.**  $y'' + 4y' + 3y = 4 + 3x$
- d)  $y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$  **Rpta.**  $y'' - 4y' + 13y = 0$
- e)  $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$  **Rpta.**  $y'' - 4y' + 4y = 0$
- f)  $y = e^{x^2} (C_1 + C_2 \int e^{-x^2} dx)$ , **Rpta.**  $y'' - 2xy' - 2y = 0$
- g)  $y = Ae^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + Be^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$  **Rpta.**  $4x^3 y'' + 6x^2 y' - y = 0$
- h)  $y = C_1 x \cdot \int \frac{e^{x^3}}{x^2} dx + C_2 x$  **Rpta.**  $y'' - x^2 y' + xy = 0$
- i)  $(ax + b)(ay + b) = c$ ,  $a, b, c$  constantes arbitrarias. **Rpta.**  $(x - y)y'' + 2y' + 2y'^2 = 0$

j)  $y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$ , a, b parámetro. **Rpta.**  $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$

k)  $y = A(\cos x + x \sin x) + B(\sin x - x \cos x)$ , A, B constantes

**Rpta.**  $xy'' - 2y' + xy = 0$

l)  $x = A \sin(\omega t + \beta)$ ,  $\omega$  un parámetro, no debe ser eliminado, **Rpta.**  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

m)  $y = Ae^{x+y} + Be^{-x+y}$ , A y B constantes arbitrarias **Rpta.**  $(y-1)y'' + y = (y-2)y'^2$

n)  $y = A\sqrt{1+x^2} + Bx$  **Rpta.**  $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$

9) Encontrar la ecuación diferencial que describa la familia de circunferencias que pasan por el origen. **Rpta.**  $(x^2 + y^2)y'' + 2[y'^2 + 1](y - xy') = 0$

10) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de rectas que pasan por el origen.

**Rpta.**  $xy' - y = 0$

11) Determinar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que pasan por el origen y cuyos centros están en el eje X. **Rpta.**  $2xyy' = y^2 - x^2$

12) Halle la ecuación diferencial de la familia de circunferencias cuyos centros están en el eje Y.

13) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas con vértice en el origen y cuyos focos están en el eje X. **Rpta.**  $2xy' = y$

14) Halle la ecuación diferencial de la familia de tangentes a la parábola  $y^2 = 2x$

15) Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que tienen su centro sobre el eje X. **Rpta.**  $y'^2 + yy'' + 1 = 0$

16) Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas con el eje focal paralelo al eje X.

**Rpta.**  $y'^2 y''' = 3y' y''^2$



- 17) Obtenga la ecuación diferencial de la familia de parábolas cuyos vértices y focos están en el eje X. **Rpta.**  $yy'' + y'^2 = 0$
- 18) Obtenga la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que pasan por (0,-3) y (0,3), y cuyos centros están en el eje X.
- 19) Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias que pasan por los puntos (2,2) y (-2,2). **Rpta.**  $(x^2 - y^2 - 2xy - 8) \frac{dy}{dx} - (x^2 - y^2 - 2xy + 8) = 0$
- 20) Hallar la ecuación diferencial de todas las líneas tangentes a la curva  $y^2 = -x$ .
- 21) Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias tangentes a la recta  $y = -x$  **Rpta.**  $(x - y)y'' [2 - (x - y)y'] = 2y' [1 + y'^2]^2$
- 22) Por un punto  $p(x,y)$  de una curva que pasa por el origen, se trazan dos rectas paralelas a los ejes coordenados, las que determinan un rectángulo con dichos ejes. Hallar la ecuación diferencial de la curva, de modo que ésta divida al rectángulo formado en dos regiones, donde el área de la parte derecha sea el triple del área de la parte izquierda. **Rpta.**  $3xy' = y + 1$
- 23) Hallar la ecuación diferencial de todas las tangentes a la parábolas  $x^2 = 2y + 1$ . **Rpta.**  $2xy' - y'^2 - 2y - 1 = 0$
- 24) Hallar la ecuación diferencial de todas las normales de la parábola  $y^2 = x$  **Rpta.**  $y'(4x - y'^2) = 4y + 2y'$
- 25) Determinar la ecuación diferencial de todas las curvas planas  $y = f(x)$  tal que la ley que incide en ellas, partiendo de una fuente puntual fija, es reflejada hacia un segundo punto fijo. Suponer que los puntos fijos son (a,0) y (-a, 0). **Rpta.**  $xyy'^2 + (x^2 - y^2 - a^2)y' = xy$

- 26) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisfacen la siguiente propiedad: "El área de la región encerrada por la curva, los ejes coordenados  $x$  e  $y$ , y la coordenada del punto  $p(x,y)$  de la curva es igual a  $(x^2 + y^2)'$ " **Rpta.**  $2yy' + 2x - y = 0$
- 27) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que cumple con la siguiente propiedad: "Si por un punto cualquiera de una curva de la familia se trazan las rectas tangente y normal a ella, el área del triángulo formado por dichas rectas con el eje  $y$  es igual a  $\frac{x^2 y_0}{2}$ , donde  $y_0$  es la coordenada del punto en que la tangente corta el eje  $y$ ." **Rpta.**  $y'^2(1+x) - yy' + 1 = 0$
- 28) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisface la condición siguiente: "Si por el punto  $p(x,y)$  de una curva, en el primer cuadrante, se trazan las rectas tangente y normal a ella, siendo  $T$  el punto de intersección de la tangente con el eje  $OX$  y  $N$  el punto de intersección de la normal con el eje  $OY$ , entonces el área del triángulo  $TON$  es igual a  $\frac{xy}{2}$ , donde  $O$  es el origen de coordenadas." **Rpta.**  $(x^2 - y^2)y' = xy$
- 29) Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas que satisfacen la siguiente condición: "Si por un punto cualquiera  $p(x,y)$  de una curva de la familia se trazan las rectas tangente y normal a la curva, y si además  $A$  es el punto de intersección de la recta normal con la recta  $y = x$  y  $B$  es la intersección de la recta tangente con la recta  $y = x$  entonces el segmento  $\overline{AB}$  tiene longitud  $\sqrt{2}$ ." **Rpta.**  $(y'^2 - 1)^2 = (x - y)^2 (y'^2 + 1)^2$
- 30) Hallar la ecuación diferencial perteneciente a las cardioides  $r = a(1 - \text{sen } \theta)$  **Rpta.**  $(1 - \text{sen } \theta) dr + r \cos \theta d\theta = 0$
- 31) Hallar la ecuación diferencial perteneciente a la estrofoide,  $r = a(\sec \theta + \text{tg } \theta)$  **Rpta.**  $\frac{dr}{d\theta} = r \sec \theta$

32) Encontrar la ecuación diferencial de las siguientes soluciones generales:

a)  $y = A \frac{\sinh x}{x} + B \frac{\cosh x}{x}$ , A, B constantes.

b)  $\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x + C\right)$ , C constante.

c)  $\pm(x+c) = \sqrt{k^2 - y^2} - \operatorname{arcc}.\cosh\left(\frac{k}{y}\right)$ , k fijo y c arbitrario

d)  $y = a \cosh\left(\frac{x-b}{a}\right)$ , a, b constantes arbitrarios.

e)  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$ ,  $C_1, C_2, C_3$  constantes.

33) Encontrar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio 1, con centros en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

**Rpta.**  $(x - y)^2 (1 + y')^2 = (1 + y'')^2$

34) Hallar la ecuación diferencial de todas las parábolas con eje paralelo al eje y, y tangente a la recta  $y = x$ .

**Rpta.**  $y'^2 = 2yy'' - 2xy''' + 2y' - 1$

35) Hallar la ecuación diferencial de las curvas tales que la tangente en un punto cualquiera M forme un ángulo  $\theta$  con el eje OX y que verifique  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$  siendo  $\phi$  el ángulo que OM forme con el eje OX.

36) En la práctica, un cuerpo B de masa m que va cayendo (tal como un hombre que desciende en paracaídas) encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea  $v(t)$ . Usar la segunda ley de Newton para encontrar la ecuación diferencial de

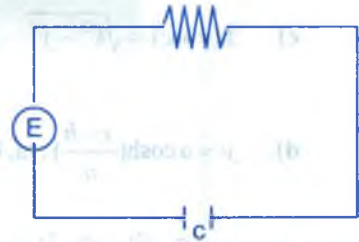
la velocidad del cuerpo en un instante cualquiera. **Rpta.**  $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$

- 37) Un circuito en serie contiene un resistor y un inductor, tal como se muestra en la figura. Determine la ecuación diferencial de la corriente  $i(t)$  si la resistencia es  $R$ , la inductancia es  $L$  y la tensión aplicada es  $E(t)$ .

**Rpta.**  $L \frac{di}{dt} + Ri = E(t)$



- 38) Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor, tal como se muestra en la figura, encuentre la ecuación diferencial para la carga  $q(t)$  del capacitor si la resistencia es  $R$ , la capacitancia es  $C$  y el voltaje aplicado es  $E(t)$ .



- 39) ¿Cuál es la ecuación diferencial de la velocidad  $v$  de un cuerpo de masa  $m$  que cae verticalmente a través de un medio que opone una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea?

**Rpta.**  $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = g$



## CAPÍTULO II

### 2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Y DE PRIMER GRADO

A las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de primer grado, representaremos en la forma:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \dots (1)$$

En la ecuación (1), F nos indica la relación entre la variable independiente x, la variable dependiente y, y su derivada  $\frac{dy}{dx}$

De la ecuación diferencial  $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ , despejamos la derivada  $\frac{dy}{dx}$ ; es decir en la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

#### 2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE VARIABLE SEPARABLE.-

Si de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado que es:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \text{ podemos expresar en la forma:}$$

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad \dots (2)$$

donde M es una función sólo de x y N es una función sólo de y, entonces a la ecuación (2) se le denomina "ecuación diferencial ordinaria de variable separable" y la solución general se obtiene por integración directa. es decir:



$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

donde C es la constante de integración.

**Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

①  $(y^2 + xy^2) \frac{dy}{dx} + x^2 - x^2y = 0$

**Solución**

A la ecuación diferencial dada expresaremos en la forma:

$$y^2(x+1)dy + x^2(1-y)dx = 0, \text{ separando las variables}$$

$$\frac{y^2}{1-y} dy + \frac{x^2 dx}{1+x} = 0, \text{ integrando se tiene: } \int \frac{y^2}{1-y} dy + \int \frac{x^2 dx}{1+x} = C, \text{ de donde tenemos:}$$

$$\therefore (x+y)(x-y-2) + 2 \ln \left| \frac{1+x}{1-y} \right| = k$$

②  $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} y' = 0$

**Solución**

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$$x\sqrt{1+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0, \text{ separando las variables}$$

$$\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = 0, \text{ integrando se tiene: } \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = C,$$

donde tenemos

$$\therefore \sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} = C$$

③  $e^x \sec y dx + (1+e^x) \sec y \operatorname{tg} y dy = 0, \quad y = 60^\circ \text{ si } x = 3$

**Solución**

$e^x \sec y dx + (1+e^x) \sec y \operatorname{tg} y dy = 0$ , separando la variable.

$\frac{e^x dx}{1+e^x} + \operatorname{tg} y dy = 0$ , integrando.  $\int \frac{e^x dx}{1+e^x} + \int \operatorname{tg} y dy = C$ , de donde se tiene:

$$\ln\left(\frac{1+e^x}{\cos y}\right) = \ln k \Rightarrow 1+e^x = k \cos y$$

Cuando  $x = 3, y = 60^\circ \Rightarrow 1+e^3 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2(1+e^3)$

$$\therefore 1+e^x = 2(1+e^3) \cos y$$

④  $y \ln y dx + x dy = 0, y|_{x=1} = 1$

**Solución**

$y \ln y dx + x dy = 0$ , separando las variables se tiene:

$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y \ln y} = 0$ , integrando ambos miembros.

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y \ln y} = C, \text{ de donde tenemos:}$$

$\ln x + \ln(\ln y) = C \Rightarrow \ln(x \ln y) = C$ , Levantando el logaritmo:  $x \ln y = k$

Cuando  $x = 1, y = 1 \Rightarrow \ln 1 = k \Rightarrow k = 0$

$x \ln y = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow \therefore y = 1$

⑤  $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$

**Solución**

$(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$ , agrupando

$$[y^2(x-1) + (x-1)]dx + [x^2(y+1) - 2x(y+1) + 2(y+1)]dy = 0$$

$(y^2 + 1)(x-1)dx + (x^2 - 2x + 2)(y+1)dy = 0$ , separando las variables

$$\frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 2} + \frac{(y+1)dy}{y^2 + 1} = 0, \text{ integrando ambos miembros}$$

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{y+1}{y^2 + 1} dy = C, \text{ de donde tenemos:}$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| + \frac{1}{2} \ln|y^2 + 1| + \text{arc. tg } y = C,$$

$$\ln((x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)) + 2 \text{ arctg } y = C,$$

$$\ln((x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)) = C - \text{arctg } y, \text{ levantando el logaritmo}$$

$$(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1) = ke^{-2 \text{ arctg } y}, \text{ de donde se tiene: } \therefore (x^2 - 2x + 2)(y^2 + 1)e^{2 \text{ tg } y} = k$$

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $\text{tg } x \cdot \text{sen}^2 y \cdot dx + \cos^2 x \cdot c \cdot \text{tg } y \cdot dy = 0$

**Rpta.**  $c \text{ tg}^2 y = \text{tg}^2 x + C$

②  $xy' - y = y^3$

**Rpta.**  $x = \frac{cy}{\sqrt{1+y^2}}$

③  $\sqrt{1+x^3} \frac{dy}{dx} = x^2 y + x^2$

**Rpta.**  $2\sqrt{1+x^3} = 3 \ln(y+1) + C$

④  $e^{2x-y} dx + e^{y-2x} dy = 0$

**Rpta.**  $e^{4x} + 2e^{2y} = C$

⑤  $(x^2 y - x^2 + y - 1)dx + (xy + 2x - 3y - 6)dy = 0$

**Rpta.**  $\frac{x^2}{2} + 3x + y + \ln(x-3)^{10} (y-1)^3 = C$

⑥  $e^{x+y} \text{sen } x dx + (2y+1)e^{-y^2} dy = 0$

**Rpta.**  $e^x (\text{sen } x - \cos x) - 2e^{-y^2-y} = C$

$$(7) \quad 3e^x \operatorname{tg} y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$$

$$(8) \quad e^y \left( \frac{dy}{dx} + 1 \right) = 1$$

$$\text{Rpta. } \ln(e^y - 1) = C - x$$

$$(9) \quad y' = 1 + x + y^2 + xy^2$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{arc.tg} x - \frac{x^2}{2} = C$$

$$(10) \quad y - xy' = a(1 + x^2 y)$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{a + cx}{1 + ax}$$

$$(11) \quad (1 + y^2) dx = (y - \sqrt{1 + y^2})(1 + x^2)^{3/2} dy$$

$$\text{Rpta. } \ln \left| \frac{\sqrt{1 + y^2}}{y + \sqrt{1 + y^2}} \right| = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C$$

$$(12) \quad (1 - y)e^y y' + \frac{y^2}{x \ln x} = 0$$

$$\text{Rpta. } C + \frac{e^y}{y} = \ln(\ln x)$$

$$(13) \quad e^{-y}(1 + y') = 1$$

$$\text{Rpta. } e^x = C(1 - e^{-y})$$

$$(14) \quad e^{x-y} dx + e^{y-x} dy = 0$$

$$\text{Rpta. } e^{2x} + e^{2y} = C$$

$$(15) \quad (1 + y + y^2) dx + x(x^2 - 4) dy = 0;$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{8} \ln \left( \frac{x^2 - 4}{x^2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc.tg} \left( \frac{2y + 1}{\sqrt{3}} \right) = C$$

$$(16) \quad y' = 10^{x+y}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\text{Rpta. } 10^x + 10^{-y} = C$$

$$(17) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1 + x^3)}$$

$$\text{Rpta. } 3y^2 - 2 \ln(1 + x^3) = C$$

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$$

$$\text{Rpta. } y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = C$$

$$(19) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{ax}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \ln |cx + d| + k$$

- 20  $\frac{dy}{dx} = \frac{ay+b}{cy+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$   
**Rpta.**  $x = \frac{cy}{a} + \frac{ad-bc}{a^2} \ln|ay+b| + k$
- 21  $y(x^3 dy + y^3 dx) = x^3 dy$   
**Rpta.**  $3x^2 y - 2x^2 + 3y^2 = kx^2 y^3$
- 22  $(xy+x)dx = (x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy$   
**Rpta.**  $\ln(x^2 + 1) = y^2 - 2y + 4 \ln|k(y+1)|$
- 23  $x^3 e^{2x^2+2y^2} dx - y^3 e^{-x^2-2y^2} dy = 0$ ,  
**Rpta.**  $25(3x^2 - 1)e^{3x^2} + 9(5y^2 + 1)e^{-5y^2} = C$
- 24  $xdy + \sqrt{1+y^2} dx = 0$   
**Rpta.**  $x(y + \sqrt{1+y^2}) = k$
- 25  $\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$   
**Rpta.**  $(x-1)(y+5)^5 = k(y-1)(x+3)^5$
- 26  $x^2 y^2 - 4x^2 = (x^2 y^2 - 9y^2) \frac{dy}{dx}$   
**Rpta.**  $x + \frac{9}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| = y + \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| + k$
- 27  $(x - y^2 x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$   
**Rpta.**  $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = k$
- 28  $y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dy = \arcsen x dx$  en el intervalo  $-1 < x < 1$  **Rpta.**  $2y^3 - 3(\arcsen x)^2 = C$
- 29  $xy' = \sqrt{1-y^2}$   
**Rpta.**  $y = \sin(\ln|x| + C)$
- 30  $xydx + (x^2 + 1)e^{y^2} dy = 0$   
**Rpta.**  $\ln \sqrt{x^2 + 1} + \int_a^x \frac{e^{t^2}}{t} dt = C$
- 31  $(x+1)(y-1)dx + (x-1)(y+1)dy = 0$   
**Rpta.**  $(x-1)(y-1) = ke^{-\frac{x+y}{2}}$
- 32  $(e^y + 1) \cos x dx + e^y (\sen x + 1) dy = 0$   
**Rpta.**  $(\sen x + 1)(e^y + 1) = k$
- 33  $xy + y^2 \frac{dy}{dx} = 6x$   
**Rpta.**  $x^2 + y^2 + 12y + 72 \ln|6-y| = C$
- 34  $y \ln x \cdot \ln y \cdot dx + dy = 0$   
**Rpta.**  $\ln(\ln y) + x \ln x - x = C$



$$(35) \quad (xy + 2x + y + 2) dx + (x^2 + 2x) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad \sqrt{x^2 + 2x}(y+2) = k$$

$$(36) \quad e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad 1 + e^y = C(1 + x^2)$$

$$(37) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 y}$$

$$\text{Rpta.} \quad 2y - \operatorname{sen}^2 y - x - \operatorname{sen} x = C$$

$$(38) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy - x + y}{xy - y^2}$$

$$\text{Rpta.} \quad y^2 = (x-1)^2 + k$$

$$(39) \quad xdx - \sqrt{1-x^4} dy = x^2 \sqrt{1+x^4} dy$$

$$\text{Rpta.} \quad y = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + C$$

$$(40) \quad (1+y^2)dx = (y - \sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2} dy$$

$$\text{Rpta.} \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| \frac{C\sqrt{1+y^2}}{1+\sqrt{1+y^2}} \right|$$

$$(41) \quad yy' = \operatorname{sen} x \cdot e^{x+2y}$$

$$\text{Rpta.} \quad 2y = 2e^{x+2y} (\cos x - \operatorname{sen} x) + k$$

$$(42) \quad (4x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad (1+x^2)(4+y^2) = k$$

$$(43) \quad (x + x\sqrt{y})dy + y\sqrt{y}dx = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad -\frac{2}{\sqrt{y}} + \ln xy = c$$

$$(44) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y - y}{y+1}; y(3) = 1$$

$$\text{Rpta.} \quad x^3 - 3x - 3y - 3 \ln |y| = 21$$

$$(45) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x^2 y^2}{y - x^3 y}; y(3) = 1$$

$$\text{Rpta.} \quad (x^3 - 1)^4 = k(2y^2 - 1)$$

II. Encontrar la solución particular de la ecuación diferencial, mediante las condiciones dadas:

$$(1) \quad \operatorname{sen} 2x \cdot dx + \cos 3y dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Rpta.} \quad 2 \operatorname{sen} 3y - 3 \cos 2x = 3$$

$$(2) \quad y' - 2y \cdot \operatorname{ctg} x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\text{Rpta. } y = 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - \frac{x}{1+y}, \quad y(0) = 1$$

$$\text{Rpta. } 3y^2 + 2y^3 = 3x^2 + 5$$

$$(4) \quad x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0, \quad y(0) = 1$$

$$\text{Rpta. } 3 \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x^2 + 2 \operatorname{arc.} \operatorname{tg} y^3 = \frac{\pi}{2}$$

$$(5) \quad \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \operatorname{sen} y}} + y' = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{Rpta. } \sqrt{2} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - \cos y = 0$$

$$(6) \quad y^2 y' - x^2 = 0, \quad y(-2) = -2,$$

$$\text{Rpta. } y = x$$

$$(7) \quad x^3 dy + xy dx = x^2 dy + 2y dx, \quad y(2) = e$$

$$\text{Rpta. } xy = 2(x-1)e^{\frac{2}{x}}$$

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = xy^3(1+x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$$

$$\text{Rpta. } y = (3 - 2\sqrt{1+x^2})^{-1/2}$$

$$(9) \quad y' \operatorname{sen} x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$$

$$\text{Rpta. } y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$(10) \quad (1 + e^x)y \cdot y' = e^x, \quad y(0) = 1$$

$$\text{Rpta. } 2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1 + e^x)$$

$$(11) \quad (xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, \quad y(0) = 1$$

$$\text{Rpta. } 1 + y^2 = \frac{2}{1 - x^2}$$

$$(12) \quad (4x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0, \quad y(1) = 2$$

$$\text{Rpta. } (1 + x^2)(4 + y^2) = 16$$

$$(13) \quad x dx + ye^{-x} dy = 0, \quad y(0) = 1$$

$$\text{Rpta. } y = [2(1-x)e^x - 1]^{\frac{1}{2}}$$

$$(14) \quad ye^{y^2} y' = x - 1, \quad y(2) = 0$$

$$\text{Rpta. } e^{y^2} = x^2 - 2x + 1$$

$$(15) \quad y' + 6y \cdot \operatorname{tg} 2x = 0, \quad y(0) = -2,$$

$$\text{Rpta. } y = -2 \cos^3 2x$$

- 16)  $y'x \ln x - y = 0$ ,  $y(2) = \ln 4$  **Rpta.**  $y = 2 \ln x$
- 17)  $(1 + e^x)yy' = e^y$ ,  $y(0) = 0$  **Rpta.**  $(1 + y)e^{-y} = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) + 1 - x$
- 18)  $2ydx + x^2dy = -dx$ ,  $y\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right) = \frac{7}{2}$  **Rpta.**  $2y + 1 = 2e^{\frac{2}{x}}$
- 19)  $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta + e^{2r} \sin \theta}{3e^r + e^r \cos \theta}$ ,  $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  **Rpta.**  $2 \operatorname{arctg}(e^r) + \operatorname{arctg}(\cos \theta) = \frac{\pi}{2}$
- 20)  $4dy + ydx = x^2dy$ ,  $y(4) = -1$ , **Rpta.**  $(2 + x)y^4 - 3x + 6 = 0$
- 21)  $dy = x(2y dx - x dy)$ ,  $y(1) = 4$  **Rpta.**  $y = 2x^2 + 2$
- 22) Hallar y si:
- a)  $\int_a^x ydx = K(y^3 - b^3)$  **Rpta.**  $3Ky^2 - 2x = 3Kb^2 - 2a$
- b)  $\int_a^x ydx = K(y - b)$  **Rpta.**  $y = e^{\frac{(x-a)}{K}}$
- c)  $\int_a^x ydx = K(y^2 - b^2)$  **Rpta.**  $y = (2K)^{-1}(x - a \pm 2Kb)$
- d)  $\int_a^x y^2 dx = K(y - b)$  **Rpta.**  $y(x - a - \frac{K}{b}) + K = 0$
- e)  $\int_a^x y^2 dx = K(y^2 - b^2)$  **Rpta.**  $x - a = 2K \ln\left(\frac{y}{b}\right)$
- f)  $\int_a^x x^2 dy = x^3(y - b)$  **Rpta.**  $(2y - 3b)x^2 = -a^2b$
- g)  $\int_a^x x^6 y^2 dx = x^7(y^2 - b^2)$  **Rpta.**  $(6y^2 - 7b^2)x^6 + a^6b^2 = 0$

## 2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS REDUCIBLES A VARIABLE SEPARABLE.-

Las ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad \dots (1)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes, no son de variable separable.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, se transforma en una ecuación diferencial de variable separable, mediante la sustitución;  $z = ax + by + c$ , de donde  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$ , que al reemplazar en la ecuación (1), se obtiene una nueva ecuación diferencial, que es de variable separable.

es decir:  $\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a) = f(z)$ , de donde  $\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$ , separando la variable  $\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$  que es una ecuación de variable separable.

**Ejemplos:** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

①

$$(x + y)^2 y' = a^2$$

Solución

Sea  $z = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$ , reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$z^2 \left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2, \text{ separando la variable } \frac{z^2 dz}{z^2 + a^2} = dx, \text{ integrando ambos miembros.}$$

$$\int \frac{z^2 dz}{z^2 + a^2} = \int dx + C \Rightarrow z - a \operatorname{arc.tg}\left(\frac{z}{a}\right) = x + C, \text{ de donde}$$

$$x + y - a \operatorname{arc.tg}\left(\frac{x+y}{a}\right) = x + C, \text{ simplificando se tiene: } \therefore x + y = a \operatorname{tg}\left(\frac{y}{a} + k\right)$$

②  $y' = \cos^2(ax + by + c)$ ,  $a, b$  constantes positivas y diferentes.

**Solución**

Sea  $z = ax + by + c \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + by'$ , de donde  $y' = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$ , reemplazando en la

ecuación  $\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a) = \cos^2 z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cos^2 z$

separando las variables se tiene:  $\frac{dz}{a + b \cos^2 z} = dx$ , integrando se tiene:

$$\int \frac{dz}{a + b \cos^2 z} = \int dx + k \Rightarrow \int \frac{dz}{a \operatorname{sen}^2 z + (a+b) \cos^2 z} = x + k$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{\sec^2 z dz}{\operatorname{tg}^2 z + \frac{a+b}{a}} = x + k \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{a+b}} \operatorname{tg}(ax + by + c) = x + k$$

③  $y'+1 = \frac{(x+y)^m}{(x+y)^n + (x+y)^p}$

**Solución**

Sea  $z = x + y \Rightarrow y' = \frac{dz}{dx} - 1$ , reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$\frac{dz}{dx} - 1 + 1 = \frac{z^m}{z^n + z^p} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z^m}{z^n + z^p}, \text{ separando las variables}$$

$\frac{z^n + z^p}{z^m} dz = dx$ , integrando se tiene:

$$\int \frac{z^n + z^p}{z^m} dz = \int dx + C \Rightarrow \frac{z^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{z^{p-m+1}}{p-m+1} = x + C$$

$$\therefore \frac{(x+y)^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{(x+y)^{p-m+1}}{p-m+1} = x + C, \quad n-m \neq -1, \quad p-m \neq -1$$



$$(4) \quad xy^2(xy' + y) = a^2$$

**Solución**

Sea  $z = xy \Rightarrow y = \frac{z}{x} \Rightarrow y' = \frac{x \frac{dz}{dx} - z}{x^2}$  reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$\frac{z^2}{x} \left[ x \frac{\frac{dz}{dx} - z}{x^2} + \frac{z}{x} \right] = a^2, \text{ simplificando } z^2 dz = a^2 x dx$$

$$\text{integrando se tiene: } \frac{z^3}{3} = a^2 \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow 2x^3 y^3 = 3a^2 x^2 + K$$

$$(5) \quad (\ln x + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0$$

**Solución**

Sea  $z = \ln x + y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} + 3y^2 \cdot y'$ , de donde  $3xy^2 y' = x \frac{dz}{dx} - 1$ , reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:  $z - (x \frac{dz}{dx} - 1) = 0 \Rightarrow (z+1) - x \frac{dz}{dx} = 0$  separando las

variables.  $\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z+1} = 0$ , integrando se tiene:  $\ln x - \ln(z+1) = \ln C \Rightarrow x = C(z+1)$

$$z+1 = kx \Rightarrow \ln x + y^3 + 1 = kx \quad \text{donde } k = \frac{1}{C} \quad \therefore y^3 = kx - \ln x - 1$$

$$(6) \quad (6x + 4y + 3) dx + (3x + 2y + 2) dy = 0$$

**Solución**

La ecuación diferencial expresaremos en la forma:  $(2(3x + 2y) + 3) dx + (3x + 2y + 2) dy = 0$

$$\text{Sea } z = 3x + 2y \Rightarrow dz = 3 dx + 2 dy \Rightarrow dy = \frac{1}{2}(dz - 3dx)$$

$$\text{reemplazando en la ecuación diferencial } (2x+3)dx + (z+2)\left(\frac{dz-3dx}{2}\right) = 0$$

simplificando y separando la variable se tiene  $dx + \frac{z+2}{z} dz = 0$

integrando ambos miembros  $z + 2 \ln z + x = C$  de donde:

$$\therefore 4x + 2y + 2 \ln(3x + 2y) = C$$

7  $\cos(x+y)dx = x \operatorname{sen}(x+y) dx + x \operatorname{sen}(x+y)dy$

### Solución

Sea  $z = x + y \Rightarrow dx = dz - dy$ , reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$\cos z dx = x \operatorname{sen} z dx + x \operatorname{sen} z (dz - dx)$ , simplificando y separando la variable.

$$\frac{dx}{x} = \operatorname{tg} z dz \quad \text{integrando se tiene: } \therefore x \cos(x+y) = C$$

### **EJERCICIOS PROPUESTOS.-**

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1  $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$  **Rpta.**  $y = 2 \operatorname{arc.tg}(x+C) - x$

2  $y' = \operatorname{sen}^2(x-y+1)$  **Rpta.**  $\operatorname{tg}(x-y+1) = x+C$

3  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x+y+2}$  **Rpta.**  $y + \ln|x+y+1| = x+C$

4  $y' \ln|x-y| = 1 + \ln|x-y|$  **Rpta.**  $(x-y) \ln|x-y| = C-y$

5  $y' = (x+y)^2$  **Rpta.**  $x+y = \operatorname{tg}(x+C)$

6  $(x+y-1)dx + (2x+2y-3)dy = 0$  **Rpta.**  $x+2y + \ln|x+y-2| = C$

7  $(1+x^2y^2)y + (xy-1)^2xy' = 0$  sug:  $xy = z$  **Rpta.**  $y^2 = ke^{\frac{xy-1}{x}}$

$$\textcircled{8} \quad (x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 + 4x^2 y)dx + (xy^2 - 4x^3)dy = 0,$$

$$\text{sug : } y = xz$$

$$\text{Rpta. } \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \frac{y^3}{3x^3} - \frac{4y}{x} = C$$

$$\textcircled{9} \quad y' = \frac{y-x+1}{y-x+5}$$

$$\text{Rpta. } (y-x)^2 + 10y - 2x = C$$

$$\textcircled{10} \quad ye^{x^2} dx + (y^2 - 2xe^{x^2} y^2) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \ln y + e^{x^2} = C$$

$$\textcircled{11} \quad y' = \text{sen}(x-y)$$

$$\text{Rpta. } x + C = \text{ctg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\textcircled{12} \quad y' = (8x + 2y + 1)^2$$

$$\text{Rpta. } 8x + 2y + 1 = 2 \text{tg}(4x + C)$$

$$\textcircled{13} \quad (x^2 y^3 + y + x - 2)dx + (x^3 y^2 + x)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 3x^2 - 12x + 2x^3 y^3 + 6xy = C$$

$$\textcircled{14} \quad (1 - xy \cos xy)dx - x^2 \cos xy dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \ln x - \text{sen } xy = C$$

$$\textcircled{15} \quad \left[x^2 \text{sen}\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2y \cos\left(\frac{y}{x^2}\right)\right]dx + x \cos\left(\frac{y}{x^2}\right)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x \text{sen}\left(\frac{y}{x^2}\right) = C$$

$$\textcircled{16} \quad e^y y' = K(x + e^y) - 1 \quad \text{sug: } Z = x + e^y$$

$$\text{Rpta. } y = \ln(Ce^{Kx} - x)$$

$$\textcircled{17} \quad x^2 yy' = \frac{1}{2} \text{tg}(x^2 y^2) - xy^2 \quad \text{sug: } z = x^2 y^2$$

$$\text{Rpta. } \text{sen}(x^2 y^2) = ke^{-x}$$

$$\textcircled{18} \quad y' = ax + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Rpta. } b(ax + by + c) + a = ce^{bx}$$

$$\textcircled{19} \quad (x^2 y^2 + 1)dx + 2x^2 dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{1-xy} + \frac{1}{2} \ln x = C$$

$$\textcircled{20} \quad (xy - 2xy \ln^2 y + y \ln y)dx + (2x^2 \ln y + x)dy = 0$$

$$\text{sug: } z = x \ln y$$

$$\text{Rpta. } 2x^2 + (2x \ln y + 1)^2 = C$$

$$(21) \quad (2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x + 2y + 3 \ln(2x + 3y - 7) = C$$

$$(22) \quad (2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 5x + 10y + C = 3 \ln |10x - 5y + 6|$$

$$(23) \quad (6x + 3y - 5)dx - (2x + y)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 3x - y = C + \ln(2x + y - 1)$$

$$(24) \quad (x^3 y^4 + y^5 x^5 + x^5 y^2 + x^3 y^5 + y^7 + y^5)dx - (x^4 y^3 + x^6 y + xy^6)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2x^2} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3y^3} = C$$

(25) Mediante una sustitución adecuada reducir la ecuación diferencial.

$p(x^m y^n) y dx + Q(x^m y^n) x dy = 0$ , a una ecuación diferencial de variable separable.

$$(26) \quad (2 + 4x^2 \sqrt{y})y dx + x^3 \sqrt{y} dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^3 y^{\frac{1}{2}} = C$$

$$(27) \quad y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2 y^2)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \frac{2xy + 1}{2x^2 y^2} = \ln Ky$$

$$(28) \quad (y - xy^2)dx - (x + x^2 y)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \ln\left(\frac{x}{y}\right) - xy = C$$

$$(29) \quad (y - xy^2 + x^2 y^3)dx + (x^3 y^2 - x^2 y)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 2 \ln x + x^2 y^2 - 2xy = K$$

$$(30) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + xy^3}{1 + x^3 y} \quad \text{sug: } x + y = u, \quad xy = v$$

$$\text{Rpta. } x^2 y^2 - 1 = K(x + y)^2$$

$$(31) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2y - xe^y}$$

$$\text{Rpta. } y^2 = xe^y + C$$

$$(32) \quad \frac{dy}{dx} = \text{tg}(x + y)$$

$$\text{Rpta. } x - y - \text{Ln} |\text{sen}(x + y) + \cos(x + y)| = C$$

$$(33) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(2x + y + 3) + 1} - 2$$

$$\text{Rpta. } (2x + y + 3) \text{Ln} |2x + y + 3| = x + C$$

- 34)  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y - 1$ , sug:  $z = x^2 + 2x + y$  **Rpta.**  $2x + x^2 + y + 1 = Ke^x$
- 35)  $(x^2 - y^4)\frac{dy}{dx} = xy$ , sug:  $x = uy$  **Rpta.**  $2y^5 = -3x^2 + Ky^2$
- 36)  $(3x - 2y + 1)dx + (3x - 2y + 3)dy = 0$  **Rpta.**  $5(x+y+C) = 2 \operatorname{Ln} |15x - 10y + 11|$
- 37)  $y' = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x+2y)$  **Rpta.**  $4y - 2x + \operatorname{sen}(2x+4y) = C$
- 38)  $y' = \sqrt{2x+3y}$  **Rpta.**  $6\sqrt{2x+3y} - 4 \ln(3\sqrt{2x+3y}+2) - 9x = C$
- 39)  $y' = \sqrt{y+\operatorname{sen}x} - \cos x$ , sug:  $z = \sqrt{y+\operatorname{sen}x}$  **Rpta.**  $\sqrt{y+\operatorname{sen}x} = \frac{x}{2} + C$
- 40)  $\sqrt{x+y+1}y' = \sqrt{x+y-1}$   
**Rpta.**  $u^2 + 2u - u\sqrt{u^2-1} + \ln|u+\sqrt{u^2-1}| = 4x+C$ ;  $u = x+y$
- 41)  $(x+y-2+\frac{1}{x})dx + (2-x-y)dy = 0$  **Rpta.**  $2 \ln x - 4x + 4y - (x+y)^2 = k$
- 42)  $(2x-2y+xe^x)dx - (2x-2y-1)dy = 0$  **Rpta.**  $(x-1)e^x + (x-y^2) + y = C$
- 43)  $[\operatorname{sen}x - \operatorname{tg}(x-2y)]dx + 2 \operatorname{tg}(x-2y)dy = 0$  **Rpta.**  $-\cos x + \operatorname{Ln} \cos(x-2y) = C$
- 44)  $(1-xy+x^2y^2)dx + (x^3y-x^2)dy = 0$  **Rpta.**  $2 \ln x + x^2y^2 - 2xy = C$
- 45)  $(y^5 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{x}{1+x}} - y^4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x})dx + dy = 0$   
**Rpta.**  $\sqrt{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} - \ln \sqrt{1+x} + \ln(\frac{y-1}{y}) + \frac{6y^2+3y+2}{6y^3} = C$
- 46)  $2yy' = y^2 + x^2 - 2x$  **Rpta.**  $y^2 = ce^x - x^2$



- 47)  $y' + \operatorname{sen}^2(x+y) = 0$  **Rpta.**  $\operatorname{tg}(x+y) = x + C$
- 48)  $y' = (x+y)\ln(x+y) - 1$  **Rpta.**  $\ln|x+y| = ce^x$
- 49)  $2(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2})dx + x^3dy = 0$  **Rpta.**  $x^2(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}) = C$
- 50)  $y^2 \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x + y^3 \operatorname{arc.} \operatorname{sec} \sqrt{x^2+1} + \frac{dy}{dx} = 0$
- 51)  $xy(x dy + y dx) = 6y^3 dy$ , cuando  $x = 2, y = 1$  sug.  $z = xy$  **Rpta.**  $y^2(x^2 - 3y^2) = 1$
- 52)  $x^2(x dx + y dy) = (x^2 + y^2)dx$ , cuando  $x = 1, y = 2$   
sug.  $z = x^2 + y^2$  **Rpta.**  $(x^2 + y^2)(10 - 9x) = 5x$
- 53)  $dx + dy = (x+y)(1 + \frac{y}{x})^2(x dy - y dx)$   
sug.  $z = x + y, \omega = \frac{y}{x}$  **Rpta.**  $(2y + cx)(x+y)^2 + x = 0$
- 54)  $(x^2 + y^2)(x dy + y dx) - xy(x dy + y dx) = 0$   
sug.  $z = x^2 y^2, \omega = xy$  **Rpta.**  $x^2 y^2 = C(x^2 + y^2)$
- 55)  $y^2(x^2 + 2)dx + (x^3 + y^3)(y dx - x dy) = 0$  **Rpta.**  $\frac{1}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y^2}{2x^2} - \ln x = C$
- 56)  $(6x - 3y + 2)dx - (2x - y - 1)dy = 0$  **Rpta.**  $3x - y + C = 5 \operatorname{Ln} |2x - y + 4|$
- 57)  $\frac{dy}{dx} = (x+y-3)^2 - 2(x+y-3)$  **Rpta.**  $\frac{1}{x+y-4} = x + C$
- 58)  $\frac{dy}{dx} = -2 + e^{2x-y+1}$  **Rpta.**  $x + e^{-2x-y+1} = C$
- 59)  $x dy = y(xy + \cos \pi) dx$  **60**  $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x-3y+4}{3x-2y-1}\right)^2$

61)  $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$  sug.  $z = x - y$  Rpta.  $y^2 - 2xy + 2x^2 + \frac{2}{x} = k$

62)  $y' = (8x+2y)^2 + 2(8x+2y) + 1$  Rpta.  $\arctg(4x+y) = 4x+k$

### 2.3. OTRAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.-

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1)  $\cos y' = 0$

**Solución**

Como  $\cos y' = 0 \Rightarrow y' = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow dy = \frac{\pi}{2}(2n+1)dx$ , integrando

$\int dy = \int \frac{\pi}{2}(2n+1)dx + K$ , de donde se tiene:  $y = \frac{\pi}{2}(2n+1)x + K$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

2)  $e^{y'} = 1$

**Solución**

$e^{y'} = 1$ , tomando logaritmo se tiene  $y' = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = C$ ,  $C$  constante

3)  $\ln y' = x$

**Solución**

$\ln y' = x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$

integrando  $\int dy = \int e^x dx + C$  de donde se tiene:  $y = e^x + C$

4)  $x^2 y' \cos y + 1 = 0$ ,  $y \rightarrow \frac{16\pi}{3}$ ;  $x \rightarrow +\infty$

**Solución**

$$x^2 y' \cos y + 1 = 0 \Rightarrow \cos y \cdot y' + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ de donde } \cos y \cdot dy + \frac{dx}{x^2} = 0, \text{ integrando}$$

$$\int \cos y \, dy + \int \frac{dx}{x^2} = c \text{ de donde se tiene: } \operatorname{sen} y - \frac{1}{x} = C, \text{ como } y \rightarrow \frac{16\pi}{3} \text{ cuando } x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow C = \operatorname{sen} \frac{16\pi}{3}, \text{ por lo tanto: } \operatorname{sen} y - \frac{1}{x} = \operatorname{sen} \left( \frac{16\pi}{3} \right)$$

5  $\operatorname{tg} y' = x$

### Solución

Como  $\operatorname{tg} y' = x \Rightarrow y' = \operatorname{arctg} x + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$dy = (\operatorname{arc.tg} x + n\pi) dx$ , integrando  $\int dy = \int (\operatorname{arc.tg} x + n\pi) dx + C$  de donde se tiene:

$$y = x \operatorname{arc.tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + n\pi x + C$$

### EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1  $e^{y'} = x$

Rpta.  $y = x(\ln x - 1) + C$

2  $\operatorname{tg} y' = 0$

Rpta.  $y = \pi n x + C$

3  $e^{y'} = e^{4y} y' + 1$ ,  $y$  es acotada para  $x \rightarrow +\infty$

Rpta.  $y = 0$

4  $\operatorname{sen} y' = x$

Rpta.  $y = x \operatorname{arc.sen} x - \sqrt{1-x^2} + n\pi x, x, n \in \mathbb{Z}$

5  $x^2 y' + \cos 2y = 1$ ,  $y \rightarrow \frac{16\pi}{3}$ , cuando  $x \rightarrow +\infty$

Rpta.  $y = \operatorname{arc.tg} \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 3\pi$

6  $(x+1)y' = y-1$ ,  $y$  es acotada, para  $x \rightarrow +\infty$

Rpta.  $y = 1$

7  $y' = 2x(\pi + y)$ ,  $y$  es acotada, para  $x \rightarrow \infty$

Rpta.  $y = -\pi$

8)  $x^3 y' - \operatorname{sen} y = 1$ ,  $y \rightarrow 5\pi$ ,  $x \rightarrow \infty$  Rpta.  $y = 2 \operatorname{arc.tg}(1 - \frac{1}{2x^2}) + \frac{9}{2}\pi$

9)  $y = \ln(\frac{dy}{dx})$  Rpta.  $y = -\ln(C - x)$

10)  $(1+x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$ ,  $y \rightarrow \frac{7}{2}\pi$ ,  $x \rightarrow -\infty$   
Rpta.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arc.tg}(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc.tg} x) + \frac{7}{2}\pi$

## 2.4. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS HOMOGÉNEAS.-

a. **Función Homogénea:** Diremos que la función  $f(x,y)$  es homogénea de grado  $k$  en  $x$  e  $y$ , si y sólo si, cumple con la condición siguiente:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

**Ejemplo:** Determinar cuales de las siguientes funciones son homogéneas.

1)  $f(x, y) = x^2 y - 4y^3$  es homogénea de grado 3 en  $x$  e  $y$

2)  $f(x, y) = y^2 \operatorname{tg} \frac{x}{y}$  es homogénea de grado 2 en  $x$  e  $y$ .

3)  $f(x, y) = \sqrt{x^3 - y^3}$  es homogénea de grado 1 en  $x$  e  $y$

4)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$  es homogénea de grado cero en  $x$  e  $y$

5)  $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen} x \cdot \cos y$ , no es homogénea.

6)  $f(x, y) = e^x$ , no es homogénea.

b. **Ejercicios Propuestos:**

Determinar si las siguientes funciones son homogéneas o no.





entonces:  $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K M(x, y)$  y  $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K N(x, y)$  ... (2)

esto es porque la ecuación diferencial (1) es homogénea, haciendo;  $\lambda = \frac{1}{x}$  en la ecuación (2) se tiene:

$$M(1, \frac{y}{x}) = \frac{1}{x^K} M(x, y) \Rightarrow M(x, y) = x^K M(1, \frac{y}{x})$$

$$M(x, y) = x^K M(1, \frac{y}{x}) = x^K M(1, u) = x^K \psi(u), \text{ donde } u = \frac{y}{x}$$

es decir:  $M(x, y) = x^K \varphi(u), u = \frac{y}{x}$  ... (3)

$$N(1, \frac{y}{x}) = \frac{1}{x^K} N(x, y) \Rightarrow N(x, y) = x^K N(1, \frac{y}{x})$$

$$N(x, y) = x^K N(1, (\frac{y}{x})) = x^K N(1, u) = x^K N(1, u) = x^K \psi(u), u = \frac{y}{x}$$

es decir:  $N(x, y) = x^K \psi(u), u = \frac{y}{x}$  ... (4)

como  $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$  ... (5)

reemplazando (3), (4), (5) en (1) se tiene:

$$x^K \varphi(u) dx + x^K \psi(u)(u dx + x du) = 0, \text{ simplificando}$$

$\varphi(u) dx + \psi(u)(u dx + x du) = 0$ , agrupando y separando la variable se tiene:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)} du = 0, \text{ que es una ecuación diferencial de variable separable.}$$

Análogamente se hace para  $\lambda = \frac{1}{y}, u = \frac{x}{y}$

## e) Ejercicios Desarrollados

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$

Solución

Sea  $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$ , reemplazando en la ecuación diferencial.

$(x^2 + 3x^2u + x^2u^2)dx - x^2(u dx + x du) = 0$ , simplificando

$x^2(u^2 + 2u + 1)dx - x^3 du = 0$ , para  $x \neq 0$  se tiene:

$(u^2 + 2u + 1)dx - x du = 0$  de donde separando la variable  $\frac{dx}{x} - \frac{du}{(u+1)^2} = 0$ , integrando

se tiene:  $\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{(u+1)^2} = C$ , de donde  $\ln x + \frac{x}{y+x} = C$

②  $x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$(y + \sqrt{y^2 - x^2})dx - xdy = 0$  ... (1)

Sea  $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$  ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$(ux + \sqrt{u^2 x^2 - x^2})dx - x(udx + xdu) = 0$ , agrupando se tiene:

$x\sqrt{u^2 - 1}dx - x^2 du = 0$ , para  $x \neq 0$  y además  $u \neq \pm 1$ , se tiene:  $\frac{dx}{x} - \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = 0$ ,

integrando  $\int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = k$ , efectuando y simplificando:  $2Cy = C^2 x^2 + 1$

$$(3) \quad (x - y \operatorname{Ln} y + y \operatorname{Ln} x) dx + x(\operatorname{Ln} y - \operatorname{Ln} x) dy = 0$$

**Solución**

A la ecuación diferencial podemos escribir en la forma:

$$(x - y \ln(\frac{y}{x})) dx + x \ln(\frac{y}{x}) dy = 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{Sea } y = ux \Rightarrow dy = u dx + x du \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$(x - ux \operatorname{Ln} u) dx + x \operatorname{Ln}(u) (u dx + x du) = 0, \text{ agrupando y simplificando}$$

$$dx + x \operatorname{Ln}(u) du = 0, \text{ separando la variable: } \frac{dx}{x} + \operatorname{Ln} u du = 0,$$

$$\text{integrando } \int \frac{dx}{x} + \int \operatorname{Ln}(u) du = C,$$

$$\text{efectuando y simplificando } (x - y) \operatorname{Ln} x + y \operatorname{Ln} y = Cx + y$$

$$(4) \quad (x - y \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})) dx + x \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) dy = 0$$

**Solución**

Sea  $y = u x \Rightarrow dy = u dx + x du$ , reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$(x - ux \operatorname{arctg} u) dx + x \operatorname{arctg} u (u dx + x du) = 0,$$

$$\text{simplificando y separando las variables se tiene: } \frac{dx}{x} + \operatorname{arctg} u du = 0, \text{ integrando}$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \operatorname{arctg} u du = \ln C \Rightarrow \ln x + u \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) = \ln C$$

$$\text{Como } u = \frac{y}{x} \text{ entonces } 2y \cdot \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) = x \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) + C^2$$

$$\textcircled{5} \quad xe^{\frac{1}{x}} dx + ye^{\frac{1}{y}} dy = 0$$

**Solución**

Sea  $y = ux \Rightarrow dy = u dx + x du$ , reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$xe^{\frac{1}{x}} dx + uxe^{\frac{1}{x}}(u dx + x du) = 0$ , agrupando y simplificando  $(e^{\frac{1}{x}} + u^2 e^{\frac{1}{x}}) dx + xue^{\frac{1}{x}} du = 0$ , separando la variable.

$$\frac{dx}{x} + \frac{ue^{\frac{1}{x}} du}{e^{\frac{1}{x}} + u^2 e^{\frac{1}{x}}} = 0 \quad \text{integrando.} \quad \ln x = - \int \frac{te^t dt}{e^t + t^2 e^t} \quad \text{como } u = \frac{y}{x}$$

$$\text{entonces } \ln x = - \int \frac{te^t dt}{e^t + t^2 e^t}$$

$$\textcircled{6} \quad (y \cos(\frac{y}{x}) + x \sin(\frac{y}{x})) dx = \cos(\frac{y}{x}) dy$$

**Solución**

Sea  $y = ux \Rightarrow dy = u dx + x du$ , reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$(ux \cos u + x \sin u) dx = x \cos u (u dx + x du)$$

Agrupando y simplificando, se tiene:  $\sin u dx = x \cos u du$ , separando la variable

$$\frac{dx}{x} = c \operatorname{tg} u du \quad \text{integrando,} \quad \int \frac{dx}{x} = \int c \operatorname{tg} u du + \ln k \Rightarrow \ln x = \ln \sin u + \ln k$$

$$x = k \sin u, \quad \text{como } u = \frac{y}{x} \Rightarrow x = k \sin \frac{y}{x}$$

**f. EJERCICIOS PROPUESTOS.**

I. Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

$$\textcircled{1} \quad (4x^2 + xy - 3y^2) dx + (-5x^2 + 2xy + y^2) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad \ln x + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{y}{x} - 1 \right| + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{y}{x} - 2 \right| - \frac{5}{12} \ln \left| \frac{y}{x} + 2 \right| = c$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\phi(y/x)}{\phi'(y/x)}$$

$$\text{Rpta. } x = k\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(3) \quad xy' = 2(y - \sqrt{xy})$$

$$\text{Rpta. } 16xy = (y + 4x - cx^2)^2$$

$$(4) \quad \left(x \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) - y\right)dx + x dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \ln kx = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(5) \quad xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}$$

$$\text{Rpta. } \ln(x^2 k) = e^{\frac{y}{x}}$$

$$(6) \quad dy = \left(\frac{y}{x} - \operatorname{cosec}^2\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx$$

$$\text{Rpta. } 2y - x \operatorname{sen}\left(\frac{2y}{x}\right) + 4x \ln x = kx$$

$$(7) \quad 2(2x^2 + y^2)dx - xy dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^4 = c^2(4x^2 + y^2)$$

$$(8) \quad x^2 y' = 4x^2 + 7xy + 2y^2$$

$$\text{Rpta. } x^2(y + 2x) = c(y + x)$$

$$(9) \quad y dx = (x + \sqrt{y^2 - x^2})dy$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(ky)$$

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^3 y^3)}{x(2x^3 - 3y^3)}$$

$$\text{Rpta. } y^3 = cxe^{-\frac{2x^3}{3y^3}}$$

$$(11) \quad x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

$$\text{Rpta. } y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$$

$$(12) \quad y(x^2 + xy - 2y^2)dx + x(3y^2 - xy - x^2)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 2y^2 \ln\left(\frac{y^3}{x^2}\right) + 2xy + x^2 = cy^2$$

$$(13) \quad xy^2 dy + (x^3 - y^3)dx = 0$$

$$\text{Rpta. } y^3 = -3x^3 \ln x + cx^3$$

$$(14) \quad (6x^2 - 7y^2)dx - 14xy dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 2x^3 - 7xy^2 = c$$

$$(15) \quad y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

$$\text{Rpta. } c(y^2 - x^2) = y^3$$



- 16  $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$  **Rpta.**  $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^3 e^{\frac{y(\sqrt{y^2 - x^2})}{x^2}}$
- 17  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'(bx^2 + 2cxy + f y^2) = 0$  **Rpta.**  $f y^3 + 3cxy^2 + 3bx^2 y + ax^3 = k$
- 18  $y dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$  **Rpta.**  $\sqrt{\frac{x}{y}} + Lny = c$
- 19  $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y^2)dx + xydy = 0$  **Rpta.**  $x \ln|x| + \sqrt{x^2 + y^2} = cx$
- 20  $(x + (x - y)e^{\frac{y}{x}})dx + xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$  **Rpta.**  $x(1 + e^{\frac{y}{x}}) = k$
- 21  $(x + y \operatorname{sen}(\frac{y}{x}))dx - x \operatorname{sen}(\frac{y}{x})dy = 0$  **Rpta.**  $\ln x + \cos(\frac{y}{x}) = c$
- 22  $x^3 y' = y^3 + 3xy^2 + 4x^2 y + x^3$  **Rpta.**  $y = \frac{x}{\sqrt{c - 2 \ln x}} - x$
- 23  $(2xy + x^2)y' = 3y^2 + 2xy$  **Rpta.**  $y^2 + xy = cx^3$
- 24  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{sen}(\frac{y}{x})$  **Rpta.**  $\operatorname{cosec}(\frac{y}{x}) - c \operatorname{tg}(\frac{y}{x}) = kx$
- 25  $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$  **Rpta.**  $y^2 = cxe^{\frac{x^2}{y^2}}$
- 26  $x^2 y' = 3(x^2 + y^2) \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + xy$  **Rpta.**  $y = x \operatorname{tg}(kx^3)$
- 27  $xy^2 dy - (x^3 + y^3)dx = 0$  **Rpta.**  $y^3 = x^3(3 \ln x + c)$
- 28  $x \operatorname{sen}(\frac{y}{x}) \frac{dy}{dx} = y \operatorname{sen}(\frac{y}{x}) + x$  **Rpta.**  $\cos(\frac{y}{x}) + \ln(cx) = 0$
- 29  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$  **Rpta.**  $y + \sqrt{y^2 - x^2} = kx^2$

$$(30) \quad y^2 dx + (x\sqrt{y^2 - x^2} - xy) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y^2(x - 2c) + c^2 x = 0$$

$$(31) \quad 2x^3 \frac{dy}{dx} + (y^3 - x^2 y) = 0$$

$$\text{Rpta. } xy^2 = c(x^2 + y^2)$$

$$(32) \quad x^2 y' - y^2 + xy = x^2$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{x}{c - \ln x} + x$$

$$(33) \quad x^2 y' = y^2 + 3xy + 2x^2$$

$$\text{Rpta. } y = x \operatorname{tg}(\operatorname{Ln} x + c) - x$$

$$(34) \quad (x \operatorname{sen}(\frac{y}{x}) - y \operatorname{cos}(\frac{y}{x})) dx + x \operatorname{cos}(\frac{y}{x}) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x \operatorname{sen}(\frac{y}{x}) = k$$

$$(35) \quad y\sqrt{x^2 + y^2} dx - x(x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } cx - \sqrt{x^2 + y^2} = x \operatorname{Ln}(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$$

$$(36) \quad x \frac{dy}{dx} = y(\operatorname{Ln} y - \operatorname{Ln} x)$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{Ln}(\frac{y}{x}) = 1 + cx$$

$$(37) \quad y dx + x(\operatorname{Ln}(\frac{y}{x}) - 2) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y = c(1 + \operatorname{Ln}(\frac{x}{y}))$$

$$(38) \quad (x \operatorname{cos}(\frac{y}{x}) + y \operatorname{sen}(\frac{y}{x})) y dx + (x \operatorname{cos}(\frac{y}{x}) - y \operatorname{sen}(\frac{y}{x})) x dy = 0 \quad \text{Rpta. } xy \operatorname{cos}(\frac{y}{x}) = c$$

$$(39) \quad (x + ye^x) dx - xe^x dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y = x \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} |x| + C)$$

$$(40) \quad y(\operatorname{Ln}(\frac{y}{x}) + 1) dx - x \operatorname{Ln}(\frac{y}{x}) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{Ln} x - \frac{1}{2} \operatorname{Ln}^2(\frac{y}{x}) = c$$

$$(41) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{Ln} x + c = \int \frac{(u^2 + 1) du}{1 - u - u^2 - u^3}, \quad u = \frac{y}{x}$$

$$(42) \quad (x^3 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}) dx - xy \sqrt{x^2 + y^2} dy = 0$$

$$\text{Rpta. } (x^2 + y^2)^{3/2} = x^3 \operatorname{Ln}(kx^3)$$

$$(43) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{arc.tg}(y/x)$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{Ln} x = \int \frac{du}{\operatorname{arctg} u} + c, \quad u = \frac{y}{x}$$

- 44  $\sqrt{xy} \, dx = (x - y + \sqrt{xy}) \, dy$  **Rpta.**  $\sqrt{x-y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = ke^{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}}$
- 45  $\frac{x \, dy}{y \, dx} + \frac{3x^2 - y^2}{3y^2 - x^2} = 0$  **Rpta.**  $(x^2 + y^2)^2 = kxy$
- 46  $x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) - x$  **Rpta.**  $x = ke^{-\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)}$
- 47  $\frac{x \, dy}{y \, dx} + \frac{2x^3 - x^2y - y^3}{2y^3 - xy^2 - x^3} = 0$  **Rpta.**  $x^3 + y^3 = xy(x + y + c)$
- 48  $(\sqrt{x^2 - y^2} - y \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right)) \, dx + x \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) \, dy = 0$  **Rpta.**  $\ln x + \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right))^2 = k$
- 49  $(x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) + y) \, dx - x \, dy = 0$  **Rpta.**  $\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) = kx$
- 50  $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}) \, dx + (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}) \, dy = 0$  **Rpta.**  $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = c$
- 51  $(2x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) + y) \, dx = x \, dy$  **Rpta.**  $x^2 = k \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$
- 52  $(4x^2 + 3xy + y^2) \, dx + (4y^2 + 3xy + x^2) \, dy = 0$  **Rpta.**  $(x^2 + y^2)^3 (x + y)^2 = c$
- 53  $x \frac{dy}{dx} - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$  **Rpta.**  $\frac{y}{x} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln k \sqrt{x^2 + y^2}$
- 54  $xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}$  **Rpta.**  $\ln x = \frac{y}{x} (\ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1) + c$
- 55  $(x + \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)) \, dx - x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) \, dy = 0$  **Rpta.**  $\ln x + \cos \frac{y}{x} = c$
- 56  $y(x^2 + xy - 2y^2) \, dx + x(3y^2 - xy - x^2) \, dy = 0$  **Rpta.**  $2y^2 \ln\left(\frac{y^3}{2}\right) + 2xy + x^2 = cy^2$

(57)  $(x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2})dx - xy\sqrt{x^2 + y^2}dy = 0$  **Rpta.**  $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = x^3 \ln cx^3$

(58)  $(2x \operatorname{sen} \frac{y}{x} + 2x \operatorname{tg} \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x})dx + (x \cos \frac{y}{x} + x \sec^2 \frac{y}{x})dy = 0$

**Rpta.**  $x^2 (\operatorname{sen} \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}) = c$

(59)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

**Rpta.**  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln x + c$

(60)  $x(x^2 + y^2)dy = y(x^2 + y\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)dx$

**Rpta.**  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2 e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}}$

(61)  $xy^3 dy = (2y^4 + x^4)dx$

**Rpta.**  $kx^8 = x^4 + y^4$

(62)  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}$

**Rpta.**  $(x - y)e^{\frac{x}{y}} = c$

(63)  $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 5xy - 2y^2}{6x^2 - 8xy + y^2}$

**Rpta.**  $(y - x)(y - 3x)^9 = c(y - 2x)^{12}$

(64)  $x \frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2}$

**Rpta.**  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$

(65)  $x \frac{dy}{dx} = y + 2xe^{-y/x}$

**Rpta.**  $e^{\frac{y}{x}} = \ln kx^2$

(66) Demostrar que  $(x + y)^{a+b} (x - y)^{a-b} = k$  es la solución de la ecuación diferencial  $(ax - by) dx + (bx - ay) dy = 0$

(67)  $(x - y)(4x + y) dx + x(5x - y) dy = 0$

**Rpta.**  $x(y + x)^2 = c(y - 2x)$

(68)  $(3x^2 - 2xy - 3y^2)dx = 4xy dy$

**Rpta.**  $(y - x)(y + 3x)^3 = cx^3$

$$(69) \quad (x - y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}) dx + x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 2y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x \ln \frac{e^2(x^2 + y^2)}{x^4}$$

$$(70) \quad (y^3 - x^3) dx = xy(x dx + y dy)$$

$$\text{Rpta. } 2x^2 \ln(x + y) = cx^2 + 2xy - y^2$$

$$(71) \quad 4x^2 + xy - 3y^2 + (-5x^2 + 2xy + y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{Rpta. } (y - x)^8 (y - 2x)^9 = c(y + 2x)^5$$

$$(72) \quad x^3 y \frac{dy}{dx} = x^4 + 3x^2 y^2 + y^4$$

$$\text{Rpta. } y^2 = -x^2 \left( 1 + \frac{1}{\ln kx^2} \right)$$

$$(73) \quad (\sqrt{xy} - x) dx + y dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \ln x + \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}} = c$$

$$(74) \quad xy \frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3xy + 2y^2$$

$$(75) \quad (3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$$

II. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

$$(1) \quad (y - \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0, \quad y(\sqrt{3}) = 1$$

$$\text{Rpta: } x^2 = 9 - 6y$$

$$(2) \quad (xy' - y) \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) = x, \quad y(1) = 0$$

$$\text{Rpta: } \sqrt{x^2 + y^2} = e^x \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right)$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, \quad y(1) = -1$$

$$\text{Rpta: } y = -x$$

$$(4) \quad x \frac{dy}{dx} = xe^{\frac{y}{x}} + y, \quad y(1) = 0$$

$$\text{Rpta: } \ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 1$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{2xy - x^2}, \quad y(1) = 2$$

$$\text{Rpta: } xy(y - x) = 2$$

$$(6) \quad (x \cos^2 \left( \frac{y}{x} \right) - y) dx + x dy = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Rpta: } \operatorname{tg} \left( \frac{y}{x} \right) = \ln \left( \frac{e}{x} \right)$$



- 7)  $y^2 dx + (x^2 + 3xy + 4y^2) dy = 0, y(2) = 1$  **Rpta:**  $4(2y + x) \ln x = 2y - x$
- 8)  $y(x^2 + y^2) dx + x(3x^2 - 5y^2) dy = 0, y(2) = 1$  **Rpta:**  $2y^5 - 2x^2 y^3 + 3x = 0$
- 9)  $(3x^2 - 2y^2) y' = 2xy, y(0) = -1$  **Rpta:**  $x^2 = 2y^2(y + 1)$
- 10)  $(x^2 + 2xy - 2y^2) dx + (y^2 + 2xy - 2x^2) dy = 0, y(0) = 3$  **Rpta:**  $y^2 - xy + x^2 = 3(y + x)$
- 11)  $(y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0, y(0) = 1$  **Rpta:**  $y^3 = y^2 - x^2$
- 12)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x \cos^2(\frac{y}{x})}{x}, y(1) = \frac{\pi}{4}$  **Rpta:**  $1 + \ln x = \operatorname{tg}(\frac{y}{x})$
- 13)  $\frac{dy}{dx} = \sec(\frac{y}{x}) + (\frac{y}{x}), y(2) = \pi$  **Rpta:**  $y = x \operatorname{arc}. \operatorname{sen}(\ln 2x - 1)$
- 14)  $(x^3 + y^3) dx - xy^2 dy = 0, y(1) = 0$  **Rpta:**  $y^3 = 3x^3 \ln x$
- 15)  $(3x^2 + 9xy + 5y^2) dx - (6x^2 + 4xy) dy = 0, y(0) = -6$  **Rpta:**  $3x^4 + 4(y^2 + 3x - 3x^2) = 0$
- 16)  $(x^2 - 3y^2)x + 2xy dy = 0, y(2) = 2,$  **Rpta:**  $y = x \sqrt{1 - \frac{3x}{8}}$
- 17)  $(x^4 + y^4) dx = 2x^3 y dy, y(1) = 0$  **Rpta:**  $y^2 = \left(\frac{\ln |ex| - 1}{\ln |ex|}\right) x^2$
- 18)  $(x^2 + y^2) dx + xy dy = 0, y(1) = -1$  **Rpta:**  $x^4 + 2x^2 y^2 = 3$
- 19)  $(x^3 + y^3) dx = 2xy^2 dy, y(2) = 1$  **Rpta:**  $y^3 = x^3 - \frac{1}{4}(7\sqrt{2}xx)$
- 20)  $\frac{dy}{dx} = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, y(1) = 2$  **Rpta:**  $\operatorname{arctg}(\frac{y}{2x}) - 2 \ln |x| = \frac{\pi}{4}$

- 21)  $x \frac{dy}{dx} = xe^x + y, y(1) = 0$  **Rpta:**  $y = -x \ln |1 - \ln x|$
- 22)  $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0, y(1) = 0$  **Rpta:**  $x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4 = 1$
- 23)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xye^{\frac{x}{y}}}{y^2 + y^2e^{\frac{x}{y}} + 2x^2e^{\frac{x}{y}}}$  **Rpta:**  $y = k(1 + e^{\frac{x}{y}})^2$
- 24)  $(2xy + y^2)dx - 2x^2dy = 0, y = e, x = e$  **Rpta:**  $2x + y \ln x = 3y$
- 25)  $(x - 3y \operatorname{sen} \frac{y}{x})dx + 3x \operatorname{sen} \frac{y}{x} dy = 0, y(1) = \frac{\pi}{4}$
- 26) Resolver la ecuación diferencial  $(2x^2 + 3xy + 2y^2)dx - xy dy = 0$  de tal modo que la solución pasa por el punto P(1,0).
- 27)  $xy \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3, y(1) = 2$
- 28)  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \cosh(\frac{y}{x}), y(1) = 0$
- 29)  $y dx + [y \cos(\frac{x}{y}) - x]dy = 0, y(0) = 2$

**2.5. ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES HOMOGÉNEAS. A**

Las ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \dots (1)$$

No son homogéneas, porque tanto en el numerador como en el denominador aparecen dos constantes c y c', estas constantes se pueden eliminar mediante una traslación, transformando a la ecuación (1) en una ecuación diferencial homogénea, para esto consideremos las ecuaciones:

$$L_1: ax+by+c=0 \wedge L_2: a'x+b'y+c'=0 \quad \dots (2)$$

donde el punto de intersección es  $(h, k)$ . Si trasladamos el origen de coordenadas al punto  $(h, k)$  las ecuaciones de (2) se transforman en:

$$az'+b\omega=0 \wedge a'z+b'\omega=0 \quad \text{y haciendo el cambio } x=z+h, y=\omega+k$$

de donde  $dx=dz, dy=d\omega$ , se tiene de (1)

$$\frac{d\omega}{dz} = f\left(\frac{az+b\omega}{a'z+b'\omega}\right) = f\left(\frac{a+b\left(\frac{\omega}{z}\right)}{a'+b'\left(\frac{\omega}{z}\right)}\right) = F\left(\frac{\omega}{z}\right) \quad \dots (3)$$

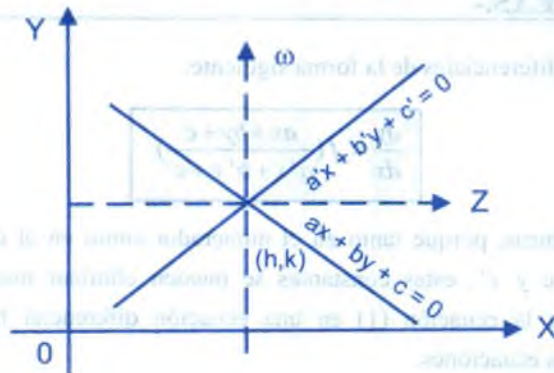
que es una ecuación diferencial homogénea.

Cuando  $L_1: ax+by+c=0; L_2: a'x+b'y+c'=0$  son paralelos no se aplica este método, sin embargo se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda \Rightarrow a = \lambda a', b = \lambda b', \text{ de donde se tiene:}$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) = f\left(\frac{\lambda(a'x+b'y)+c}{a'x+b'y+c'}\right) = g(a_2x+b_2y)$$

Que es una ecuación diferencial reducible a variable separable.



**OBSERVACIÓN:**

Otra forma de transformar a una ecuación diferencial homogénea, las ecuaciones diferenciales que no son homogéneas, es mediante la sustitución de la variable  $y = Z^x$ , ocurriendo esto cuando todos los términos de la ecuación son del mismo grado, atribuyendo el grado 1 a la variable  $x$ , el grado  $\alpha$  a la variable  $y$ , y el grado  $\alpha - 1$  a la derivada  $\frac{dy}{dx}$ . Además se puede transformar a homogénea mediante sustituciones adecuadas de acuerdo al problema.

**Ejemplos.-** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $(x - 4y - 9) dx + (4x + y - 2) dy = 0$

**Solución**

Sea  $L_1: x - 4y - 9 = 0 \wedge L_2: 4x + y - 2 = 0$ , como  $L_1 \nparallel L_2$

$\Rightarrow \exists p(h, k) \in L_1 \cap L_2$ , y para esto resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x - 4y - 9 = 0 \\ 4x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -2, \text{ es decir } P(1, -2)$$

Consideremos  $x = z + h$ ,  $y = \omega + k$  de donde

$$x = z + 1, y = \omega - 2, \text{ además } dx = dz, dy = d\omega$$

$$\text{reemplazando en la ecuación diferencial dada: } (z - 4\omega) dz + (4z + \omega) d\omega = 0 \dots (1)$$

que es una ecuación diferencial homogénea.

$$\text{Sea } z = u\omega \Rightarrow dz = u d\omega + \omega du \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) y simplificando se tiene:

$$(u^2 + 1)d\omega + (u - 4)\omega du = 0, \text{ separando la variable } \frac{d\omega}{\omega} + \frac{u - 4}{u^2 + 1} du = 0, \text{ integrando}$$

$$\int \frac{d\omega}{\omega} + \int \frac{u - 4}{u^2 + 1} du = C \Rightarrow \ln \omega^2 (u^2 + 1) - 8 \arctg u = k \dots (3)$$

Como  $z = u \omega \Rightarrow u = \frac{z}{\omega} = \frac{x-1}{y+2}$  reemplazando en (3)

$$\ln[(x-1)^2 + (y+2)^2] - 8 \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{y+2}\right) = k$$

② 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{x-y-1}$$

**Solución**

Sean  $L_1: x+3y-5=0 \wedge L_2: x-y-1=0$ , como  $L_1 \nparallel L_2$  entonces:

$\exists p(h,k) \in L_1 \cap L_2$ , y para esto resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+3y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow p(2,1)$$

Consideremos  $x = z + 2, y = \omega + 1, dx = dz, dy = d\omega$  ... (1)

a la ecuación diferencial dada expresaremos así:

$$(x+3y-5)dx - (x-y-1)dy = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{reemplazando (1) en (2) y simplificando: } (z+3\omega)dz - (z-\omega)d\omega = 0 \quad \dots (3)$$

es una ecuación diferencial homogénea:

Sea  $\omega = u z \Rightarrow d\omega = u dz + z du$ , de donde al reemplazar en (3) y separando la

variable, se tiene:  $\frac{dz}{z} + \frac{(u-1)du}{u^2+2u+1} = 0$ , integrando

$$\int \frac{dz}{z} + \int \frac{(u-1)du}{u^2+2u+1} = K \Rightarrow \ln C(x+y-3) = -2\left(\frac{x-2}{x+y-3}\right)$$

③ 
$$4xy^2 dx + (3x^2 y - 1) dy = 0$$

**Solución**

Sea  $y = z^\alpha \Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$ , reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$4x z^{2\alpha} dx + (3x^2 z^{2\alpha-1} - z^{\alpha-1}) \alpha dz = 0 \quad \dots (1)$$



Luego  $2\alpha + 1$  es el grado de  $4xz^{2\alpha}$

$2\alpha + 1$  es el grado de  $3x^2z^{2\alpha-1}$

$\alpha - 1$  es el grado de  $z^{\alpha-1}$

y para que la ecuación (1) sea homogénea debe cumplirse:

$$2\alpha + 1 = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = -2, \text{ como } y = z^\alpha \Rightarrow y = z^{-2} \Rightarrow dy = -2z^{-3} dz$$

$$4xz^{-4} dx + (3x^2z^{-2} - 1)(-2z^{-3}) dz = 0, \text{ de donde}$$

$$4xz dx - 2(3x^2 - z^2) dz = 0, \text{ que es una ecuación diferencial homogénea.}$$

Sea  $z = ux \Rightarrow dz = u dx + x du$ , reemplazando en la ecuación diferencial homogénea se tiene:

$$4x^2u dx - 2(3x^2 - u^2x^2)(u dx + x du) = 0$$

de donde simplificando y separando la variable se tiene:

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 3}{u^3 - u} du = 0, \text{ integrando se tiene:}$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{u^2 - 3}{u^3 - u} du = C \Rightarrow \ln x + 3 \ln u - \ln(u^2 - 1) = C$$

$$\text{como } u = \frac{z}{x}, y = z^{-2} \text{ se tiene: } y(1 - x^2y)^2 = K$$

④  $(y^4 - 3x^2)dy = -xy dx$

### Solución

$$\text{Sea } y = z^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$$

$$\text{reemplazando en la ecuación diferencial dada: } xz^\alpha dx + (z^{5\alpha-1} - 3x^2z^{\alpha-1})\alpha dz = 0 \dots (1)$$

para que la ecuación (1) sea homogénea debe cumplirse

$$\alpha + 1 = 5\alpha - 1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Como } y = z^\alpha \Rightarrow y = z^{1/2} \Rightarrow dy = \frac{1}{2} z^{-1/2} dz \quad \dots (2)$$

$$\text{reemplazando (2) en (1) y simplificando se tiene: } 2xz dx + (z^2 - 3x^2) dz = 0 \quad \dots (3)$$

que es una ecuación diferencial homogénea.

$$\text{Sea } z = ux \Rightarrow dz = u dx + x du \quad \dots (4)$$

reemplazando (4) en (3) simplificando y separando la variable

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 3}{u^3 - u} du = 0, \text{ integrando } \int \frac{dx}{x} + \int \frac{u^2 - 3}{u^3 - u} du = C \Rightarrow \ln x + \ln\left(\frac{u^3}{u^2 - 1}\right) = C$$

$$\text{como } u = \frac{z}{x}, y = \sqrt{z} \text{ se tiene: } \therefore x^2 = y^4 + Ky^6$$

5)  $y \cos x dx + (2y - \sin x) dy = 0$

### Solución

Sea  $z = \sin x \Rightarrow dz = \cos x dx$ , reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$y dz + (2y - z) dy = 0 \quad \dots (1)$$

Que es una ecuación diferencial homogénea.

$$\text{Sea } y = uz \Rightarrow dy = u dz + z du \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1), simplificando y separando la variable se tiene:

$$\frac{dz}{z} + \frac{2u-1}{2u^2} du = 0, \text{ integrando } \int \frac{dz}{z} + \int \frac{2u-1}{2u^2} du = C, \text{ de donde } 2 \cdot \ln y + \sin x = 2 cy$$

6)  $(2x^2 + 3y^2 - 7)x dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)y dy = 0$

### Solución

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ ,  $v = y^2 \Rightarrow dv = 2y dy$ ; reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$(2u + 3v - 7) \frac{du}{2} - (3u + 2v - 8) \frac{dv}{2} = 0, \text{ de donde}$$

$$(2u + 3v - 7) du - (3u + 2v - 8) dv = 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{Sean } L_1: 2u + 3v - 7 = 0 \wedge L_2: 3u + 2v - 8 = 0$$

como  $L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow \exists p(h, k) \in L_1 \cap L_2$  y para esto resolvemos el sistema siguiente

$$\begin{cases} 2u + 3v - 7 = 0 \\ 3u + 2v - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow p(2, 1)$$

Sean  $u = z + 2, v = \omega + 1$  reemplazando en (1)

$$(2z + 3\omega) dz - (3z + 2\omega) d\omega = 0 \quad \dots (2) \text{ que es homogénea.}$$

Sea  $\omega = zn \Rightarrow d\omega = z dn + n dz$ , reemplazando en (1), simplificando y separando la variable se tiene:  $2 \frac{dz}{z} + \frac{2n+3}{n^2-1} dn = 0$ , integrando

$$\int 2 \frac{dz}{z} + \int \frac{2n+3}{n^2-1} dn = K \Rightarrow \ln z^2 (n^2 - 1) + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{n-1}{n+1} \right| = K$$

$$\text{como } n = \frac{\omega}{z}, \omega = v - 1 = y^2 - 1, z = u - 2 = x^2 - 2$$

$$\therefore \ln |y^4 - x^4 + 4x^2 - 2y^2 - 3| + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{y^2 - x^2 + 1}{y^2 + x^2 - 3} \right| = K$$

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6}$  **Rpta.**  $\text{arctg}\left(\frac{y+5}{x-1}\right) = \ln \sqrt{(x-1)^2 + (y+5)^2} + C$

②  $(x - 2y + 5)dx + (2x - y + 4)dy = 0$  **Rpta.**  $y - x - 3 = K(x + y - 1)^3$

- 3  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y+1}$  **Rpta.**  $\arctg\left(\frac{y-1}{x}\right) = \ln\sqrt{x^2+(y-1)^2} + C$
- 4  $(x+y^3)+6xy^2y'=0$  **Rpta.**  $y^3 = \frac{cx^{-1/2}-x}{3}$
- 5  $3x+y-2+y'(x-1)=0$  **Rpta.**  $(x-1)(3x+2y-1)=K$
- 6  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$  **Rpta.**  $(x+y+1)^3 = K(y-x-3)$
- 7  $(-4x+3y-7)dx - (x+1)dy = 0$  **Rpta.**  $y-2x-3 = C(x+1)^3$
- 8  $(2x+3y)dx + (y+2)dy = 0$  **Rpta.**  $(2x+y-4)^2 = k(y-x-1)$
- 9  $(6x+4y-8)dx + (x+y-1)dy = 0$  **Rpta.**  $(y+3x-5)^2 = C(t+2x-3)$
- 10  $(3x+5y+6)dx = (7y+x+2)dy$  **Rpta.**  $(7y+3x+6)^7(y-x-2)^4 = k(x+2)^6$
- 11  $(3y-7x+7)dx - (3x-7y-3)dy = 0$  **Rpta.**  $(x+y-1)^5(x-y-1)^2 = C$
- 12  $(2x-4y)dx + (x+y-3)dy = 0$  **Rpta.**  $(y-2x+3)^3 = C(y-x+1)^2$
- 13  $(x-y+3)dx + (3x+y+1)dy = 0$  **Rpta.**  $y = 1-x + ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$
- 14  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x}{2x-y}$  **Rpta.**  $|y-x| = c|y+x|^3$
- 15  $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+3y+15}{2x+y+7}$  **Rpta.**  $|y+x+4||y+4x+13|^2 = k$
- 16  $(x-4y-9)dx + (4x+y-2)dy = 0$  **Rpta.**  $\ln((x-1)^2+(y+2)^2) - 8\arctg\left(\frac{x-1}{y+2}\right) = C$
- 17  $(x-4y-3)dx - (x-6y-5)dy = 0$  **Rpta.**  $(x-2y-1)^2 = C(x-3y-2)$

- 18)  $(x - 3y + 2)dx + 3(x + 3y - 4)dy = 0$  **Rpta.**  $\ln[(x-1)^2 + 9(y-1)^2] - 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{3(y-1)}\right) = C$
- 19)  $(x + 2y - 1)dx - (2x + y - 5)dy = 0$  **Rpta.**  $(x - y - 4)^3 = C(x + y - 2)$
- 20)  $(x + y - 4)dx - (3x - y - 4)dy = 0, y(4) = 1$  **Rpta.**  $2(x + 2y - 6) = 3(x - y) \ln\left(\frac{x - y}{3}\right)$
- 21)  $(2x - 3y + 4)dx + 3(x - 1)dy = 0, y(3) = 2$  **Rpta.**  $3(y - 2) = -2(x - 1) \ln\left(\frac{x - 1}{2}\right)$
- 22)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x + y - 1}$  **Rpta.**  $(2y - 3)^2 + 2(2y - 3)(2x + 1) + (2x + 1)^2 = K$
- 23)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y + 1}{x - 2y + 1}$  **Rpta.**  $\ln\left|\frac{w^4}{2z^2 + 2xw + w^2}\right| = \operatorname{arctg}\left(\frac{2z - w}{2z + w}\right)$   
 $w = y - \frac{1}{7}, z = x + \frac{5}{7}$
- 24)  $(4x + 3y + 2)dx + (5x + 4y + 1)dy = 0$  **Rpta.**  $4 \ln(x + y - 1) = \frac{x + 5}{x + y - 1} + C$
- 25)  $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$  **Rpta.**  $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$
- 26)  $(x - y + 4)dy + (x + y - 2)dx = 0$  **Rpta.**  $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$
- 27)  $(4x + 3y - 7)dx + (3x - 7y + 4)dy = 0$  **Rpta.**  $4x^2 + 6xy - 7y^2 - 14x + 8y = C$
- 28)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y + 1}{3x - 2y - 5}$  **Rpta.**  $\ln|(x-1)^2 + (y+1)^2| - 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{x-1}\right) = C$
- 29)  $(5x + 2y + 1)dx + (2x + y + 1)dy = 0$  **Rpta.**  $5x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 2y = C$
- 30)  $(x - 2y - 3)dx + (2x + y - 1)dy = 0$  **Rpta.**  $\ln(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2) + 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{x-1}\right) = C$



$$(31) \quad (2x - y - 1) dx + (3x + 2y - 5) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad \ln \sqrt{y^2 + xy - 3y - 3x + 3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y + x - 3}{\sqrt{3}(x-1)} = C$$

$$(32) \quad \frac{dy}{dx} = \left( \frac{x+y}{4x-4} \right)^2$$

$$\text{Rpta.} \quad x = 1 + ce^{\frac{4x-4}{x-4y-2}}$$

$$(33) \quad (9x + 7y - 5) dx + (5x + 4y - 3) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad \ln |14y^2 + 12xy + 9x^2 - 44y - 6x + 41| - \frac{\sqrt{10}}{15} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{10}}{14} \left( \frac{y-2}{x+1} + \frac{3}{7} \right) \right) = C$$

$$(34) \quad (4x + 11y - 42) dx + (11x - 9y - 37) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad 4x^2 + 22xy - 9y^2 - 84x - 74y = C$$

$$(35) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6x + y - 12}{6x - y - 12}$$

$$\text{Rpta.} \quad (y - 2x + 4)^4 = C(y - 3x + 6)^3$$

$$(36) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x - y - 1}$$

$$\text{Rpta.} \quad (x-1)^2 + y^2 = Ke^{2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x-1} \right)}$$

$$(37) \quad (4x + 3y + 2) dx + (5x + 4y + 1) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad 4 \ln |x + y - 1| = \frac{5}{x + y - 1} + C$$

$$(38) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{x+y-1}{x+2} \right)^2$$

$$\text{Rpta.} \quad 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y-3}{x+2} \right) = \ln(x+2) + K$$

$$(39) \quad (2x - 3y + 4) dx + 3(x - 1) dy = 0, \text{ cuando } x = 3, y = 2$$

$$\text{Rpta.} \quad 3(y-2) = -2(x-1) \ln \left( \frac{x-1}{2} \right)$$

II. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$(1) \quad y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad y^2 = x \ln cy^2$$

$$(2) \quad (x + y^3) dx + (3y^5 - 3y^2 x) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad \operatorname{arctg} \left( \frac{y^3}{x} \right) = \frac{1}{2} \ln |x^2 + y^6| + c$$

$$(3) \quad (y + y\sqrt{x^2 y^4 + 1})dx + 2x dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \sqrt{x^2 y^4 + 1} = cy^2 + 1$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 y + y^2}{2x^3 + 3xy}; \quad y(1) = 2$$

$$\text{Rpta. } x^3 y^2 + xy^3 = -4$$

$$(5) \quad (1 - xy^2)dx - 2x^2 y dy = 0$$

$$\text{Rpta. } xy^2 = \ln x + c$$

$$(6) \quad x^2(1 - xy)\frac{dy}{dx} + (1 + xy - x^2 y^2) = 0$$

$$\text{Rpta. } x^2 y^2 - 2xy - 2 \ln x = c$$

$$(7) \quad (2y^2 - 3x)dx + 2xy dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^2 y^2 - x^3 = c$$

$$(8) \quad (y^2 - 3x^2 y)dx + x^3 dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y(x - c) = x^3$$

$$(9) \quad 2(xy^2 + 1)dy + y^3 dx = 0$$

$$\text{Rpta. } xy^2 + 2 \ln y = c$$

$$(10) \quad (1 - x^2 y)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$$

$$\text{Rpta. } 1 - 2x^2 y = cy^2$$

$$(11) \quad y(3 - xy) dx + x(2 - xy) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^3 y^2 = ce^{-xy}$$

$$(12) \quad (x + 2x^2 y)dy + (2y + 3xy^2)dx = 0$$

$$\text{Rpta. } x^2 y(1 + xy) = c$$

$$(13) \quad (x^2 y + x)\frac{dy}{dx} + (xy^2 - y) = 0$$

$$\text{Rpta. } y = cxe^{-xy}$$

$$(14) \quad (x^2 - 2y^3)dx + 3xy^2 dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y^3 = x^2(c - \ln x)$$

$$(15) \quad (x + y^3)dx + 6xy^2 dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y^3 = -\frac{x}{3} + Kx^{\frac{1}{2}}$$

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$$

$$\text{Rpta. } x + \sqrt{x^2 - y^2} = c$$

$$(17) \quad (2 + 3xy^2)dx - 4x^2 y dy = 0 \quad \text{sug. } y = vx^n$$

$$\text{Rpta. } 2 + 5xy^2 = cx^{\frac{5}{2}}$$

18)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x^2}\right)$  sug.  $y = vx^2$       Rpta.  $x^2 \cos \frac{y}{x^2} + y \operatorname{sen} \frac{y}{x} = cx^3$

19)  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^5 + 3x^2 y^2}{2x^3 y - 2y^3}$  (sug.  $x = u^p, y = v^q$ )      Rpta.  $\frac{1}{2} \ln|x^6 + y^4| + \operatorname{arc.tg}\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = c$

20)  $(x+y)^2(x dy - y dx) + [y^2 - 2x^2(x+y)^2](dx + dy) = 0$ , sug.  $z = x + y, u = \frac{y}{x}$   
 Rpta.  $(y - x^2 - xy)(x+y)^3 = c(y + 2x^2 + 2xy)$

21)  $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 y + y^2}{2x^3 + 3xy}$ ,  $y(1) = -2$       Rpta.  $x^3 y^2 + xy^3 = -4$

22)  $(y^2 - \ln x)dx + xy^3 dy = 0$ , sug.  $x = e^u, y = \sqrt{z}$   
 Rpta.  $(3 - \sqrt{3}) \ln|y^2 + (1 - \sqrt{3}) \ln x| + (3 + \sqrt{3}) \ln|y^2 + (1 + \sqrt{3}) \ln x| = c$

23)  $x^2 y dx - (x^3 + y^5) dy = 0$ , sug.  $x = uy$       Rpta.  $3y^5 - 2x^3 = cy^3$

24)  $x(x + \sqrt{y})dx + 2\sqrt{y} dy = 0$ ; sug.  $y = u^2$       Rpta.  $\ln x + 4 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t^2 dt}{4t^3 + t + 1} = c$

25)  $(3 \operatorname{tg} x - 2 \cos y) \sec^2 x dx + \operatorname{tg} x \operatorname{sen} y dy = 0$       Rpta.  $\cos y \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^3 x + c$

26) Pruébese que con la ayuda de la sustitución  $y = ux$ , podemos resolver cualquier ecuación de la forma  $y^n f(x)dx + H(x, y)(y dx - x dy) = 0$  donde  $H(x, y)$  es función homogénea en  $x$  e  $y$ .

27)  $(x^2 y^3 + x^4 y^4 + x^4 y + x^2 y^4 + y^4 + y^5)dx - (x^3 y^2 + x^3 + xy^4)dy = 0$

Rpta.  $x^4 y^3 + 3x^2 y^3 - 3y^3 - 3y^4 + 3x^2 y^2 + x^4 = Kxy^3$

$$(28) \quad (x^3 y^4 + x^5 y^5 + x^5 y^2 + x^3 y^5 + y^5 + y^7) dx - (x^4 y^3 + x^6 y + xy^6) dy = 0$$

$$\text{Rpta.} \quad \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2x^2} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3y^3} = c$$

$$(29) \quad \text{Demostrar que la ecuación diferencial } \frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By^n}{y^{n-1}(A'x + B'y^m)} \text{ se puede transformar en}$$

una ecuación diferencial homogénea, haciendo el cambio de variable  $u = y^m$ .

$$(30) \quad \text{Demostrar que la ecuación diferencial } \frac{dy}{dx} = \frac{x^{m-1}(Ay + Bx^m)}{A'y + B'x^m}, \text{ se puede transformar en}$$

una ecuación diferencial homogénea, haciendo el cambio de variable  $u = y^m$ .

$$(31) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{2xy}, \text{ sug: } z = y^2 \quad \text{Rpta. } x = Ke^{-\frac{y^2}{x}}$$

$$(32) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 y + x^5}{y - x^3}, \text{ sug: } z = x^3 \quad \text{Rpta. } 3y^2 - 6yx^3 - x^6 = c$$

$$(33) \quad (2xy - 4x^3) dx - (2y - x^2) dy = 0 \quad \text{Rpta. } y^2 - x^2 y + x^4 = c$$

$$(34) \quad 3 \frac{dy}{dx} = \frac{y + \frac{x}{y^2}}{3y^3 - x} \quad \text{Rpta. } x^2 + 2xy^3 - 3y^6 = c$$

$$(35) \quad (4xy^{\frac{1}{2}} - 6y) + (4y^{\frac{1}{2}} - 3x) dy = 0, \text{ sug. } z = y^{\frac{1}{2}} \quad \text{Rpta. } x^2 - 3xy^{\frac{1}{2}} + 2y = C$$

$$(36) \quad 2 \frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - xy^5}{xy^2 + 1} \quad \text{Rpta. } x^2 - \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y^4} = c$$

$$(37) \quad 2 \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 4\sqrt{x}}{x - 2y\sqrt{x}} \quad \text{Rpta. } 2x + y\sqrt{x} - y^2 = c$$

$$(38) \quad (2x - y^4)dx - 4y^3(x + 12y^4)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^2 - xy^4 - 6y^8 = c$$

$$(39) \quad (xy^2 + y)dx - x dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^2 y + 2x = cy$$

$$(40) \quad (x - y^2)dx + 2xydy = 0,$$

$$\text{Rpta. } xe^{y^3/x} = K$$

$$(41) \quad (3x^5 + 3x^2y^2)dx + (2y^3 - 2x^3y)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \ln(x^3 + y^2) - 2 \arctg \frac{y^2}{x^3} = k$$

## 2.6. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EXACTAS.-

### a) DIFERENCIAL TOTAL:

Si  $f: R^2 \rightarrow R$ , es una función diferenciable en  $(x, y) \in R^2$ , entonces la diferencial total de  $f$  es la función  $df$ , cuyo valor está dado por:

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

### b) DIFERENCIAL EXACTA:

Una expresión de la forma  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ , se denomina exacta si existe una función  $f: D \subset R^2 \rightarrow R$  tal que:

$$df(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

Es decir, que toda expresión que es la diferencial total de alguna función de  $x$  e  $y$  se llama diferencial exacta.

### c) DEFINICIÓN:

Consideremos la ecuación diferencial.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \dots (\alpha)$$

Si existe una función  $z = f(x, y)$  tal que:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \wedge \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

diremos que la ecuación  $(\alpha)$  es una ecuación diferencial exacta.



**d) TEOREMA:**

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial

$M(x,y) dx + N(x,y)dy = 0$ , sea exacta, es que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

**Ejemplo:** La ecuación diferencial ordinaria.

$(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$  es exacta porque:

$$M(x,y) = e^x \sin y - 2y \sin x \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2 \sin x$$

$$N(x,y) = e^x \cos y + 2 \cos x \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y - 2 \sin x$$

de donde  $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

**e) Solución de una Ecuación Diferencial Exacta:**

Consideremos la ecuación diferencial exacta.

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \quad \dots (1)$$

Entonces existe una función  $f(x,y)$  tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = 0 \quad \dots (3)$$

por otra parte, si  $z = f(x,y)$  entonces su diferencial total es:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad \dots (4)$$

Luego al comprobar (3) y (4) se tiene:  $dz = 0 \Rightarrow z = c$ , es decir  $f(x, y) = c$

Que es la solución de la ecuación diferencial.

Como  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$  integramos con respecto a  $x$ .

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) \quad \dots (\alpha)$$

donde  $g(y)$  es la constante de integración, que es una función que depende sólo de la variable  $y$ , puesto que la integración es con respecto a  $x$ , derivando la ecuación

( $\alpha$ ) con respecto a  $y$  es decir:  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y)$

Como  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$  entonces se tiene:  $N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y)$

de donde  $g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$ , integrando

$$g(y) = \int [N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx] dy + K_1 \dots (\beta)$$

Reemplazando ( $\beta$ ) en ( $\alpha$ ) se tiene la solución general de la ecuación diferencial (1);

en forma análoga se hace para el otro caso cuando se toma  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$  y se

integre con respecto a la variable  $y$ .

**f) Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

①

$$(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$$

**Solución**

$$\begin{cases} M(x, y) = 2xy^2 + 2y \\ N(x, y) = 2x^2y + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 4xy + 2 \\ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 4xy + 2 \end{cases} \quad \text{de donde } \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

por lo tanto la ecuación diferencial es exacta;

entonces  $\exists f(x, y)$ , tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ , de donde

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy^2 + 2y, \text{ integrando respecto a } x \text{ se tiene: } f(x, y) = \int (2xy^2 + 2y)dx + g(y)$$

$f(x, y) = x^2y^2 + 2xy + g(y)$  derivando respecto a  $y$ .

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x^2y + 2x + g'(y), \text{ pero como } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

se tiene  $N(x, y) = 2x^2y + 2x + g'(y)$

$$2x^2y + 2x + g'(y) = 2x^2y + 2x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

$$f(x, y) = x^2y^2 + 2xy + c \quad \therefore x^2y^2 + 2xy = K$$

$$(2) \quad (e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$$

### Solución

$$\begin{cases} M(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x \\ N(x, y) = e^x \cos y + 2 \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2 \sin x \\ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = e^x \cos y - 2 \sin x \end{cases}$$

de donde  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ , por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces

existe una función  $f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ . Luego tenemos

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^x \sin y - 2y \sin x, \text{ integrando respecto a } x.$$

$$f(x, y) = \int (e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x) dx + g(y)$$

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x + g(y), \text{ derivando respecto a } y.$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^x \cos y + 2 \cos x + g'(y), \text{ como } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\text{entonces } N(x, y) = e^x \cos y + \cos x + g'(y)$$

$$e^x \cos y + 2 \cos x + g'(y) = e^x \cos y + 2 \cos x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

$$\text{Luego } f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x + c$$

$$\textcircled{3} \quad (2xy^3 + y \cos x)dx + (3x^2y^2 + \operatorname{sen} x)dy = 0$$

### Solución

$$\begin{cases} M(x, y) = 2xy^3 + y \cos x \\ N(x, y) = 3x^2y^2 + \operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 6xy^2 + \cos x \\ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 6xy^2 + \cos x \end{cases}$$

de donde  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ , por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces,

existe una función  $f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ . Luego tenemos:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy^3 + y \cos x, \text{ integrando respecto a } x.$$

$$f(x, y) = \int (2xy^3 + y \cos x) dx + g(y), \text{ de donde}$$

$$f(x, y) = x^2y^3 + y \operatorname{sen} x + g(y), \text{ derivando respecto a } y.$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + \operatorname{sen} x + g'(y), \text{ como } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

entonces  $N(x, y) = 3x^2y^2 + \operatorname{sen} x + g'(y)$ ; de donde

$$3x^2y^2 + \operatorname{sen} x + g'(y) = 3x^2y^2 + \operatorname{sen} x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

Luego  $f(x, y) = x^2y^3 + y \operatorname{sen} x + c \quad \therefore x^2y^3 + y \operatorname{sen} x = K$

④

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

### Solución

$$\begin{cases} M(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ N(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

de donde  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ , por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces

existe una función  $f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ . Luego tenemos:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ integrando respecto a } x.$$

$$f(x, y) = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + g(y)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln x + \frac{x}{y} + g(y), \text{ derivando respecto a } y.$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y^2} + g'(y) \text{ como } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

entonces  $N(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y^2} + g'(y)$ ; de donde



$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y^2} + g'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(y) = \ln y + c$$

$$\text{Luego } f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln x + \frac{x}{y} + \ln y + c \quad \therefore \sqrt{x^2+y^2} + \ln xy + \frac{x}{y} = K$$

$$\textcircled{5} \quad (\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$$

### Solución

$$\begin{cases} M(x,y) = \sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \\ N(x,y) = x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos y + \sin x \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos y + \sin x \end{cases}$$

de donde  $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ , por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces

existe una función  $f(x,y)$  tal que  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ .

Luego tenemos  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sin y + y \sin x + \frac{1}{x}$ , integrando respecto a  $x$ .

$$f(x,y) = \int (\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + g(y)$$

$f(x,y) = x \sin y - y \cos x + \ln x + g(y)$ , derivando respecto a  $y$ .

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \cos y - \cos x + g'(y) \text{ como } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y), \text{ entonces}$$

$N(x,y) = x \cos y - \cos x + g'(y)$ , de donde

$$x \cos y - \cos x + g'(y) = x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow g(y) = \ln y + c$$

Luego  $f(x,y) = x \operatorname{sen} y - y \cos x + \ln x + \ln y + c$

$$\therefore x \operatorname{sen} y - y \cos x + \ln xy = K$$

⑥  $\left(\frac{y}{1+x^2} + \operatorname{arc.} \operatorname{tg} y\right) dx + \left(\frac{x}{1+y^2} + \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x\right) dy = 0$

**Solución**

$$\begin{cases} M(x,y) = \frac{y}{1+x^2} + \operatorname{arc.} \operatorname{tg} y \\ N(x,y) = \frac{x}{1+y^2} + \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

de donde  $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ , por lo tanto la ecuación diferencial es exacta, entonces

existe una función  $f(x,y)$  tal que  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ .

Luego tenemos:  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2} + \operatorname{arctg} y$  integrando respecto a  $x$ .

$$f(x,y) = \int \left(\frac{y}{1+x^2} + \operatorname{arc.} \operatorname{tg} y\right) dx + g(y), \text{ efectuando.}$$

$f(x,y) = y \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x + x \operatorname{arc.} \operatorname{tg} y + g(y)$ , derivando respecto a  $y$ .

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x + \frac{x}{1+y^2} + g'(y) \quad \text{Como} \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

entonces  $N(x,y) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+y^2} + g'(y)$ , de donde

$$\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+y^2} + g'(y) = \frac{x}{1+y^2} + \operatorname{arctg} x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

Luego  $f(x,y) = y \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x + x \operatorname{arc.} \operatorname{tg} y + c$

$$\therefore y \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x + x \operatorname{arc.} \operatorname{tg} y = K$$

**g. EJERCICIOS PROPUESTOS.**

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en caso de ser exactas:

- ①  $(2xy - \operatorname{tg} y)dx + (x^2 - x \sec^2 y)dy = 0$  **Rpta:**  $x^2 y - x \operatorname{tg} y = K$
- ②  $(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - x e^y)dy = (e^y + \cos x \cos y)dx$  **Rpta:**  $x e^y + \cos y \operatorname{sen} x = K$
- ③  $(y + y \cos xy) dx + (x + x \cos xy) dy = 0$  **Rpta:**  $xy + \operatorname{sen} xy = K$
- ④  $(\frac{y}{x} + 6x)dx + (Lnx - 2)dy = 0$  **Rpta:**  $y \ln x + 3x^2 - 2y = K$
- ⑤  $(\cos 2y - 3x^2 y^2)dx + (\cos 2y - 2x \operatorname{sen} 2y - 2x^3 y)dy = 0$   
**Rpta:**  $\frac{\operatorname{sen} 2y}{2} + x \cos 2y - x^3 y^2 = c$
- ⑥  $e^x(x^2 e^x + e^x + xy + y)dx + (x e^x + y)dy = 0$   
**Rpta:**  $x y e^x + \frac{y^2}{2} + \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 3)x = c$
- ⑦  $(1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2 y + y + 2xy)dx = 0$  **Rpta:**  $2x + y^2(1 + x)^2 = c$
- ⑧  $(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3})dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2})dy = 0$  **Rpta:**  $x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = c$
- ⑨  $(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y})dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}dy$  **Rpta:**  $x^3 y + x^2 - y^2 = cxy$
- ⑩  $(\frac{\operatorname{sen} 2x}{y} + x)dx + (y - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y^2})dy = 0$  **Rpta:**  $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = c$
- ⑪  $(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x})dx + (\sqrt{1+x^2} + x^2 - Lnx)dy = 0$   
**Rpta:**  $y\sqrt{1+x^2} + x^2 y - yLnx = c$

- 12)  $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$  **Rpta:**  $4xy - x^4 + y^4 = c$
- 13)  $(y + y \cos xy) dx + (x + x \cos xy) dy = 0$  **Rpta:**  $xy + \operatorname{sen} xy = c$
- 14)  $(x-1)^{-1} y dx + [\ln(2x-2) + \frac{1}{y}] dy = 0$  **Rpta:**  $y \ln |2x-2| + \ln y = c$
- 15)  $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$  **Rpta:**  $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$
- 16)  $(9x^2 + y - 1) - (4y - 1) \frac{dy}{dx} = 0$  **Rpta:**  $3x^3 + xy - x - 2y^2 = c$
- 17)  $(y \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y) dx - (x \cos y + \cos x) dy = 0$  **Rpta:**  $x \operatorname{sen} y + y \cos x = c$
- 18)  $(3x^2 + 3xy^2)dx + (3x^2y - 3y^2 + 2y)dy = 0$  **Rpta:**  $x^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3 + y^2 = c$
- 19)  $\frac{2x}{y} dy + (2 \ln 5y + \frac{1}{x}) dx = 0$  **Rpta:**  $\ln x + 2x \ln y = c$
- 20)  $e^{x^2} (dy + 2xy dx) = 3x^2 dx$  **Rpta:**  $ye^{x^2} = x^3 + c$
- 21)  $e^{-2x} (dy + 2y dx) = x^2 dx$  **Rpta:**  $3ye^{-2x} = x^3 + c$
- 22)  $y^3 \operatorname{sen} 2x dx - 3y^2 \cos^2 x dy = 0$  **Rpta:**  $y^3(1 + \cos 2x) = c$
- 23)  $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)dy = 0$   
**Rpta:**  $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$
- 24)  $(ax^2 + 2bxy + cy^2)dx + (bx^2 + 2cxy + y^2)dy = 0$  **Rpta:**  $ax^3 + 3bx^2y + 3cy^2 + y^3 = c$
- 25)  $(x^2 + ye^{2y})dx + (2xy + x)e^{2y} dy = 0$  **Rpta:**  $x^3 + 3xye^{2y} = K$
- 26)  $(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) dx + (x \cos y + \cos y) dy = 0$  **Rpta:**  $(x + 1) \operatorname{sen} y - \cos x = K$

- 27)  $e^x(y^3 + xy^3 + 1)dx + 3y^2(xe^x - 6)dy = 0$  **Rpta:**  $xe^x y^3 + e^x - 6y^3 = c$
- 28)  $4x^3 - e^{xy}(y + xy') = 0$  **Rpta:**  $x^4 - e^{xy} = c$
- 29)  $dx = \frac{ydx}{1-x^2y^2} + \frac{x}{1-x^2y^2} dy$  **Rpta:**  $\frac{1+xy}{1-xy} = Ke^{2x}$
- 30)  $(3x^2 + 6xy - y^2)dx + (3x^2 - 2xy + 2y^2)dy = 0$  **Rpta:**  $x^3 + 3x^2y - xy^2 + y^3 = c$
- 31)  $[\ln(x-y) + \frac{x+y}{x-y}]dx + [\ln(x-y) - \frac{x+y}{x-y}]dy = 0$  **Rpta:**  $(x+y) \ln(x-y) = c$
- 32)  $(\frac{y}{x} + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + \ln x)dy = 0$  **Rpta:**  $y \ln x + x \ln y = c$
- 33)  $\sec x(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + y \sec x)dx + (\sec x \sec^2 y + \operatorname{tg} x)dy = 0$  **Rpta:**  $\sec x \operatorname{tg} y + y \operatorname{tg} x = c$
- 34)  $(1 + \operatorname{tg}(xy))dx + (\sec(xy) \operatorname{tg}(xy) + x \sec^2(xy))(x dy + y dx) = 0$   
**Rpta:**  $x + \sec(xy) + x \operatorname{tg}(xy) = c$
- 35)  $(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)dx + 2xy(10y^2 - 3x^2)dy = 0$  **Rpta:**  $x^5 - 3x^3y^2 + 5xy^4 = K$
- 36)  $(1 + \ln xy)dx + (1 + \frac{x}{y})dy = 0$  **Rpta:**  $x \ln(xy) + y = K$
- 37)  $(ye^x + e^y)dx + (e^x + xe^y)dy = 0$  **Rpta:**  $ye^x + xe^y = K$
- 38)  $y(\frac{1}{2} - \frac{1}{(x-y)^2})dx + x(\frac{1}{2} + \frac{1}{(x-y)^2})dy = 0$  **Rpta:**  $\frac{xy}{2} + \frac{y}{x-y} = K$
- 39)  $y(e^{xy} + y)dx + x(e^{xy} + 2y)dy = 0$  **Rpta:**  $e^{xy} + xy^2 = K$
- 40)  $\frac{y}{x}dy - (\frac{y^2}{2x^2} + x)dx = 0$  **Rpta:**  $y^2 - x^3 = cx$



- 41)  $(xy^2 - y)dx + x(xy - 1)dy = 0$  **Rpta:**  $\ln(Kxy) = -\frac{1}{xy}$
- 42)  $(\cos x \cdot \cos y - \operatorname{ctg} x) dx - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y dy = 0$  **Rpta:**  $\operatorname{sen} x \cos y = \ln(K \operatorname{sen} x)$
- 43)  $2ydx + 3xdy = \frac{dx}{xy^3} - \frac{dy}{y^4}$  **Rpta:**  $x^2 y^3 = \frac{x}{y} + c$
- 44)  $(2x + y \cos xy) dx + x \cos xy dy = 0$  **Rpta:**  $x^2 + \operatorname{sen}(xy) = c$
- 45)  $(2xy + 1 + \ln x)dx + x^2 dy = 0$  **Rpta:**  $x(xy + \ln x) = K$
- 46)  $(2ye^{2x} + 2x \cos y)dx + (e^{2x} - x^2 \operatorname{sen} y)dy = 0$  **Rpta:**  $ye^{2x} + x^2 \cos y = c$
- 47)  $(2xy + x^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$  **Rpta:**  $\frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + x^2 y = c$
- 48)  $(2xe^y + y^2 e^x + 2x)dx + (x^2 e^y + 2ye^x)dy = 0$  **Rpta:**  $x^2 e^y + y^2 e^x + x^2 = c$
- 49)  $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$  **Rpta:**  $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$
- 50)  $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)dy = 0$   
**Rpta:**  $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$
- 51)  $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2 y + 2x)dy = 0$  **Rpta:**  $x^2 y^2 + 2xy = c$
- 52)  $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xy dy = 0$  **Rpta:**  $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = c$
- 53)  $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2 y - y^2)dy = 0$  **Rpta:**  $\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2 y^2}{2} + 2x + \frac{y^3}{3} = c$
- 54)  $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$  **Rpta:**  $x^2 - y^2 = cy^3$
- 55)  $yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy = 0$  **Rpta:**  $x^y = c$

56  $(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$  **Rpta:**  $x \sin y - y \cos x + \ln xy = c$

57  $\frac{y + \sin x \cdot \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + (\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y)dy = 0$  **Rpta:**  $\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = c$

58  $(\frac{1}{y} \operatorname{sen} \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos(\frac{y}{x}) + 1)dx + (\frac{1}{x} \cos(\frac{y}{x}) - \frac{x}{y^2} \operatorname{sen}(\frac{x}{y}) + \frac{1}{y^2})dy = 0$

**Rpta:**  $\operatorname{sen}(\frac{y}{x}) - \cos(\frac{x}{y}) + x - \frac{1}{y} = c$

59  $(1 + e^y)dx + e^y(1 - \frac{x}{y})dy = 0$

**Rpta:**  $x + ye^y = c$

60  $cx(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$

**Rpta:**  $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = c$

61  $[\operatorname{ncos}(nx + my) - m \operatorname{sen}(mx + ny)]dx + [m \operatorname{cos}(nx + my) - n \operatorname{sen}(mx + ny)]dy = 0$

**Rpta:**  $\operatorname{sen}(nx + my) + \operatorname{cos}(mx + ny) = c$

62  $(x+3)^{-1} \operatorname{cos} y dx - (\operatorname{sen} y \cdot \ln(5x+15) - \frac{1}{y})dy = 0$  **Rpta:**  $\operatorname{cos} y \cdot \ln(5x+15) + \ln y = c$

63  $\frac{y^2 - 2x^2}{xy^2 - x^3} dx + \frac{2y^2 - x^2}{y^3 - x^2 y} dy = 0$

**Rpta:**  $x^2 y^2 (x^2 - y^2) = c$

64  $\frac{3y}{x^2 + 3x} dx + (2y \ln(\frac{5x}{x+3}) + 3 \operatorname{sen} y)dy = 0$

**Rpta:**  $y^2 \ln(\frac{5x}{x+3}) - 3 \operatorname{cos} y = c$

65  $(\operatorname{cos} 2y - 3x^2 y^2)dx + (\operatorname{cos} 2y - 2x \operatorname{sen} 2y - 2x^3 y)dy = 0$

**Rpta:**  $2x \operatorname{cos} 2y - 2x^3 y^2 + \operatorname{sen} 2y = c$

66  $(\frac{y}{x} - \ln y)dx + (\ln x - \frac{x}{y})dy = 0$

**Rpta:**  $y \ln x - x \ln y = c$

(67)  $(x^3 + e^x \operatorname{sen} y + y^3)dx + (3xy^2 + e^x \cos y + y^3)dy = 0$   
**Rpta:**  $x^4 + y^4 + 4xy^3 + 4e^x \operatorname{sen} y = K$

(68)  $[\ln(\ln(x-y)) + \frac{1}{\ln(x-y)} \cdot \frac{x}{x-y}]dx - [\frac{1}{\ln(x-y)} \cdot \frac{x}{x-y}]dy = 0$  **Rpta:**  $x \ln(\ln(x-y)) = K$

(69)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y \cos x}{\operatorname{sen} x + y}$  **Rpta:**  $x^2 - y^2 - 2y \operatorname{sen} x = c$

(70)  $(x^2 + \frac{y}{x})dx + (\ln x + 2y)dy = 0$  **Rpta:**  $x^3 + 3y \ln x + 3y^2 = c$

II. Resolver las ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

(1)  $3y(x^2 - 1)dx + (x^3 + 8y - 3x)dy = 0$ ,  $y(0) = 1$  **Rpta:**  $xy(x^2 - 3) = 4(1 - y^2)$

(2)  $(1 - xy)^{-2} dx + [y^2 + x^2(1 - xy)^{-2}]dy = 0$ , cuando  $x = 2, y = 1$   
**Rpta:**  $xy^4 - y^3 + 5xy - 3x = 5$

(3)  $(xy^2 + x - 2y + 3)dx + x^2 y dy = 2(x + y)dy$ , cuando  $x = 1, y = 1$   
**Rpta:**  $(xy - 2)^2 + (x - 3)^2 = 2y^2 + 15$

(4)  $(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$ ,  $y(0) = 2$  **Rpta:**  $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$

(5)  $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ ,  $y|_{x=1} = 1$  **Rpta:**  $y = x$

(6)  $(4x - 2y + 3) dx + (5y - 2x + 7) dy$ ,  $y(1) = 2$  **Rpta:**  $4x^2 - 4xy + 5y^2 + 6x = 5$

(7)  $(2x \operatorname{sen} y + 2x + 3y \cos x)dx + (x^2 \cos y + 3 \operatorname{sen} x)dy = 0$  cuando  $x = \frac{\pi}{2}, y = 0$   
**Rpta:**  $x^2 \operatorname{sen} y + x^2 + 3y \operatorname{sen} x = \frac{\pi^2}{4}$

8  $(ye^{2x} - 3xe^{2y})dx + (\frac{e^{2x}}{2} - 3x^2e^{2y} - e^y)dy = 0, y(1) = 0$

**Rpta:**  $ye^{2x} - 3x^2e^{2y} - 2e^y + 5 = 0$

9  $(2xy - 3)dx + (x^2 + 4y)dy = 0, y(1) = 2,$  **Rpta:**  $x^2y - 3x + 2y^2 = 7$

10  $(2y \operatorname{sen} x \cos x + y^2 \operatorname{sen} x)dx + (\operatorname{sen}^2 x - 2y \cos x)dy = 0, y(0) = 3$

**Rpta:**  $y^2 \cos x - y \operatorname{sen}^2 x = 9$

11  $\frac{3-y}{x^2}dx + \frac{y^2-2x}{xy^2}dy = 0, y(-1) = 2$  **Rpta:**  $-3y + 2x + y^2 = 2xy$

12  $(3x^2y^2 - y^3 + 2x)dx + (2x^3y - 3xy^2 + 1)dy = 0, y(-2) = 1$

### III.

1 Demostrar que la ecuación diferencial homogénea  $(Ax + By) dx + (Cx + Dy) dy = 0$  es exacta si y solo si  $B = C$ .

2 Demostrar que la ecuación homogénea  $(Ax^2 + Bxy + Cy^2) + (Dx^2 + Exy + Fy^2)dy = 0$  es exacta si y solo si  $B = 2D$  y  $E = 2C$ .

3 Determinar los valores de  $a$  y  $b$  para que la ecuación diferencial sea exacta y resolverla

a)  $(y + x^3)dx + (ax + by^3)dy = 0$  **Rpta:**  $a = 1, b \in \mathbb{R}$

b)  $axy dx + (x^2 + \cos y)dy = 0$  **Rpta:**  $a = 2, x \neq 0$

c)  $xy^3 dx + ax^2y^2 dy = 0$  **Rpta:**  $a = \frac{3}{2}$

d)  $(ax + b)y dx + (x^2 + x + \frac{1}{y})dy = 0$  **Rpta:**  $a = 2, b = 3$

e)  $ax(y - \cos y)dx + x^2(1 + \sin y)dy = 0$  **Rpta:**  $a = 2$

f)  $(xy^2 + bx^2y)dx + (x+y)x^2dy = 0$  **Rpta:**  $b = 3$

g)  $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$  **Rpta:**  $b = 1$

④  $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y)dy = 0$  **Rpta:**  $x^2y - x^3 + \frac{y^2}{2} = C$

⑤  $y(2xy^2 - 3)dx + (3x^2y^2 - 3x + 4y)dy = 0$  **Rpta:**  $y(x^2y^2 - 3x + 2y) = C$

⑥  $(x + \sin y - \cos y)dx + x(\sin y + \cos y)dy = 0$  **Rpta:**  $x^2 + 2x(\sin y - \cos y) = C$

⑦  $x(3xy - 4y^3 + 6)dx + (x^3 - 6x^2y^2 - 1)dy = 0$  **Rpta:**  $x^3y - 2x^2y^3 + 3x^2 - y = C$

⑧  $(\sin y + 2x \cos^2 y)dx + x \cos y(2x \sin y + 1)dy = 0$  **Rpta:**  $x \sin y - x^2 \cos^2 y = C$

⑨  $(xy^2 + y - x)dx + x(xy + 1)dy = 0$  **Rpta:**  $x^2y^2 + 2xy - x^2 = C$

⑩  $2x(3x + y - ye^{-x^2})dx + (x^2 + 3y^2 + e^{-x^2})dy = 0$  **Rpta:**  $x^2y + y^3 + 2x^3 + ye^{-x^2} = C$

## 2.7. FACTOR DE INTEGRACIÓN.-

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \dots (1)$$

Si la ecuación (1) no es exacta, se puede transformar en exacta, eligiendo una función  $u$  que pueda depender tanto de  $x$  como de  $y$  de tal manera que la ecuación

$$u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0 \quad \dots (2)$$

sea exacta, entonces a la función  $u(x,y)$  se llama factor integrante o factor de integración.

Como la ecuación (2) es exacta, entonces se cumple

$$\frac{\partial u(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)N(x,y)}{\partial x}, \text{ de donde}$$



$$M(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + u(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + u(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

de donde agrupando se tiene:

$$M(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - N(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) u(x, y). \quad \dots (3)$$

Para determinar el factor integrante consideremos los siguientes casos:

**1er. Caso:** Si  $u$  es una función sólo de  $x$ .

entonces  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$ . Luego de la ecuación (3) resulta:

$$-N(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) u(x)$$

$$N(x, y) \frac{du(x, y)}{dx} = \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) u(x)$$

$$\frac{du(x)}{u(x)} = \frac{1}{N(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) dx \quad \text{integrando}$$

$$\int \frac{du(x)}{u(x)} = \int \frac{1}{N(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) dx = \int f(x) dx$$

$$\text{donde } f(x) = \frac{1}{N(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right)$$

$$\text{Como } \int \frac{du(x)}{u(x)} = \int f(x) dx \Rightarrow \ln u(x) = \int f(x) dx$$

$$u(x) = e^{\int f(x) dx}$$

**2do. Caso:** Si  $u$  es una función sólo de  $y$ , entonces  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$

Luego de la ecuación (3) resulta:

$$M(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial y} = \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) u(y), \quad \text{de donde}$$

$$\frac{du(y)}{u(y)} = -\frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) dy = g(y) dy$$

donde  $g(y) = -\frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right)$

$$\frac{du(y)}{u(y)} = g(y) dy \text{ integrando se tiene: } \int \frac{du(y)}{u(y)} = \int g(y) dy \Rightarrow \ln u(y) = \int g(y) dy$$

$$\therefore u(y) = e^{\int g(y) dy}$$

**3er. Caso:** En muchos ejercicios el factor integrante está dado en un producto de dos funciones  $f(x)$  y  $g(y)$ , es decir,  $u(x, y) = f(x)g(y)$  que reemplazando en la ecuación (3) se tiene:

$$M(x, y) \frac{\partial(f(x) \cdot g(y))}{\partial y} - N(x, y) \frac{\partial(f(x) \cdot g(y))}{\partial x} = \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) f(x) \cdot g(y)$$

$$M(x, y) \cdot f(x) \cdot g'(y) - N(x, y) \cdot f'(x) \cdot g(y) = \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) f(x) g(y)$$

esta expresión es lo mismo escribir en la forma:

$$\left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) f(x) g(y) = N(x, y) f'(x) g(y) - M(x, y) f(x) g'(y)$$

$$\boxed{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = N(x, y) \frac{f'(x)}{f(x)} - M(x, y) \frac{g'(y)}{g(y)}} \quad \dots (4)$$

donde  $M$  y  $N$  son funciones conocidas, de la ecuación (4) por inspección se puede determinar las funciones  $f(x)$  y  $g(y)$ .

**4to. Caso:** Para ciertos ejercicios su factor integrante es de la forma  $u(x, y) = x^n y^m$ , donde  $n$  y  $m$  se determinan mediante la condición necesaria y suficiente de las ecuaciones diferenciales exacta.

a. **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①

$$(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$$

**Solución**

$$\begin{cases} M = 1 - x^2 y \\ N = x^2(y - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2 + 2xy \end{cases}$$

como  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ , la ecuación diferencial no es exacta.

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{-x^2 - (-3x^2 + 2xy)}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}$$

$$\text{el factor integrante es } u(x) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int -\frac{2}{x} dx}$$

$$u(x) = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{x^2}$$

al multiplicar a la ecuación diferencial por  $u(x) = \frac{1}{x^2}$

es decir:  $\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$ , que es exacta.

$$\text{En efecto: } \begin{cases} M = \frac{1}{x^2} - y \\ N = y - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{cases} \text{ como } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ la ecuación diferencial es exacta.}$$

$\Rightarrow \exists f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M$ , de donde  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y$ , integrando respecto a  $x$ .

$$f(x, y) = \int \left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + g(y) = -\frac{1}{x} - xy + g(y)$$

$f(x, y) = -\frac{1}{x} - xy + g(y)$ , derivando respecto a  $y$ .

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x + g'(y)$ , como  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N$  entonces

$$N = -x + g'(y) \Rightarrow -x + g'(y) = y - x \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

Luego  $f(x, y) = -\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} + C$   $\therefore xy^2 - 2x^2y - 2 = Kx$

②  $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$

### Solución

$$\begin{cases} M = \frac{y}{x} \\ N = y^3 - \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x} \end{cases}; \text{ como } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ la ecuación diferencial no es exacta.}$$

Sea  $g(y) = -\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\frac{y}{x}} \left( \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x}\right) \right)$

$$g(y) = -\frac{x}{y} \left( \frac{2}{x} \right) = -\frac{2}{y} \Rightarrow g(y) = -\frac{2}{y}$$

Luego el factor integrante es,  $u(y) = e^{\int g(y) dy} = e^{\int -\frac{2}{y} dy}$

$u(y) = e^{-2 \ln y} = \frac{1}{y^2}$ , que multiplicado a la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\frac{1}{xy} dx + \left( y - \frac{\ln x}{y^2} \right) dy = 0, \text{ que es exacta,}$$

En efecto:  $\begin{cases} M = \frac{1}{xy} \\ N = y - \frac{\ln x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{xy^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{xy^2} \end{cases}$

Como  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , la ecuación diferencial es exacta

$\Rightarrow \exists f(x, y)$ , tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M$ , de donde  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{xy}$  integrando respecto a  $x$ .

$$f(x, y) = \int \frac{dx}{xy} + g(y) = \frac{\ln x}{y} + g(y) \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\ln x}{y^2} + g'(y). \text{ Como } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N, \text{ entonces}$$

$$N = -\frac{\ln x}{y^2} + g'(y) \text{ de donde se tiene:}$$

$$-\frac{\ln x}{y^2} + g'(y) = y - \frac{\ln x}{y^2} \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\text{Luego } f(x, y) = \frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} + C \quad \therefore \frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = K$$

③

$$(xy + x^2y + y^3)dx + (x^2 + 2y^2)dy = 0$$

### Solución

$$\begin{cases} M = xy + x^2y + y^3 \\ N = x^2 + 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = x + x^2 + 3y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$  la ecuación diferencial no es exacta.

Sea  $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$  un factor integrante para esto, empleamos la ecuación (4)

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{f'(x)}{f(x)} - M \frac{g'(y)}{g(y)}$$



$$x + x^2 + 3y^2 - 2x = (x^2 + 2y^2) \frac{f'(x)}{f(x)} - (xy + x^2y + y^3) \frac{g'(y)}{g(y)}$$

$$x^2 + 3y^2 - x = (x^2 + 2y^2) \frac{f'(x)}{f(x)} - (xy + x^2y + y^3) \frac{g'(y)}{g(y)}$$

$$\begin{cases} \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \\ \frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln f(x) = 2x \\ \ln g(y) = \ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = e^{2x} \\ g(y) = y \end{cases}$$

Como  $u(x, y) = f(x)g(y) = ye^{2x}$  factor integrante ahora multiplicamos a la ecuación diferencial por el factor integrante  $u(x, y) = ye^{2x}$ .

$$ye^{2x}(xy + x^2y + y^3)dx + ye^{2x}(x^2 + 2y^2)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta, es decir:

$$\begin{cases} M = ye^{2x}(xy + x^2y + y^3) \\ N = ye^{2x}(x^2 + 2y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = e^{2x}(2xy + 2x^2y + 4y^3) \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^{2x}(2xy + 2x^2y + 4y^3) \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , la ecuación diferencial es exacta.

$\Rightarrow \exists f(x, y)$ , tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M$ , de donde.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = ye^{2x}(xy + x^2y + y^3) \text{ integrando respecto a } x.$$

$$f(x, y) = \int ye^{2x}(xy + x^2y + y^3)dx + g(y) = \frac{y^2}{2} \int d(e^{2x}(x^2 + y^2)) + g(y)$$

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2} e^{2x}(x^2 + y^2) + g(y) \text{ derivando respecto a } y.$$

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = ye^{2x}(x^2 + 2y^2) + g'(y)$ . Como  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = N$  entonces.

$N = ye^{2x}(x^2 + 2y^2) + g'(y)$ , de donde

$y = e^{2x}(x^2 + 2y^2) + g'(y) = ye^{2x}(x^2 + 2y^2)$ , simplificando  $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$

Luego  $f(x, y) = \frac{y^2 e^{2x}}{2}(x^2 + y^2) + C \quad \therefore y^2 e^{2x}(x^2 + y^2) = k$

④

$$2y dx - x dy = xy^3 dy$$

### Solución

$$2y dx - (x + xy^3) dy = 0 \quad \dots (1)$$

$$\begin{cases} M = 2y \\ N = -(x + xy^3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 - y^3 \end{cases} \quad \text{como } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ la ecuación diferencial no es exacta.}$$

Sea  $u(x, y) = x^m y^n$  un factor integrante, entonces.

$$2x^m y^{n+1} dx - (x^{m+1} y^n + x^{m+1} y^{n+3}) dy = 0$$

para que sea exacta debe cumplirse  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\begin{cases} M = 2x^m y^{n+1} \\ N = -(x^{m+1} y^n + x^{m+1} y^{n+3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2(n+1)x^m y^n \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -(m+1)(x^m y^n + x^m y^{n+3}) \end{cases}$$

igualando tenemos  $2(n+1)x^m y^n = -(m+1)x^m y^n - (m+1)x^m y^{n+3}$

$$\text{Luego: } \begin{cases} 2(n+1) = -(m+1) \\ -(m+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = -1 \end{cases}$$

por lo tanto el factor integrante es  $u(x, y) = \frac{1}{xy}$  que al multiplicar a la ecuación (1) se

tiene:  $\frac{2}{x} dx - (\frac{1}{y} + y^2) dy = 0$ , que es exacta, en efecto:

$$\begin{cases} M = \frac{2}{x} \\ N = -(\frac{1}{y} + y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{cases} \text{ entonces } \exists f(x, y) \text{ tal que } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M$$

de donde  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2}{x}$ , integrando respecto a  $x$ .

$$f(x, y) = \int \frac{2}{x} dx + g(y) = 2 \ln x + g(y) \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = g'(y), \text{ pero como } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N \text{ entonces}$$

$$N = g'(y) \Rightarrow -(\frac{1}{y} + y^2) = g'(y) \Rightarrow g(y) = -(\ln y + \frac{y^3}{3}) + C$$

$$\text{Luego } f(x, y) = 2 \ln x - \ln y - \frac{y^3}{3} + c \quad \therefore 2 \ln x - \ln y - \frac{y^3}{3} = K$$

5  $e^x dx + (e^x c \operatorname{tg} y + 2y \cos ecy) dy = 0$

### Solución

$$\begin{cases} M = e^x \\ N = e^x c \operatorname{tg} y + 2y \cos ecy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cot y \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$  la ecuación diferencial es exacta,

$$\text{Sea } g(y) = -\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -\frac{0 - e^x \operatorname{ctg} y}{e^x}$$

$$g(y) = \operatorname{ctg} y \Rightarrow u(y) = e^{\int g(y) dy} = e^{\int \operatorname{ctg} y dy}$$

$$u(y) = e^{\ln(\operatorname{sen} y)} = \operatorname{sen} y \Rightarrow u(y) = \operatorname{sen} y$$

ahora multiplicamos a la ecuación diferencial por  $u(y) = \operatorname{sen} y$ , es decir:

$$e^x \operatorname{sen} y dx + (e^x \cos y + 2y) dy = 0, \text{ que es una ecuación diferencial exacta.}$$

$$\text{en efecto: } \begin{cases} M = e^x \operatorname{sen} y \\ N = e^x \cos y + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  la ecuación diferencial es exacta.

entonces  $\exists f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M$  de donde

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y, \text{ integrando respecto a } x.$$

$$f(x, y) = \int e^x \operatorname{sen} y dx + g(y) = e^x \operatorname{sen} y + g(y) \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^x \cos y + g'(y), \text{ pero como } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N \text{ entonces}$$

$$N = e^x \cos y + g'(y) \text{ de donde se tiene:}$$

$$e^x \cos y + g'(y) = e^x \cos y + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + C$$

$$\text{Luego } f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + y^2 + C$$

$$\therefore e^x \operatorname{sen} y + y^2 = K$$

$$(6) \quad (x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0$$

### Solución

$$\begin{cases} M = x \sin y + y \cos y \\ N = x \cos y - y \sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$  la ecuación diferencial no es exacta.

$$\text{Sea } f(x) = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{x \cos y + \cos y - y \sin y - \cos y}{x \cos y - y \sin y} = 1$$

Luego el factor de integración es  $u(x) = e^{\int f(x) dx} = e^x$  ahora a la ecuación diferencial, lo multiplicamos por el factor integrante  $u(x) = e^x$ , es decir:

$$(e^x x \cos y - e^x y \sin y) dy + (x e^x \sin y + y e^x \cos y) dx = 0$$

que es una ecuación diferencial exacta, en efecto.

$$\begin{cases} M = e^x x \sin y + e^x y \cos y \\ N = e^x x \cos y - e^x y \sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = x e^x \cos y + e^x \cos y - y e^x \sin y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = x e^x \cos y + e^x \cos y - y e^x \sin y \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  la ecuación diferencial es exacta.

entonces  $\exists f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M$ , de donde

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = x e^x \sin y + y e^x \cos y \quad \text{integrando respecto a } x.$$

$$f(x, y) = \int (x e^x \sin y + y e^x \cos y) dx + g(y)$$



$f(x, y) = xe^x \sin y - e^x \sin y + ye^x \cos y + g(y)$  derivando

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xe^x \cos y - e^x \cos y + e^x \cos y - ye^x \sin y + g'(y)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xe^x \cos y - ye^x \sin y + g'(y), \text{ pero como } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N$$

$N = xe^x \cos y - ye^x \sin y + g'(y)$ , de donde se tiene:

$$xe^x \cos y - ye^x \sin y + g'(y) = xe^x \cos y - e^x y \sin y \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

Luego  $f(x, y) = xe^x \sin y - e^x \sin y + ye^x \cos y + C$

$$\therefore xe^x \sin y - e^x \sin y + ye^x \cos y = K$$

**Observación:** Veremos un caso particular de factor integrante, por ejemplo, hallar un factor integrante  $u = \varphi(x + y^2)$  de la ecuación diferencial  $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$  y luego resolver la ecuación.

### Solución

$$\begin{cases} M = 3y^2 - x \\ N = 2y^3 - 6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 6y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -6y \end{cases} \text{ como } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

La ecuación no es exacta, ahora calculamos el factor integrante de la forma

$$u = \varphi(x + y^2) = \varphi(z) \text{ donde } z = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Como  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{\partial u}{u \partial x} - M \frac{\partial u}{u \partial y}$  entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{\partial \ln(u)}{\partial x} - M \frac{\partial \ln(u)}{\partial y} \quad \dots (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln u}{\partial x} = \frac{d \ln u}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d \ln u}{dz} \\ \frac{\partial \ln u}{\partial y} = \frac{d \ln u}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{d \ln u}{dz} \end{cases} \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{d \ln u}{dz} - M 2y \frac{d \ln u}{dz} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (N - 2yM) \frac{d \ln u}{dz}$$

$$6y + 6y = (2y^3 - 6xy - 6y^3 + 2xy) \frac{d \ln u}{dz} \Rightarrow 12y = -4y(y^2 + x) \frac{d \ln u}{dz}$$

$$\frac{d \ln u}{dz} = -\frac{3}{y^2 + x} = -\frac{3}{z} \quad \text{entonces} \quad d(\ln u) = -3 \frac{dz}{z}$$

integrando se tiene:  $\ln u = -3 \ln z = \ln z^{-3}$ ; levantando el logaritmo  $u = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{(y^2 + x)^3}$ ,

multiplicando a la ecuación diferencial se tiene:

$$\frac{3y^2 - x}{(y^2 + x)^3} dx + \frac{2y^3 - 6xy}{(y^2 + x)^3} dy = 0 \quad \text{es una ecuación diferencial exacta. La solución se}$$

obtiene agrupando, tenemos  $d\left(\frac{x-y^2}{(x-y^2)^2}\right) = 0$  integrando  $\frac{x-y^2}{(x+y^2)^2} = C$

$$\Delta x - y^2 = c(x + y^2)^2$$

#### a. Combinación Integrable.

En una ecuación diferencial  $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ , para encontrar un factor de integración en muchos casos es dificultoso, sin embargo mediante el reconocimiento de ciertas diferenciales exactas comunes, se puede obtener la solución en forma mucho más práctica, a esta forma de agrupamiento de los términos de una ecuación diferencial denominaremos combinación integrable. Esta forma de resolver las ecuaciones diferenciales es mucho más rápido, sin embargo requiere de un buen conocimiento de diferenciales y una cierta pericia en determinar cómo deben agruparse los términos y para esto daremos algunas sugerencias de diferenciales exactas.

$$1^\circ \quad x \, dy + y \, dx = d(xy)$$

$$2^\circ \quad x \, dx \pm y \, dy = \frac{1}{2} d(x^2 \pm y^2)$$

$$3^\circ \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$4^\circ \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$$

$$5^\circ \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{xy} = d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$6^\circ \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$7^\circ \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} d\left(\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right)$$

$$8^\circ \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{(x-y)^2} = \frac{1}{2} d\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$9^\circ \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = d\left(\arcsen\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$10^\circ \quad \frac{y \, dx - x \, dy}{(x+y)^2} = \frac{1}{2} d\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

$$11^\circ \quad \frac{x \, dy + y \, dx}{x^2 y^2} = d\left(-\frac{1}{xy}\right)$$

$$12^\circ \quad \frac{dx + dy}{x+y} = d(\ln(x+y))$$

$$13^\circ \quad \frac{x \, dy + y \, dx}{xy} = d(\ln(xy))$$

**Ejemplos:** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

①  $(x^2 + y^2)(x \, dy + y \, dx) = xy(x \, dy - y \, dx)$

### Solución

La ecuación diferencial dada expresaremos así:

$$\frac{x \, dy + y \, dx}{xy} = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}, \text{ de acuerdo a las sugerencias } 6^\circ \text{ y } 13^\circ \text{ se tiene:}$$

$$d \ln(xy) = d\left(\arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right) \text{ integrando se tiene:}$$

$$\int d \ln(xy) = \int d\left(\arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right) dx + C, \text{ de donde } \ln(xy) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

$$(2) \quad 3y \, dx + 2x \, dy + 4xy^2 \, dx + 3x^2 y \, dy = 0$$

**Solución**

Multiplicando a la ecuación dada por  $x^2 y$ , es decir:

$$3x^2 y^2 \, dx + 2x^3 y \, dy + 4x^3 y^3 \, dx + 3x^4 y^2 \, dy = 0$$

de acuerdo a la sugerencia 1° se tiene:  $d(x^3 y^2) + d(x^4 y^3) = 0$  integrando se tiene:

$$\int d(x^3 y^2) + \int d(x^4 y^3) = C \quad \text{de donde} \quad \therefore x^3 y^2 + x^4 y^3 = C$$

$$(3) \quad x \, dy - y \, dx = x^2 \sqrt{x^2 - y^2} \, dx$$

**Solución**

A la ecuación diferencial dada, escribiremos así:

$$\frac{x \, dy - y \, dx}{x \sqrt{x^2 - y^2}} = x \, dx, \quad \text{de acuerdo a la sugerencia 9° se tiene:}$$

$$d(\arcsen(\frac{y}{x})) = d(\frac{x^2}{2}) \quad \text{integrando se tiene:} \quad \int d(\arcsen(\frac{y}{x})) = \int d(\frac{x^2}{2}) + C, \quad \text{de donde}$$

$$\therefore \arcsen \frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$(4) \quad x^3 \, dy - x^2 \, y \, dx = x^5 \, y \, dx$$

**Solución**

A la ecuación diferencial dada expresaremos:  $x \, dy - y \, dx = x^3 \, y \, dx$ , para  $x \neq 0$

$$\frac{x \, dy - y \, dx}{xy} = x^2 \, dx, \quad \text{de acuerdo a la sugerencia 5° se tiene:} \quad d \ln(\frac{y}{x}) = d(\frac{x^3}{3}) \quad \text{integrando.}$$

$$\int d \ln(\frac{y}{x}) = \int d(\frac{x^3}{3}) + C, \quad \text{de donde} \quad \therefore \ln(\frac{y}{x}) = \frac{x^3}{3} + C$$

$$(5) \quad \sqrt{y^2-1}(1-y\sqrt{x^2-1})dx + \sqrt{x^2-1}(1-x\sqrt{y^2-1})dy = 0$$

### Solución

La ecuación diferencial dada expresaremos así:

$$\sqrt{y^2-1}dx - y\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}dx + \sqrt{x^2-1}dy - x\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}dy = 0$$

$$\sqrt{y^2-1}dx + \sqrt{x^2-1}dy - \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}(ydx + xdy) = 0$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} - (ydx + xdy) = 0, \text{ de acuerdo a las sugerencias del 1}^\circ \text{ se tiene:}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} - d(xy) = 0, \text{ integrando } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} - \int d(xy) = C$$

$$\text{de donde:} \quad \ln|x + \sqrt{x^2-1}| - \ln|y + \sqrt{y^2-1}| - xy = C \quad \dots (1)$$

por lo tanto (1) expresaremos así:  $\operatorname{arccosh} x - \operatorname{arccosh} y = xy + C$ , de donde

$$\cosh(\operatorname{arccosh} x - \operatorname{arccosh} y) = \cosh(xy + C)$$

$$xy + \sinh(\operatorname{arccosh} x) \cdot \sinh(\operatorname{arccosh} y) = \cosh(xy + C)$$

además se sabe que ,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  Luego se tiene:

$$xy + \left( \frac{e^{\operatorname{arccosh} x} - e^{-\operatorname{arccosh} x}}{2} \right) \left( \frac{e^{\operatorname{arccosh} y} - e^{-\operatorname{arccosh} y}}{2} \right) = \cosh(xy + C)$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(xy+1)}{y(1-x^2)-x} \quad \text{Para } x = 1; y = -2$$

### Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(xy+1)}{y(1-x^2)-x} \Rightarrow [y(1-x^2)-x]dy = y(xy+1)dx$$



$$y dy - yx^2 dy = xy^2 dx + y dx, \text{ agrupando } y dy - (yx^2 dy + xy^2 dx) = x dy + y dx$$

mediante la sugerencia de 1° se tiene:  $y dy - d\left(\frac{x^2 y^2}{2}\right) = d(xy)$  integrando

$$\int y dy - \int d\left(\frac{x^2 y^2}{2}\right) = \int d(xy) + K, \text{ de donde } y^2 - x^2 y^2 = 2xy + C$$

para  $x = 1, y = -2$ , se tiene  $4 - 4 = -4 + C \Rightarrow C = 4$

Luego la solución particular es:  $(1 - x^2)y^2 - 2xy = 4$

7  $(y + x(x^2 + y^2))dx + (y(x^2 + y^2) - x)dy = 0$

### Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$$y dx + x(x^2 + y^2)dx + y(x^2 + y^2)dy - xdy = 0, \text{ ahora agrupamos}$$

$$-\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + xdx + ydy = 0, \text{ mediante la sugerencia de 2° y 6° se tiene:}$$

$$-d(\text{arc. tg}(\frac{y}{x})) + \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = 0, \text{ integrando } -\int d(\text{arctg}(\frac{y}{x})) + \frac{1}{2}\int d(x^2 + y^2) = C$$

$$\therefore -2 \text{arctg}(\frac{y}{x}) + x^2 + y^2 = K$$

8  $\text{arc. sen } y dx + \frac{x + 2\sqrt{1-y^2} \cos y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 0$

### Solución

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:  $\text{arc. sen } y dx + \frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + 2 \cos y dy = 0$

$d(x \cdot \text{arc. sen } y) + 2 \cos y dy = 0$ , integrando

$$\int d(x \arcsen y) + \int 2 \cos y dy = C \quad \text{de donde} \quad x \arcsen y + 2 \sen y = C$$

### b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- ①  $(xy^3 + 1)dx + x^2 y^2 dy = 0$  **Rpta.**  $2x^3 y^3 + 3x^2 = c$
- ②  $y^2 dx + x^2 dy - 2xy dy = 0$  **Rpta.**  $xy - y^2 = Kx$
- ③  $(x^2 + y)dx - x dy = 0$  **Rpta.**  $x^2 - y = Kx$
- ④  $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$  **Rpta.**  $x^2 y - 3xy^2 - 7 = Ky$
- ⑤  $y dx + (2x - ye^y)dy = 0$  **Rpta.**  $xy^2 - y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y = K$
- ⑥  $(y^4 + x^3)dx + 8xy^3 dy = 0$  **Rpta.**  $\sqrt{x}(7y^4 + x^3) = K$
- ⑦  $(5x^3 + 3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$  **Rpta.**  $x^5 + x^3 y + x^2 y^2 = K$
- ⑧  $x^2 y^2 dx + (x^3 y + y + 3)dy = 0$  **Rpta.**  $\frac{x^3 y^3 + y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} = c$
- ⑨  $x^2 dx - (x^3 y^2 + y^2)dy = 0$  **Rpta.**  $e^{-y^3} (x^3 + 3) = c$
- ⑩  $(xy^2 + x^2 y^2 + 3)dx + x^2 y dy = 0$  **Rpta.**  $e^{2x} (x^2 y^2 + 3) = c$
- ⑪  $e^x (x+1)dx + (e^y y - xe^x)dy = 0$  **Rpta.**  $2xe^{x-y} + y^2 = c$
- ⑫  $(x - x^2 y)dy - y dx = 0$  **Rpta.**  $2y - xy^2 - cx = 0$
- ⑬  $(5x^3 y^2 + 2y)dx + (3x^4 y + 2x)dy = 0$  **Rpta.**  $x^5 y^3 + x^2 y^2 = c$
- ⑭  $(e^x + xe^y)dx + xe^y dy = 0$  **Rpta.**  $e^{x+y} + \int_0^x \frac{e^{2t}}{t} dt = K$

- 15)  $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$  Rpta.  $(3x^2y + y^3)e^{3x} = c$
- 16)  $dx + \left(\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right)dy = 0$  Rpta.  $xy + y \cos y - \operatorname{sen} y = c$
- 17)  $y dx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$  Rpta.  $xe^{2y} - \ln |y| = c$
- 18)  $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y dy = 0$  Rpta.  $x^2 + y^2 = ce^{-x}$
- 19)  $(3x^2 - y^2)dy - 2xy dx = 0$  Rpta.  $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$
- 20)  $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$  Rpta.  $xy - \ln |x| - \frac{y^2}{2} = c$
- 21)  $2y(x^2 - y + x)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$  Rpta.  $y(x^2 - y) = ce^{-2x}$
- 22)  $y(4x + y)dx - 2(x^2 - y)dy = 0$  Rpta.  $2x^2 + xy + 2y \ln |y| = cy$
- 23)  $(2y^2 + 3xy - 2y + 6x)dx + x(x + 2y - 1)dy = 0$  Rpta.  $x^2(y^2 + xy - y + 2x) = c$
- 24)  $y^2 dx + (3xy + y^2 - 1)dy = 0$  Rpta.  $y^2(y^2 + 4xy - 2) = c$
- 25)  $2y(x + y + 2)dx + (y^2 - x^2 - 4x - 1)dy = 0$  Rpta.  $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 1 = cy$
- 26)  $2(2y^2 + 5xy - 2y + 4)dx + x(2x + 2y - 1)dy = 0$  Rpta.  $x^4(y^2 + 2xy - y + 2) = c$
- 27)  $3(x^2 + y^2)dx + x(x^2 + 3y^2 + 6y)dy = 0$  Rpta.  $x(x^2 + 3y^2) = ce^{-y}$
- 28)  $y(8x - 9y) dx + 2x(x - 3y) dy = 0$  Rpta.  $x^3y(2x - 3y) = c$
- 29)  $y(1 + xy) dx - x dy = 0$  Rpta.  $x^2 + \frac{2x}{y} = c$
- 30)  $dx + (x \operatorname{tg} y - 2 \operatorname{sec} y) dy = 0$  Rpta.  $x \operatorname{sec} y - 2 \operatorname{tg} y = c$

$$(31) \quad (x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2 y^2 dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y^3 + x^3 (\ln |x| - 1) = cx^2$$

$$(32) \quad (x + y^2)dx - 2xy dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x \ln |x| - y^2 = cx$$

$$(33) \quad (2x^2 y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 5 \operatorname{arc.tg} x + 2xy = c$$

$$(34) \quad (x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) dx + \cos y dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 2e^x \operatorname{sen} y + 2e^x (x-1) + e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) = c$$

$$(35) \quad (1 + xy)dx + x\left(\frac{1}{y} + x\right)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } K = xye^{xy}$$

$$(36) \quad (\sec x + y \operatorname{tg} x) dx + dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y \sec x + \operatorname{tg} x = c$$

$$(37) \quad 2(x + y(\sec^2 x + \operatorname{tg} x))dx + \operatorname{tg} x dy = 0$$

$$\text{Rpta. } (x + y) \operatorname{tg}^2 x = c$$

$$(38) \quad \frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \frac{y^2}{2} + \frac{\ln |x|}{y} = c$$

$$(39) \quad \operatorname{sen} x(2 + 3y \operatorname{sen}^2 x)dx + \sec x dy = 0$$

$$\text{Rpta. } ye^{\frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 x} + 2 \int (\operatorname{sen} x \cos x) e^{\frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 x} dx = c$$

$$(40) \quad y \operatorname{sen} xy dx - \left(\frac{\cos xy}{y} - x \operatorname{sen} xy\right) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y \cos xy = c$$

$$(41) \quad (x \cos y - y \operatorname{sen} y) dy + (x \operatorname{sen} y + y \cos y) dx = 0$$

$$\text{Rpta. } (x \operatorname{sen} y - y \cos y - \operatorname{sen} y) e^x = c$$

$$(42) \quad \frac{1}{x} dx - (1 + xy^2) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } e^y \left(y^2 - 2y + 2 + \frac{1}{x}\right) = c, \quad u = \frac{e^y}{x}$$

$$(43) \quad (x^2 + 2x + y)dx + (1 - x^2 - y)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } e^{x-y} (x^2 + y) = c, \quad u = e^{x-y}$$

$$(44) \quad (\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) dx + (\cos x + \operatorname{sen} y + \cos y) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } e^{x+y} (\cos x + \operatorname{sen} y) = c, \quad u = e^{x+y}$$

$$(45) \quad \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x} \operatorname{sen} x\right)dx + \frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y} dy = 0$$

$$\text{Rpta. } e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c, \quad u = ye^x$$

$$(46) \quad (-3y^4 + x^3 y)dx + (xy^3 - 3x^4)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y^3 + x^3 = cx^4 y^4, \quad y = x^m y^n$$

$$(47) \quad y(2x^2 + y)dx + x(y - x^2)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \frac{x^2}{y} + \ln xy = C$$

$$(48) \quad 2y dx + 3x dy = 3x^{-1} dy$$

$$\text{Rpta. } y^3(x^2 - 1) = c$$

$$(49) \quad x dy + 2y dx = x^3 y^3 dy$$

$$\text{Rpta. } x^2 y(x^2 + c) + 2 = 0$$

$$(50) \quad y(4xy + 3) dx + x(3xy + 2) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^4 y^3 + x^3 y^2 = C$$

$$(51) \quad 4x dy - 3y dx = y^{-3} x dx$$

$$\text{Rpta. } 2y^4 + x = cx^3$$

$$(52) \quad y dx + 2x dy = x^3 y dx$$

$$\text{Rpta. } 3 \ln(xy^2) = x^3 + c$$

$$(53) \quad y dx - 2x dy = xy^5 dy$$

$$\text{Rpta. } 5 \ln(xy^{-2}) = y^5 + c$$

$$(54) \quad (\operatorname{sen} x - x \cos x)dx + 2\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x \operatorname{sen} x}{y}\right)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 2xy - y^2 \operatorname{sen} x = cx, \quad u(x, y) = x^{-2} y^2$$

$$(55) \quad 3y dx - 2x dy = x^4 y^2 dx$$

$$\text{Rpta. } 11x^{\frac{3}{2}} - yx^{\frac{11}{2}} = cy$$

$$(56) \quad 3y dx + 4x dy = 5x^2 y^{-3} dx$$

$$\text{Rpta. } x^3(y^4 - x^2) = c$$

$$(57) \quad (4xy^2 + 6y)dx + (5x^2 y + 8x)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^3 y^4 (xy + 1) = c$$

$$(58) \quad [y^2 - 2x^2(x+y)^2 - y(x+y)^2]dx + [y^2 - 2x^2(x+y)^2 + x(x+y)^2]dy = 0$$

$$(59) \quad (2y + 3x^2 y^3)dx + (3x + 5x^3 y^2)dy = 0, \quad u(x, y) = x^{-9} y^{-13}$$



60)  $(2xe^y + y^2e^x + 2x)dx + (x^2e^y + 2ye^x)dy = 0$  **Rpta.**  $x^2e^y + y^2e^x + x^2 = c$

61)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 - 2y}{y^2 - x^2 - 2x}$  **Rpta.**  $(x + y)e^{x+y} = c(x - y)$

62)  $x dy - y dx = x\sqrt{x^2 - y^2} dy$  **Rpta.**  $y = x - \text{sen}(y + c)$

63)  $y dx = (2x^2y^3 - x)dy, y(1) = 1$  **Rpta.**  $xy^3 - 2xy + 1 = 0$

64)  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x y}{e^x + 2y}, y(0) = 1$  **Rpta.**  $e^x = y(1 + 2 \ln y)$

65)  $[y^4(x^3 + x^2 - 2x + 1) + (x^2y + y^3 + xy^2)]dx - (x^3 + xy^2 + x^2y)dy = 0$

**Rpta.**  $(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12x)y^3 + 12xy^2 + 6x^2y + 4x^3 = cy^3$

66)  $x dy - y dx = x^2 y dy$  **Rpta.**  $2y = xy^2 + c$

67)  $(x - 2y^3)dy = y dx$  **Rpta.**  $x = cy - y^3$

68)  $x dy + y dx = 3x^2 dx, y(2) = 1$  **Rpta.**  $xy = x^3 - 6$

69)  $x^2 D_x y - xy = x^2 - y^2, y(1) = 0$  **Rpta.**  $x + y = x^2(x - y)$

70)  $x dy - y dx + (y^2 - 1)dy = 0$  **Rpta.**  $y^2 - x + 1 = cy$

71)  $x dy + y dx = x^2 y dy$  **Rpta.**  $x^{-1}y^{-1} + \ln y = c$

72)  $y(2 + xy) dx + x(1 + xy) dy = 0$  **Rpta.**  $x^2 y e^{xy} = K$

73)  $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$  **Rpta.**  $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = c$

74)  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2y - xe^y}$  **Rpta.**  $y^2 = xe^y + c$

- 75  $x dy = (x^2 + y^2 + y) dx$  **Rpta.**  $y = x \operatorname{tg}(x + c)$
- 76  $e^x (y^3 + xy^3 + 1) dx + 3y^2 (xe^x - 6) dy = 0$  **Rpta.**  $xe^x y^3 + e^x - 6y^3 = c$
- 77  $x dy + y dx = y^2 dx$  **Rpta.**  $y(1 + cx) = 1$
- 78  $x dy - y dx + (x^2 + y^2) dx = 0$  **Rpta.**  $y = x \operatorname{tg}(c - x)$
- 79  $3x dy = 2y dx - xy \cos x dx$  **Rpta.**  $x^2 = cy^3 e^{\operatorname{sen} x}$
- 80  $e^x (x+1) dx + (ye^y - xe^x) dy = 0$  **Rpta.**  $2xe^{x-y} + y^2 = c$
- 81  $x dy - y dx = (1 + y^2) dy$  **Rpta.**  $-\frac{x}{y} = -\frac{1}{y} + y + c$
- 82  $x dy = (x^5 + x^3 y^2 + y) dx$  **Rpta.**  $\operatorname{arc.} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{y} \right) = -\frac{x^4}{4} + c$
- 83  $\left( \frac{2x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2} \right) dy = 0$  **Rpta.**  $\frac{x^2}{y^2} + \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \left( \frac{y}{x} \right) = c$
- 84  $x dy - y dx = 2x^2 y^2 dy, y(1) = -2$  **Rpta.**  $3y - 2xy^3 - 10x = 0$
- 85  $y(2x + y^3) dx - x(2x - y^3) dy = 0$  **Rpta.**  $\frac{x^2}{y^2} + xy = c$
- 86  $y(x^3 - y^5) dx - x(x^3 + y^5) dy = 0$  **Rpta.**  $x^4 = y^4 (c + xy)$
- 87  $(x^3 y^3 + 1) dx + x^4 y^2 dy = 0$  **Rpta.**  $x^3 y^3 = -3 \ln(xc)$
- 88  $y(y^3 - x) dx + x(y^3 + x) dy = 0$  **Rpta.**  $2xy^3 - x^2 = cy^2$
- 89  $x^2 (x + y)^2 (dx + dy) = m(x dy - y dx)$  **Rpta.**  $x(x + y)^3 = 3my$
- 90  $(2x^2 + y^2 - 3)(x dy + y dx) = (xy)^3 (4x dx + 2y dy)$  **Rpta.**  $(xy)^{-2} + 2 \ln(2x^2 + y^2 - 3) = c$

91  $x dy - y dx = y^3(x^2 + y^2)dy$

Rpta.  $\text{arc. tg } \frac{y}{x} = \frac{y^4}{4} + c$

92  $y(x^4 - y^2)dx + x(x^4 + y^2)dy = 0$

Rpta.  $y(3x^4 + y^2) = cx^3$

93  $y(x^3 e^{-xy} - y)dx + x(y + x^3 e^{-xy})dy = 0$

Rpta.  $2x^2 e^{-xy} + y^2 = cx^2$

94  $y^2(1 - x^2)dx + x(x^2 y + 2x + y)dy = 0$

Rpta.  $x^2 y + x + y = cxy^2$

95  $y(x^2 y^2 - m)dx + x(x^2 y^2 + n)dy = 0$

Rpta.  $x^2 y^2 = 2 \ln\left(\frac{cx^n}{y^n}\right)$

96  $x dx + y dy = (x^2 + y^2)^3(x dy - y dx)$

Rpta.  $6 \text{arc. tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} = c$

97  $y dx - x dy = (x^2 + y^2)^2(x dx + y dy)$

Rpta.  $\text{arc. tg}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + c$

98  $x dy - y dx = \sqrt{4x^2 + 9y^2}(4x dx + 9y dy)$

Rpta.  $\text{arctg} \frac{3y}{2x} = 6(4x^2 + 9y^2)^{\frac{1}{2}} + C$

99  $y(2 - 3xy) dx - x dy = 0$

Rpta.  $x^2(1 - xy) = cy$

100  $y(2x + y^2)dx + x(y^2 - x)dy = 0$

Rpta.  $x(x + y^2) = cy$

101  $2x^5 y^1 = y(3x^4 + y^2)$

Rpta.  $x^4 = y^2(1 + cx)$

102  $(x^n y^{n+1} + ay)dx + (x^{n+1} y^n + bx)dy = 0$

Rpta. si  $n \neq 0$ ,  $x^n y^n = n \ln(cx^{-a} y^{-b})$ , si  $n = 0$ ,  $xy = cy^{-a} y^{-b}$

103  $(x^{n+1} y^n + ay)dx + (x^n y^{n+1} + ax)dy = 0$

Rpta. si  $n \neq 1$ ,  $(n-1)(xy)^{n-1}(x^2 + y^2 - c) = 2a$ , si  $n = 1$ ,  $x^2 + y^2 - c = -2a \ln(xy)$

104  $x dy + y dx = xy^3 dx$

Rpta.  $\frac{1}{(xy)^2} = \frac{2}{x} + c$

105

$$x dy - y dx = (xy)y^2 dy$$

$$\text{Rpta. } 2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) = y^3 + c$$

106

$$x dy - y dx = (x^2 + xy - 2y^2) dx$$

$$\text{Rpta. } \ln\left(\frac{x+2y}{x-y}\right) = 3x + c$$

107

$$y(ydx - xdy) + 3\sqrt{y^4 - x^4}(ydx + xdy) = 0$$

108

$$ye^{\frac{x}{y}} dx - (xe^{\frac{x}{y}} + y^3) dy = 0$$

$$\text{Rpta. } e^{\frac{x}{y}} + \frac{y^2}{2} = c$$

109

$$e^x (\cos y dx - \operatorname{sen} y dy) = 0$$

$$\text{Rpta. } e^x \cos y = c$$

110

$$(x\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{3} + xy = K$$

111

$$\frac{2 \cos(xy)}{\operatorname{sen}(xy)} (xdy + ydx) + e^{\operatorname{sen} x} e^{\operatorname{sen} y} (\cos x dx + \cos y dy) = 0$$

$$\text{Rpta. } 2 \ln(\operatorname{sen}(xy)) + e^{\operatorname{sen} x} e^{\operatorname{sen} y} = c$$

112

$$(3x^2 \ln x + x^2 + y)dx + x dy = 0$$

$$\text{Rpta. } xy + x^3 \ln x = c$$

113

$$y\left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x\sqrt{x^2 - y^2}}\right)dx + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arcsen} \frac{y}{x} = K$$

114

$$y [\operatorname{sen}(x+y) + x \cos(x+y)] dx + x [\operatorname{sen}(x+y) + y \cos(x+y)] dy = 0$$

$$\text{Rpta. } xy \operatorname{sen}(x+y) = c$$

115

$$e^{xy} (ydx + xdy) + \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} (xdx - ydy) + \sqrt{x^2 - y^2} dy = 0 \quad \text{Rpta. } e^{xy} + y\sqrt{x^2 - y^2} = c$$

116

$$xy^2 (x^6 - y^6)(2y dx + 3x dy) = 24x^2 y^3 (x^5 dx - y^3 dy) \quad \text{Rpta. } x^2 y^3 = (x^6 - y^6)^4 K$$

117)  $[2xy \operatorname{sen}(x+y) + y \operatorname{sec}(x+y)] dx + [2xy \operatorname{sen}(x+y) + x \operatorname{sec}(x+y)] dy = 0$

Rpta.  $\operatorname{sen}^2(x+y) + \ln(xy) = c$

118)  $2y dx - x dy = xy^3 dy$

Rpta.  $3 \ln(x^2 y^{-1}) = y^3 + c$

119)  $y dx + x dy = \sqrt{x^2 + y^2} (x dx + y dy)$

Rpta.  $3xy = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + c$

120) Probar que si  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{k}{x}$  entonces  $x^k$  es un factor integrante de

$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$

121) Demostrar que si la ecuación diferencial  $(axy - b)y dx + (cxy - d)x dy = 0$  es dividida entre  $xy [(axy - b) - (cxy - d)]$  entonces es exacta.

122) Resolver la ecuación diferencial usando el factor de integración

$u(x,y) = [xy(2x+y)]^{-1}$ ,  $(3xy + y^2) + xy(2x+y) \frac{dy}{dx} = 0$

123)  $y[2(x+y) + (1+x^2) \operatorname{arctg} x] dx + (x^3 + 2x^2 y + x + 2y) \operatorname{arctg} x dy = 0$

124) Considerando una ecuación diferencial de la forma

$[y + x f(x^2 + y^2)] dx + [y f(x^2 + y^2) - x] dy = 0$

a) Demostrar que una ecuación diferencial de esta forma no es exacta.

b) Demostrar que  $\frac{1}{x^2 + y^2}$  es un factor integrante de una ecuación diferencial de esta forma.

125) Resolver la ecuación diferencial  $[y + x(x^2 + y^2)^2] dx + [y(x^2 + y^2)^2 - x] dy = 0$

Rpta.  $4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + (x^2 + y^2)^2 = K$



126  $y(x^2 + y^2 - 1)dx + x(x^2 + y^2 + 1)dy = 0$ ,  $u = \frac{1}{x^2 + y^2}$  **Rpta.**  $xy + \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = c$

127  $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xy dy = 0$ ,  $u(x, y) = \varphi(y^2 - x^2)$   
**Rpta.**  $1 + y^2 - x^2 = cx$ ,  $u_1 = \frac{1}{(1 + y^2 - x^2)^2}$ ,  $u_2 = \frac{1}{x^2}$

128  $x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0$ ,  $u = \varphi(x^2 + y^2)$   
**Rpta.**  $\frac{y-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c$ ,  $u = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

129  $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$ ,  $u = \varphi(x + y^2)$   
**Rpta.**  $(x + y^2)^2 c = x - y^2$ ,  $u = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3}$

130  $(y - xy^2 \ln x)dx + x dy = 0$ ,  $u = \varphi(xy)$  **Rpta.**  $2 + xy \ln^2 y = cxy$ ,  $u = \frac{1}{x^2 y^2}$

131  $(xy^2 - y)dx + (xy - 1)x dy = 0$  **Rpta.**  $\ln(Kxy) = -\frac{1}{xy}$

132  $\left(\frac{1}{x-y} + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y-x} - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$  **Rpta.**  $\ln|x-y| - \arctg\frac{y}{x} = c$

133  $[y + x(x^2 + y^2)]dx + [y(x^2 + y^2) - x]dy = 0$  **Rpta.**  $x^2 + y^2 - 2 \arctg\frac{y}{x} = K$

134  $x(1 - \sqrt{x^2 + y^2})dx + y dy = 0$  **Rpta.**  $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{2} + c$

135  $(7x^4 y - 3y^8)dx + (2x^5 - 9xy^7)dy = 0$  **Rpta.**  $x^7 y^2 - x^3 y^9 = K$

136  $\text{arc. sen } y dx + \frac{x + 2\sqrt{1-y^2} \cos y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 0$  **Rpta.**  $x \text{ arc. sen } y + 2 \text{ sen } y = c$

137  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - x^3 - x^2 y + xy^2 + 2x}{x^3 - xy^2 + x^2 y - y^3 + 2y}$  **Rpta.**  $K(x^2 - y^2) = e^{\frac{(x+y)^2}{2}}$

- 138) Aplicando el ejercicio 122 resolver:  $(y^4 + x^3)dx + 8xy^3 dy = 0$   
**Rpta.**  $x^{\frac{1}{2}}(7y^4 + x^3) = c$
- 139)  $(5x^3 + 3xy + 2y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$   
**Rpta.**  $x^5 + x^2y + x^2y^2 = c$
- 140) Demostrar que  $\frac{1}{Mx + Ny}$ , donde  $Mx + Ny \neq 0$ , es un factor integrante de la ecuación diferencial homogénea  $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$
- 141) Demostrar que  $\frac{1}{Mx + Ny}$ , donde  $Mx - Ny \neq 0$ , es un factor integrante para la ecuación diferencial  $M(x,y) dx + N(x,y) dy = y f(xy) dx + x g(xy) dy$
- 142)  $(x^4 + y^4)dx - xy^3 dy = 0$   
**Rpta.**  $y^4 = 4x^4 \ln x + cx^4$
- 143)  $y^2 dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$   
**Rpta.**  $(x - y)y^2 = c(x + y)$
- 144)  $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$   
**Rpta.**  $x = Ke^{\frac{x}{y}}$
- 145)  $(x^3 - y^3)dx + xy^2 dy = 0$   
**Rpta.**  $y^3 + 3x^3 \ln kx = 0$
- 146)  $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$   
**Rpta.**  $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = c$
- 147)  $y(x + 3y)dx + x^2 dy = 0$   
**Rpta.**  $x^2y = c(2x + 2y)$
- 148)  $y(2x^3 - x^2y + y^3)dx - x(2x^3 + y^3)dy = 0$   
**Rpta.**  $2x^2y \ln(cx) = 4x^3 - y^3$
- 149)  $y(x^2 + y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0, y(2) = 1$   
**Rpta.**  $2y^5 + 2x^2y^3 + 3x = 0$
- 150)  $(\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2})dx + (\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2})dy = 0$   
**Rpta.**  $\frac{x^2}{y} + \arctg \frac{y}{x} = c$
- 151)  $y(x^2 + y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy = 0$   
**Rpta.**  $x = cy^2 e^{\frac{1}{x^2y^2}}$

152

$$y(2xy+1)dx + x(1+2xy-x^3y^3)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } y = ce^{\frac{3xy+1}{3x^2y^3}}$$

153

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-xy^2-x^3}{x+x^2y+y^3}$$

$$\text{Rpta. } x^2 + y^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = K$$

154

Demuéstrase que la ecuación diferencial  $x^{pq}(\alpha y dx + \beta x dy) + x^r y^s(\gamma y dx + \delta x dy) = 0$  donde  $p, q, r, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  son constantes conocidas, tienen un factor integrante de la forma  $x^a y^b$  en que  $a$  y  $b$  son constantes adecuadas.

155

$$(x^2y + 2y^4)dx + (x^3 + 3xy^3)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 5x^2y^2 + 12x^{10}y^{15} = c$$

156

Demuéstrase que  $\frac{dy}{dx} = \frac{y(v^2 - x^2 - 1)}{x(y^2 - x^2 + 1)}$  puede resolverse efectuando una transformación a coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  en la cual  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \operatorname{sen} \theta$  y hallar su solución.

$$\text{Rpta. } x^2 + cxy + y^2 = 0$$

157

Si  $\phi$  es un factor integrante de la ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ , demostrar que  $\phi$  satisface a la ecuación de derivados parciales.

$$M(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y} - N \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) = 0$$

158

Demuéstrase que si la ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  es tal que

$$\frac{1}{xM + yN} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = F(xy)$$

es un factor integrante siendo  $u = xy$ .

159

$$(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } e^{xy}(x+y) = c$$

160

$$(x^3 + xy^2 + y)dx - x dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = c$$

- 161  $(x - \sqrt{x^2 + y^2})dx + (y - \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$  **Rpta.**  $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y + c$
- 162  $(x^3 + y)dx + (x^2 y - x)dy = 0$  **Rpta.**  $x^3 + xy^2 - 2y = cx$
- 163  $(x^2 + y^2 + y)dx + (x^2 + y^2 - x)dy = 0$  **Rpta.**  $x + y - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = c$
- 164  $(x - x^2 - y^2)dx + (y + x^2 + y^2)dy = 0$  **Rpta.**  $\ln |x^2 + y^2| + 2y - 2x = c$
- 165  $(x^2 y + y^3 - x)dx + (x^3 + xy^2 - y)dy = 0$  **Rpta.**  $\ln(x^2 + y^2) = 2xy + c$
- 166  $(xy^2 + x \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x)dx - 2y dy = 0$  **Rpta.**  $x^2 - 2 \ln(y^2 + \operatorname{sen}^2 x) = c$
- 167  $(5xy + 4y^2 + 1)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$  **Rpta.**  $4x^5 y + 4x^4 y^2 + x^4 = c$
- 168  $(3 + y + 2y^2 \operatorname{sen}^2 x)dx + (x + 2xy - y \operatorname{sen} 2x)dy = 0$   
**Rpta.**  $y^2 \operatorname{sen} 2x = c + 2x(3 + y + y^2)$
- 169  $\cos \theta(1 + 2r \cos^2 \theta)dr + r \operatorname{sen} \theta(1 - r \cos^2 \theta)d\theta = 0$  **Rpta.**  $r^2 \cos^2 \theta + r = c \cdot \cos \theta$
- 170  $(r^2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{tg} \theta)dr + r \sec \theta(\sec \theta + r^2 \operatorname{tg} \theta)d\theta = 0$  **Rpta.**  $r^2 \sec \theta + \operatorname{tg} \theta = rc$
- 171  $(x^3 + xy^2 + y)dx + (y^3 + x^2 y + x)dy = 0$  **Rpta.**  $(x^2 + y^2)^2 = c - 4xy$
- 172  $(x^3 + xy^2 - y)dx + (y^3 + x^2 y + x)dy = 0$  **Rpta.**  $2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = c - x^2 - y^2$
- 173  $(y^2 \cos x - y)dx + (x + y^2)dy = 0$  **Rpta.**  $y^2 - x = y(c - \operatorname{sen} x)$
- 174  $(x + x^3 \operatorname{sen} 2y)dy - 2y dx = 0$  **Rpta.**  $x^2(c + \cos 2y) = 2y$
- 175  $(2y \operatorname{sen} x - \cos^3 x)dx + \cos x dy = 0$  **Rpta.**  $y = (x + c) \cos^2 x$
- 176  $(2x + 2xy^2)dx + (x^2 y + 2y + 3y^3)dy = 0$  **Rpta.**  $(x^2 + y^2)\sqrt{1 + y^2} = c$

177) Probar que si  $\frac{Nx - My}{xM - yN} = R$ , donde  $R$  depende sólo de  $xy$ , entonces la ecuación diferencial  $Mdx + Ndy$ , tiene un factor integrante de la forma  $M(xy)$ , Hallar una fórmula general para este factor integrante.

178) Hallar un factor integrante y resolver la ecuación diferencial

$$(2y^3 + 2x^2y - by)dx - (2x^3 + 2xy^2 - 2bx)dy = 0$$

179)  $(x + y)^2(x dy - y dx) + [y^2 - 2x^2(x + y)^2](dx + dy) = 0$

180) Encontrar la solución general de la ecuación  $(xy - x^2)dx + (xy - y^2)dy = 0$ , aplicando un factor integrante de la forma  $u = \varphi(y - x)$  **Rpta.**  $x^2 - y^2 = c$

181) Resolver la ecuación diferencial  $y(2xy + 1)dx + (x + 2x^2y - x^4y^3)dy = 0$ , sabiendo que  $u$  es factor de la forma  $u = \frac{1}{Mx - Ny}$ , donde  $Mx - Ny \neq 0$ .

$$\text{Rpta. } \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{3x^3y^3} + \ln y = c$$

182) Resolver la ecuación diferencial  $(3x + \frac{6}{y})dx + (\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x})dy = 0$  encontrando un factor integrante de la forma  $u = \varphi(x - y)$ . **Rpta.**  $x^3y + y^3 + 3x^2 = c$

183)  $2x - y \operatorname{sen}(xy) + (3y^2 - x \operatorname{sen} xy) \frac{dy}{dx} = 0$  **Rpta.**  $x^2 + y^3 - \operatorname{sen} xy = k$

184)  $ye^{xy} - 8x + (2y + xe^{xy}) \frac{dy}{dx} = 0$  **Rpta.**  $e^{xy} - 4x^2 + 2y^2 = c$



## 2.8. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.-

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x) \quad \dots (1)$$

donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $f$  son funciones solamente de  $x$  ó constantes.

Suponiendo que  $a_1(x) \neq 0$ , entonces, dividiendo a la ecuación (1) por  $a_1(x)$  se tiene

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_2(x)}{a_1(x)} y = \frac{f(x)}{a_1(x)}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x). \quad \dots (2)$$

a la ecuación (2) llamaremos ecuación diferencial lineal de primer orden en  $y$ .

Si  $Q(x) = 0$ , la ecuación (2) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad \dots (3)$$

a la ecuación (3) llamaremos ecuación diferencial lineal homogénea y es una ecuación diferencial de variable separable y su solución es:

$$y = Ke^{-\int p(x)dx}$$

Si  $Q(x) \neq 0$ , la ecuación (2) es decir:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x) \text{ llamaremos ecuación diferencial lineal no homogénea.}$$

Como  $Q(x) \neq 0$ , la ecuación (2) no es exacta.

Luego hallaremos un factor de integración para su solución.

Si  $I(x)$  es un factor integrante sólo de  $x$  a la ecuación (2) lo expresaremos así:

$[p(x)y - Q(x)] dx + dy = 0$ , al multiplicar por  $I(x)$ .

$I(x)[p(x)y - Q(x)] dx + I(x) dy = 0$ , es una ecuación diferencial exacta,

por lo tanto:  $\frac{\partial I(x)(p(x)y - Q(x))}{\partial y} = \frac{\partial I(x)}{\partial x}$ , efectuando:

$I(x)p(x) = \frac{dI(x)}{dx}$ , de donde agrupando  $\frac{dI(x)}{I(x)} = p(x)dx$ , integrando con respecto a  $x$ .

$\int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int p(x)dx \Rightarrow \ln I(x) = \int p(x)dx$  de donde:

$I(x) = e^{\int p(x)dx}$ , el factor de integración

ahora multiplicamos a la ecuación diferencial.

$(p(x)y - Q(x))dx + dy = 0$  por  $I(x) = e^{\int p(x)dx}$

$e^{\int p(x)dx} [p(x)y - Q(x)]dx + e^{\int p(x)dx} dy = 0$  agrupando

$e^{\int p(x)dx} p(x)y dx + e^{\int p(x)dx} dy = e^{\int p(x)dx} Q(x) dx$

$d(e^{\int p(x)dx} y) = e^{\int p(x)dx} Q(x) dx$ , integrando:  $e^{\int p(x)dx} y = \int e^{\int p(x)dx} Q(x) dx + c$ , de donde:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} Q(x) dx + c \right]$$

Que es la solución general de la ecuación (2)

a. **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$

Solución

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x, \text{ de donde } p(x) = 2, \quad Q(x) = x^2 + 2x$$

Como la solución general es:  $y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right]$

$$y = e^{-\int 2dx} \left[ \int e^{\int 2dx} (x^2 + 2x)dx + c \right] \text{ efectuando.}$$

$$y = e^{-2x} \left[ \int e^{2x} (x^2 + 2x)dx + c \right] \text{ integrando por partes se tiene: } y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{4} + ce^{-2x}$$

②  $x \ln x \frac{dy}{dx} - y = x^3 (3 \ln |x| - 1)$

### Solución

A la ecuación diferencial escribiremos así:  $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x \ln x} y = \frac{x^2 (3 \ln |x| - 1)}{\ln x}$ , ecuación lineal en  $y$ . Como la solución general de la ecuación es:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right] \text{ reemplazando}$$

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x \ln |x|}} \left[ \int e^{\int \frac{dx}{x \ln |x|}} \frac{x^2 (3 \ln |x| - 1)}{\ln |x|} dx + c \right]$$

$$y = e^{\ln(\ln|x|)} \left( \int e^{-\ln(\ln|x|)} \frac{x^2 (3 \ln |x| - 1)}{\ln |x|} dx + c \right), \text{ simplificando}$$

$$y = \ln |x| \left( \int \frac{x^2 (3 \ln |x| - 1)}{\ln^2 |x|} dx + c \right), \text{ poniendo bajo un diferencial}$$

$$y = \ln |x| \left( \int d\left(\frac{x^3}{\ln |x|}\right) + c \right) = \ln |x| \left( \frac{x^3}{\ln |x|} + c \right) \quad \therefore y = x^3 + c \cdot \ln |x|$$

③  $\frac{dy}{dx} + \phi(x)y - \phi(x)\phi(x) = 0$

**Solución**

A la ecuación diferencial expresaremos así:  $\frac{dy}{dx} + \phi'(x)y = \phi(x)\phi'(x)$

Como la solución general es:  $y = e^{-\int \phi'(x) dx} \left( \int e^{\int \phi'(x) dx} Q(x) dx + c \right)$  reemplazando

$$y = e^{-\int \phi'(x) dx} \left( \int e^{\int \phi'(x) dx} \phi(x)\phi'(x) dx + c \right)$$

$$y = e^{-\phi(x)} \int e^{\phi(x)} \phi(x)\phi'(x) dx + c \quad \text{integrando por partes.}$$

$$\begin{cases} u = \phi(x) \\ dv = e^{\phi(x)} \phi'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \phi'(x) \\ v = e^{\phi(x)} \end{cases}$$

$$y = e^{-\phi(x)} (\phi(x)e^{\phi(x)} - e^{\phi(x)} + c)$$

$$\therefore y = \phi(x) - 1 + c \cdot e^{-\phi(x)}$$

4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2y}$$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2y$$

$$\frac{dx}{dy} = -(\operatorname{sen} y)x = 2 \operatorname{sen} 2y, \quad \text{ecuación lineal en } x.$$

$$x = e^{-\int \operatorname{sen} y dy} \left( \int e^{\int \operatorname{sen} y dy} 2 \operatorname{sen} 2y dy + c \right), \quad \text{calculando la integral}$$

$$x = e^{-\cos y} \left( \int e^{\cos y} 2 \operatorname{sen} 2y dy + c \right) \quad \text{de donde}$$

$$x = e^{-\cos y} \left( 4 \int e^{\cos y} \operatorname{sen} y \cdot \cos y dy + c \right) \quad \text{integrando por partes.}$$

$$x = e^{-\cos y} (-4 \cos y e^{\cos y} + 4e^{\cos y} + c), \text{ simplificando} \quad \therefore x = 8 \operatorname{sen}^2 \frac{y}{2} + ce^{-\cos y}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{dy}{dx} - yc \operatorname{tg} x = 2x - x^2 c \operatorname{tg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1$$

### Solución

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{-\int -c \operatorname{tg} x dx} \left[ \int e^{\int -c \operatorname{tg} x dx} (2x - x^2 c \operatorname{tg} x) dx + c \right], \text{ efectuando la integral}$$

$$y = e^{\operatorname{Ln} \operatorname{sen} x} \left( \int e^{-\operatorname{Ln} \operatorname{sen} x} (2x - x^2 c \operatorname{tg} x) dx + c \right), \text{ simplificando}$$

$$y = \operatorname{sen} x \left( \int \frac{2x - x^2 c \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} dx + c \right) \text{ integrando}$$

$$y = \operatorname{sen} x (x^2 + c \operatorname{ec} x + c) = x^2 + c \operatorname{sen} x, \quad \text{para } x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi^2}{4} + 1$$

$$\frac{\pi^2}{4} + 1 = \frac{\pi^2}{4} + c \Rightarrow c = 1, \text{ por lo tanto } y = x^2 + \operatorname{sen} x$$

$$\textcircled{6} \quad (1+x^2) \ln(1+x^2) \frac{dy}{dx} - 2xy = \ln(1+x^2) - 2x \operatorname{arctg} x \text{ donde } y \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

### Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{(x^2+1) \ln(x^2+1)} y = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2) \ln(1+x^2)}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{-\int \frac{-2x dx}{(x^2+1) \ln(x^2+1)}} \left[ \int e^{\int \frac{-2x dx}{(x^2+1) \ln(x^2+1)}} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2) \ln(1+x^2)} \right) dx + c \right]$$



$$y = e^{\ln(\ln(1+x^2))} \left[ \int e^{-\ln(\ln(x^2+1))} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2) \ln(1+x^2)} \right) dx + c \right]$$

$$y = \ln(1+x^2) \left[ \int \left[ \frac{1}{(1+x^2) \ln(1+x^2)} - \frac{2x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2) \ln^2(1+x^2)} \right] dx + c \right]$$

$$y = \ln(1+x^2) \left[ \int d\left( \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} \right) + c \right] = \ln(1+x^2) \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} + c \right)$$

$$y = \operatorname{arctg} x + x \ln(1+x^2) \quad \text{de donde} \quad c = \frac{y}{\ln(1+x^2)} - \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} \quad \text{para } y \rightarrow \frac{-\pi}{2}, x \rightarrow \infty$$

$$c = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} - \frac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow c = 0. \quad \text{Luego la solución particular es: } y = \operatorname{arctg} x$$

7  $\frac{dy}{dx} - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$ , donde  $y$  es una función acotada, cuando  $x \rightarrow \infty$

### Solución

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x, \quad \text{la solución general es:}$$

$$y = e^{-\int 2x dx} \left[ \int e^{\int 2x dx} (\cos x - 2x \operatorname{sen} x) dx + c \right], \quad \text{simplificando}$$

$$y = e^{x^2} \left[ \int e^{-x^2} (\cos x - 2x \operatorname{sen} x) dx + c \right], \quad \text{poniendo bajo un diferencial}$$

$$y = e^{x^2} \left( \int d(e^{-x^2} \operatorname{sen} x) + c \right) = e^{x^2} (e^{-x^2} \operatorname{sen} x + ce^{x^2})$$

$$y = \operatorname{sen} x + ce^{x^2}, \quad \text{como } \operatorname{sen} x \text{ varía entre } -1 \text{ y } 1 \text{ además y es acotado}$$

$$\text{Cuando } x \rightarrow \infty \text{ y } c = , \text{ por lo tanto } y = \operatorname{sen} x$$

8  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$

**Solución**

A la ecuación diferencial expresaremos así:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y - x$  de donde:

$\frac{dx}{dy} + x = e^y$ , ecuación diferencial lineal en  $x$  cuya solución general es:

$x = e^{-\int dy} \left[ \int e^{\int dy} e^y dy + c \right]$ , integrando tenemos:

$$x = e^{-y} \left[ \int e^{2y} dy + c \right] = e^{-y} \left( \frac{e^{2y}}{2} + c \right) \text{ por lo tanto } x = \frac{e^y}{2} + ce^{-y}$$

**b. EJERCICIOS PROPUESTOS.**

I. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

- ①  $x \operatorname{tg}^2 y \, dy + x \, dy = (2x^2 + \operatorname{tg} y) \, dx$  **Rpta.**  $\operatorname{tg} y = x(2\operatorname{sen} x + c)$
- ②  $\frac{dy}{dx} - e^x y = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - e^x \cos \frac{1}{x}$  **Rpta.**  $y = \cos \frac{1}{x} + ce^{e^x}$
- ③  $x \operatorname{sen} \theta \, d\theta + (x^3 - 2x^2 \cos \theta + \cos \theta) \, dx$  **Rpta.**  $\cos \theta = \frac{x}{2} + cxe^{-x^2}$
- ④  $x^2 \, dy + xy \, dx = 8x^2 \cos^2 x \, dx$  **Rpta.**  $xy = 2x^2 + 2x \operatorname{sen} 2x + \cos 2x + c$
- ⑤  $(x^5 + 3y) \, dx - x \, dy = 0$  **Rpta.**  $y = x^3 \left( \frac{x^2}{2} + c \right)$
- ⑥  $dy = x^{-5} (4x^4 y + 3x^4 y^{-1} + 256y^7 + 768y^5 + 864y^3 + 432y + 81y^{-1}) \, dx$
- ⑦  $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{c} \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$  **Rpta.**  $y = K \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$
- ⑧  $\cos y \cdot dx = (x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y) \, dy$  **Rpta.**  $x = K \operatorname{sec} y - \operatorname{sec} y \cdot \operatorname{Ln} \cos y$

$$(9) \quad (2x \frac{dy}{dx} + y)\sqrt{1+x} = 1+2x$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{c}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+x}$$

$$(10) \quad x(1-x^2) \frac{dy}{dx} - y + ax^3 = 0$$

$$\text{Rpta. } y = ax + \frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(11) \quad (y^2 - 1)dx = y(x+y)dy$$

$$\text{Rpta. } x = \sqrt{y^2 - 1}(\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) + C) - y$$

$$(12) \quad (1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2} \operatorname{sen} y - xy)dy$$

$$\text{Rpta. } x\sqrt{1+y^2} + \cos y = c$$

$$(13) \quad \frac{dy}{dx} + y \cos x = \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\text{Rpta. } y = ce^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$$

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} (x \cos y + a \operatorname{sen} 2y) = 1$$

$$\text{Rpta. } x = ce^{\operatorname{sen} y} - 2a(1 + \operatorname{sen} y)$$

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} + y = \operatorname{sen} x$$

$$\text{Rpta. } y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} + xy = 2x$$

$$\text{Rpta. } y = ce^{\frac{x^2}{2}} + 2$$

$$(17) \quad x^2 dy - \operatorname{sen} 2x dx + 3xy dx = 0$$

$$\text{Rpta. } 4x^3 y + 2x \cos 2x = c \operatorname{sen} 2x$$

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3+xy}{2x^2}$$

$$\text{Rpta. } y = c\sqrt{x} - \frac{1}{x}$$

$$(19) \quad x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x} = 1 - x^2$$

$$\text{Rpta. } y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + c(1 + \frac{1}{x})$$

$$(20) \quad (x+y)^2 (x dy - y dx) + [y^2 - 2x^2 (x+y)^2] (dx + dy) = 0$$

$$\text{Rpta. } (y - x^2 - xy)(x+y)^3 = K(y + 2x^2 + 2xy)$$

$$(21) \quad (x^2 + 1)dy = (x^3 + xy + x)dx$$

$$\text{Rpta. } y = x^2 + 1 + c\sqrt{x^2 + 1}$$

$$(23) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-xy}{1-x^2}$$

$$\text{Rpta. } y = x + c\sqrt{1-x^2}$$

$$(23) \quad x\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = x - y$$

$$\text{Rpta. } xy = ce^x - x - 1$$

$$(24) \quad 2x dy = (y - 3x^2 \ln x) dx$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{2x^2}{3} - x^2 \ln x + c\sqrt{x}$$

$$(25) \quad \frac{dy}{dx} + x \operatorname{sen} x = \frac{y}{x}$$

$$\text{Rpta. } y = x \cos x + cx$$

$$(26) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y + (2x-1)e^x}{2x+1}$$

$$\text{Rpta. } y = e^x + c(2x+1)$$

$$(27) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{x-y}{x-2}$$

$$\text{Rpta. } (x-2)y = x(x+c)$$

$$(28) \quad \frac{dy - (x+1)y dx}{x^2 + 4x + 2} = dx$$

$$\text{Rpta. } y = ce^{\frac{x^2}{2}} - x - 3$$

$$(29) \quad (x^2 + 2x - 1)y' - (x+1)y = x - 1$$

$$\text{Rpta. } y = c\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x$$

$$\text{Sug. para la integral } d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

$$(30) \quad (x+1)dy - [2y + (x+1)^4]dx = 0$$

$$\text{Rpta. } y = c(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$$

$$(31) \quad x \ln x \cdot \frac{dy}{dx} - (1 + \ln(x))y + \frac{\sqrt{x}}{2}(2 + \ln x) = 0$$

$$\text{Rpta. } y = cx \ln x + \sqrt{x}$$

$$(32) \quad y' - y = 2xe^{x+x^2}$$

$$\text{Rpta. } y = e^{x+x^2} + ce^x$$

$$(33) \quad xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x$$

$$\text{Rpta. } y = -x \cos x + cx$$

$$(34) \quad x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{cx}{x-1} + x^2$$

$$(35) \quad y' \cos y + \sin y = x+1$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{sen} y = x + ce^{-x}, \text{ sug. } z = \operatorname{sen} y$$

$$(36) \quad y' + \operatorname{sen} y + x \cos y + x = 0$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{tg} \frac{y}{2} = ce^{-x} - x + 1$$

$$\text{sug: } \operatorname{sen} 2y = 2 \operatorname{sen} y \cos y, \quad \cos^2 y = \frac{1 + \cos 2y}{2}$$

$$(37) \quad y' - \frac{n}{x+1} y = e^x(x+1)^n$$

$$\text{Rpta. } y = (x+1)^n (c + e^x)$$

$$(38) \quad (y^3 - y)dx + (xy^2 - x - y^2 + 1)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } x(y^2 - 1) = y^2 + 1 + cy + 1$$

$$(39) \quad x \frac{dy}{dx} + y(xc \operatorname{tg} x + 1) = c \operatorname{tg} x$$

$$\text{Rpta. } (xy - 1) \operatorname{sen} x = c$$

$$(40) \quad (x + \operatorname{sen} y - 1)dy + \cos y \, dx = 0$$

$$\text{Rpta. } x(\sec y + \operatorname{tg} y) = y + c$$

$$(41) \quad (e^y - 2xy)y' = y^2$$

$$\text{Rpta. } xy^2 = e^y + c$$

$$(42) \quad y - xy' = y^2 e^y$$

$$\text{Rpta. } x = ye^y + cy$$

$$(43) \quad x \frac{dy}{dx} - 3y = x^4$$

$$\text{Rpta. } y = x^4 + cx^3$$

$$(44) \quad y' + yc \operatorname{tg} x = 2x \cos ecx$$

$$\text{Rpta. } y = x^2 \cos ecx + c \cos ecx$$

$$(45) \quad y' + y = \frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$\text{Rpta. } y = e^{-x} \operatorname{arctg} e^x + ce^{-x}$$

$$(46) \quad y' + y = 2xe^{-x} + x^2$$

$$\text{Rpta. } y = x^2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}$$

$$(47) \quad (1+x^2)dy + 2xy \, dx = c \operatorname{tg} x \, dx$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2}$$



48  $(x^5 + 3y)dx - x dy = 0$

Rpta.  $2y = x^5 + cx^3$

49  $2(2xy + 4y - 3)dx + (x + 2)^2 dy = 0$

Rpta.  $y = \frac{2}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^4}$

50  $(2xy + x^2 + x^4)dx - (1 + x^2)dy = 0$

Rpta.  $y = (1 + x^2)(c + x - \arctg x)$

51  $(y - \cos^2 x)dx + \cos x dy = 0$

Rpta.  $y(\sec x + \tg x) = c + x - \cos x$

52  $(y - x + xy \ctg x) dx + x dy = 0$

Rpta.  $xy \sen x = c + \sen x - x \cos x$

53  $2y(y^2 - x)dy = dx$

Rpta.  $x = y^2 - 1 + ce^{-\frac{y^2}{3}}$

54  $(1 + xy)dx - (1 + x^2)dy = 0$

Rpta.  $y = x + c(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

55  $dx - (1 + 2x \tg y) dy = 0$

Rpta.  $2x \cos^2 y = y + c + \sen y \cos y$

56  $(1 + \cos x)y' = \sen x(\sen x + \sen x \cos x - y)$

Rpta.  $y = (1 + \cos x)(c + x - \sen x)$

57  $y'' + \frac{y'}{x-1} = x-1$

Rpta.  $y = \frac{1}{6}(x-1)^3 + K_1(x-1)^2 + K_2$

58  $(x^2 + 1)y' - (1-x)^2 y = xe^{-x}$

Rpta.  $y = \frac{ce^x - (2x+1)e^{-x}}{4(x^2 + 1)}$

59  $x \sen x \frac{dy}{dx} + (\sen x + x \cos x)y = xe^x$

Rpta.  $y = \frac{e^x(x-1) + c}{x \sen x}$

60  $x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + \sqrt{1-x^2})e^x$

Rpta.  $y = \left(\frac{1 + \sqrt{1-e^x}}{x}\right)(e^x + c)$

61  $(1 + \sen x) \frac{dy}{dx} + (2 \cos x)y = \tg x$

Rpta.  $y = \frac{\sen x + \ln(1 - \sen x) + c}{(1 + \sen x)^2}$

62  $x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2}$

Rpta.  $y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)(c - e^{-x^2})$

$$(63) \quad y' - (\operatorname{tg} x)y = e^{\operatorname{sen} x} \quad \text{para } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Rpta. } y = \sec x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cos ecx$$

$$(64) \quad y + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{x^2}{2} e^{-x^2} + ce^{-x^2}$$

$$(65) \quad \frac{dy}{dx} + my = e^{-mx}$$

$$\text{Rpta. } y = xe^{-mx} + ce^{-mx}$$

$$(66) \quad \frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = Kx$$

$$\text{Rpta. } y = ce^{\cos x} + Ke^{\cos x} \int e^{\operatorname{tg}(t)} dt$$

$$(67) \quad (1-x^2) \frac{dy}{dx} + xy = Kx$$

$$\text{Rpta. } y = K + c\sqrt{1+x^2}$$

$$(68) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = x$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{x^4 + 2x^2 + c}{4(x^2+1)}$$

$$(69) \quad y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$$

$$\text{Rpta. } x = y \ln y + \frac{c}{y}$$

$$(70) \quad x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \frac{x^3-2}{x}$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{cx}{x^3+1} + \frac{1}{x}$$

$$(71) \quad y' + x \operatorname{sen} 2y = xe^{-x^2} \cos^2 y$$

$$\text{Rpta. } \operatorname{tg} y = \left(c + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x^2}, \quad \text{sug: } z = \operatorname{tg} y$$

$$(72) \quad xy' = x - y + \operatorname{tg} x$$

$$\text{Rpta. } xy \cos x = c + \cos x + x \operatorname{sen} x$$

$$(73) \quad (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} x) dx - \cos x \cos y dy = 0$$

$$\text{Rpta. } \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \ln(\operatorname{cosec} x)$$

$$(74) \quad x \operatorname{sen} x \cdot y' + (\operatorname{sen} x + x \cos x)y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x - x$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{K \operatorname{sen} x}{x} + \cos x$$

$$(75) \quad (2x-1)y' - 2y = \frac{1-4x}{x^2}$$

$$\text{Rpta. } y = c(2x-1) + \frac{1}{x}$$

- 76  $y' + \operatorname{sen} x \cdot y = 2xe^{\cos x}$  **Rpta.**  $y = (x^2 + c)e^{\cos x}$
- 77  $x^2 dy + xy dx = 8x^2 \cos 2x dx$  **Rpta.**  $xy = 2x^2 + 2x \operatorname{sen} 2x + \cos 2 + c$
- 78  $dy + 2y dx = \operatorname{sen} 3x \cdot dx$  **Rpta.**  $y = \frac{1}{13}(2 \operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x) + ce^{-2x}$
- 79  $dx - x dy = \ln y dy$  **Rpta.**  $x + \ln y = e^y \int \frac{e^{-y}}{y} dy$
- 80  $(\operatorname{sen} x + \cos y) dx + \cos x dx - \operatorname{sen} y dy = 0$  **Rpta.**  $\operatorname{sen} x + \cos y = ce^{-x}$
- 81  $(x^2 + x + 1)yy' + (2x + 1)y^2 = 2x - 1$  **Rpta.**  $y^2(x^2 + x + 1)^2 = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + n$
- 82  $\int \phi(\alpha x) d\alpha = n\phi(x)$  **Rpta.**  $\phi(x) = c.e^{\frac{n-1}{n}x}$
- 83  $(1 + 2x \cdot \operatorname{ctg} y) dy = dx$  **Rpta.**  $x = \operatorname{sen}^2 y(c - c \operatorname{tg} y)$
- 84  $f(x) dy + 2yf'(x) dx = f(x) \cdot f'(x) dx$  **Rpta.**  $3y = f(x) + c \cdot (f(x))^{-2}$
- 85  $f^2(y) \frac{dx}{dy} + 3f(y)f'(y)x = f'(y)$  **Rpta.**  $2x \cdot f^3(y) = f^2(y) + c$
- 86  $\cos x \cdot y' + \sec x \cdot y' + (\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x)y = 2 \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x$  **Rpta.**  $y = \cos x + c.e^{-\operatorname{tg} x} \int e^{\operatorname{tg}(t)} dt + K$
- 87  $\cos x dy + 3y \operatorname{sen} x dx - \cos^2 x dx = 0$  **Rpta.**  $y \sec^3 x = 2 \operatorname{tg} x + c$
- 88  $\cos x \frac{dy}{dx} + \operatorname{sen} x = 1 - y$  **Rpta.**  $y(\sec x + \operatorname{tg} x) = x + c$
- 89  $y' \operatorname{sen} x = y \cos x + \operatorname{sen}^2 x$  **Rpta.**  $y = (x + c) \operatorname{sen} x$

- 90  $xyy'+y^2 = \operatorname{sen} x$  **Rpta.**  $x^2y^2 = 2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x + c$ , sug.  $x = y^2$
- 91  $x(x^2+1)y'+2y = (x^2+1)^3$  **Rpta.**  $x^2y = \frac{1}{4}(x^2+1)^3 + c(x^2+1)$
- 92  $y' = 1 + 3y \operatorname{tg} x$  **Rpta.**  $3y \cos^3 x = c + 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$
- 93  $(x+a)y' = bx - ny$ , a, b, n constante,  $n \neq 0$ ,  $n \neq -1$  **Rpta.**  $n(n+1)y = b(nx-a) + c(x+a)^{-n}$
- 94  $(\cos 2y - \operatorname{sen} x) dx - 2 \operatorname{tg} x \operatorname{sen} 2y dy = 0$  **Rpta.**  $\operatorname{sen} x \cos 2y - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} = c$
- 95  $(3x^2+1)y' - 2xy = 6x$  **Rpta.**  $y = -3 + k(x^2+1)$
- 96  $(x^2+1)y' + xy = (1-2x)\sqrt{x^2+1}$  **Rpta.**  $y = \frac{x-x^2+c}{\sqrt{x^2+1}}$
- 97  $x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{2x+1}} = 1 + \sqrt{2x+1}$  **Rpta.**  $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)[2z - 2 \ln |z+1| + c]$ ,  $z = \sqrt{2x+1}$
- 98  $\operatorname{sen} x \cos x \frac{dy}{dx} + y = \operatorname{tg}^2 x$  **Rpta.**  $y = 1 + k \operatorname{ctg} x$
- 99  $x^2 dy + (2xy - x + 1) dx = 0$  **Rpta.**  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$
- 100  $xy' + (1+x)y = e^{-x}$  **Rpta.**  $y = e^{-x} \left(1 + \frac{c}{x}\right)$
- 101  $y' + \frac{y}{1-x} = x^2 - x$  **Rpta.**  $y = (1-x) \left(c - \frac{x^2}{2}\right)$
- 102  $y' = \frac{2y}{1+x} + (1+x)^3$  **Rpta.**  $y = (x+1)^2 \left[x + \frac{x^2}{2} + c\right]$
- 103  $x dy = (2y + 3x^4 + x^2) dx$  **Rpta.**  $y = x^2 \left[\frac{3x^2}{2} + \ln x + c\right]$

$$\textcircled{104} \quad y' + 2xy + x = e^{-x^2} \qquad \textcircled{105} \quad \frac{dy}{dx} + xy - x^2 + x^3(y-x)^2 = 1$$

$$\textcircled{106} \quad \frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = e^{-x} (\operatorname{tg} x - 1) \qquad \textcircled{107} \quad (5y - 2x^3 y^{\frac{3}{2}}) dx + x^4 y^{\frac{1}{2}} dy = 0$$

**108** Supongamos que  $\phi$  es una función con derivada continua en  $0 \leq x \leq 1$  que satisfice  $\phi'(x) - 2\phi(x) \leq 1$  y  $\phi(0) = 1$  probar que  $\phi(x) \leq \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$

$$\textcircled{109} \quad y'' + (\operatorname{tg} x)y' + \sec^2 x \cdot y = \cos x \qquad \text{Rpta. } y = \cos x [\ln|\sec x| + c \cdot \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k]$$

$$\textcircled{110} \quad (ny + (x+1)^{n+1} e^x) dx - (x+1) dy = 0 \qquad \text{Rpta. } y = (x+1)^n e^x + c(x+1)^n$$

$$\textcircled{111} \quad (x^2 + 2x + \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + 2x \cos(x^2 + y^2)) dx + 2y \cos(x^2 + y^2) dy = 0$$

$$\textcircled{112} \quad dy + (4x^2 y - x^2 e^{-x^3}) dx = 0 \qquad \textcircled{113} \quad \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + 2 \operatorname{sen}^2 x \cdot y = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\textcircled{114} \quad y' + \left(\frac{1}{x-2}\right)y = 3x, \quad y(3) = 4$$

**II.** Hallar la solución particular de la ecuación diferencial con las condiciones dadas.

$$\textcircled{1} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0 \qquad \text{Rpta. } y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$$

$$\textcircled{2} \quad xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b \qquad \text{Rpta. } y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$$

$$\textcircled{3} \quad y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, \quad y(0) = 0 \qquad \text{Rpta. } y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc} \operatorname{sen} x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\textcircled{4} \quad y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0 \qquad \text{Rpta. } y = \frac{x}{\cos x}$$

$$\textcircled{5} \quad y' - \left(1 + \frac{3}{x}\right)y = x + 2, \quad y(1) = e - 1 \qquad \text{Rpta. } y = x^3 e^x - x$$



- ⑥  $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 + x$ ,  $y(1) = 1$  **Rpta.**  $y = x^2 \ln x + 2x^2 - x$
- ⑦  $y \frac{dy}{dx} - 2x = 3y^2 - 2$ ,  $y(1) = 1$  **Rpta.**  $x = 3y^2 \ln y + 1$
- ⑧  $y dx - 4x dy = y^6 dy$ ,  $y(4) = 1$  **Rpta.**  $2x = y^4(y^2 + 7)$
- ⑨  $y' - 2xy = \cos x - 2x \sin x$ ,  $y$  es una función acotada cuando  $x \rightarrow \infty$  **Rpta.**  $y = \sin x$
- ⑩  $2\sqrt{x}y' - y = -\sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{x}$ ,  $y$  es acotada cuando  $x \rightarrow +\infty$  **Rpta.**  $y = \cos \sqrt{x}$
- ⑪  $y' - y \ln 2 = 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2$ ,  $y$  es acotada cuando  $x \rightarrow +\infty$  **Rpta.**  $y = 2^{\sin x}$
- ⑫  $2x^2 y' - xy = 2x \cos x - 3 \sin x$ ,  $y \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow +\infty$  **Rpta.**  $y = \frac{\sin x}{x}$
- ⑬  $y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$ ,  $y \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \infty$  **Rpta.**  $y = \frac{\sin x}{x}$
- ⑭  $y' - e^x y = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} - e^x \cos \frac{1}{x}$ ,  $y \rightarrow 2$ , cuando  $x \rightarrow -\infty$  **Rpta.**  $y = e^{e^x} + \cos \frac{1}{x}$
- ⑮  $y' - y \ln x = -(1 + 2 \ln x)x^{-x}$ ,  $y \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow +\infty$  **Rpta.**  $y = x^{-x}$
- ⑯  $L \frac{di}{dt} + Ri = E$ , donde  $L, R, E$  son constantes,  $i(0) = 0$  **Rpta.**  $i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$
- ⑰  $\frac{di}{dt} + Ri = E \cdot \sin \omega t$ , cuando  $t = 0, i = 0$   
**Rpta.**  $i = EZ^{-2} (R \cdot \sin \omega t - \omega L \cos \omega t + \omega L e^{-\frac{Rt}{L}})$  donde  $Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2$
- ⑱  $(3x^4 y - 1) dx + x^5 dy = 0$ ,  $y(1) = 1$  **Rpta.**  $x^4 y = 2x - 1$

19)  $(y' + y \operatorname{tg} x) = \operatorname{sen} 2x$ ,  $y(0) = 2$

Rpta.  $y = 4 \cos x - 2 \cos^2 x$

20)  $\frac{dx}{dt} + x = e^{2t}$ ,  $x(0) = 1$

Rpta.  $y = \frac{e^{2t}}{3} + \frac{2e^{-t}}{3}$

## 2.9. ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI.-

Las Ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n; \quad n \neq 1 \quad \dots (1)$$

Se conoce con el nombre de Ecuación Diferencial de Bernoulli.

La ecuación (1) no es una ecuación diferencial lineal.

Luego para resolver la ecuación (1), primero se transforma a una ecuación diferencial lineal, mediante el procedimiento siguiente:

1° A la ecuación (1) se multiplica por  $y^{-n}$ , es decir:  $y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = Q(x)$

2° A la ecuación diferencial del 1° paso se multiplica por  $(1-n)$ , es decir:

$$(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

3° Sea  $z = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$

4° Se reemplaza el 3° paso en el 2° paso, es decir:  $\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)Q(x)$

Que es una ecuación diferencial lineal en  $z$  de primer orden y la solución es conocida de acuerdo a 2.11.

a. **Ejemplos:** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\textcircled{1} \quad 2x \frac{dy}{dx} + 2y = xy^3$$

**Solución**

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:  $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{y^3}{2}$ ; multiplicando por  $y^{-3}$

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-2} = \frac{1}{2}; \text{ multiplicando por } (1 - n) \text{ es decir por } -2.$$

$$-2y^{-3} \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y^{-2} = -1 \quad \dots (1)$$

Sea  $z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$  reemplazando en (1)

$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = -1$ , ecuación diferencial lineal en  $z$ , y la solución general es:

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[ \int e^{\int \frac{2}{x} dx} (-1) dx + c \right] \text{ efectuando } z = e^{-2 \ln x} \left[ - \int e^{-2 \ln x} dx + c \right]$$

$$\therefore y^{-2} = x + c \cdot x^2$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$$

**Solución**

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2y + y^3}{x}$ , de donde  $\frac{dy}{dx} - xy = y^3x^{-1}$ , multiplicando por  $x$ .

$x \frac{dy}{dx} - yx^2 = y^3$ , multiplicando por  $(1 - n)$  o sea por 2.

$$2x \frac{dy}{dx} - 2yx^2 = 2y^3 \quad \dots (1)$$

Sea  $z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x \frac{dx}{dy}$  reemplazando en (1)

$\frac{dz}{dy} - 2yz = 2y^3$ , ecuación diferencial lineal en  $z$ , y la solución general es:

$$z = e^{-\int -2y dy} \left[ \int e^{\int -2y dy} 2y^3 dy + c \right] = e^{y^2} \left[ \int e^{-y^2} 2y^3 dy + c \right] \text{ integrando por partes.}$$

$$z = e^{y^2} [-y^2 e^{-y^2} - e^{-y^2} + c] \text{ simplificando} \quad \therefore (x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$$

③  $y^2(y^6 - x^2)y' = 2x$

### Solución

$$y^2(y^6 - x^2)y' = 2x \Rightarrow 2x \frac{dx}{dy} = y^2(y^6 - x^2) \text{ de donde } \frac{dx}{dy} + \frac{y^2}{2}x = \frac{y^8}{2}x^{-1}$$

multiplicando por  $x$ :  $x \frac{dx}{dy} + \frac{y^2}{2}x^2 = \frac{y^8}{2}$

multiplicando por  $(1 - n)$  o sea por 2 se tiene:  $2x \frac{dx}{dy} + y^2x^2 = y^8 \quad \dots (1)$

Sea  $z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = 2x \frac{dx}{dy}$  reemplazando en (1)

$\frac{dz}{dy} + y^2z = y^8$  ecuación diferencial lineal en  $z$ , y la solución general es:

$$z = e^{-\int y^2 dy} \left[ \int e^{\int y^2 dy} y^8 dy + c \right], \text{ integrando se tiene: } z = e^{-\frac{y^3}{3}} \left[ \int e^{\frac{y^3}{3}} y^8 dy + c \right]$$

integrando por partes  $z = e^{-\frac{y^3}{3}} \left[ 9\left(\frac{y^6}{9} - \frac{2y^3}{3}\right) + 2\right] e^{\frac{y^3}{3}} + c$  simplificando

$$\therefore x^2 = y^6 - 6y^3 + 18 + ce^{\frac{y^3}{3}}$$

$$(4) \quad ydx + (x - \frac{x^3}{2})dy = 0$$

**Solución**

A la ecuación diferencial dada expresaremos así:  $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = \frac{x^3}{2}$ , multiplicando por  $x^{-3}$

$$x^{-3} \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x^{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^{-3} \frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x^{-2} = 1$$

Sea  $z = x^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -2x^{-3} \frac{dx}{dy}$  reemplazando.

$-\frac{dz}{dy} + \frac{2}{y}z = 1 \Rightarrow \frac{dz}{dy} - \frac{2}{y}z = -1$  ecuación lineal en  $z$ , Luego la solución es:

$z = e^{-\int \frac{2}{y} dy} [\int e^{\int \frac{2}{y} dy} (-1) dy + c]$ , integrando  $z = e^{2 \ln y} [-\int e^{-2 \ln y} dy + c]$ , simplificando

$$z = y^2 [-\int \frac{dy}{y^2} + c] \quad \therefore x^{-2} = y + cy^2$$

$$(5) \quad 3x dy = y(1 + x \operatorname{sen} x - 3y^3 \operatorname{sen} x) dx$$

**Solución**

$3x dy = y(1 + x \operatorname{sen} x - 3y^3 \operatorname{sen} x) dx$  expresaremos así:

$3x \frac{dy}{dx} = y(1 + x \operatorname{sen} x - 3y^3 \operatorname{sen} x)$  de donde

$\frac{dy}{dx} - \frac{1 + x \operatorname{sen} x}{3x} y = -(\frac{\operatorname{sen} x}{x}) y^4$ , multiplicando por  $y^{-4}$

$$y^{-4} \frac{dy}{dx} - \frac{1 + x \operatorname{sen} x}{3x} y^{-3} = -\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$



Sea  $z = y^{-3} \Rightarrow -\frac{dz}{3dx} = y^{-4} \frac{dy}{dx}$  reemplazando.

$$-\frac{dz}{3dx} - \frac{1+x \operatorname{sen} x}{3x} z = -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{1+x \operatorname{sen} x}{x} z = 3 \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

que es una ecuación diferencial lineal en  $z$ , cuya solución general es:

$$z = e^{-\int \frac{1+x \operatorname{sen} x}{x} dx} \left[ \int e^{\int \frac{1+x \operatorname{sen} x}{x} dx} 3 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + c \right], \text{ integrando}$$

$$z = e^{\ln x + \cos x} \left[ \int e^{\ln x - \cos x} 3 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + c \right], \text{ simplificando } z = \frac{e^{\cos x}}{x} \left[ 3 \int e^{-\cos x} \operatorname{sen} x dx + c \right]$$

$$z = \frac{e^{\cos x}}{x} [3e^{-\cos x} + c] \quad \therefore y^{-3} = \frac{3}{x} + \frac{c e^{\cos x}}{x}$$

⑥  $3x \frac{dy}{dx} - 2y = \frac{x^3}{y^2}$

### Solución

A la ecuación diferencial expresaremos así:  $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3x} y = x^2 y^{-2}$ , multiplicando por  $y^2$

$$y^2 \frac{dy}{dx} - \frac{2}{3x} y^3 = x^2 \quad \dots (1)$$

Sea  $z = y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$ , reemplazando en (1)

$$\frac{dz}{3dx} - \frac{2}{3x} z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = 3x^2, \text{ ecuación lineal en } z, \text{ cuya solución general es:}$$

$$z = e^{-\int \frac{2dx}{x}} \left[ \int e^{\int \frac{2dx}{x}} 3x^2 dx + c \right] = e^{-2 \ln x} \left[ \int e^{-2 \ln x} 3x^2 dx + c \right]$$

$$\text{de donde } y^3 = x^2(x+c) \Rightarrow y^3 = x^3 + cx^2$$

$$(7) \quad (2xy^3 - y)dx + 2x dy = 0$$

Solución

A la ecuación diferencial escribiremos en la forma:

$$2x \frac{dy}{dx} + 2xy^3 - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = -y^3$$

multiplicando por  $y^{-3}$  se tiene:  $y^{-3} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y^{-2} = -1 \quad \dots (1)$

Sea  $z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$  reemplazando en (1)

$$-\frac{dz}{2dx} - \frac{1}{2x}z = -1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = 2 \quad \text{ecuación lineal}$$

Cuya solución general es:  $z = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left[ \int e^{\int \frac{dx}{x}} 2 dx + c \right]$

$$z = e^{-\ln x} \left[ \int e^{\ln x} 2 dx + c \right] \Rightarrow z = \frac{1}{x} [x^2 + c] \Rightarrow y^{-2} = x + \frac{c}{x}$$

$$(8) \quad 2y = \frac{dy}{dx} + y^2 c \operatorname{tg} x = \operatorname{cosec} x$$

Solución

A la ecuación diferencial expresaremos en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{c \operatorname{tg} x}{2} y = \frac{\operatorname{cosec} x}{2} y^{-1}, \quad \text{multiplicando por } y.$$

$$y \frac{dy}{dx} + \frac{c \operatorname{tg} x}{2} y^2 = \frac{\operatorname{cosec} x}{2} \quad \dots (1)$$

Sea  $z = y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$  reemplazando en (1)

$$\frac{dz}{2dx} + \frac{c \operatorname{tg} x}{2} z = \frac{\operatorname{cosec} x}{2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + c \operatorname{tg} x \cdot z = \operatorname{cosec} x$$

que es una ecuación diferencial lineal en  $z$ , cuya solución general es:

$$z = e^{-\int c \operatorname{tg} x dx} \left[ \int e^{\int c \operatorname{tg} x dx} \cos ec x dx + c \right] = e^{-\ln(\operatorname{sen} x)} \left[ \int e^{\ln(\operatorname{sen} x)} \cos ec x dx + c \right]$$

$$z = \cos ec x [x + c] \Rightarrow y^2 = x \cos ec x + c \cdot \cos ec x.$$

### b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $(x^2 + y^2 + 1)dy + xy dx = 0$  **Rpta.**  $y^4 + 2x^2 y^2 + 2y^2 = K$

②  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^2$  **Rpta.**  $\frac{1}{y^2} = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$

③  $(x^2 + 1)y' = xy + x^2 y^2$  **Rpta.**  $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left( \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1+x^2}| - x\sqrt{1+x^2} + c \right)$

④  $\frac{dy}{dx} = \frac{4 \operatorname{sen}^2 y}{x^5 + x \operatorname{tg} y}$  **Rpta.**  $x^4 (K - \ln \operatorname{tg} y) = \operatorname{tg} y$

⑤  $(x^2 + y^2 + (y + 2x)x^{-1})dy = (2x^2 + y^2) + (y + 2x)x^{-2}y dx$  **Rpta.**  $(y - 2x)^2 = -\frac{2y}{x} + 10 \arctg \frac{y}{x}$  sug:  $y = u x$

⑥  $(xy^2)' = (xy)^3 (x^2 + 1)$  **Rpta.**  $y = \frac{45}{45c\sqrt{x} - 5x^5 - 9x^3}$

⑦  $dy - y \operatorname{sen} x dx = y \ln(ye^{\cos x}) dx$  **Rpta.**  $y = -e^{Ke^x - \cos x}$

⑧  $(x + y^3) + 6xy^2 y' = 0$  **Rpta.**  $y^3 = -\frac{x}{3} + c \cdot x^{\frac{1}{2}}$

⑨  $(xy^2 + x \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x)dx - 2y dy = 0$  **Rpta.**  $y^2 = \operatorname{sen}^2 x + c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

10  $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x-2}y = 5(x-2)\sqrt{y}$  **Rpta.**  $y^2 = c(x-2)^2 + (x-2)^2$

11  $3y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{y^3}{x+1} - 8(x+1) = 0, y(0) = 0$  **Rpta.**  $y^3(x+1) = \frac{8}{3}[(x+1)^3 - 1]$

12  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{e^{2x} + y^2}$  **Rpta.**  $y^2 = (c - 2 \ln |y|)e^{2x}$  sug:  $z = e^{2x} \Rightarrow dx = \frac{dz}{2z}$

13  $2 \cos y dx - (x \operatorname{sen} y - x^3) dy = 0$  **Rpta.**  $\operatorname{sec} y = x^2(c + \operatorname{tg} y)$

14  $dy + \frac{1}{x}y dx = 3x^2 y^2 dx$  **Rpta.**  $xy(c - \frac{3x^2}{2}) = 1$

15  $dy + y dx = 2xy^2 e^x dx$  **Rpta.**  $1 = ye^x(c - x^2)$

16  $3 \frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 2x^4 y^4$  **Rpta.**  $x^{-3}y^{-3} + x^2 = c$

17  $x^{-1} dx = (x \operatorname{sen} y - 1) dy$  **Rpta.**  $\frac{1}{x} = ce^y + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} y + \cos y)$

18  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$  **Rpta.**  $x^3 = ce^y - y - 2$

19  $8xy' - y = -\frac{1}{y^3 \sqrt{x+1}}$  **Rpta.**  $y^4 = c\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

20  $2 \operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} + y \cos x = y^3(x \cos x - \operatorname{sen} x)$  **Rpta.**  $\frac{1}{y^2} = x + K \operatorname{sen} x$

21  $x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{\ln x} = \frac{x(x + \ln x)}{y^2 \ln x}$

**Rpta.**  $y = [3x + \frac{3}{2}(\frac{x^2 - 6x}{\ln x}) - \frac{3}{2}(\frac{x^2 - 12x}{\ln x^2}) + \frac{1}{4}(\frac{3x^2 - 72x + c}{(\ln x)^3})]^{-\frac{1}{3}}$

22  $(x-1)\frac{dy}{dx} - 2y = \sqrt{(x^2-1)}y$  **Rpta.**  $y = [(1-x)(c + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1})]^2$

23  $dx + x.c \operatorname{tg} y . dy = \frac{x \operatorname{sen} y \cos y}{x^2 \operatorname{sen}^2 y + 1} dy$  **Rpta.**  $x^2 \operatorname{sen}^2 y + 2 \ln(x \operatorname{sen} y) = \operatorname{sen}^2 y + c$

24  $dx + (\frac{2}{y})x dy = 2x^2 y^2 dy$  **Rpta.**  $x^{-1} y^{-2} = c - 2y$

25  $dx - 2xy dy = 6x^3 y^2 e^{-2y^2} dy$  **Rpta.**  $x^{-2} e^{2y^2} = c - 4y^3$

26  $(12e^{2x} y^2 - y) dx = dy, y(0) = 1$  **Rpta.**  $y^{-1} e^{-x} = 13 - 12e^x$

27  $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$  **Rpta.**  $cxy + y(\ln x + 1) = 1$

28  $2xy \frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$  **Rpta.**  $y^2 = x \ln(\frac{k}{x})$

29  $ye^y = (y^3 + 2x e^y) y'$  **Rpta.**  $x = y^2 (c - e^{-y})$

30  $xy^3 dx = (x^2 y + 2) dy$  **Rpta.**  $x^2 = 1 - \frac{2}{y} + c e^{-\frac{2}{y}}$

31  $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 y}{x^4 + y^2}$  **Rpta.**  $x^4 = y^2 + cy$

32  $x^3 dy + 3x^2 dx = 2 \cos y dy$  **Rpta.**  $x^3 = \operatorname{sen} y + \cos y + c e^{-y}$

33  $x^3 dx - (x^4 + y^3) dy = 0$  **Rpta.**  $x^3 = \operatorname{sen} y + \cos y + c e^{-y}$

34  $yy' + y^2 = \cos x$  **Rpta.**  $y^2 = c e^{-2x} + \frac{2}{5} \operatorname{sen} x + \frac{4}{5} \cos x$

35  $y' = 5x^2 y^5 + \frac{y}{2x}$  **Rpta.**  $y^{-4} = \frac{c}{x^2} - 4x^3$



$$(36) \quad \cos x \frac{dy}{dx} - y \operatorname{sen} x + y^2 = 0$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{y} = \operatorname{sen} x + K \cdot \cos x$$

$$(37) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\text{Rpta. } ye^{2y^2} = c$$

$$(38) \quad 2 \frac{dy}{dx} = \frac{y(2x+3y^2)}{x^2}$$

$$\text{Rpta. } x^2 = (c-3x)y^2$$

$$(39) \quad \cos x \cdot \frac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} x + y^2 \operatorname{tg} x$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{2 \cos x}{K \cdot \cos^2 x - 1}$$

$$(40) \quad x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2 y(y^2 - x^2)$$

$$\text{Rpta. } x^2 = (1+c \cdot e^{x^4})y^2$$

$$(41) \quad (4-x^2+y^2)dx + 4y dy = 0, y(2) = 1$$

$$\text{Rpta. } y^2 = (x-2)^2 + e^{1-\frac{x}{2}}$$

$$(42) \quad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

$$\text{Rpta. } x^2 + y^2 - a^2 = cy$$

$$(43) \quad 3y' + \frac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)} y = \frac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$\text{Rpta. } y^3 = \frac{cx}{x^2 - a^2} + x^2$$

$$(44) \quad y dx = (y^3 - x) dy$$

$$\text{Rpta. } 4xy = y^4 + c$$

$$(45) \quad (x^2 - 1)dy - y(2x - 3y)dx = 0$$

$$\text{Rpta. } x^2 - 1 = y(3x + c)$$

$$(46) \quad y dx + (x^2 y^4 - 3x)dy = 0$$

$$\text{Rpta. } 7y^3 = x(y^7 + c)$$

$$(47) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{3x} + \frac{x^2 + 2}{3} y^4 = 0$$

$$\text{Rpta. } y^{-3} = \frac{x^3}{5} + \frac{2x}{3} + 4x^2$$

$$(48) \quad x^2 \frac{dy}{dx} - xy + y^3 e^x = 0$$

$$\text{Rpta. } x^2 = y^2(2e^x + c)$$

$$(49) \quad xy^2 y' + y^3 = x \cos x$$

$$\text{Rpta. } y^3 = 3 \operatorname{sen} x + \frac{9 \cos x}{x} - \frac{18 \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{18 \cos x}{x^3} + \frac{c}{x^4}$$

- 50  $6y^2 dx - x(ax^3 + y)dy = 0$  **Rpta.**  $(2x^3 - y)^2 = cy x^6$
- 51  $2x^3 y' = y(y^2 + 3x^2)$  **Rpta.**  $y^2(c - x)x^3$
- 52  $2y dx + x(x^2 \ln y - 1)dy = 0$  **Rpta.**  $y(1 + x^2 - x^2 \ln y) = cx^2$
- 53  $2xyy' = y^2 - 2x^3, y(1) = 2$  **Rpta.**  $y^2 = x(5 - x^2)$
- 54  $(y^4 - 2xy)dx + 3x^2 dy = 0, y(2) = 1$  **Rpta.**  $x^2 = y^3(x + 2)$
- 55  $(2y^3 - x^3)dx + 3xy^2 dy = 0, y(1) = 1$  **Rpta.**  $5x^2 y^3 = x^5 + 4$
- 58  $(x^2 + 6y^2)dx - 4xy dy = 0, y(1) = 1$  **Rpta.**  $2y^2 = x^2(3x - 1)$
- 57  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \operatorname{sen} x - y \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$  **Rpta.**  $y = (\operatorname{sen} x \cdot \ln |\cos ec 2x + c \operatorname{tg} 2x| + \operatorname{sen} x)^{-1}$
- 58  $(x^2 + 1)\sqrt{y}y' = xe^{\frac{3x}{2}} + (1 - x)^2 y\sqrt{y}$  **Rpta.**  $y = e^x \left(\frac{1}{2} + c(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$
- 59  $y' - 4y = 2e^x y^{\frac{1}{2}}, y(0) = 2,$  **Rpta.**  $y = (\sqrt{2}e^{2x} + e^{2x} - e^x)^2$
- 60  $y' - y = -y^2(x^2 + x + 1), y(0) = 1$  **Rpta.**  $y = \frac{1}{x^2 - x + 2 - e^{-x}}$
- 61  $xy' - 2y = 4x^3 y^{\frac{1}{2}}, y(1) = 0$  **Rpta.**  $y = (x^3 - x)^2$
- 62  $xy' + y = x^2 y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2}$  **Rpta.**  $y = \frac{1}{x^2 + x - x^2 \ln x}$
- 63  $y' = \frac{y\psi'(x) - y^2}{\psi(x)}$  donde  $\psi(x)$  es una función dada **Rpta.**  $y = \frac{\psi(x)}{x + c}$
- 64  $y^{n-1}(ay' + y) = x$  **Rpta.**  $ny^n = ce^{\frac{nx}{a}} + nx - a$

$$(65) \quad xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$$

$$\text{Rpta. } x^2 = y^2(c - y^2)$$

$$(66) \quad y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{1}{(1+x)[c + \ln|1+x|]}$$

$$(67) \quad xdy - 2ydx = \frac{x^8 y^{-2}}{3} [3(yx^{-2})^2 + 2yx^{-2}]dx$$

$$\text{Rpta. } 6yx^{-2} - 4 \ln|3yx^{-2} + 2| = 3x^2 + c$$

$$(68) \quad y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \operatorname{sen} x)$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{c + \operatorname{sen} x}$$

$$(69) \quad yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x$$

$$\text{Rpta. } y^2 = (2x + c) \cos^2 x$$

$$(70) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$$

$$\text{Rpta. } y = \left(\frac{c + \ln|\cos x|}{x} + \operatorname{tg} x\right)^2$$

$$(71) \quad 2xyy' + (1+x)y^2 = e^x, \quad y(1) = \sqrt{e}$$

$$\text{Rpta. } y = \left(\frac{e^x + e^{2-x}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(72) \quad 3\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x}{y^2}$$

$$\text{Rpta. } 12(x+1)^2 y^3 = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + c$$

$$(73) \quad \frac{dy}{dx} - xy = \frac{1}{y^2} x e^{x^2}$$

$$\text{Rpta. } 3y^{\frac{1}{2}} = e^{x^2} + ce^{\frac{x^2}{4}}$$

$$(74) \quad y^3 \frac{dy}{dx} + xy^4 = x e^{-x^2}$$

$$\text{Rpta. } e^{2x^2} y^4 = 2e^{x^2} + c$$

$$(75) \quad (1-x^2) \frac{dy}{dx} + xy = x(1-x^2)y^{1/2}, \quad y(0) = 1$$

$$\text{Rpta. } 3y^{\frac{1}{2}} + 1 - x^2 = 4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$(76) \quad 2y dx = (x^2 y^4 + x) dy, \quad y(1) = 1$$

$$\text{Rpta. } 10x = (9 + xy^4) y^{\frac{1}{2}}$$

$$(77) \quad xy' + y = y^2 \ln x$$

$$\text{Rpta. } y(1 + \ln x + cx) = 1$$

$$(78) \quad xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$$

$$\text{Rpta. } y = \frac{x^4}{2} \ln^2 |xK|$$

$$(79) \quad (x+1)dy = y[y(x+1)\ln(x+1) - 1]dx, \quad y = \frac{1}{e}, \quad x = \frac{1}{e}$$

$$\text{Rpta. } 2y^{-1}(x-1)^{-1} = 3 - [\ln(x+1)]^2$$

$$(80) \quad \frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$$

$$\text{Rpta. } y(x+c) = \operatorname{sech} x$$

$$(81) \quad ydy - \frac{ay^2}{x^2} dx = \frac{bdx}{x^2}$$

$$\text{Rpta. } y^2 = c.e^{-2a/x} - \frac{b}{a}$$

$$(82) \quad x dy = y(xy - y) dx$$

$$\text{Rpta. } xe^{\frac{1}{y}} = c$$

$$(83) \quad 2x^2 \frac{dy}{dx} + y = 4y^3$$

$$\text{Rpta. } y^2 = \frac{e^x}{c + 4e^x}$$

$$(84) \quad (e^y - 2xy)y' = y^2$$

$$\text{Rpta. } xy^2 = e^y + c$$

$$(85) \quad xy' + y = x^4 y^3$$

$$\text{Rpta. } \frac{1}{y^2} = -x^4 + cx^2$$

$$(86) \quad y - xy' = y^2 e^{-y}$$

$$\text{Rpta. } x = ye^y + cy$$

$$(87) \quad xy^2 y' + y^3 = x \cos x$$

$$\text{Rpta. } y^3 = 3 \operatorname{sen} x + \frac{9 \cos x}{x} - \frac{18 \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{18 \cos x}{x^3} + cx^{-3}$$

$$(88) \quad dy + (4y - 8y^{-3})x dx = 0$$

$$\text{Rpta. } y = [2 + c.e^{-8x^2}]^{\frac{1}{4}}$$

$$(89) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}, \quad y(1) = 2$$

$$\text{Rpta. } x^2 y^4 = x^4 + 15$$

90)  $y dx = (3x + y^3 - y^2) dy; y(1) = -1$

Rpta:  $x = y^2 [1 + y \ln(-y)]$

91)  $\frac{dy}{dx} = 5x^2 y^5 + \frac{y}{2x}$

Rpta:  $u = \frac{c}{x^2} - 4x^3, y = \frac{1}{\sqrt[3]{u}}$

92)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 y + y^3}$

Rpta:  $(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$

93)  $3xy' + y + x^2 y^4 = 0$

Rpta:  $y^{-3} = x^2 + cx$

94)  $(3 \operatorname{sen} y - 5x) dx + 2x^2 c \operatorname{tg} y dy = 0$

Rpta:  $x^3 (\operatorname{sen} y - x)^2 = c \cdot \operatorname{sen}^2 y$

95)  $y' \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} 2y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y$

Rpta:  $(\operatorname{sen}^2 x + 3 \cos^2 y) \operatorname{sen} x = c$

96)  $\cos y \cdot \operatorname{sen} 2x dx + (\cos^2 y - \cos^2 x) dy = 0$  Rpta:  $\cos^2 x (1 + \operatorname{sen} y) = \cos y (y + c - \cos y)$

97)  $y(x \operatorname{tg} x + \ln y) dx + \operatorname{tg} x dy = 0$

Rpta:  $\operatorname{sen} x \cdot \ln y = x \cos x - \operatorname{sen} x + c$

98)  $yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x$

Rpta:  $y^2 = (2x + c) \cos^2 x$

99)  $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 c \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2y}$

Rpta:  $y^2 + \operatorname{sen} x = c \cdot \operatorname{sen}^3 x$

100)  $\frac{dx}{dt} + \frac{t+1}{2t} x = \frac{t+1}{xt}$

Rpta:  $x^2 = \frac{4 + e^{-t} c}{2}$

101)  $y dx + (xy^2 + x - y) dy = 0$

Rpta:  $x = \frac{1 + c \cdot e^{\frac{y^2}{2}}}{2}$

102)  $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{4}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arctg} xy^{1/2}$

Rpta:  $\sqrt{y} = \sqrt{1+x^2} [\operatorname{arctg}^2 x + c]$

103)  $y^3 \sec^2 x dx - (1 - 2y^2 \operatorname{tg} x) dy = 0$

Rpta:  $y^2 \operatorname{tg} x = \ln |cy|$

104)  $x^2 y dx + (3x^4 - y^3) dy = 0$

Rpta:  $15x^4 y^{12} = 4y^{15} + c$



- 109  $y dx = x(1 + xy^4) dy$  **Rpta:**  $y(5 + xy^4) = cx$
- 106  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} y \cdot c \operatorname{tg} x - \sec y \cdot \cos x$  **Rpta:**  $\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cdot \ln(c \operatorname{sen} x) = 0$
- 107  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{1 - 2xy^2}$ ,  $y(0) = 1$  **Rpta:**  $xy^2 - \ln|y| = 0$
- 108  $x \frac{dy}{dx} - y = x^K y^n$  **Rpta:**  $(n + K - 1)y^{1-n} = (1 - n)x^K + c \cdot x^{1-n}$ ,  $n \neq 1$ ,  $K + n \neq 1$   
 $x^K = K \ln \left| \frac{cy}{x} \right|$ ,  $n = 1$ ,  $K \neq 0$ ;  $y = cx^2$ ,  $n = 1$ ,  $K = 0$ ,  
 $y^{1-n} = (1 - n)x^{1-n} \ln|cx|$ ,  $n \neq 1$ ,  $K + n = 1$
- 109  $(x^3 + \cos^2 x + 2x^2 y^2 + \operatorname{sen}^2 x) dx + 2x^3 y dy = 0$  **Rpta:**  $x^2 y^2 = -\frac{x^3}{3} - \ln x + c$
- 110  $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1) \ln x - x(3x+4)y^3}{(x^3 + 2x^2 - 1)y^2}$  **111**  $\frac{\operatorname{sen} 2x}{6} y' + y = (1 + \cos x) y^{\frac{2}{3}}$
- 112  $(x^2 + x + 1)yy' + (2x + 1)y^2 = 2x - 1$  **113**  $2(1 - x^2)y' - (1 - x^2)y = xy^3 e^{-x}$
- 114  $[y \cos x - y^3(x \cos x - \operatorname{sen} x)] dx + 2 \operatorname{sen} x dy = 0$
- 115  $xy' - 3y = 2x$ ,  $y(1) = 0$  **116**  $(xy^2 + x^2 y^2 + 3) dx + (x^2 y) dy = 0$
- 117  $3y^2 y' + \frac{y^3}{x+1} - 8x + 8 = 0$  **118**  $2 \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$ ,  $y(1) = 1$
- 119  $xy(1 + xy^2) \frac{dy}{dx} = 1$ ,  $y(1) = 0$  **120**  $3(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = 2xy(y^3 - 1)$

**2.10. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE RICCATI.-**

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \quad \dots (1)$$

donde  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$  son funciones sólo de  $x$ .

A la ecuación (1) se conoce con el nombre de ecuaciones diferenciales de "RICCATI". Estas ecuaciones diferenciales no se puede resolver por métodos hasta este momento estudiados, pero sin embargo si se conoce una solución particular, se puede hallar la solución de la ecuación diferencial suponiendo que  $y = \psi(x)$  sea una solución particular entonces se puede hallar la solución de la ecuación diferencial, haciendo  $y = \psi(x) + z$ , donde  $z$  es una función incógnita, que se va ha determinar con la ayuda de la ecuación diferencial.

Es decir:  $y = \psi(x) + z \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \psi'(x) + \frac{dz}{dx}$ , reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$\psi'(x) + \frac{dz}{dx} = P(x)(\psi(x) + z) + Q(x)(\psi(x) + z)^2 + R(x) \quad \dots (2)$$

Agrupando los términos de la ecuación (2)

$$\frac{dz}{dx} - P(x) + 2Q(x)\psi(x)z - Q(x)z^2 + (\psi'(x) - P(x)\psi(x) - Q(x)\psi^2(x) - R(x)) = 0 \quad \dots (3)$$

Como  $y = \psi(x)$  es una solución de la ecuación diferencial de "RICCATI" entonces se tiene:

$$\psi'(x) - P(x)\psi(x) - Q(x)\psi^2(x) - R(x) = 0 \quad \dots (4)$$

de las ecuaciones (4) y (3) se tiene:

$$\frac{dz}{dx} - (P(x) + 2Q(x)\psi(x))z = Q(x)z^2 \quad \dots (5)$$

Luego la ecuación (5) es una ecuación diferencial de Bernoulli y la solución de estas ecuaciones ha sido estudiado en (2.12).

a. **Ejemplos:** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

①  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}y^2 - 1$ , donde una solución es  $y = \psi(x) = x$

**Solución**

Sea  $y = \psi(x) + z = x + z$ , la solución de la ecuación diferencial dada, donde  $z$  es una función por determinarse, entonces  $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dz}{dx}$ , reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$1 + \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}(x+z) + \frac{1}{x^2}(x+z)^2 - 1 \quad \text{simplificando}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{3}{x}z = \frac{1}{x^2}z^2, \quad \text{ecuación diferencial de Bernoulli}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{3}{x}z = \frac{1}{x^2}z^2, \quad \text{multiplicando por } z^{-2}$$

$$z^{-2} \frac{dz}{dx} - \frac{3}{x}z^{-1} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{multiplicando por } (1-n) \text{ o sea por } -1$$

$$-z^{-2} \frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z^{-1} = -\frac{1}{x^2} \quad \dots (1)$$

$$\text{Sea } \omega = z^{-1} \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} = -z^{-2} \frac{dz}{dx} \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:  $\frac{d\omega}{dx} + \frac{3}{x}\omega = -\frac{1}{x^2}$  ecuación lineal en  $\omega$ .

y la solución general es:  $\omega = e^{-\int \frac{3}{x} dx} \left[ \int e^{\int \frac{3}{x} dx} \left( -\frac{dx}{x^2} \right) + c \right]$  calculando la integral

$$\omega = e^{-3 \ln x} \left[ - \int e^{3 \ln x} \frac{dx}{x^2} + c \right] = \frac{1}{x^3} \left( -\frac{x^2}{2} + c \right)$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{2x} + \frac{c}{x^3} = \frac{2c - x^2}{2x^3} \Rightarrow z = \frac{2x^3}{2c - x^2}$$

Luego la solución general es  $y = x + z \quad \therefore y = \frac{2cx + x^3}{2c - x^2}$

②  $\frac{dy}{dx} = x + \left(\frac{1}{x} - x^2\right)y + y^2$ , donde una solución es  $y = \psi(x) = x^2$

### Solución

Sea  $y = x^2 + z$ , la solución de la ecuación diferencial dada, donde  $z$  es una función por determinarse, entonces  $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dz}{dx}$  reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$2x + \frac{dz}{dx} = x + \left(\frac{1}{x} - x^2\right)(x^2 + z) + (x^2 + z)^2 \text{ simplificando}$$

$$\frac{dz}{dx} - \left(\frac{1}{x} + x^2\right)z = z^2 \text{ ecuación de Bernoulli}$$

multiplicando a la ecuación diferencial por  $z^{-2}$

$$z^{-2} \frac{dz}{dx} - \left(\frac{1}{x} + x^2\right)z^{-1} = 1; \text{ de donde } \omega = z^{-1} \text{ se tiene:}$$

$$\frac{d\omega}{dx} = z^{-2} \frac{dz}{dx}, \text{ reemplazando obtenemos}$$

$$-\frac{d\omega}{dx} - \left(\frac{1}{x} + x^2\right)\omega = 1 \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} + \left(\frac{1}{x} + x^2\right)\omega = -1$$

es una ecuación lineal en  $\omega$  cuya solución es:  $\omega = e^{-\int \left(\frac{1}{x} + x^2\right) dx} \left[ \int e^{\int \left(\frac{1}{x} + x^2\right) dx} (-dx) + c \right]$

$$z^{-1} = e^{\ln x - \frac{x^3}{3}} \left[ -\int e^{\ln x - \frac{x^3}{3}} dx + c \right] \Rightarrow z^{-1} = xe^{\frac{x^3}{3}} \left[ -\int e^{-\frac{x^3}{3}} x dx + c \right]$$

### b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x}y + 1 - \frac{1}{4x^2}$ , una solución es  $\varphi(x) = \frac{1}{2x} + \operatorname{tg} x$

**Rpta:**  $y = \frac{1}{2x} + \frac{K \operatorname{sen} x + \cos x}{K \cos x - \operatorname{sen} x}$

②  $x^3 y' = x^2 y + y^2 - x^2$ , una solución es  $\varphi(x) = x$

**Rpta:**  $y = \frac{2cxe^{\frac{2}{x}} + x}{2ce^{\frac{2}{x}} - 1}$

③  $x(x-1)\frac{dy}{dx} - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0$ , una solución es  $\varphi(x) = x$

**Rpta:**  $y = \frac{x^2 + c}{x + c}$

④  $y' - xy^2 + (2x-1)y = x-1$ , una solución es  $\varphi(x) = 1$

**Rpta:**  $y = 1 + \frac{1}{1 - x + ce^{-x}}$

⑤  $y' - \operatorname{sen}^2 x \cdot y^2 + \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} y + \cos^2 x = 0$ , una solución es  $\varphi(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

**Rpta:**  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \left( 1 + (c \cdot e^{-\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{2})^{-1} \right)$

⑥  $y' + y^{2x} - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0$ , una solución es  $y = e^x$

⑦  $y' + xy^2 - 2x^2 y + x^3 = x + 1$ , una solución es  $\varphi(x) = x - 1$

⑧  $\frac{dy}{dx} = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1)$  una solución es  $\varphi(x) = x$

**Rpta:**  $y = [2 + ce^{-2x^2}]^{-1} + x$

⑨  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^3 y^2 - x^5$  una solución es  $\varphi(x) = x$

**Rpta:**  $c \cdot e^{\frac{2}{x^5}} = \frac{y-x}{y+x}$



10)  $\frac{dy}{dx} + y^2 \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$  una solución es  $y = \frac{1}{\cos x}$  **Rpta:**  $y = \sec x + \frac{3 \cos^2 x}{c - \cos^3 x}$

11)  $\frac{dy}{dx} = 3y + y^2 - 4$ , una solución es  $\varphi(x) = 1$  **Rpta:**  $y = \frac{c + 4e^{5x}}{c - e^{5x}}$

12)  $y' = x + (1 - 2x)y - (1 - x)y^2$  una solución es  $\varphi(x) = 1$  **Rpta:**  $y = 1 + \frac{1}{x + ce^x}$

13)  $\frac{dy}{dx} = (1 - x)y^2 + (2x - 1)y - x$ , una solución es  $\varphi(x) = 1$   
**Rpta:**  $y = (x - 2 + ce^{-x})^{-1} + 1$

14)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + y^7}{2 \cos x}$ , una solución es  $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$   
**Rpta:**  $y = \operatorname{sen} x + (K \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x)^{-1}$

15)  $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$ , una solución es  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$  **Rpta:**  $y = x^{-1} + 2x(x^2 + 2x)^{-1}$

16)  $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$  una solución es  $\varphi(x) = x$  **Rpta:**  $y = x + (c - x)^{-1}$

17)  $\frac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 1$  una solución es  $\varphi(x) = x$

18)  $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - ye^x + e^{-x}y^2$ , una solución es  $y = e^x$  **Rpta:**  $y = e^x - \frac{\exp(2x - e^x)}{c + \exp(x - e^x)}$

## 2.11. ECUACIONES DIFERENCIALES DE LAGRANGE Y CLAIROUTS.

a) Las ecuaciones diferenciales de Lagrange son de la siguiente forma:

$$y = x f(y') + g(y') \quad \dots (1)$$

Para resolver la ecuación diferencial de Lagrange se transforma en otra ecuación diferencial lineal en  $x$  como función de  $P$ , haciendo  $\frac{dy}{dx} = P$  de donde  $dy = P dx$

Luego se sustituye  $\frac{dy}{dx} = P$  en la ecuación; (1)

$$y = x f(P) + g(P) \quad \dots (2)$$

diferenciando la ecuación (2) se tiene:  $dy = f(P)dx + x f'(P)dp + g'(P)dp \quad \dots (3)$

reemplazando en la ecuación (3),  $dy = Pdx$  se tiene:

$$Pdx = f(P)dx + x f'(P)dp + g'(P)dp \quad \dots (4)$$

La ecuación (4) se puede expresar en la forma:  $\frac{dx}{dp} + \frac{f(P)}{f(P)-P}x = -\frac{g'(P)}{f(P)-P}$

Que es una ecuación diferencial lineal en  $x$ , cuya solución general es  $x = \varphi(P, c)$  donde  $P$  es un parámetro y la solución general de la ecuación (1) se da en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = \varphi(P, c) \\ y = \varphi(P, c)f(P) + g(P) \end{cases}, \quad P \text{ es un parámetro}$$

b) Las ecuaciones diferenciales de Clairouts son de la siguiente forma:

$$y = xy' + g(y')$$

La solución de la ecuación diferencial de Clairouts se obtiene siguiendo el mismo procedimiento del caso de la ecuación diferencial de Lagrange.

c) **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $2y = xy' + y' \ln y'$

### Solución

A la ecuación diferencial expresaremos en la forma:  $y = x \frac{y'}{2} + \frac{y' \ln y'}{2} \quad \dots (1)$

Sea  $y' = \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = P dx$ , reemplazando en (1)

$y = x \frac{P}{2} + \frac{P \ln P}{2}$ , diferenciando se tiene:

$dy = \frac{P}{2} dx + \frac{x}{2} dp + \frac{\ln P}{2} dp + \frac{dp}{2}$ , reemplazando  $dy = p dx$

$p dx = \frac{P}{2} dx + \frac{x}{2} dp + \frac{\ln P}{2} dp + \frac{dp}{2}$ , simplificando

$\frac{dx}{dp} - \frac{1}{P} x = \frac{\ln P + 1}{P}$ , que es una ecuación diferencial lineal.

cuya solución de ésta ecuación es:  $x = e^{-\int \frac{dp}{P}} \left[ \int e^{\int \frac{dp}{P}} \frac{\ln P + 1}{P} dp + c \right] = -\ln P - 2 + pc$

ya la solución general de la ecuación diferencial es:  $\begin{cases} x = pc - \ln P - 2 \\ y = \frac{c}{2} P^2 - P \end{cases}$ ,  $P$  es un parámetro

2

$y = 2xy' + \operatorname{sen} y'$

### Solución

Sea  $y' = \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dp = p dx$ , reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$y = 2xp + \operatorname{sen} P$ , diferenciando se tiene:  $dy = 2x dp + 2p dx + \cos P dp$ ,

reemplazando  $dy = p dx$ ,  $p dx = 2x dp + 2p dx + \cos P dp$ , simplificando

$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{P} x = -\frac{\cos P}{P}$ , que es una ecuación lineal cuya solución de ésta ecuación es:

$x = e^{-\int \frac{2dp}{P}} \left[ \int e^{\int \frac{2dp}{P}} \left( -\frac{\cos P}{P} \right) dp + c \right] - \frac{\cos P}{P} - \operatorname{sen} P + \frac{c}{P^2}$

de donde la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} x = -\frac{\cos P}{P^2} - \operatorname{sen} P + \frac{c}{P^2} \\ y = \frac{2c}{P} - \frac{2 \cos P}{P} - \operatorname{sen} P \end{cases}, \text{ P es un parámetro}$$

3

$$y = xy' + \frac{a}{y^2}$$

### Solución

Sea  $y' = \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = p \, dx$ , reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$y = xp + \frac{a}{P^2}, \text{ diferenciando ambos miembros}$$

$$dy = xdp + p \, dx - \frac{2a}{P^3} dp, \text{ reemplazando } dy = p \, dx$$

$$p \, dx = xdp + p \, dx - \frac{2a}{P^3} dp \Rightarrow \left(x - \frac{2a}{P^3}\right) dp = 0$$

de donde  $x = \frac{2a}{P^3} \vee dp = 0 \Rightarrow P = c$  Luego

$$\begin{cases} x = \frac{2a}{c^3} \\ y = xc + \frac{a}{c^2} \end{cases}$$

4

$$y = xy' + y'^2$$

### Solución

Sea  $y' = \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = p \, dx$  reemplazando en la ecuación dada:  $y = xp + P^2$ ,

diferenciando  $\Rightarrow dy = xdp + p \, dx + 2p \, dp$  al sustituir  $dy = p \, dx$  se tiene:

$$p \, dx = xdp + p \, dx + 2p \, dp \Rightarrow (x + 2p) dp = 0 \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} x + 2P = 0 \\ dp = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2P \\ P = c \end{cases} \text{ donde } \begin{cases} x = -2c \\ y = xc + c^2 \end{cases}$$

### d. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

①  $y = 2xy' + \ln y'$

**Rpta.** 
$$\begin{cases} x = \frac{c}{P^2} - \frac{1}{P} \\ y = \frac{2c}{P} + \ln P - 2 \end{cases}$$

②  $y = x(1 + y') + y'^2$

**Rpta.** 
$$\begin{cases} x = 2(1 - P) + ce^{-P} \\ y = 2(1 - P) + ce^{-P}(1 + P) + P^2 \end{cases}$$

③  $y = -xy'^2 + y'^2 + 1$

**Rpta.**  $y = 1 + (c - \sqrt{1-x})^2$

④  $y = 2xy' - 2y' + 1$

**Rpta.**  $(y-1)^2 = c(x-1)$

⑤  $y = 2xy'^2 + y'$

**Rpta.** 
$$\begin{cases} x(2P-1)^2 = \ln P - 2P + c \\ y = 2xp^2 + P \end{cases}$$

⑥  $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$

**Rpta.** 
$$\begin{cases} x = \frac{c}{P^3} - 2e^P \left( \frac{1}{P} - \frac{2}{P^2} + \frac{2}{P^3} \right) \\ y = \frac{3c}{2P^2} - 2e^P \left( 1 - \frac{3}{P} + \frac{3}{P^2} \right) \end{cases}$$

⑦  $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$

**Rpta.** 
$$\begin{cases} x = \frac{cp^2 + 2p - 1}{2p^2(P-1)^2} \\ y = \frac{cp^2 + 2p - 1}{2(P-1)^2} - \frac{1}{P} \end{cases}$$

⑧  $y = (x+1)y'^2$

**Rpta.** 
$$\begin{cases} x = \frac{2p - p^2 + c}{(P-1)^2} \\ y = (x+1)P \end{cases}$$

⑨  $y = x \operatorname{sen} y' + \cos y'$

**Rpta.** 
$$\begin{cases} x \exp\left(\int \frac{\cos u \, du}{\operatorname{sen} u - u}\right) = \int \frac{\operatorname{sen} u \, du}{\operatorname{sen} u - u} \exp\left(\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} z - z} dz\right) du \\ y = x \operatorname{sen} P + \cos P \end{cases}$$



$$(10) \quad y = 2xy' - 2y' + 1$$

$$\text{Rpta. } (y-1)^2 = c(x-1)$$

$$(11) \quad yy'^2 + (2x-1)y' = y$$

$$\text{Rpta. } y^2 = 2(1+2c)(x+c)$$

$$(12) \quad y = -xy'^2 + y'^2 + 1$$

$$\text{Rpta. } y = 1 + (c - \sqrt{1-x})^2, y = 1$$

$$(13) \quad y = (y'-1)x + ay' + b$$

$$\text{Rpta. } y = (x+a) \ln(x+a) + c(x+a) + b - x$$

$$(14) \quad y = mxy' + ay' + b$$

$$\text{Rpta. } m(y-b) = (1-m)(mx+a) \ln(mx+a)$$

$$(15) \quad y + xy' = y'^2$$

$$\text{Rpta. } \begin{cases} x = \frac{2p}{3} + cp^{\frac{1}{2}} \\ y = -xp + P^2 \end{cases}$$

$$(16) \quad y'^3 - xy' + 2y = 0$$

$$\text{Rpta. } \begin{cases} x = P(c-3P) \\ 2y = P^2(c-4P) \end{cases}$$

$$(17) \quad 2y'^2 + xy' - 2y = 0$$

$$\text{Rpta. } \begin{cases} x = 4P \ln(pc) \\ y = P^2[1 + 2 \ln(pc)] \end{cases}$$

$$(18) \quad 2y'^3 + xy' - 2y = 0$$

$$\text{Rpta. } \begin{cases} x = 2P(3P+c) \\ 2y = P^2(4P+c) \end{cases}$$

$$(19) \quad y = xy' + y'^2$$

$$\text{Rpta. } y = cx + c^2$$

$$(20) \quad y = xy' - 3y'^3$$

$$\text{Rpta. } y = cx - 3c^3$$

$$(21) \quad y = xy' + \frac{1}{y'}$$

$$\text{Rpta. } y = cx + \frac{1}{c}$$

$$(22) \quad y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\text{Rpta. } y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$(23) \quad y = xy' + a\sqrt{1+y'^2}$$

$$\text{Rpta. } y = cx + a\sqrt{1+c^2}, x^2 + y^2 = a^2$$

- 24)  $y = xy' + \frac{a}{y^2}$  **Rpta.**  $y = xc + \frac{a}{c^2}$
- 25)  $y = xy' + \operatorname{sen} y'$  **Rpta.**  $y = cx + \operatorname{sen} c$
- 26)  $y' = \ln(xy' - y)$  **Rpta.**  $y = cx - e^c$
- 27)  $y = xy' - y'^2$  **Rpta.**  $y = cx - c^2$
- 28)  $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$  **Rpta.**  $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$
- 29)  $y = xy' - e^{y'}$  **Rpta.**  $y = cx - e^c$
- 30)  $y = xy' + \frac{1}{\sqrt{y' - 1}}$  **Rpta.**  $y = cx + \frac{1}{\sqrt{c - 1}}$
- 31)  $y = xy' - \sqrt{1 - y'^2} - \arccos y'$  **Rpta.**  $y = cx + \sqrt{1 - c^2} - c \cdot \arccos c$
- 32)  $y + y'^2 = y'x$  **Rpta.**  $y = cx - c^2$
- 33)  $y = xy' + a\sqrt{1 - y'^3}$  **Rpta.**  $y = cx + a\sqrt{1 - c^3}$
- 34)  $xy' - y = \ln y'$  **Rpta.**  $y = cx - \ln c$
- 35)  $y = xy' - 3y'^3$  **Rpta.**  $y = cx - 3c^3$
- 36)  $y = (x+1)y' + y'^2$  **Rpta.**  $y = cx + c + c^2$
- 37)  $y = xy' + y' - y'^2$  **Rpta.**  $y = cx + c - c^2$
- 38)  $y = (x+1)y' - 1$  **Rpta.**  $y = cx + c - 1$
- 39)  $y = xy' + \sqrt{1 + y'}$  **Rpta.**  $y = cx + \sqrt{1 + c}$
- 40)  $(y - \sqrt{1 + y'^2})dx - xdy = 0$  **Rpta.**  $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$

## 2.12. ECUACIONES DIFERENCIALES NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA PRIMERA DERIVADA.-

### 1° Ecuación de primer orden y de grado n con respecto a $y'$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden y de grado n con respecto a  $y'$  son de la siguiente forma:

$$(y')^n + P_1(x, y)(y')^{n-1} + P_2(x, y)(y')^{n-2} + \dots + P_{n-1}(x, y)y' + P_n(x, y) = 0 \quad \dots (1)$$

Para encontrar la solución de estas ecuaciones diferenciales, se resuelve la ecuación (1) con respecto a  $y'$ ; como la ecuación (1) es de grado n, entonces se puede tener:

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad y' = f_3(x, y), \quad \dots, \quad y' = f_K(x, y), \quad (K = n) \quad \dots (2)$$

que son las soluciones reales de la ecuación (1)

Luego el conjunto de las soluciones de la ecuación (2) es:

$$\varphi_1(x, y, c_1) = 0, \quad \varphi_2(x, y, c_2) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_K(x, y, c_K) = 0$$

donde  $\varphi_i(x, y, c_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$  es la solución de la ecuación diferencial  $y' = f_i(x, y)$   $c_i = 1, 2, \dots, K$  y que representa la solución general de la ecuación (1).

### 2° Ecuaciones diferenciales de la forma $f(y, y') = 0$

Cuando en esta ecuación diferencial se puede despejar  $y'$  se obtiene ecuaciones diferenciales de variable separable, por lo tanto nuestro interés está en los demás casos.

a) Si en la ecuación diferencial  $f(y, y') = 0$  se puede despejar  $y$  es decir:

$$y = \varphi(y') \quad \dots (1)$$

entonces para obtener la solución se introduce un parámetro  $y' = \frac{dy}{dx} = P$  en la ecuación (1), es decir:

$$y = \varphi(P) \quad \dots (2)$$

ahora diferenciando la ecuación (2) se tiene:  $dy = \varphi'(P)dp$  ... (3)

Como  $\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = p dx$  que al sustituir en (3)

se tiene:  $p dx = \varphi'(P)dp$  de donde  $dx = \frac{\varphi'(P)}{P}dp \Rightarrow x = \int \frac{\varphi(P)}{P} dp + c$

y la solución de la ecuación diferencial se ha dado en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi(P)}{P} dp + c \\ y = \varphi(P) \end{cases}$$

- b) Si en la ecuación diferencial  $f(y, y') = 0$ , no se puede despejar ni  $y$ , ni  $y'$ , pero estas últimas pueden expresarse en forma paramétricas mediante algún parámetro  $t$ .

$$y = \varphi(t); \quad y' = \varphi(t) \quad (P = \frac{dy}{dx})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(t) \Rightarrow dy = \varphi(t)dx$$

Como  $y = \varphi(t) \Rightarrow dy = \varphi'(t)dt$ , de donde

$$\varphi'(t)dx = \varphi'(t)dt \Rightarrow dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)} \text{ de donde } x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)} + c$$

y la solución de la ecuación diferencial es dada en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

### 3° Ecuaciones diferenciales de la forma $f(x, y') = 0$

Si en la ecuación diferencial  $f(x, y') = 0$ , se puede despejar  $x$  es decir:

$$x = \varphi(y') \quad \dots (1)$$

de donde para obtener la solución se hace  $y' = P$  de donde en la ecuación (1) se tiene:

$$x = \varphi(P) \Rightarrow dx = \varphi'(P) dp \quad \dots (2)$$

Además  $\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dx = \frac{dy}{P} \quad \dots (3)$

de (2) y (3) se tiene  $\frac{dy}{P} = \varphi'(P) dp$  de donde  $dy = P\varphi'(P) dp \Rightarrow y = \int P\varphi'(P) dp$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es dada en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \varphi(P) \\ y = \int P\varphi'(P) dp \end{cases}$$

a. **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones.

①  $y'^2 - (2x + y)y' + (x^2 + xy) = 0$

**Solución**

$y'^2 - (2x + y)y' + (x^2 + xy) = 0$ , despejando  $y'$  se tiene:

$$y' = \frac{2x + y \pm \sqrt{(2x + y)^2 - 4(x^2 + xy)}}{2} = \frac{2x + y \pm y}{2} \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} y'_1 = x + y \\ y'_2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = ce^x - x - 1 \\ y_2 = \frac{x^2}{2} + c \end{cases}$$

②  $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

**Solución**

$xy'^2 + 2xy' - y = 0$ , despejando  $y'$  se tiene:  $y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4xy}}{2x}$  simplificando

$$y' = -1 \pm \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}} \text{ de donde } z^2 = x + y$$



$$2z \frac{dz}{dx} = 1 + y' \Rightarrow y' = 2z \frac{dz}{dx} - 1 \quad \text{de donde} \quad 2z \frac{dz}{dx} - 1 = -1 \pm \frac{z}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2z \frac{dz}{dx} = \pm \frac{z}{\sqrt{x}}$$

$$2dz = \pm \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{integrando} \quad z = \pm \sqrt{x} + c$$

$$\sqrt{x+y} = \pm \sqrt{x} + c \Rightarrow x+y = x + c^2 \pm 2c\sqrt{x}$$

$$y - c^2 = \pm 2c\sqrt{x} \Rightarrow (y - K)^2 = 4Kx$$

$$\textcircled{3} \quad y = y'^2 c^{y'}$$

### Solución

Sea  $y' = P \Rightarrow dy = p dx$ , reemplazando en la ecuación dada

$$y = p^2 e^p \Rightarrow dy = (2pe^p + p^2 e^p) dp, \quad \text{de donde} \quad p dx = (2pe^p + p^2 e^p) dp$$

$$dx = (2e^p + pe^p) dp, \quad \text{integrando} \quad x = e^p + pe^p + c$$

$$\therefore \begin{cases} x = e^p + pe^p + c \\ y = p^2 e^p \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad y^{\frac{2}{5}} + y'^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$$

### Solución

$$\text{Sea} \quad \begin{cases} y = a \cos^5 t \\ y' = a \operatorname{sen}^5 t = P \end{cases}$$

$$dx = \frac{dy}{P} = -\frac{5a \cos^4 t \operatorname{sen} t}{a \operatorname{sen}^5 t} dt = -5c \operatorname{tg}^4 t dt$$

$$dx = -5c \operatorname{tg}^4 t dt \quad \text{integrando} \quad x = \frac{5c \operatorname{tg}^3 t}{3} - 5c \operatorname{tg} t + 5t + c$$

$$\begin{cases} x = \frac{5c \operatorname{tg}^3 t}{3} - 5c \operatorname{tg} t + 5t + c \\ y = a \cos^5 t \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad y^4 - y'^4 - yy'^2 = 0$$

**Solución**

Sea  $y' = yt$  reemplazando en la ecuación  $y^4 - y^4 t^4 - y^3 t^2 = 0 \Rightarrow y - yt^4 - t^2 = 0$

$$y(1-t^4) = t^2 \Rightarrow y = \frac{t^2}{1-t^4} \quad \text{diferenciando} \quad dy = \frac{2t^5 + 2t}{(1-t^4)^2} dt \quad \dots (1)$$

como  $y' = P \Rightarrow y = \frac{P}{t}$  puesto que  $y' = yt$

$$\frac{P^4}{t^4} - P^4 - \frac{P^3}{t} = 0 \Rightarrow P = \frac{t^3}{1-t^4} \quad \text{Como } P = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = \frac{t^3}{1-t^4} dx \quad \dots (2)$$

de (1) y (2) se tiene:  $\frac{t^3 dx}{1-t^4} = \frac{2t^5 + 2t}{(1-t^4)^2} dt \Rightarrow dx = \frac{2(t^4 + 1)dt}{(t^4 - 1)t^2}$  integrando

$$x = -2 \int \left( \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1} + \frac{Et+F}{t^2+1} \right) dt$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{t} + \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - 2 \arctg t + c \\ y = \frac{t^2}{1-t^4} \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \quad x = \ln y' + \text{sen } y'$$

**Solución**

Sea  $y' = P \Rightarrow dx = \frac{dy}{P}$

$x = \ln P + \text{sen } P$  diferenciando se tiene:  $dx = \frac{dP}{P} + \cos p \, dP$  Como  $dx = \frac{dy}{P}$

$$\frac{dy}{P} = \frac{dp}{P} + \cos pdp \Rightarrow dy = dp + P \cos pdp. \text{ integrando}$$

$$y = P + P \operatorname{sen} P + \cos P + c$$

$$\therefore \begin{cases} x = \ln P + \operatorname{sen} P \\ y = P + P \operatorname{sen} P + \cos P + c \end{cases}$$

### b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver los siguientes ejercicios.

①  $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$

**Rpta.**  $\ln(Ky) = x \pm 2e^{x/2}$

②  $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$

**Rpta.**  $xy = c, x^2y = K$

③  $xy'^2 - 2yy' + x = 0$

**Rpta.**  $y = \frac{cx^2}{2} + \frac{1}{2c}, y = \pm x$

④  $y'^2 - 2y' - 8x^2 = 0$

**Rpta.**  $y = 2x^2 + c, y = -x^2 + K$

⑤  $y'^3 + (x+2)e^y = 0$

**Rpta.**  $4e^{\frac{y}{3}} = (x+2)^{\frac{4}{3}} + c$

⑥  $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0$

**Rpta.**  $y = \frac{x^2}{2} + c, y = -\frac{x^2}{2} + K, y = Ae^x$

⑦  $y'^4 - (x+2y+1)y'^3 + (x+2y+2xy)y'^2 - 2xyy' = 0$

**Rpta.**  $y = c_1, y = x + c_2, 2y = x^2 + c_3, y = c_4e^{2x}$

sug:  $y'(y'-1)(y'-x)(y'-2y) = 0$

⑧  $xyy'^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x^2 + xy = 0$

**Rpta.**  $2xy + x^2 - c = 0, x^2 + y^2 = c$

⑨  $(x^2 + x)y'^2 + (x^2 + x - 2xy - y)y' + y^2 - xy = 0$

**Rpta.**  $y = c(x+1), y = -x - \ln cx$

⑩  $x^2y'^2 + xyy' - 6y^2 = 0$

**Rpta.**  $y = cx^2, y = \frac{c}{x^3}$

$$\textcircled{12} \quad xy'^2 + (y-1-x^2)y' - x(y-1) = 0$$

$$\text{Rpta: } 2y - x^2 = c, \quad xy - x = c$$

$$\textcircled{12} \quad yy'^2 + (x-y)y' - x = 0$$

$$\text{Rpta: } y = x + c, \quad y^2 + x^2 = C$$

$$\textcircled{13} \quad xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$$

$$\text{Rpta: } y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^2(y + \sqrt{y^2 - x^2}) = c$$

$$\textcircled{14} \quad y'^4 - (x+2y+1)y'^3 + (x+2y+2xy)y'^2 - 2xy \cdot y' = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c, \quad y - x = c, \quad 2y - x^2 = c, \quad y = ce^{2x}$$

$$\textcircled{15} \quad xyy'^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x^2 + xy = 0$$

$$\text{Rpta: } 2xy + x^2 - c = 0, \quad x^2 + y^2 - c = 0$$

$$\textcircled{16} \quad (x^2 + x)y'^2 + (x^2 - x - 2xy - y)y' + y^2 - xy = 0$$

$$\text{Rpta: } y - c(x+1) = 0, \quad y + x \ln(cx) = 0$$

$$\textcircled{17} \quad x^2y'^2 + xyy' - 6y^2 = 0$$

$$\text{Rpta: } y - cx^2 = 0, \quad y = cx^{-3}$$

$$\textcircled{18} \quad xy'^2 + (y - x^2 - 1)y' - x(y-1) = 0$$

$$\text{Rpta: } 2y - x^2 + c = 0, \quad xy - x + c = 0$$

$$\textcircled{19} \quad xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$$

$$\text{Rpta: } cy = x^2 + c^2$$

$$\textcircled{20} \quad 3x^4y'^2 - xy' - y = 0$$

$$\text{Rpta: } xy = c(3cx - 1)$$

$$\textcircled{21} \quad y = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3, \quad a, b \text{ constantes.}$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = 2ap + \frac{3bp^2}{2} + c \\ y = P \ln P \end{cases}$$

$$\textcircled{22} \quad y = y' \ln y'$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = \frac{(\ln P + 1)^2}{2} + c \\ y = P \ln P \end{cases}$$

$$\textcircled{23} \quad y = y'(1 + y' \cos y')$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = \ln P + \text{sen } P + P \cdot \cos P + c \\ y = P + P^2 \cos P \end{cases}$$

$$\textcircled{24} \quad y = (y' - 1)e^y$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = e^P + c \\ y = (P-1)e^P, \quad y = -1 \end{cases}$$

$$(25) \quad y = \arcsen y' + \ln(1 + y'^2)$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = 2 \operatorname{arctg} P - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - P^2}}{P} \right| + c \\ y = \arcsen P + \ln(1 + P^2) \end{cases}$$

$$(26) \quad y' = e^y$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = \ln(\ln P) + \frac{1}{\ln P} + c \\ y = \frac{P}{\ln P} \end{cases}$$

$$(27) \quad y'^2 + e^y = 2$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{P - \sqrt{2}}{P + \sqrt{2}} \right| + c \\ y = \ln(2 - P^2) \end{cases}$$

$$(28) \quad y^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = 3t + 3c \operatorname{tg} t + c \\ y = \cos^3 t \end{cases}$$

$$(29) \quad x = y'^2 - 2y'^2 + 2$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = P^2 - 2P + 2 \\ y = \frac{2}{3}P^3 - P^2 + c \end{cases}$$

$$(30) \quad x(1 + y'^2) = 1$$

$$\text{Rpta: } y + c = \pm(\sqrt{x - x^2} + \arcsen \sqrt{x})$$

$$(31) \quad y'^2 x = e^{y'}$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = \frac{e^P}{P^2} \\ y = \frac{e^P(P+1)}{P} + c \end{cases}$$

$$(32) \quad x(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = -a \operatorname{sen}^3 t + c \end{cases}$$

$$(33) \quad x = y' + \operatorname{sen} y'$$

$$\text{Rpta: } \begin{cases} x = P + \operatorname{sen} P \\ y = \frac{P^2}{2} + P \operatorname{sen} P + \cos P + c \end{cases}$$



34

$$x\sqrt{1+y'^2} = y'$$

Rpta:

$$\begin{cases} x = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+P^2}} + c \end{cases}$$

35

$$x = y'^3 - y'$$

Rpta:

$$\begin{cases} x = P^3 - P \\ y = \frac{3P^4}{4} - \frac{P^2}{2} + c \end{cases}$$

### 2.13. SOLUCIONES SINGULARES.-

Consideremos una ecuación diferencial de la forma:  $F(x, y, y') = 0$  ... (1)

Llamaremos solución singular a  $y = \varphi(x)$  de la ecuación (1) si en cada punto se infringe la propiedad de unicidad, es decir, si por cada uno de sus puntos  $(x_0, y_0)$  además de esta solución pasa también otra solución que tiene en el punto  $(x_0, y_0)$  la misma tangente que la solución  $y = \varphi(x)$ , pero no coincide esta última en ningún entorno del punto  $(x_0, y_0)$  arbitrariamente pequeño.

A la gráfica de una solución singular se denomina curva integral singular de la ecuación (1).

Si  $F(x, y, y') = 0$  y sus derivados parciales  $\frac{\partial F}{\partial y}$  y  $\frac{\partial F}{\partial y'}$ , son continuas con respecto a todos sus argumentos  $x, y, y'$ .

Entonces cualquier solución singular de la ecuación (1).

También satisface a la ecuación:  $\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0$  ... (2)

Por lo tanto para hallar las soluciones singulares de la ecuación (1) se elegirá  $y'$  entre las ecuaciones (1) y (2) obteniendo la ecuación.

$$\psi(x, y) = 0 \quad \dots (3)$$

A la ecuación (3) se denomina P - discriminante de la ecuación (1) y la curva determinada por la ecuación (3) se denomina curva P - discriminante (C.P.D.) siempre ocurre que una curva P - discriminante se descompone en unas cuantas ramas, en este caso debe averiguarse si cada una de estas ramas por separado es solución de la ecuación (1) si es afirmativo se debe comprobar si es solución singular, es decir, si se infringe la unicidad en cada uno de sus puntos.

Llamaremos envolvente de una familia de curvas.  $\phi(x, y, c) = 0$  ... (4)

a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia (4) siendo cada segmento de la misma tangente a una infinidad de curvas de la familia (4).

Si la solución (4) es la integral general (1), la envolvente de la familia de curvas (4), en caso que exista, será una curva integral singular de esta ecuación.

En efecto, en los puntos de la envolvente los valores  $x, y, y'$  coinciden con los valores correspondientes de la curva integral que es tangente a la envolvente en el punto  $(x, y)$ , por lo tanto en cada punto de la envolvente los valores  $x, y, y'$  satisfacen a la ecuación  $F(x, y, y') = 0$  es decir la envolvente es una curva integral.

Además en cada punto de la envolvente se infringe la unicidad, puesto que por cada punto de la misma pasan al menos dos curvas integrales en una misma dirección, la envolvente y la curva integral de la familia (4) que es tangente a ésta en el punto considerado.

En consecuencia, la envolvente es una curva integral singular, además por el curso de análisis matemático se conoce que la envolvente forma parte de la curva c - discriminante (C.C.D.) determinada por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \phi(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial \phi(x, y, c)}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad \dots (5)$$

Una rama de la curva c - discriminante es envolvente, cuando en ella se cumple las condiciones siguientes.

1° Que las derivadas parciales  $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$  existan y sus módulos están acotados.

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| \leq N \quad \text{donde } M \text{ y } N \text{ son constantes}$$

$$2^\circ \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0 \quad \text{ó sino} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$$

### Observaciones

- a) Las condiciones 1° y 2° solamente son suficientes, por lo cual pueden ser envolventes también las ramas de la curva c - discriminante en las que no se cumple algunas de estas condiciones.
- b) En el caso general, el P - discriminante contiene:
  - i) A la envolvente (E)
  - ii) Al lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado ( $C^2$ )
  - iii) Al lugar geométrico de los puntos cúspides (ó de retroceso) (R)

$$\Delta p = E \cdot C^2 \cdot R$$

- c) El c - discriminante contiene:
  - i) A la envolvente (E)
  - ii) Al lugar geométrico de los puntos Anocdales al cuadrado ( $A^2$ )
  - iii) Al lugar geométrico de los puntos cuspidales (o de retroceso) al cubo ( $R^3$ )

$$\Delta c = E \cdot A^2 \cdot R^3$$

Entre todos los lugares geométricos solamente la envolvente es solución (singular) de la ecuación diferencial.

Esta figura tanto en la curva P - discriminante como en la curva c - discriminante a la primera potencia, circunstancia que facilita la averiguación de la solución singular.

## a) Ejemplos:

1 Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x^5 \frac{dy}{dx} - 12x^4 y = 0$$

Solución

$$\text{Sea } \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = p dx$$

$$p^2 + 4x^5 p - 12x^4 y = 0 \text{ diferenciando}$$

$$2p dp + 20x^4 p dx + 4x^5 dp - 48x^3 y dx - 12x^4 dy = 0$$

$$2p dp + 20x^4 p dx + 4x^5 dp - 48x^3 \left(\frac{p^2 + 4x^5 p}{12x^4}\right) dx - 12x^4 p dx = 0$$

$$(2p + 4x^5) dp + 20x^4 p dx - 4 \frac{(p^2 + 4x^5 p)}{x} dx - 12x^4 p dx = 0$$

$$(2p + 4x^5) dp + 8x^4 p dx - \frac{4p^2}{x} dx - 16x^4 p dx = 0$$

$$(2p + 4x^5) dp - \left(\frac{4p^2}{x} + 8x^4 p\right) dx = 0 \Rightarrow 2x(p + 2x^5) \frac{dp}{dx} - 4p(p + 2x^5) = 0$$

$$(p + 2x^5) \left(x \frac{dp}{dx} - 2p\right) = 0 \Leftrightarrow (p + 2x^5) = 0 \vee x \frac{dp}{dx} - 2p = 0$$

$$\text{Si } x \frac{dp}{dx} = 2p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln p = 2 \ln x + \ln K \Rightarrow \ln p = \ln Kx^2 \Rightarrow P = Kx^2$$

$$\text{reemplazando } p = Kx^4 \text{ en la ecuación } p^2 + 4x^5 p - 12x^4 y = 0$$

$$\text{se tiene } K^2 x^4 + 4Kx^7 = 12x^4 y \Rightarrow K^2 + 4Kx^3 = 12y$$

$$\therefore K(K + 4x^3) = 12y \text{ solución general.}$$

Si  $p + 2x^5 = 0 \Rightarrow p = -2x^5$  reemplazando este valor en la ecuación dada tenemos:

$$4x^{10} - 8x^{10} = 12x^4 \Rightarrow 3y = -x^6 \text{ solución singular.}$$

2) Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación:

$$x^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 y \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

### Solución

Sea  $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p dx$ , reemplazando en la ecuación dada

$$x^3 p^2 + x^2 p y + 1 = 0 \Rightarrow y = -xp - \frac{1}{x^2 p} \text{ diferenciando}$$

$$dy = -x dp - p dx + \frac{2 dx}{x^3 p} + \frac{dp}{p^2 x^2}; \text{ pero } dy = p dx$$

$$p dx = -x dp - p dx + \frac{2 dx}{x^3 p} + \frac{dp}{p^2 x^2} \Rightarrow \left(2p - \frac{2}{x^3 p}\right) dx + \left(x - \frac{1}{p^2 x^2}\right) dp = 0$$

$$x \left(1 - \frac{1}{p^2 x^3}\right) \frac{dp}{dx} + 2p \left(1 - \frac{1}{x^3 p^2}\right) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x^3 p^2}\right) \left(x \frac{dp}{dx} + 2p\right) = 0$$

$$1 - \frac{1}{x^3 p^2} = 0 \vee x \frac{dp}{dx} + 2p = 0$$

$$\text{Si } x \frac{dp}{dx} + 2p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + 2 \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln p + 2 \ln x = \ln K \Rightarrow \ln p x^2 = \ln K \Rightarrow p x^2 = K \Rightarrow p = \frac{K}{x^2}$$

reemplazando en la ecuación  $x^3 p^2 + x^2 p y + 1 = 0$

$$\frac{K}{x^2} + K y + 1 = 0 \Rightarrow K^2 + K x y + x = 0 \text{ solución general.}$$



Si  $1 - \frac{1}{x^3 p^2} = 0 \Rightarrow p^2 = \frac{1}{x^3} \Rightarrow p = x^{-\frac{3}{2}}$  reemplazando

en la ecuación  $x^3 p^2 + x^2 p y + 1 = 0$  se tiene  $1 + x^2 x^{-\frac{3}{2}} y + 1 = 0 \Rightarrow 2 + \sqrt{x} y = 0$

$y = -\frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow y^2 x - 4 = 0$  solución singular

③ Encontrar la solución general y también la solución singular, si ella existe, de la ecuación:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 16x^2 = 0$$

### Solución

Sea  $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p dx$

$$xp^3 - 2yp^2 - 16x^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2}$$

diferenciando  $dy = \frac{x}{2} dp + \frac{p}{2} dx - \frac{16x}{p^2} dx + \frac{16x^2}{p^3} dp$

Como  $dy = p dx \Rightarrow p dx = \frac{x}{2} dp + \frac{p}{2} dx - \frac{16x}{p^2} dx + \frac{16x^2}{p^3} dp$

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{16x^2}{p^3}\right) dp - \left(\frac{p}{2} + \frac{16x}{p^2}\right) dx = 0, \text{ factorizando } x\left(\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3}\right) \frac{dp}{dx} - p\left(\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3}\right) \left(x \frac{dp}{dx} - p\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3} = 0 \vee x \frac{dp}{dx} - p = 0$$

Si  $x \frac{dp}{dx} - p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} - \frac{dx}{x} = 0$  integrando

$$\ln p - \ln x = \ln K \Rightarrow \ln \frac{p}{x} = \ln K \Rightarrow p = Kx$$

reemplazando en la ecuación  $y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2}$

se tiene  $y = \frac{Kx^2}{2} - \frac{8x^2}{K^2x^2} \Rightarrow y = \frac{Kx^2}{2} - \frac{8}{K^2}$

$\therefore 2K^2y = K^3x^2 - 16$  es la solución general

Si  $\frac{1}{2} + \frac{16x}{p^3} = 0 \Rightarrow \frac{16x}{p^3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p^3}{16x} = -2$

$p^3 = -32x \Rightarrow p = -2\sqrt[3]{4x^3}$  reemplazando en la ecuación

$y = \frac{xp}{2} - \frac{8x^2}{p^2}$  se tiene  $y = \frac{x(-2\sqrt[3]{4x^3})}{2} - \frac{8x^2}{4\sqrt[3]{16x^3}} \Rightarrow y = -\sqrt[3]{4x^3} - \frac{2x^3}{\sqrt[3]{2}}$

$y = -\left(\frac{3x^3}{\sqrt[3]{2}}\right) \Rightarrow 2y^3 = -27x^4 \quad \therefore 2y^3 + 27x^4 = 0$  solución singular

### b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Encontrar la solución general (S.G) y también la solución singular (S.S.) si ella existe de las siguientes ecuaciones diferenciales.

①

$$y = x \frac{dy}{dx} - 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

**Rpta:** S.G.:  $y = kx - 2k^2$ ; S.S.:  $8y = x^2$

②

$$y^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 3x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

**Rpta:** S.G.:  $y^3 + 3kx - k^2 = 0$ ; S.G.:  $9x^2 + 4y^3 = 0$

③

$$x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2y \frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

**Rpta:** S.G.:  $k^2x^2 - ky + 1$ ; S.S.:  $y^2 - 4x^2 = 0$

- ④  $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} + x + 2y = 0$  **Rpta:** S.G.:  $2x^2 + 2k(x-y) + k^2 = 0$   
S.S.:  $x^2 + 2xy - y^2 = 0$
- ⑤  $(1 + y'^2)y^2 - 4yy' - 4x = 0$  **Rpta:** S.S.:  $y^2 = 4x + 4$
- ⑥  $y'^2 - 4y = 0$  **Rpta:** S.S.:  $y = 0$
- ⑦  $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$  **Rpta:** S.S.:  $y = 0$ ,  $y = \frac{4}{27}x^3$
- ⑧  $y'^2 - y^2 = 0$  **Rpta:** No hay S.S.
- ⑨  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3\frac{dy}{dx} - 2x^2y = 0$  **Rpta:** S.G.:  $k^2 + kx^2 = 2y$ ; S.S.:  $8y = -x^4$
- ⑩  $2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^4 = 0$  **Rpta:** S.G.:  $2k^3x^3 = 1 - 6k^2p$ ; S.S.:  $2y = x^2$
- ⑪  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$  **Rpta:** S.G.:  $y = kx - k^2$ ; S.S.:  $4y = x^2$
- ⑫  $y = x\frac{dy}{dx} + K\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  **Rpta:** S.G.:  $y = kx + k^2c$ ; S.S.:  $x^2 = -4ky$
- ⑬  $x^8\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx} + 9y = 0$  **Rpta:** S.G.:  $x^3(y + k^2) + k = 0 = 0$ ; S.S.:  $4x^6y = 1$
- ⑭  $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$  **Rpta:** S.G.:  $x^2 = k(y - k)$ ; S.S.:  $y = 2x$ ,  $y = -2x$
- ⑮  $3x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} - y = 0$  **Rpta:** S.G.:  $xy = k(3kx - 1)$  S.S.:  $12x^2y = -1$
- ⑯  $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x-y)\frac{dy}{dx} + 1 - y = 0$  **Rpta:** S.G.:  $xk^2 + (x-y)k + 1 - y = 0$   
S.S.:  $(x+y)^2 = 4x$

- 17  $x^6 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$  Rpta: S.G.:  $3xy = k(xk^2 - 3)$ ; S.S.:  $9x^3 y^2 = 4$
- 18  $y = x^6 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - x \left(\frac{dy}{dx}\right)$  Rpta: S.G.:  $kxy = k(k^2 x - 1)$ ; S.S.:  $27x^3 y^2 = 4$
- 19  $x \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 2y \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 12x^3 = 0$  Rpta: S.G.:  $2k^3 y = k^4 x^2 + 12$ ; S.S.:  $3y^2 = \pm 8x^3$
- 20  $x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y \left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$  Rpta: S.G.:  $xk^3 - yk^2 + 1 = 0$ ; S.S.:  $4y^3 = 27x^2$
- 21  $x \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + y \frac{dx}{dy} = 3y^4$  Rpta: S.G.:  $3y = k(1 + kxy)$ ; S.S.:  $12xy^2 = -1$
- 22  $x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x^2 = 0$  Rpta: S.G.:  $x^2 = 4k(y - 8k^2)$ ; S.S.:  $8y^3 = 27x^4$
- 23  $4x^5 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 12x^4 y \frac{dy}{dx} + 9 = 0$  Rpta: S.G.:  $x^3(2ky - 1) = k^2$ ; S.S.:  $x^3 y^2 = 1$
- 24  $\left(\frac{dy}{dx} + 1\right)^2 (y - x \frac{dy}{dx}) = 1$  Rpta: S.G.:  $(k+1)^2 (y - kx) = 1$   
S.S.:  $4(x+y)^3 = 27x^2$
- 25  $4y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x \frac{dy}{dx} + y = 0$  Rpta: S.G.:  $kx = y^2 + k^2$ ; S.S.:  $x = \pm 2y$

## CAPÍTULO III

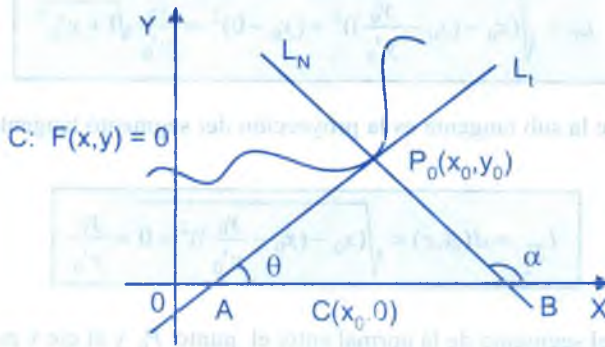
### 3. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.-

#### 3.1. PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.-

Consideremos una curva  $C$  descrita por la ecuación

$$C : F(x, y) = 0$$

y tomemos un punto  $P_0(x_0, y_0)$  de la curva  $C$



La pendiente de la recta tangente es:  $m_{L_T} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{P_0} = y'_0$

y la ecuación de la recta tangente es:  $L_T : y - y_0 = y'_0(x - x_0) \quad \dots (1)$

La pendiente de la recta normal es:  $m_{L_N} = -\frac{1}{m_{L_T}} = -\frac{1}{y'_0}$

y la ecuación de la recta normal es:  $L_N : y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \quad \dots (2)$



ahora calculamos el punto de intersección de la recta tangente con el eje  $x$ .

Sea  $A \in L_t \cap \text{eje } x \Rightarrow y=0$ , de la ecuación de la tangente se tiene:

$$-y_0 = y'_0(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} \text{ de donde } A\left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}, 0\right)$$

También calcularemos el punto de intersección de la recta normal y el eje  $x$ .

Sea  $B \in L_N \cap \text{eje } x \Rightarrow y=0$ , de la ecuación (2) se tiene:

$$-y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 + y_0 y'_0 \text{ de donde } B(x_0 + y_0 y'_0, 0)$$

La longitud del segmento de la tangente entre el punto  $P_0$  y el eje  $x$  es  $L_T = d(A, P_0)$

$$L_T = \sqrt{\left(x_0 - \left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}\right)\right)^2 + (y_0 - 0)^2} = \frac{y_0}{y'_0} \sqrt{1 + y'^2_0}$$

La longitud de la sub tangente es la proyección del segmento tangente  $AP_0$  sobre el eje  $x$  es decir:

$$L_{S_t} = d(A, c) = \sqrt{\left(x_0 - \left(x_0 - \frac{y_0}{y'_0}\right)\right)^2 + 0} = \frac{y_0}{y'_0}$$

La longitud del segmento de la normal entre el punto  $P_0$  y el eje  $x$  es:  $L_N = d(B, P_0)$

$$L_N = \sqrt{\left(x_0 - (x_0 + y_0 y'_0)\right)^2 + (y_0 - 0)^2} = y_0 \sqrt{1 + y'^2_0}$$

La longitud de la sub normal es la proyección del segmento normal  $\overline{BP_0}$  sobre el eje  $x$ , es decir

$$L_{S_N} = d(C, B) = \sqrt{(x_0 + y_0 y'_0 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2} = y_0 y'_0$$

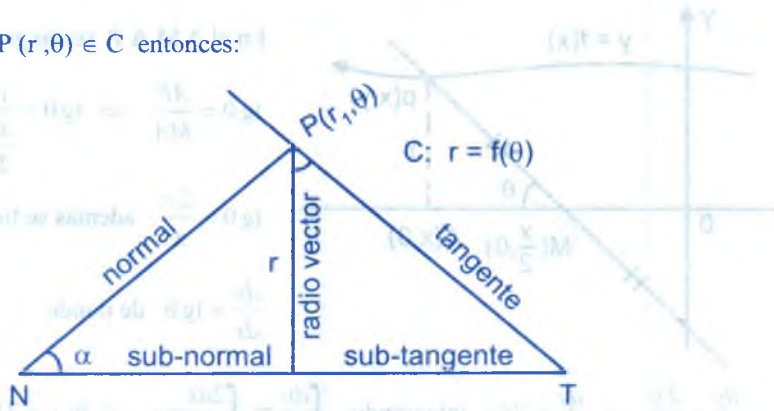
Generalizando estas longitudes en cualquier punto  $p(x, y)$  de la curva

C:  $F(x, y) = 0$  se tiene:

$L_T = \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2}$	=	$\frac{dy}{dx}$	longitud de la tangente
$LS_T = \frac{y}{y'}$	=		longitud de la sub tangente
$L_N = y \sqrt{1 + y'^2}$	=		longitud de la normal
$LS_N = yy'$	=		longitud de la sub normal

para el caso en que la curva está dado en coordenadas polares. Consideremos la curva:

C:  $r = f(\theta)$  y  $P(r, \theta) \in C$  entonces:



$tg \alpha = r \frac{d\theta}{dr}$ , donde  $\alpha$  es el ángulo comprendido entre el radio vector y la parte de la tangente dirigida hacia el origen de la curva.

$r \operatorname{tg} \alpha = r^2 \frac{d\theta}{dr}$ , es la longitud de la sub tangente polar.

$r \operatorname{c} \operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{d\theta}$ , es la longitud de la sub normal polar

$r \operatorname{sen} \alpha = r^2 \frac{d\theta}{ds}$ , es la longitud de la perpendicular desde el polo a la tangente.

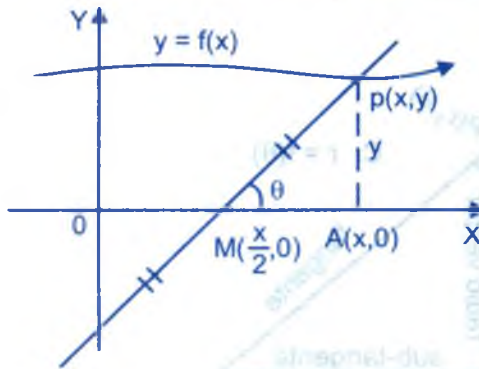
$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$  es un elemento de longitud de arco.

$\frac{r^2 d\theta}{2}$ , es un elemento de área.

### a. PROBLEMAS RESUELTOS

- ① Hallar la ecuación de las curvas, tales que la parte de cada tangente, comprendida entre el eje Y, y el punto de tangencia, queda dividido en dos partes iguales por el eje de las X.

#### Solución



En el  $\Delta M A P$  rectángulo se tiene:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{AP}{MA} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{\frac{x}{2}}$$

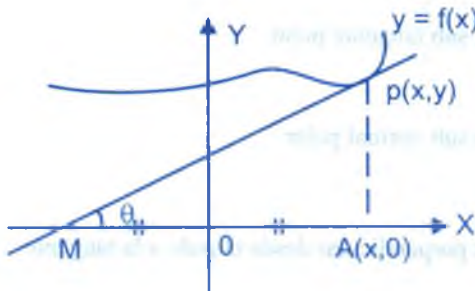
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2y}{x}, \text{ además se tiene}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta \text{ de donde}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x} \text{ integrando } \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} + c \Rightarrow \ln y = 2 \ln x + c \Rightarrow y = Kx^2$$

- ② Hallar la ecuación de las curvas, tales que la parte de cada tangente, comprendida entre el eje de las x y el punto de tangencia, está dividido en dos partes iguales por el eje de las y.

#### Solución



En el  $\Delta M A P$  se tiene:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{AP}{MA} = \frac{y}{2x}$$

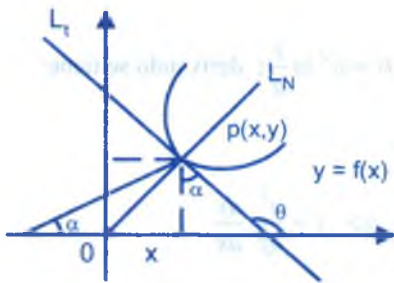
$$\text{Como } \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{2x}$$

Además  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$ , integrando se tiene:

$$\ln y = \frac{\ln x}{2} + c \Rightarrow y^2 = Kx$$

- ③ La tangente en cualquier punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forman un triángulo isósceles con base en el eje de las x. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (2,2)

**Solución**



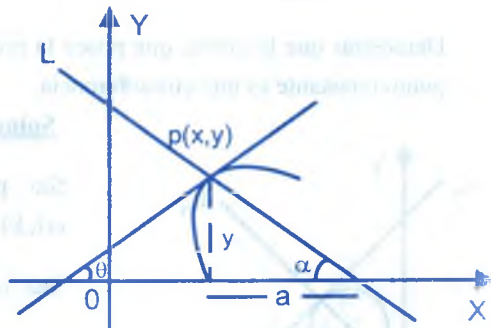
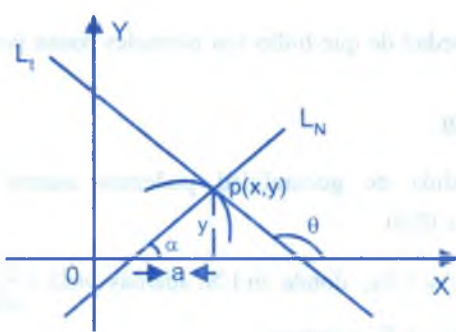
Como  $L_N \perp L_t \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = -c \operatorname{tg} \alpha = -\frac{y}{x}$

además  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = -c \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ , de donde

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0, \text{ integrando } \ln xy = \ln k, \text{ es decir: } C: xy = k$$

pero  $(2,2) \in C \rightarrow k = 4, \therefore xy = 4$

- ④ Hallar la ecuación de una curva tal que, si en un punto cualquiera de ella, se trazan la normal y la ordenada, el segmento que ambos interceptan sobre el eje de las x es una constante a.



Se conoce que  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \pm c \operatorname{tg} \alpha$  para  $c \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{y}$

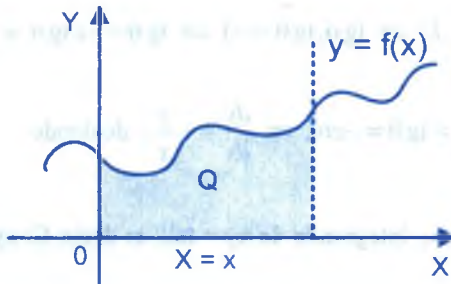
Luego  $\frac{dy}{dx} = \pm c \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{a}{y}$ , de donde  $\frac{y}{a} = \pm \frac{dx}{y} \Rightarrow y^2 = \pm 2ax + c$

y  $dy = \pm a dx$  integrando se tiene:  $y^2 \pm 2ax = c$

- 5) Hallar una curva para la cual el área a Q, limitada por la curva, el eje OX y las dos ordenadas.

$x = 0, x = x$ , sea una función dada de  $y$ :  $Q = a^2 \ln \frac{y}{a}$

### Solución



$Q = \int_0^x y dx = a^2 \ln \frac{y}{a}$ ; derivando se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{y} \Rightarrow y = \frac{a^3}{ay} \frac{dy}{dx}$$

entonces:  $dx - \frac{a^2}{y^2} dy = 0$ , integrando se tiene:  $x + \frac{a^2}{y} = c \Rightarrow \frac{a^2}{y} = c - x$

de donde  $y = \frac{a^2}{c-x}$  (hipérbolas)

- 6) Demostrar que la curva, que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto constante es una circunferencia.

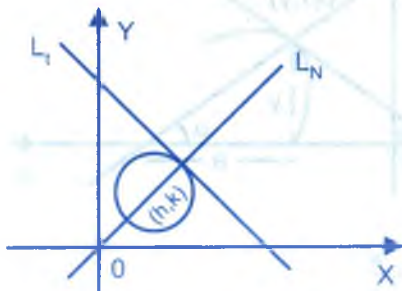
### Solución

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $c(h,k) = c(0,0)$ .

Sea LN:  $y = bx$ , donde  $m_{LN}$ , además  $m_{LT} = \frac{dy}{dx}$  y

como  $LN \perp LT$ , entonces:

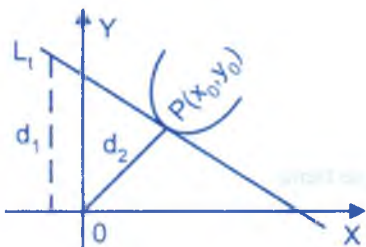
$$m_{LN} = -\frac{1}{m_{LT}} = -\frac{dx}{dy} \text{ es decir que } b = -\frac{dx}{dy}$$





como  $y = bx \Rightarrow b = \frac{y}{x}$  de donde  $\frac{y}{x} = -\frac{dx}{dy} \Rightarrow y dx + x dy = 0$  integrando  $x^2 + y^2 = R$

- 7) Hallar la curva para la cual, la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY, al radio vector es una cantidad constante positiva.



**Solución**

Por dato se tiene:  $\frac{d_1}{d_2} = c$  La ecuación de la recta

tangente es:  $L_t : y - y_0 = m(x - x_0)$ , de donde

$$L_t : y = y'(x_0)x - y'(x_0)x_0 + y_0$$

para  $x = 0$  se tiene  $d_1 = y_0 - y'(x_0)x_0$  además  $d_2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ , luego :

$$\frac{y_0 - y'(x_0)x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = c, \text{ generalizando se tiene: } \frac{y - y'x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c$$

$$y - xy' = c\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (c\sqrt{x^2 + y^2} - y)dx + xdy = 0$$

Sea  $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$

$$(c\sqrt{x^2 + u^2x^2} - ux)dx + x(udx + xdu) = 0, \text{ para } x \neq 0$$

$$(c\sqrt{1 + u^2} - u)dx + udx + xdu = 0 \Rightarrow c\sqrt{1 + u^2}dx + xdu = 0, \text{ separando las variables.}$$

$$c \frac{dx}{x} + \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = 0 \text{ integrando } c \ln(x) + \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln k$$

$$\ln x^c (u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln k \Rightarrow x^c (u + \sqrt{1 + u^2}) = k, \text{ de donde: } x^c \left( \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right) = k$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = kx^{1-c} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = kx^{1-c} - y, \text{ elevando al cuadrado}$$

$$x^2 + y^2 = k^2 x^{2(1-c)} - 2k\gamma x^{1-c} + y^2, \text{ de donde } y = \frac{1}{2}kx^{1-c} - \frac{1}{k}x^{1+c}$$

- 8) Hallar la línea para la cual la subnormal en cualquier punto sea a la suma de la abscisa y la ordenada como la ordenada de este punto es a la abscisa.

**Solución**

Sea P (x,y) un punto cualquiera de la línea.

La subnormal en el punto P(x,y) es  $y \frac{dy}{dx}$

Luego de acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

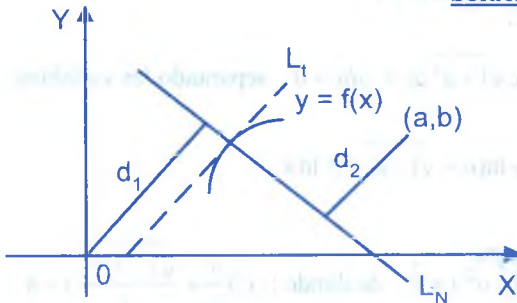
$$x \frac{dy}{dx} = x + y \Rightarrow (x + y)dx - x dy = 0$$

$$x dy - y dx = x dx \text{ de donde } \frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{dx}{x}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dx}{x} \text{ integrando } \frac{y}{x} = \ln(xc) \Rightarrow y = x \ln(xc)$$

- 9) Hallar la línea para la cual la distancia que media entre la normal en cualquier punto suyo el origen de coordenadas y la que media entre la misma normal y el punto (a,b) están en razón constante e igual a k.

**Solución**



$$\text{Sea } L_t : y = mx + A \Rightarrow m L_N : y = -\frac{x}{m} + c$$

$$d_1 = \frac{|\pm c|}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}} \text{ y } d_2 = \frac{|b + \frac{a}{m} - c|}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}}$$

condición del problema:  $\frac{d_1}{d_2} = k$  de donde  $d_1 = k d_2$  considerando c positivo

se tiene:  $\frac{c}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}} = k \frac{(b+\frac{a}{m}-c)}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}} \Rightarrow c = k(b+\frac{a}{m}-c)$  como  $y = -\frac{x}{m} + c \Rightarrow c = y + \frac{x}{m}$

Luego:  $y + \frac{x}{m} = k(b + \frac{a}{m} - y - \frac{x}{m})$

$my + x = k(bm + a - my - x) \Rightarrow [ak - (k+1)x] + [kb - (k+1)y]m = 0$

$[ak - (k+1)x] + [kb - (k+1)y] \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow [ak - (k+1)x] dx + [kb - (k+1)y] dy = 0$

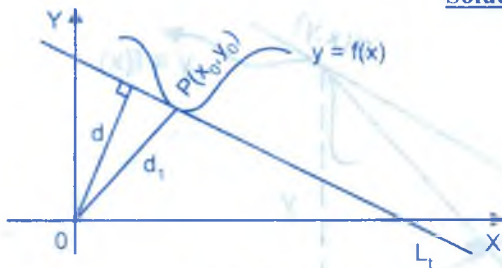
integrando:  $akx - \frac{k+1}{2}x^2 + kby - \frac{k+1}{2}y^2 = c_1$

$x^2 + y^2 - \frac{2k}{k+1}(ax + by) = c$

10

Hallar la curva que posee la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.

**Solución**



Por dato del problema se tiene:  $d = x_0$   
 además  $m_{L_t|_P} = y'(x_0)$ , y la ecuación de la  
 recta tangente es:  $L_t: y - y_0 = m_{L_t}(x - x_0)$

Es decir:  $x_0 y'(x_0) - y + y_0 - y x_0 \cdot y'(x_0) = 0$

$d(0, L_t) = \frac{|y_0 - x_0 y'(x_0)|}{\sqrt{[y'(x_0)]^2 + 1}}$ , por condición del problema se tiene:  $d(0, L_t) = x_0$

$\frac{|y_0 - x_0 y'(x_0)|}{\sqrt{1 + [y'(x_0)]^2}} = x_0$  generalizando en cualquier punto

$\frac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + (y')^2}} = x \Rightarrow |y - xy'| = \sqrt{1 + (y')^2} x$

$$y^2 - 2xyy' + x^2y'^2 = x^2 + x^2y'^2 \text{ de donde } y^2 - x^2 - 2xyy' = 0 \Rightarrow (y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$$

$$\text{Sea } y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

$$(u^2x^2 - x^2)dx - 2x^2u(udx - xdu) = 0 \text{ para } x \neq 0$$

$$(u^2 - 1)dx - 2u^2dx - 2uxdu = 0 \Rightarrow -(u^2 + 1)dx - 2uxdu = 0, \text{ separando las variables.}$$

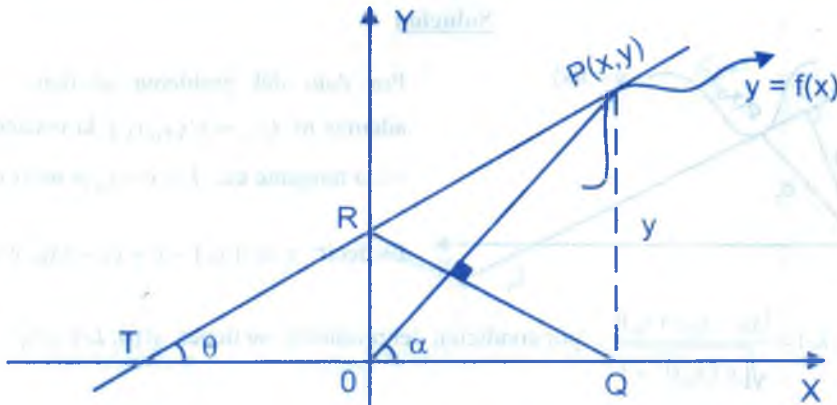
$$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{u^2 + 1} = 0 \text{ integrando } \ln x + \ln(u^2 + 1) = \ln k$$

$$\text{de donde se tiene: } \ln x(u^2 + 1) = \ln k \Rightarrow x(u^2 + 1) = k$$

$$\text{reemplazando } u \text{ se tiene: } x\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = k \Rightarrow x^2 + y^2 = kx$$

- 11) Dada la figura adjunta, determinar todas las curvas para las cuales  $\overline{PR}$  es tangente y al mismo tiempo es  $\overline{QR}$  ortogonal al radio vector  $\overline{OP}$

**Solución**



$$\text{tg } \theta = \frac{\overline{OR}}{\overline{TO}} = -\frac{\overline{OR}}{\overline{OT}} \Rightarrow Y' = -\frac{\overline{OR}}{\overline{OT}} \Rightarrow \overline{OT} = -\frac{\overline{OR}}{Y'} \quad \dots (1)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow RQ: y = -\frac{1}{\text{tg } \alpha}(x-x) = -\frac{x}{y}(x-x) \Rightarrow y = -\frac{y}{x}(x-x)$$

$$RQ \wedge \text{eje } y \Rightarrow x=0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{y} \Rightarrow \overline{OR} = \frac{x^2}{y} \dots (2)$$

$$\text{de (1) y (2) se tiene: } \overline{OT} = -\frac{x^2}{yy'} \dots (3)$$

$$T: y - y_0 = y'(x - x_0)$$

$$T \wedge \text{eje } y \Rightarrow x=0 \Rightarrow \overline{OR} = y - xy' \dots (4)$$

$$\text{de (2) y (4) se tiene: } \frac{x^2}{y} = y - xy' \Rightarrow (x^2 - y^2)dx + xydy = 0$$

$$\text{Sea } y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

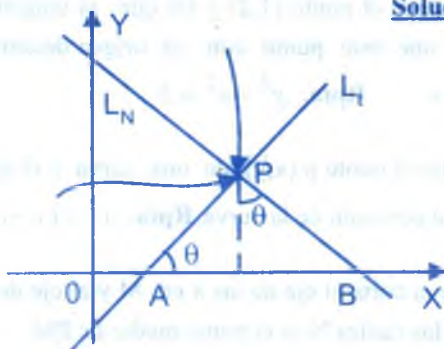
$$(x^2 - u^2x^2)dx + x^2y(u dx + x du) = 0 \Rightarrow (1 - u^2)dx + u^2dx + xudu = 0$$

$$dx + ux du = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + udu = 0, \text{ integrando } \ln x + \frac{u^2}{2} = c \Rightarrow \ln x^2 + \frac{y^2}{x^2} = k$$

12

Calcular la curva para la cual la longitud de la porción de la normal comprendida entre la curva y el eje X es proporcional al cuadrado de la ordenada.

**Solución**



$\overline{PB}$  = segmento normal con longitud.

$$L = |yy' \sqrt{1 + y'^{-2}}|$$

condición del problema  $L = ky^2$  entonces

$$(yy' \sqrt{1 + y'^{-2}})^2 = k^2 y^4 \Rightarrow y^2 y'^2 + y^2 = k^2 y^4$$

$$y'^2 - 1 = k^2 y^2 \Rightarrow y' = \sqrt{k^2 y^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 + 1}} = dx \text{ integrando } \frac{1}{k} \ln |ky + \sqrt{k^2 y^2 + 1}| = x + c$$



$$\frac{1}{k} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{k^2}} \right| = x + c_1 \Rightarrow \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{k^2}} \right| = kx + kc_1 \Rightarrow y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{k^2}} = Ae^{kx}$$

### b. PROBLEMAS PROPUESTOS.

- ① La normal en el punto  $p(x,y)$  de una curva corta el eje de las  $x$  en  $M$  y al eje de las  $y$  en  $N$ . Hallar la ecuación de las curvas para las cuales  $p$  es el punto medio de  $MN$ .

**Rpta.**  $y^2 - x^2 = k$

- ② Determinar una curva tal que si por un punto  $M$  de ellas se traza la tangente  $\overline{MA}$  a la parábola  $y^2 = 2px$ , la tangente  $\overline{MT}$  a la curva buscada es paralela a  $OA$ .

**Rpta.** 
$$\begin{cases} x = \omega \left( c + \frac{2p}{3\omega^3} \right) \\ y = \frac{\omega}{2} \left( c + \frac{2p}{3\omega^3} \right) + \frac{p}{\omega} \end{cases}, \omega = \frac{dy}{dx}$$

- ③ El eje de las  $x$ , la tangente y la ordenada en cada punto de una curva forman un triángulo de área constante  $k$ . Hallar la ecuación de la curva, obteniendo los valores correspondientes de  $k$  y de la constante de integración, suponiendo que pasa por los puntos  $(0,4)$  y  $(1,2)$ .

**Rpta.**  $y + xy - 4 = 0$

- ④ Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto  $(1,2)$  y tal que la tangente en un punto cualquiera  $p$  y la recta que une este punto con el origen determinan el ángulo complementario con el eje de las  $x$ .

**Rpta.**  $y^2 - x^2 = 3$

- ⑤ La parte de la normal comprendida entre el punto  $p(x,y)$  de una curva y el eje de las  $x$  tiene una longitud constante  $k$ . Hallar la ecuación de la curva.

**Rpta.**  $y^2 + (x - c)^2 = k^2$

- ⑥ La normal en el punto  $p(x,y)$  de una curva corta al eje de las  $x$  en  $M$  y al eje de las  $y$  en  $N$ . Hallar la ecuación de las curvas, para las cuales  $N$  es el punto medio de  $PM$ .

**Rpta.**  $y^2 + 2x^2 = k$

- ⑦ Las normales en todo punto de una curva pasan por un punto fijo. Hallar la ecuación de la curva.

**Rpta.**  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R$

8 Hallar la ecuación de una curva, tal que el área comprendida entre la curva, el eje de las  $x$ , una ordenada fija y una ordenada variable, sea proporcional a la diferencia entre estas ordenadas.

**Rpta.**  $y = Ae^{\frac{x}{k}}$

9 El área del sector formado por un arco de una curva y los dos radios que van desde el origen a sus extremos, es proporcional a la diferencia de esos radios. Hallar la ecuación de la curva.

**Rpta.**  $r(\theta + c) + 2k = 0$

10 El arco de una curva es proporcional a la diferencia de los radios trazados desde el origen a sus extremos. Hallar la ecuación de la curva.

**Rpta.**  $\ln(\ell) = \frac{\theta + c}{\sqrt{k^2 + 1}}$

11 El área limitada por  $y = f(s)$ , el eje de las  $x$ , y dos ordenadas es igual al producto de las ordenadas. Comprobar que  $f(x) = 0$  es la única solución.

12 El área limitada por el eje de las  $x$ , una curva y dos ordenadas es igual al valor medio de las ordenadas multiplicado por la distancia entre ellas. Hallar la ecuación de la curva.

**Rpta.**  $y - y_0 = c(x - x_0), y = y_0$

13 Hallar la línea que pase por el punto (2,3) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de cualquier tangente suya comprendido entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales en el punto de contacto.

**Rpta.**  $xy = 6$

14 Hallar la ecuación de una curva tal que la suma de los intersejos de la tangente en cualquier punto es una constante  $k$ .

**Rpta.**  $y = cx + kc$

15 La tangente a una curva en cualquier punto, forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área  $2k$ . Hallar la ecuación de tal curva.

**Rpta.**  $y = cx \pm \frac{ck}{\sqrt{1+c^2}}$

16 Por cada punto de una curva se trazan paralelos a los ejes para formar un rectángulo con dos lados sobre los ejes. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que cada rectángulo de esta clase queda en dos partes cuyas áreas son el doble una de la otra.

**Rpta.**  $y^2 = cx$  ó  $x^2 = cy$

- 17 Hallar la ecuación de la curva cuya normal en cualquier punto pasa por el origen.

$$\text{Rpta. } x^2 + y^2 = c^2$$

- 18 Si el producto de las distancias de los puntos  $(-a,0)$  y  $(a,0)$  a la tangente de una curva en cualquier punto es una constante  $k$ . Hallar la ecuación de dicha curva.

$$\text{Rpta. } y = cx \pm \sqrt{k + (k + a^2)c^2}$$

- 19 Hallar una curva que pasa por el punto  $(0,-2)$  de modo que el coeficiente angular de la tangente en cualquier de sus puntos sea igual a la ordenada del mismo punto, aumentada tres veces.

$$\text{Rpta. } y = -2e^{3x}$$

- 20 Hallar la línea que pase por el punto  $(2,0)$  y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de la tangente entre el punto de contacto y el eje de ordenadas tiene la longitud constante e igual a dos.

$$\text{Rpta. } y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x} \right|$$

- 21 Hallar la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es  $n$  veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

$$\text{Rpta. } y = kx^n$$

- 22 Hallar todas las líneas para las cuales el segmento de la tangente comprendida entre el punto de contacto y el eje de las abscisas se divide en dos partes iguales en el punto de intersección con el eje de ordenadas. Rpta. parábolas  $y^2 = cx$

- 23 Encontrar las curvas cuyas subnormales son constantes. Rpta.  $y^2 = 2kx + c$

- 24 Hallar todas las líneas para las cuales la subtangencia sea proporcional a la abscisa del punto de contacto. Rpta.  $y^k = cx$

- 25 Empleando coordenadas rectangulares, hallar la forma del espejo si los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse, son paralelos a una dirección dada. Rpta.  $y^2 = 2cx + c^2$

- 26) Hallar la curva para la cual la longitud del segmento interceptado en el eje de ordenadas por la normal a cualquiera de sus puntos, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

$$\text{Rpta. } y = \frac{1}{2}(cx^2 - \frac{1}{c})$$

- 27) Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud del segmento interceptado en el eje O y por la normal, es igual al duplo del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coordenadas. **Rpta.**  $x^2 + y^2 = cx^4$

- 28) Hallar la línea que pase por el punto (a,1) y cuya subtangente tenga la longitud constante a.

$$\text{Rpta. } y = \frac{e(x-a)}{q}$$

- 29) Hallar la línea para la cual la longitud de la normal sea la magnitud constante a.

$$\text{Rpta. } (x-c)^2 + y^2 = a^2$$

- 30) Hallar la curva cuya tangente forma con los ejes coordenadas un triángulo de área constante  $S = 2a^2$ .

$$\text{Rpta. } xy = \pm a^2$$

- 31) Hallar la línea para la cual la suma de las longitudes de la tangente y de la subtangente en cualquier punto suyo sea proporcional al producto de las coordenadas del punto de contacto.

$$\text{Rpta. } y = \frac{1}{k} \ln |c(k^2x^2 - 1)|$$

- 32) Hallar la curva por la cual el segmento de la tangente comprendido entre los ejes coordenadas tiene una longitud constante a.

$$\text{Rpta. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

- 33) Encontrar la curva que pasa por el punto (1,2) cuya normal en cualquier punto (excepto en  $x = 0$ ) se bisece por el eje x.

$$\text{Rpta. } y^2 + 2x^2 = 6$$

- 34) Hallar una curva que pase por el punto (0,1) y que la subtangente sea igual a la suma de las coordenadas del punto de contacto.

$$\text{Rpta. } y = e^x$$



- 35) En todo punto  $P$  en una curva, la proyección de la normal sobre el eje  $x$  y la abscisa de  $P$  son de longitud igual. Encontrar la curva que pasa por un punto  $(2,3)$ .

$$\text{Rpta. } y^2 - x^2 = 5 \text{ ó } x^2 + y^2 = 13$$

- 36) Hallar la línea para la cual el cuadrado de la longitud de un segmento recortado por cualquier tangente del eje de ordenadas, sea igual al producto de las coordenadas del punto de contacto.

$$\text{Rpta. } x = ce^{\pm 2\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

- 37) Hallar la curva, sabiendo que la suma de los segmentos que intercepta la tangente a la misma en los ejes de coordenadas es constante e igual a  $2a$ . **Rpta.**  $y = (\sqrt{2a} \pm \sqrt{x})^2$

- 38) La suma de las longitudes de la normal, y de la subnormal es igual a la unidad. Hallar la ecuación de la curva, sabiendo que esta por el origen de coordenadas. **Rpta.**  $y^2 = 1 - e^{-x}$

- 39) Encontrar la curva en el punto  $(0,2)$  tal que la proyección de la tangente sobre el eje  $x$  siempre tenga la longitud 2. **Rpta.**  $y^2 = 4e^{\pm x}$

- 40) Hallar la curva, para la cual, ángulo formado por la tangente con el radio vector del punto de contacto es constante. **Rpta.**  $r = ce^{a\psi}$

- 41) Hallar la línea para la cual la ordenada inicial de cualquier tangente es igual a la subnormal correspondiente. **Rpta.**  $x = y \ln(cy)$

- 42) Encontrar la familia de curvas que tienen las siguientes propiedades: la perpendicular del origen a la tangente y abscisa de tangencia son de igual longitud. **Rpta.**  $x^2 + y^2 = cx$

- 43) Encontrar la curva que pasa por el punto  $(2,1)$  tal que la intersección del eje  $X$  con la tangente es el doble de la ordenada del punto de tangencia. **Rpta.**  $y^2 = e^{2 - \frac{x}{y}}$

- 44) Hallar la curva, sabiendo, que el área comprendida entre los ejes de coordenadas, esta curva y la ordenada de cualquier punto situado en ella, es igual al cubo de esta ordenada. **Rpta.**  $3y^2 - 2x = k$



- 45) Hallar la curva, para la cual, el segmento que intercepta la tangente en el eje OX, es igual a la longitud de la propia tangente. **Rpta.**  $x^2 + (y - b)^2 = b^2$
- 46) Hallar la línea para la cual la ordenada inicial de cualquier tangente sea dos unidades de escala menor que la abscisa del punto de contacto. **Rpta.**  $y = cx - x \ln |x| - 2$
- 47) Hallar la curva, para la cual, el segmento de tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales por la parábola  $y^2 = 2x$ . **Rpta.**  $y^2 + 16x = 0$
- 48) Encontrar las curvas para las cuáles cada normal y sus intersección con x tiene la misma longitud. **Rpta.**  $x^2 + y^2 = cx$
- 49) Hallar las curvas en el plano XY para las cuales, el segmento de cada tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, es bisecado por el punto de tangencia. **Rpta.**  $xy = c$
- 50) Hallar las curvas en el plano XY para las cuáles, la pendiente de las normales en todos sus puntos es igual a la razón de la abscisa a la ordenada. **Rpta.**  $xy = c$
- 51) Hallar la línea para la cual la longitud de su normal sea proporcional el cuadrado de la ordenada. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k. **Rpta.**  $y = \frac{1}{2k} [e^{ky+c} + e^{-ky+c}]$
- 52) Hallar la curva, para la cual, la normal a cualquiera de sus puntos es igual a la distancia desde este punto hasta el origen de coordenadas. **Rpta.**  $y^2 - x^2 = c$  ó  $x^2 + y^2 = c$
- 53) Hallar la línea para la cual el área comprendida entre el eje de abscisa, la misma línea y dos ordenadas una de las cuáles es constante y la otra variable, sea igual a la relación del cubo de la ordenada variable a la abscisa variable. **Rpta.**  $(2y^2 - x^2)^3 = cx^2$
- 54) Hallar la ecuación de las curvas que corta al eje de abscisas en  $x = 1$  y que tiene la siguiente propiedad: la longitud de la subnormal en cada punto de la curva es igual al promedio aritmético de las coordenadas en este punto. **Rpta.**  $(x + 2y)(x - y)^3 = 1$

- 55) Una curva que se halla en el primer cuadrante pasa por el punto  $A(0,1)$ , si la longitud del arco comprendido entre  $A(0,1)$  y un punto de la curva  $p(x,y)$  es numéricamente igual al área limitada por la curva, el eje X, el eje Y y la coordenada del punto  $p(x,y)$ . Encontrar la ecuación de la curva. **Rpta.**  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- 56) La normal en cada punto de una curva y la recta que un dicho punto con el origen de coordenadas forma un triángulo isósceles cuya base está en el eje de abscisas. Hallar la ecuación de la curva. **Rpta.**  $x^2 - y^2 = c$
- 57) Hallar la ecuación de la familia de curvas en el plano XY de tal manera que el triángulo formado por la recta tangente a la curva, al eje de las abscisa y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene una área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia. **Rpta.**  $\ln cy = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+4y}{\sqrt{15}x}\right)$
- 58) Hallar la curva para lo cual el segmento de tangente comprendida entre los ejes coordenados se divide en partes iguales por la parábola  $y^2 = 2x$ . **Rpta.**  $y^2 + 16x = 0$
- 59) Hallar la línea para la cual el área del rectángulo construido sobre la abscisa de cualquier punto y sobre la ordenada inicial de la tangente en ese punto es una magnitud constante e igual a  $(a^2)$ . **Rpta.**  $y = \pm \frac{a^2}{2x} + xc$
- 60) Encontrar la ecuación de una curva tal que si se traza una normal en un punto M cualquiera de ella encuentra al eje x en el punto P, y la línea que une los puntos medios de  $\overline{MP}$  describe una parábola de ecuación  $y^2 = 36x$ .
- 61) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto  $(1,0)$  y goza de la siguiente propiedad: "si por un punto cualquiera P de ella se traza la tangente geométrica y la normal respectiva, la tangente corta el eje Y en T y la normal corta al eje x en N resulta TN perpendicular a, OP, siendo O el origen de coordenadas. **Rpta.**  $x^2 + y^2 = x$

- 62) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2,1) y para la cual el área del triángulo que forma el eje X de abscisas, la tangente a la curva en cualquiera de los puntos y el radio vector de dicho punto, sea constante e igual a 4 unidades cuadradas.

$$\text{Rpta. } x = \frac{4}{y} - 2y$$

- 63) Determinar la ecuación de una curva que pasa por (1,1) y tenga la siguiente propiedad: por un punto P de ella se traza la recta tangente y la recta normal de modo que la primera corta al eje de las y en el punto A y la segunda al eje de las X en el punto B, cumpliéndose la siguiente condición  $\overline{OA} = \overline{OB}$ , donde O es el origen de coordenadas.

$$\text{Rpta. } \ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = c$$

- 64) Supongamos que un halcón H, se encuentra en el punto (1,0) y divisa una paloma Q en el origen volando en dirección del eje Y, con una velocidad V, el halcón vuela inmediatamente en dirección de la paloma con una velocidad  $w = 2V$  ¿Cuál es la trayectoria que debe seguir el halcón y en que punto alcanzaría a la paloma?

$$\text{Rpta. } y = \left(\frac{x}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - (ax)^{\frac{1}{2}} + \frac{2a}{3} \text{ ecuación trayectoria } \left(0, \frac{2a}{3}\right) \text{ es el punto pedido.}$$

- 65) Determinar la ecuación de la familia de curvas que gozan de la siguiente propiedad: El área del trapecio por lo ejes coordenados, la tangente en un punto cualquiera de la curva y la ordenada del punto de tangencia sea siempre igual a, b unidades cuadradas.

$$\text{Rpta. } 3(cx^3 - xy) = 2b$$

- 66) El triángulo formado por la tangente a la curva, el eje de las abscisas y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene un área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia.

- 67) El área del triángulo formado por la tangente a la curva, el eje de abscisas y la normal a la curva es igual a la mitad del valor de las abscisas de intersección de la recta tangente.

- 68) La normal en cada punto de una curva y la recta que une dicho punto con el origen de coordenadas forma un triángulo isósceles cuya base está en el eje de abscisas. Hallar la ecuación de la curva.

- 69) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (3,5), que tiene la siguiente propiedad: "La normal en cualquiera de sus puntos y la recta que une el punto considerado con el origen de coordenadas forman un triángulo isósceles con base en el eje de abscisas".  
**Rpta:**  $y^2 - x^2 = 16$
- 70) Sea una curva C en que la tangente y la normal de la curva C en un punto P(x,y) corten al eje X en A y  $A_1$  y al eje Y en B y  $B_1$  respectivamente. Además considere el punto E (x,0) y  $\theta$  el ángulo que forma AP con el eje X. Considere a los segmentos como distancias dirigidas. Determine la ecuación de la curva si el área del triángulo  $\triangle EA_1$  es igual a una constante k.  
**Rpta:**  $y^3 = 6kx + c$
- 71) Hallar la curva cuya propiedad consiste en que el producto del cuadrado de la distancia entre cualquiera de sus puntos y el origen de coordenadas por el segmento separado en el eje de las abscisa de ese punto.  
**Rpta:**  $y^4 + 2x^2 y^2 = c$
- 72) Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2, 4) y es tal que: "La abscisa del centro de gravedad de la figura plana limitada por los ejes coordenados, la curva y por la ordenada de cualquiera de sus puntos, sea igual a  $\frac{3}{4}$  de la abscisa de este punto".  
**Rpta:**  $y = x^2$
- 73) Encontrar la ecuación de una curva tal que si se traza una normal en un punto M cualquiera de ella encuentra al eje X en el punto P, y la línea que une los puntos medios de  $\overline{MP}$  describe una parábola de ecuación  $y^2 = ax$  **Rpta:**  $y^2 = ax + a^2 + c_1 e^{\frac{x}{a}}$
- 74) Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 3) para la cual: "La ordenada PN de cualquier punto P(x,y) corta a la recta  $2x + y - 10 = 0$  en un punto Q y si sobre PN tomemos un punto M tal que  $PM = NQ$  entonces la recta OM resulta paralela a la recta tangente a la curva en P".  
**Rpta:**  $y = 2x \ln x + 10 - 7x$
- 75) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (4, 8) y es tal que: "La tangente de la curva en un punto P(x, y) cualquiera de ella corta al eje X en un punto M equidistante del punto P y del punto A(0,4)".  
**Rpta:**  $\frac{x^2}{y} + \frac{16}{y} + y = c$



- 76) Se dá un punto sobre el eje Y,  $M(0, b)$ ; se pide calcular la ecuación de una curva que goza de la siguiente propiedad: "Si un punto  $P(x, y)$  cualquiera de la curva, se traza una tangente a la curva, esta corta al eje X en el punto R, que equidista de M y P, además la curva pasa por el punto  $(7, 5)$ ." **Rpta:**  $x^2 + y^2 + b^2 = y\left(\frac{74 + b^2}{5}\right)$

- 77) Hallar la ecuación de las curvas para las que el radio de curvatura proyectado sobre el eje X, es el doble de la abscisas. Haga el correspondiente gráfico. **Rpta:**  $y = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{x(c_1 - x)} + \frac{1}{c_1} \arctg \sqrt{\frac{x}{c_1 - x}} + c_2$

- 78) Si  $X(t) = \int_0^t (t-s)e^{-(t-s)}e^s ds$ . Calcular el valor de:  $X''(t) + 2X'(t) + X(t)$

- 79) Determinar la curva tal que:
- a) Cuya subnormal es la media aritmética de la abscisa y la ordenada del punto de ésta curva. **Rpta:**  $(y-x)^2(x+2y) = c$
  - b) Cuya subtangente es la media aritmética de la abscisa y la ordenada del punto de ésta curva. **Rpta:**  $(y-x)^2 = ky$

- 80) Hallar la curva para la cual el segmento de tangente comprendida entre los ejes coordenadas se divide en partes iguales por la parábola  $y^2 = 2x$ . **Rpta:**  $y^2 + 16x = 0$

- 81) a) Graficar y hallar la ecuación diferencial de las curvas tales que la tangente en un punto cualesquiera M forme un ángulo  $\theta$  con el eje OX y que se verifique  $\theta - \phi = \frac{\pi}{4}$ , siendo  $\phi$  el ángulo que Om forme con OX.
- b) Resolver la ecuación diferencial hallada en (a).
- c) Hallar, partiendo de la ecuación diferencial, la relación entre el radio de curvatura en M y OM.



- 82) Sea Q el punto de corte de la tangente a una curva en P(x,y) y el eje Y. Si la circunferencia cuyo diámetro es  $\overline{QP}$  pasa por un punto fijo F(a,0). Hallar la ecuación y resolver. Graficar.
- 83) La normal en un punto P de una curva encuentra al eje X en Q. Encontrar la ecuación de la curva si pasa por el punto (0,b) y si el lugar geométrico del punto medio de  $\overline{PQ}$  es  $y^2 = kx$ .
- 84) Sea A el punto de corte de la tangente a una curva en P(x,y) y el eje Y, si la circunferencia cuyo diámetro es  $\overline{AP}$ , pasa por un punto fijo (a,0). Hallar la ecuación de la curva.

### 3.2. TRAYECTORIAS ORTOGONALES.-

Consideremos una familia de curvas planas.

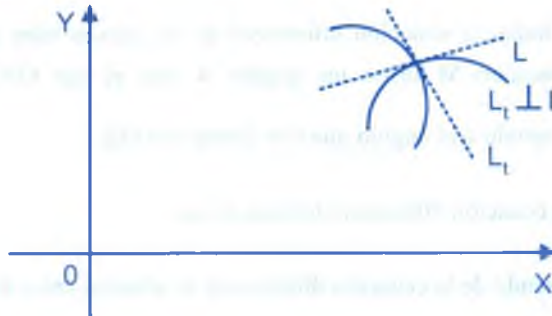
$$f(x, y, c) = 0 \quad \dots (1)$$

donde cada valor del parámetro c representa una curva.

Los problemas que se presentan en los campos tales como Electroestática, Hidrodinámica y termodinámica es de encontrar una familia de curvas que dependen de un parámetro k.

$$g(x, y, k) = 0 \quad \dots (2)$$

Con la propiedad que cualquier curva de (1) al interceptar a cada curva de la familia (2) las rectas tangentes a las curvas sean perpendiculares.



a las familias de las curvas (1) y (2) se denominan trayectorias ortogonales.

**Observación.** Como ejemplo veremos los casos siguientes:

- ① En el campo Electroestático, a una familia de curvas se denomina curvas Equipotenciales y la otra familia de curvas denominan líneas de fuerza.
- ② En el campo Hidrodinámico, a una familia de curvas se denomina curvas de potencial de velocidad y otra familia se denomina líneas de corriente o líneas de flujo.
- ③ En el campo Termodinámico a una familia de curvas se denomina líneas isothermas y a la otra familia de curvas denomina líneas de flujo de calor. Si se tiene la familia de curvas (1), para encontrar la familia de curvas (2), primero se encuentra la ecuación diferencial de la familia dada en (1) y despejamos  $y'$  obteniendo.

$$y' = F(x, y) \quad \dots (3)$$

Como la pendiente de las trayectorias ortogonales debe ser la inversa negativa de la pendiente (3) es decir:

$$y' = -\frac{1}{F(x, y)} \quad \dots (4)$$

Luego las trayectorias ortogonales de la familia dada se obtiene resolviendo la ecuación diferencial (4).

**a. Ejemplos**

- ① Encontrar las trayectorias ortogonales de todas las parábolas con vértice en el origen y foco sobre el eje X.

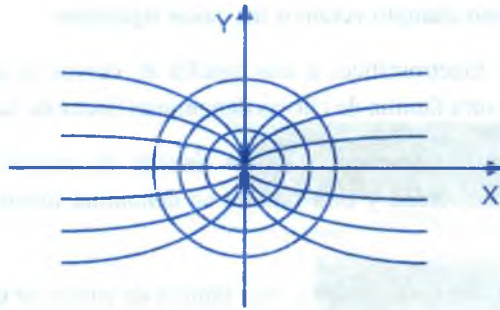
**Solución**

La ecuación de la familia de parábola es de la forma:  $y^2 = 4px$  ,  $p \neq 0$

$\frac{y^2}{x} = 4p$  diferenciando se tiene:  $\frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x dy - y dx = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$  y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales son:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$  de

donde  $2x dx + y dy = 0$  resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene  $x^2 + \frac{y^2}{2} = c$  ,  $c \neq 0$  luego las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas son las elipses de centro en el origen.

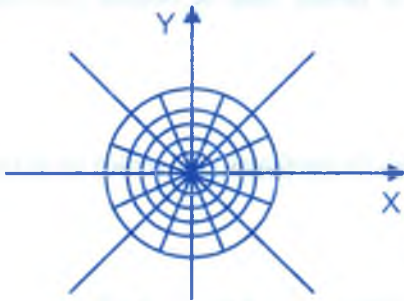


- ② Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias de centro en el origen de coordenadas.

**Solución**

La ecuación de la familia de circunferencias de centro en el origen es de la forma:  $x^2 + y^2 = c$ , su ecuación diferencial se obtiene diferenciando.

$$\text{se tiene } x dx + y dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  resolviendo esta ecuación

$$\text{se obtiene: } \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln kx \Rightarrow y = kx,$$

Luego las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias son la familia de rectas  $y = kx$ .

- ③ Encontrar las trayectorias ortogonales de todas las hipérbolas equiláteras de centro en el origen de coordenadas.

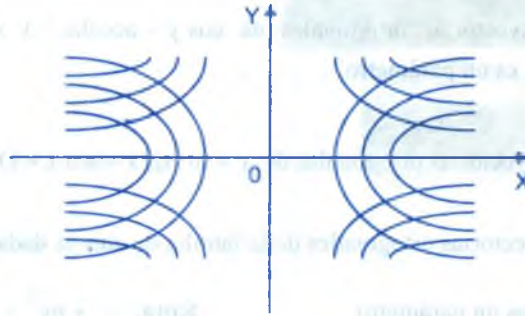
**Solución**

La ecuación que corresponde a una familia de hipérbolas es:  $x^2 - y^2 = c$ ,  $c \neq 0$ , su ecuación diferencial se obtiene diferenciando a la ecuación.  $x dx - y dy = 0$  de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \text{ y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = \ln k,$$

de donde  $\ln yx = \ln k \Rightarrow xy = k$  ecuación de la familia de las trayectorias ortogonales.



- 4) Encontrar las trayectorias ortogonales de las circunferencias que pasan por el origen con centro en el eje X.

**Solución**

La ecuación que corresponde a esta familia de circunferencias es:  $x^2 + y^2 = cx$ , su ecuación diferencial se obtiene diferenciando a la ecuación

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \text{ y la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es: } \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2} \text{ resolviendo esta ecuación}$$

$$2xydx - x^2dy = -y^2dy \Rightarrow \frac{2xydx - x^2dy}{y^2} = -dy \Rightarrow d\left(\frac{x^2}{y}\right) = -dy \text{ integrando se tiene}$$

$$\frac{x^2}{y} = -y + k \Rightarrow x^2 + y^2 = ky \text{ ecuación que corresponde a las trayectorias ortogonales que son circunferencias con centro en el eje Y.}$$

**b. EJERCICIOS PROPUESTOS.**

- 1) Encuétrase la trayectoria ortogonal que pase por (1,2) de la familia  $x^2 + 3y^2 = cy$

**Rpta:**  $y^2 = x^2(3x + 1)$

- 2) Encontrar las trayectorias ortogonales de  $ax^2 + y^2 = kx$  donde  $a$  es un parámetro fija y  $k$  es una constante. **Rpta:**  $y = c[(a-2)x^2 - y^2]$ ,  $a \neq 2$ ;  $ye^{y^2} = c$  para  $a = 2$
- 3) Encontrar las trayectorias ortogonales de  $\cos y - \operatorname{acosh} x = k \operatorname{senh} x$ , donde  $a$  es una constante fija y  $k$  es un parámetro.
- 4) Probar que las trayectorias ortogonales de  $y = \ln |\operatorname{tg}(x + \operatorname{sen} x + k)|$  es  $2 \operatorname{senh} x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = c$
- 5) Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dadas.
- a)  $y = ax^n$ ,  $a$  es un parámetro **Rpta:**  $x^2 + ny^2 = k$
- b)  $x^2 + \frac{y^2}{2} = a^2$  **Rpta:**  $y^2 = 2bx$
- c)  $x^2 - \frac{y^2}{3} = a^2$  **Rpta:**  $xy^3 = b$
- d)  $x^2 - xy + y^2 = c$  **Rpta:**  $x - y = k(x + y)^3$
- 6) Encontrar las trayectorias ortogonales, que pasan através del punto especificado, de cada una de las siguientes familias de curvas.
- a)  $y^2 = kx, (-2, 3)$  **Rpta:**  $2x^2 + y^2 = 17$
- b)  $y^2 = x^2 + ky, (1, -2)$  **Rpta:**  $x^3 + 3xy^2 = 13$
- c)  $y^2 = 2x + 1 + ke^{2x}, (0, e)$  **Rpta:**  $x = y^2[1 - \ln y]$
- 7) Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de elipses con centro en  $(0, 0)$  y dos vértices en  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  **Rpta:**  $x^2 + y^2 = 2 \operatorname{Ln}(kx)$
- 8) Encontrar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas.



a)  $(x-1)^2 + y^2 + kx = 0$

**Rpta:**  $x^2 + y^2 - 1 = cy$

b)  $x^2 = y^2 + ky^3$

**Rpta:**  $3x^2 + y^2 = cx$

c)  $y^2 = cx^3$

**Rpta:**  $2x^2 + 3y^2 = k^2$

d)  $e^x + e^{-y} = c$

**Rpta:**  $e^y - e^{-x} = k$

e)  $y = ce^{-x}$

**Rpta:**  $y = \sqrt{2x+k}$

f)  $y = \operatorname{tg} x + c$

**Rpta:**  $y = -\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k$

g)  $x^2 + 3y^2 = ky$

**Rpta:**  $y^2 - x^2 = cx^3$

h)  $y = k(\sec x + \operatorname{tg} x)$

**Rpta:**  $y^2 = 2(c - \operatorname{sen} x)$

- 9) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias que pasan por los puntos P(0,-3) y Q(0,0). Hacer la gráfica para ambas familias.

**Rpta:**  $\frac{x^2}{2y+3} + y - 3 \ln |2y+3| = c$

- 10) Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas  $y = x \operatorname{tg} \frac{1}{2}(y+k)$

**Rpta:**  $x^2 + y^2 = ce^x$

- 11) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas  $P^2 = k(P \operatorname{sen} \theta - 1)$

- 12) Encontrar la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$r = 4a \cos \theta \operatorname{tg} \theta$

**Rpta:**  $r^2 = \frac{b^2}{\cos^2 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta}$

- 13) La temperatura de una placa delgada está dada por  $T(x,y) = e^{-y} \cos x$ . Encontrar la ecuación de las líneas de flujo de calor.

**Rpta:**  $y = \ln |\operatorname{sen} x| + k$

- 14) Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencia que pasan por los puntos (0,0) y (2,0).

**Rpta:**  $x^2 + y^2 + k(1-x) = 0$

- 15) Hallar la ecuación de la familia de trayectoria ortogonales a todas las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y cuyo centro está en la recta  $y = x$ .  
**Rpta:**  $x^2 + y^2 = (y-x)k$
- 16) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisface la siguiente propiedad; la recta tangente a las curvas en cualquier punto P, es la bisectriz del ángulo determinado por la recta vertical que pasa por P y la recta que une P con el origen de coordenadas.  
**Rpta:**  $y = \frac{x^2 c}{2} + c$
- 17) Hallar el valor de "m" de modo que  $x^m + y^m + 25 = kx$  sea las trayectorias ortogonales de las circunferencias  $x^2 + y^2 - 2cy = 2c$  **Rpta:**  $m = 2$
- 18) Una familia de curvas goza de la siguiente propiedad: si por un punto cualquiera P(x,y), de cualquiera de las curvas que componen la familia, se traza la recta normal, el segmento de normal comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud constante de 4 unidades de longitud; se pide hallar la ecuación de la curva, que pasa por el punto (4,0) y es ortogonal a la familia de curva que se menciona.
- 19) Hallar la ecuación de la familia de trayectoria ortogonal a la familia de curvas, que cumple la propiedad "si por un punto cualquiera de las curvas de la familia, se trazan la recta tangente y normal a la curva, el área del triángulo formado por las rectas tangente y normal con el eje Y es igual a  $\frac{kx^2}{2}$  donde k es la ordenada del punto, en que la tangente intercepta al eje Y.
- 20) Demostrar que la familia de trayectorias de la familia  $(x-y)(2x+y)^2 = kx^6$  con una rotación de  $90^\circ$  en el origen está dado por  $(x+y)(x-2y)^2 = cy^6$ .
- 21) Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto P(2,1) y para la cual el área del triángulo que forman el eje X, la tangente a la curva en cualquiera de sus puntos y el radio vector de dicho punto es una constante e igual a  $ku^2$ .
- 22) Determinar una curva tal que si por un punto M de ella se traza la tangente  $\overline{MA}$  a la parábola  $y^2 = 2px$ , la tangente a la curva buscada es paralela a  $\overline{CA}$ .

- 23) Determinar una curva tal que si por un punto M de ella se traza la tangente  $\overline{MA}$  a la parábola  $y^2 = 2px$ , la tangente  $\overline{MT}$  a la curva buscada es paralela a  $\overline{OA}$ .
- 24) Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida por  $(x-1)^2 + y^2 + kx = 0$
- 25) Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia  $y = x \operatorname{tg} \frac{1}{2}(y+k)$
- 26) Hallar la curva que pasa por el punto (1,1) y corta a las parábolas semicúbicas  $y^2 = kx^3$
- 27) Encontrar las trayectorias ortogonales de  $y = \ln \operatorname{tg}(x + \operatorname{sen} x + k)$
- 28) Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencia que pasan por el origen y con centro en el eje Y.
- 29) Hallar las trayectorias ortogonales de la función de curvas  $C: 2ay^2 = x(x^2 + y^2)$  donde  $a > 0$  es una constante.
- 30) Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas  $y = 2ax^2 + 1$
- 31) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas  $x^2 - ay^2 = 1$
- 32) Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas  $(-a-x)y^2 = x^2(x-3a)$
- 33) Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisfacen la siguiente propiedad: "La recta tangente a una de la curva en un punto cualquiera P, es la bisectriz del ángulo determinado por la recta vertical que pasa por P y la recta que une P con el origen de coordenadas".
- 34) Hallar la ecuación de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisfacen la propiedad: "Si por un punto cualquiera P(x,y) de una de las curvas se trazan la recta tangente y la recta normal a ella, entonces el área del triángulo formado por la recta tangente, el eje X, y la recta normal es siempre igual a  $-\frac{y}{y'}$ ".

- 35 Una familia de curvas goza de la siguiente propiedad: "Si por un punto cualquiera  $P(x,y)$ , de cualquiera de las curvas que componen la familia, se traza la recta normal, el segmento de normas comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud e igual a 6 unidades". Se pide hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto  $(6,0)$  y es ortogonal a la familia de curvas que se menciona.

### 3.3. CAMBIO DE TEMPERATURA.-

La ley de enfriamiento de Newton establece, que la rapidez de cambio de temperatura de un cuerpo en cualquier tiempo  $t$ , es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio circundante en el tiempo  $t$ . Consideremos a  $T$  la temperatura del cuerpo en el tiempo  $t$  y a  $T_m$  la temperatura del medio circundante y a  $T_0$  temperatura inicial del cuerpo ( $t = 0$ ).

Como la variación de la temperatura puede ser que aumente o disminuya.

Luego de acuerdo a la Ley de enfriamiento de Newton se expresa mediante la ecuación diferencial.

$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$  ó  $\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m)$  ya sea que aumente o disminuya, donde  $k$  es el factor de proporcionalidad.

Si  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \Rightarrow \frac{dT}{dt} + kT = kT_m$  que es una ecuación diferencial lineal de primer orden y su solución es:  $T = e^{-kt} \left[ \int e^{kt} \cdot kT_m dt + c \right]$  de donde  $T = T_m + Ae^{-kt}$

además se debe cumplir que para  $t = 0$ ,  $T = T_0$ . Luego  $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$

### 3.4. DESCOMPOSICIÓN, CRECIMIENTO Y REACCIONES QUÍMICAS.-

La rapidez de descomposición de una sustancia radiactiva en un tiempo particular  $t$  es proporcional a la cantidad presente en ese tiempo.



La rapidez de crecimiento del número de bacterias en una solución es proporcional al número de bacterias presente. Si  $S$  representa la masa de una sustancia radiactiva presente en el tiempo  $t$ , o el número de bacterias presente en una solución en el tiempo  $t$ , entonces la Ley de descomposición y de crecimiento, esta expresado por  $\frac{dS}{dt} = -KS$  para la descomposición y  $\frac{dS}{dt} = KS$  para el crecimiento, en donde  $K$  es un factor de proporcionalidad.

Como  $\frac{dS}{dt} = KS$ , las variables  $s$  y  $t$  son separables. Luego:  $\frac{dS}{S} = kdt$ , integrando

$\ln(s) = kt + c \Rightarrow S = Ae^{kt}$  que es la solución general. Si  $S_0$  representa a la cantidad inicial es decir:  $S = S_0$ , cuando  $t = 0$ ,  $S_0 = A$

### Problemas Resueltos

- ① Según la Ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia en la temperatura  $T$  del cuerpo y la temperatura  $T_m$  del aire. Si la temperatura del aire es de  $20^\circ\text{C}$  y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde  $100^\circ\text{C}$  a  $60^\circ\text{C}$ . ¿En cuanto tiempo su temperatura descenderá hasta  $30^\circ\text{C}$ ?

### Solución

Sean  $T$  = temperatura del cuerpo ;  $T_m$  = Temperatura del aire =  $20^\circ\text{C}$

$T_0$  = Temperatura inicial

La descripción matemática es:  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$

y la solución de acuerdo a lo descrito es:  $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$

para  $t = 20$ ,  $T = T_0 = 60^\circ\text{C}$  Entonces:

$$60 = 20 + (100 - 20)e^{-20k} \Rightarrow 40 = 80e^{-20k} \Rightarrow K = +\frac{\ln 2}{20}$$



$$\text{por lo tanto} \quad T = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t} \Rightarrow T = 20 + 80e^{\ln 2 \frac{t}{20}} \Rightarrow T = 20 + 80.2^{\frac{t}{20}}$$

$$\text{para } t = ? \quad T = 30^\circ \text{C}$$

$$30 = 20 + 80.2^{-t/20}$$

$$\frac{1}{8} = 2^{-\frac{t}{20}}$$

$$2^{-3} = 2^{-\frac{t}{20}}$$

$$t = 60'$$

- ② Determinar el camino  $S$  recorrido por un cuerpo durante el tiempo  $t$ . Si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 seg. el cuerpo recorre 100 mts. y en 15 segs. 200 mts.

### Solución

Sean  $S$  = el camino recorrido ;  $t$  = tiempo en segundos ;  $V = \frac{ds}{dt}$  = velocidad del cuerpo

La descripción matemática es:  $\frac{ds}{dt} = ks$

La solución de la ecuación diferencial es:  $S = Ae^{kt}$ , para  $t = 10$  seg.  $S = 100$  mts.

$$\text{reemplazando se tiene: } 100 = Ae^{10k} \Rightarrow A = \frac{100}{10K} \quad \dots (1)$$

$$\text{para } t = 15 \text{ seg. } S = 200 \text{ mts., reemplazando se tiene: } 200 = Ae^{15k} \Rightarrow A = \frac{200}{e^{15k}} \quad \dots (2)$$

igualando (1) y (2) se tiene:  $K = \frac{\ln(2)}{5}$ , reemplazando en (1) o en (2) se tiene:  $A = 25$ .

Luego el camino recorrido es:  $S = 25.2^{\frac{t}{5}}$

- ③ Cierta cantidad de una sustancia insoluble que contiene en sus poros 2 Kgr. de sal se somete a la acción de 30 litros de agua. Después de 5 minutos se disuelve 1 Kgr. de sal. Dentro de cuanto tiempo se disolverá el 99% de la cantidad inicial de sal?

### Solución

Sea  $S$  = cantidad de sal por disolverse

La descripción matemática es:  $\frac{ds}{dt} = ks$ ,  $k$  factor de proporcionalidad

La solución de la ecuación diferencial es:

$S = Ae^{kt}$ , determinaremos  $A$ . para  $t = 0$ ,  $s = 2$  kgr.  $\Rightarrow A = 2$

Luego  $S = 2e^{kt}$ , determinaremos  $k$ , para  $t = 5$  min.  $s = 1$  kgr.  $\Rightarrow k = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

por lo tanto  $S = 2e^{5k \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow S = 2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

para determinar  $t$ , se tiene que buscar el 99% de  $s$  es decir:  $S = 1.98$  kgr.

entonces:  $1.98 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow 0.99 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ . Luego:  $t = \frac{5 \ln(0.99)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$  min.

- 4 Un termómetro que marca  $18^\circ\text{F}$ , se lleva a un cuarto cuya temperatura es de  $70^\circ\text{F}$ , un minuto después la lectura del termómetro es de  $31^\circ\text{F}$ . Determinése las temperaturas medidas como una función del tiempo y en particular encontrar la temperatura que marca el termómetro cinco minutos después que se lleva al cuarto.

#### Solución

Sean  $T$  = temperatura del cuerpo ;  $T_m$  = temperatura del cuarto =  $70^\circ\text{F}$

La descripción matemática es:  $\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$ ,  $K$  es el factor de proporcionalidad. La

solución de la ecuación diferencial es:  $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$  para determinar  $k$  se tiene:

$t = 1$  min.,  $T = 31^\circ$ ,  $T_m = 70^\circ\text{F}$

Luego  $31 = 70 + (18 - 70)e^k \Rightarrow e^k = \frac{39}{52}$  de donde  $k = \ln\left(\frac{39}{52}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

por lo tanto:  $T = 70 - 52e^{t \ln(\frac{3}{4})}$

para  $t = 5$  min.  $T = ?$  se tiene:  $T = 70 - 52(\frac{3}{4})^5 \approx 58^\circ F$ ,  $\therefore T \approx 58^\circ F$

5

A la 1 p.m. un termómetro que marca  $70^\circ F$ , es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de  $-10^\circ F$  a las 1.02 p.m. la temperatura es de  $26^\circ F$  a las 1.05 p.m. el termómetro se lleva nuevamente adentro donde el aire está  $70^\circ F$ , ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 1.09 p.m.?

### Solución

Sean  $T =$  temperatura del cuerpo ;  $T_m =$  temperatura del aire  $= -10^\circ F$

La descripción matemática es:  $\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$ ,  $k$  el factor de proporcionalidad

La solución de la ecuación diferencial es:  $T = T_m + Ae^{kt}$  para  $t = 0$ ,  $T = T_0$  se tiene:

$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$  esto es a la 1p.m. y a la 1.02 p.m.  $t = 2$ ,  $t = 26^\circ F$

$$26 = -10 + 80e^{2k} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{9}{20}\right)$$

Luego  $T = -10 + 80e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln(\frac{9}{20})}$  es decir  $T = -10 + 80\left(\frac{9}{20}\right)^{\frac{t}{2}}$

a la 1.05 p.m.,  $t = 5$  min. se tiene:  $T = -10 + 80\left(\frac{9}{20}\right)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow T = 0.88^\circ F$

6

Supóngase que una reacción química se desarrolla con la ley de descomposición si la mitad de la sustancia A ha sido convertida al finalizar 10 seg. Encuéntrese en cuánto tiempo se transforma nueve décimos de la sustancia.

### Solución

Sea  $x =$  cantidad de la sustancia A

La descripción matemática es:  $\frac{dx}{dt} = -kx$

La solución de la ecuación diferencial es:  $x = Be^{kt}$ , determinaremos B.

para  $t = 0$ ,  $x = x_0 \Rightarrow B = x_0 \Rightarrow x = x_0 e^{-kt}$

Determinaremos k, para esto se tiene:  $t = 10$  seg.  $x = \frac{x_0}{2}$ . Entonces:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-10k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-10k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{10}$$

Es decir,  $x = x_0 e^{-\frac{t}{10} \ln(2)}$ , ahora para  $t = ?$ ,  $x = \frac{9x_0}{10}$

$$\text{entonces: } \frac{9x_0}{10} = x_0 e^{-\frac{t}{10} \ln(2)} \Rightarrow \frac{9}{10} = 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\ln \frac{9}{10} = -\frac{t}{10} \ln(2) \Rightarrow t = -\frac{10 \ln(\frac{9}{10})}{\ln(2)} \approx 33 \text{ seg.} \quad \text{Luego: } t = 33 \text{ seg.}$$

- 7) La conversión de una sustancia B sigue la Ley de descomposición. Si sólo una cuarta parte de la sustancia ha sido convertida después de diez segundos. Encuéntrese cuanto tardan en convertir  $\frac{9}{10}$  de la sustancia.

**Solución**

Sea  $x$  = cantidad de sustancia B. Según los datos del problema se tiene:

x	$x_0$	$\frac{3x_0}{4}$	$\frac{x_0}{10}$
1	0	10	t

La descripción matemática es:  $\frac{dx}{dt} = -kx$ , k factor de proporcionalidad

La solución es:  $\int_{\frac{x_0}{10}}^{\frac{3x_0}{4}} \frac{dx}{x} = -x_0 \int_0^{t_0} dt \Rightarrow k = -\frac{1}{10} \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$$\int_{x_0}^{10} \frac{dx}{x} = -k \int_0^{t_0} dt \Rightarrow t = \frac{10 \ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = 80 \text{seg.} \quad \therefore t = 80 \text{ seg.}$$

- 8) Una cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 38 horas. Encontrar que tanto tiempo toma el 90% de la radiactividad para disiparse.

**Solución**

Sea  $x$  = cantidad de la sustancia radiactiva. Según los datos del problema se tiene:

$x$	$x_0$	$\frac{x_0}{2}$	$\frac{9x_0}{10}$
$t$	0	38	$t$

La descripción matemática es:  $\frac{dx}{dt} = -kx$ ,  $k$  factor de proporcionalidad

La solución es:  $\int_{x_0}^{\frac{x_0}{2}} \frac{dx}{x} = -k \int_0^{38} dt \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{38}$

$$\int_{x_0}^{\frac{9x_0}{10}} \frac{dx}{x} = -\frac{\ln(2)}{38} \int_0^t dt \Rightarrow t = -\frac{38 \ln\left(\frac{9}{10}\right)}{\ln(2)} \quad \therefore t = 126 \text{ años}$$

- 9) Una población bacteriana  $B$  se sabe que tiene una tasa de crecimiento proporcional a  $B$  misma, si entre el medio día y las 2 p.m. la población se triplica. A que tiempo, si no se efectúa ningún control,  $B$  será 100 veces mayor que el medio día?

**Solución**

Sea  $x$  = cantidad de la población bacteriana  $B$ . Según datos del problema se tiene:

$x$	$x_0$	$3x_0$	$100x_0$
$t$	0	2	$t$



La descripción matemática es:  $\frac{dx}{dt} = kx$ ,  $k$  factor de proporcionalidad.

La solución de la ecuación es:  $\int_{x_0}^{3x_0} \frac{dx}{x} = k \int_0^2 dt \Rightarrow k = \frac{\ln(3)}{2}$

$$\int_{x_0}^{100x_0} \frac{dx}{x} = \frac{\ln 3}{2} \int_0^t dt \Rightarrow t = \frac{2 \ln(100)}{\ln(3)} \approx 8.38 \text{ hrs.} \quad \therefore t = 8.38 \text{ horas.}$$

- 10 Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a su cantidad de material presente. Un bloque de ese material tiene originalmente una masa de 100 gr. y cuando se le observa después de 20 años, su masa ha disminuido a 80 grs. Encuentre una expresión para la masa de ese material como función del tiempo. Encuentre también la vida media del material.

**Solución**

Sea  $x(t)$  = cantidad de sustancia radiactiva en cualquier  $t$  la descripción matemática es:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t)$$

Resolviendo la ecuación se tiene:  $x(t) = Ae^{-kt}$  determinaremos la constante  $A$ , para esto se tiene:

Para  $t = 0$ ,  $x(t) = 100$  gr.  $\Rightarrow A = 100$ , Luego reemplazando se tiene:  $x(t) = 100e^{-kt}$

determinaremos la constante  $k$ , para esto se tiene:

para  $t = 20$  años,  $x(20) = 80$  entonces:  $80 = 100e^{-20k} \Rightarrow k = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{5}{4}\right)$

Luego  $x(t) = 100 \exp\left[-\frac{t}{20} \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right]$

- 11 Un isótopo radiactivo del carbono, conocido como carbono 14 obedece a la Ley del decaimiento radiactivo  $\frac{dQ(t)}{dt} = -KQ$ , donde  $Q(t)$  denota la cantidad de carbono 14 presente en el tiempo  $t$ .

- a) Determinése  $K$ , si la vida media del carbono 14 es de 5568 años.
- b) Si  $Q_0$  representa la cantidad de carbono 14, presente al tiempo  $t = 0$ . Encuentre una expresión para  $Q$  como función del tiempo.
- c) En años recientes se ha hecho posible hacer medidas que conducen a conocer la razón  $\frac{Q(t)}{Q_0}$  para algunos restos de maderas y plantas que contienen cantidades residuales de carbono 14. Los resultados de a, y b, pueden usarse entonces para determinar el tiempo pasado desde la muerte de estos restos, esto es, el período durante el cual ha tenido lugar el decaimiento. Encuentre una expresión para  $t$  en términos de  $Q$ ,  $Q_0$  y  $K$ . Encuéntrese el intervalo desde que principió el decaimiento, si el valor actual de  $\frac{Q}{Q_0}$  es 0.20.

### Solución

El carbono 14, obedece a la Ley de decaimiento radiactivo.

$\frac{dQ(t)}{dt} = KQ(t)$  y la solución de esta ecuación

es:  $Q(t) = ce^{kt}$  de donde para  $t = 0$ ,  $Q(0) = Q_0$

$c = Q_0$  Luego  $Q(t) = Q_0 e^{kt}$

- a) Determinaremos  $k$ , para esto se tiene que:

La vida media del carbono es 5,568 años es decir:

para  $t = 5,568$   $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$  entonces:  $\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{5,568k}$

$$k = \frac{\ln(2)}{5,568} \approx -1,245 \times 10^{-4} \Rightarrow k = -1,245 \times 10^{-4}$$

- b) Hallaremos  $Q$  como función del tiempo.

Q(t)	Q <sub>0</sub>
t	0

de la parte (a), se tiene:  $Q(t) = Q_0 e^{KT}$  ó  $Q(t) = Q_0 e^{\frac{t \ln(2)}{5.568}} \Rightarrow Q(t) \approx Q_0^{-(1.245 \times 10^{-4})t}$

c) Hallaremos una expresión para t en términos de: Q, Q<sub>0</sub> y K

de la parte b) se tiene  $Q = Q_0 e^{\frac{t \ln(2)}{5.568}}$

$$\ln(Q) = \ln(Q_0) - \frac{t}{5.568} \ln(2) \Rightarrow \frac{t \ln(2)}{5.568} = \ln \frac{Q_0}{Q} \Rightarrow t = \frac{5.568}{\ln(2)} \ln \left( \frac{Q_0}{Q} \right)$$

$$t = -\frac{5.568}{\ln(2)} \ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) = -\frac{5.568}{\ln(2)} \ln(0.20) \text{ de donde } t = \frac{5.568}{\ln(2)} \ln(5) = 12,930 \text{ años}$$

**“Isótopo.-** Cuerpo que tiene igual número atómico y ocupa el mismo lugar que otro en la tabla periódica de los elementos, pero que se distinguen de aquel por la diferente constitución y peso de sus átomos”.

- 12) Un cuerpo cuya temperatura es de 30°C requiere de 2 minutos, para descender su temperatura a 20°C, si es colocado en un medio refrigerante con temperatura constante de 10°C. Cuanto tiempo tardará el mismo cuerpo para bajar su temperatura de 40°C a 35°C, si ahora el medio está a la temperatura constante de 15°C?

### Solución

Llamemos: T = Temperatura del cuerpo en el instante t.

T<sub>m</sub> = Temperatura del medio exterior (refrigerante)

T<sub>0</sub> = Temperatura inicial del cuerpo (t = 0)

Suponiendo que se cumpla la Ley de Newton, para el intercambio de temperaturas, entonces:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m) \text{ donde K es el factor de proporcionalidad.}$$

La solución para la ecuación diferencial es:  $T = T_m + ce^{-kt}$

determinaremos c, para esto se tiene: para  $t = 0$ ,  $T = T_0$ ,  $C = T_0 - T_m$

por lo tanto:  $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$  determinaremos k, para esto se tiene:

$t = 2$  min.  $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_m = 10^\circ\text{C}$  de donde  $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$

$20 = 10 + (30 - 10)e^{-2k}$ , que al despejar k se tiene:  $k \approx 0.348$

por lo tanto:  $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-0.348t}$

de donde al despejar t se tiene:  $t \approx 0.64$  minutos.

13

Una sustancia radiactiva A se descompone dando lugar a una sustancia radiactiva B, la que a su vez se desintegra para dar un producto estable C, según el esquema siguiente:



En el instante  $t = 0$ , se tiene 10 mgrs. de A, mientras que B y C no se tiene cantidad alguna. La vida media (es decir el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad original de sustancia se reduzca a la mitad) de A es de 2 horas, mientras que la de B es 1 hora, ¿Cuál es el valor de B y C después de 2 horas?

#### Solución

Llamemos  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  a las cantidades de sustancias radiactivas de A, B y C respectivamente en el instante t.

Entonces la ecuación diferencial que gobierna a:  $m_1$  es:  $\frac{dm_1}{dt} = -K_1 m_1 \quad \dots (1)$

cuya solución es conocida:  $m_1 = m_0 \cdot e^{-K_1 t} \quad \dots (2)$

siendo  $K_1 = \frac{\ln(2)}{T}$  con  $T = 2$  horas es la vida media y  $m_0 = 10$  mgrs. es la cantidad

inicial de A. Para la sustancia B, la ecuación es:  $\frac{dm_2}{dt} = -K_2 m_2 + K_1 m_1 \quad \dots (3)$

y para la sustancia C es:  $\frac{dm_3}{dt} = K_2 m_2$  ... (4)

estas ecuaciones se resuelven del modo siguiente: de (2) en (3) se tiene:

$$\frac{dm_2}{dt} + K_2 m_2 = K_1 m_{01} e^{-k_1 t}$$

y la solución de esta ecuación es:  $m_2 = \frac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + c e^{-k_2 t}$ , c constante de integración

usando las condiciones iniciales de que en  $t = 0$ ,  $m_2 = 0 \Rightarrow c = -\frac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1}$

por lo tanto:  $m_2 = \frac{k_1 m_{01}}{k_2 - k_1} [e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}]$  ... (5)

ahora de (5) en (4) se tiene:  $\frac{dm_3}{dt} = \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1} [e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}]$

integrando directamente, usando la condición inicial de que en  $t = 0$ ,  $m_3 = 0$  se tiene:

$$m_3 = m_{01} \cdot \left[ 1 - \frac{k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1} \right] \dots (6)$$

finalmente podemos reemplazar valores numéricos en:

(5) y (6) con  $k_1 = \frac{\ln(2)}{\tau_1} = \frac{\ln(2)}{2}$  y  $k_2 = \frac{\ln(2)}{\tau_2} = \ln(2)$  y  $m_{01} = 10$  mgrs.

obteniéndose:  $m_2 = 2.5$  mgrs.;  $m_3 = 2.5$  mgrs. y también de (2),  $m_1 = 5$  mgrs.

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- 1) Supongamos que la razón a que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del aire que lo rodea un cuerpo originalmente a  $120^\circ\text{F}$  se enfría hasta  $100^\circ\text{F}$  en 10 minutos en aire a  $60^\circ\text{F}$ . Encontrar una expresión para la

temperatura del cuerpo en un instante cualquiera t. **Rpta:**  $T = 60 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}} \forall t$



- ② Para una sustancia C, la velocidad de variación con el tiempo es proporcional al cuadrado de la cantidad X de sustancia no convertida. Sea k el valor numérico de la cantidad de sustancia no convertida en el tiempo  $t = 0$ . Determinar X,  $\forall t \geq 0$

$$\text{Rpta: } X = \frac{x_0}{1 + x_0 kt} \quad \forall t \geq 0$$

- ③ Un químico desea enfriar desde  $80^\circ\text{C}$  hasta  $60^\circ\text{C}$  una sustancia contenido en un matraz se coloca el dispositivo en un recipiente amplio por el que circula agua a  $15^\circ\text{C}$ . Se observa que después de 2 minutos la temperatura ha descendido a  $70^\circ\text{C}$ . Estimar el tiempo total de enfriamiento. **Rpta:**  $t = 4.45$  minutos.

- ④ Un termómetro que marca  $75^\circ\text{F}$  se lleva fuera donde la temperatura es de  $20^\circ\text{F}$ . Cuatro minutos después el termómetro marca  $30^\circ\text{F}$ . Encontrar:

- a) La lectura del termómetro siete minutos después de que este ha sido llevado al exterior y,  
 b) El tiempo que le toma el termómetro caer desde  $75^\circ\text{F}$  hasta más o menos medio grado con respecto a la temperatura del aire. **Rpta:**  $T = 23^\circ$ ,  $t = 11$  minutos.

- ⑤ Dentro de cuanto tiempo la temperatura de un cuerpo calentado hasta  $100^\circ\text{C}$  descenderá hasta  $30^\circ\text{C}$ . Si la temperatura del local es de  $20^\circ\text{C}$  y durante los primeros 20 minutos el cuerpo en cuestión se enfría hasta  $60^\circ\text{C}$ . **Rpta:**  $t = 60$  minutos.

- ⑥ Si el 45% de una sustancia radiactiva se desintegra en 200 años. ¿Cuál es su vida media? En cuanto tiempo se desintegrará 60% de la cantidad original? **Rpta:**  $t = 319.4$  años

- ⑦ Se tienen dos recipientes con soluciones a temperaturas constantes, la primera a  $30^\circ\text{C}$  y la segunda a  $25^\circ\text{C}$  un termómetro que marca la temperatura de la primera solución es puesto en contacto con la segunda, cuatro minutos después marca  $27^\circ\text{C}$  más adelante el termómetro es puesto nuevamente en contacto con la primera solución, 10 minutos después del comienzo del experimento el termómetro indica  $28^\circ\text{C}$ , ¿Cuándo fue llevado el termómetro del segundo al primer recipiente? **Rpta:**  $t = 4.73$  minutos.

- ⑧ Un cierto material radiactivo tiene una vida media de dos horas. Encuentre el intervalo de tiempo requerido para que una cantidad dada de este material decaiga hasta un décimo de su masa original. **Rpta:**  $t = \frac{2 \ln(10)}{\ln(2)}$  horas

- 9) Suponer que una gota de lluvia esférica se evapora a una velocidad proporcional a su área superficial. Si originalmente el radio es de 3 mm., 1 hora después se ha reducido a 2 mm. Encontrar una expresión para el radio de la gota como función del tiempo.  
**Rpta:**  $r = 3 - t$  mm,  $0 < t < 3$
- 10) El azúcar se disuelve en el agua con una rapidez proporcional a la cantidad que queda sin diluir. Si 30 lbs. de azúcar se reduce a 10 lbs. en 4 horas. ¿En cuánto tiempo se habrá diluido el 95% del azúcar?  
**Rpta:**  $t = \frac{4 \ln(20)}{\ln(3)}$
- 11) El radiactivo tiene una vida promedio de 5600 años aproximadamente. ¿En cuántos años desciende el 20% de su cantidad original? ¿Al 10%?  
**Rpta:**  $t = \frac{-5600 \ln(0.20)}{\ln(2)}$
- 12) El radio se descompone con una velocidad proporcional a la cantidad de radio presente. Supóngase que se descubre que en 25 años aproximadamente 1.1% de una cierta cantidad de radio se ha descompuesto. Determinése aproximadamente que tanto tiempo tomará el radio para que se descomponga la mitad de la cantidad original. **Rpta:** 1,566.7 años
- 13) Dos sustancias A y B se convierten en un sólo compuesto C, en el laboratorio se ha mostrado que para estas sustancias se cumple la siguiente ley de conversión. La velocidad de variación con el tiempo de la cantidad  $x$  del compuesto C es proporcional al producto de las cantidades de las sustancias no convertidas A y B, supóngase que las unidades de medida se eligen de tal forma que una unidad del compuesto C está formado de la combinación de una unidad A con una unidad B. Si el tiempo  $t = 0$ , hay "a" unidades de sustancia A, "b", unidades de sustancia B y ninguna del compuesto C presente. Muéstrase que la ley de conversión puede expresarse con la ecuación  $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$  resolver esta ecuación con la condición inicial dada. **Rpta:**  $x = \frac{ab[\exp(a-b)kt - 1]}{b \exp(a-b)kt - a}$ ,  $a \neq b$
- 14) Cierta cantidad de sustancia, que contenía 3 kgrs. de humedad, se colocó en una habitación de  $100\text{m}^3$  de volumen donde el aire tenía al principio el 25% de humedad. El aire saturada, a esta temperatura, contiene 0.12 kgr. de humedad por  $1\text{m}^3$ , si durante el primer día la sustancia perdió la mitad de su humedad. ¿Qué cantidad de humedad quedará al finalizar el segundo día?  
**Rpta:** 0.82kg. *Sug.*  $\frac{ds}{dt} = ks(s+6)$

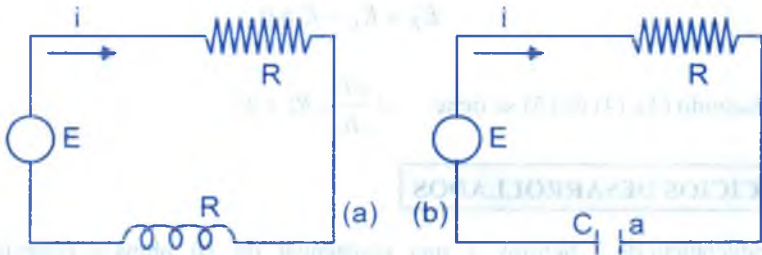
- 15) La salmuera de un primer recipiente pasa a otro, a razón de 2 decalitros/min., y la salmuera del segundo recipiente pasa al primero a razón de 1 decalitro/min. En un principio hay 1 hectolitro de salmuera, conteniendo 20 kgrs. de sal, en el primer recipiente, y 1 hectolitro de agua en el segundo recipiente. Cuanta sal contendrá el primer recipiente al cabo de 5 minutos. Se supone que en todo momento es homogénea la mezcla de sal y agua en cada recipiente. **Rpta:**  $6\frac{2}{3}$  kgr.
- 16) Salmuera que contiene 2 kgr. de sal por decalitro entre un primer tanque a razón de 2 decalitros/min. del primer tanque pasa la salmuera a un segundo tanque a razón de 3 decalitros/min., y sale de éste segundo tanque a razón de 3 decalitros/min. En un principio, el primer tanque contiene 1 hectolitro de salmuera con 30 kgrs. de sal, y el segundo tanque contiene 1 hectolitro de agua pura. Suponiendo las soluciones homogéneas en cada tanque. Hallar la cantidad de sal en el segundo tanque al cabo de 5 minutos. **Rpta:** 19.38 kgr.
- 17) Se ha descubierto que una bola de naftalina que tenía originalmente un radio de  $\frac{1}{4}$  de pulgadas, tiene un radio de  $\frac{1}{8}$  de pulgada al cabo de un mes. Suponiendo que se evapora a un índice proporcional a su superficie. Encuéntrese el radio en función del tiempo; después de cuántos meses más desaparecerá por completo. **Rpta:**  $r = (2 - t) 8$  después de 1 mes más.
- 18) El Presidente y el primer Ministro piden café y reciben tazas a igual temperatura y al mismo tiempo. El Presidente agrega inmediatamente una pequeña cantidad de crema fría; pero no se toma café hasta 10 min. después. El primer Ministro espera 10 min. y, luego añade la misma cantidad de crema fría y comienza a tomarse su café. ¿Quién tomará el café más caliente? **Rpta:** El Presidente.
- 19) Supongamos que un elemento radiactivo dado A, se descompone en un segundo elemento B y que, a su vez B se descompone en un tercer elemento, C. Si la cantidad de A presente inicialmente es de  $X_0$ , si las cantidades de A y B presentes en un momento posterior son X y Y respectivamente y si  $K_1$ ,  $K_2$  son las constantes de rapidez de esas dos reacciones. Encuéntrese y en función de t. **Rpta:**  $S: K_1 \neq K_2 y = \frac{K_1 t_0}{K_2 - K_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$



- 20) Se desea enfriar una solución contenida en un matraz y que está a  $90^{\circ}$  C. Se coloca el dispositivo en un recipiente amplio por el que circula agua a  $18^{\circ}$  C y se observa que después de 2 min. la temperatura desciende  $10^{\circ}$  C. Halle el tiempo total de enfriamiento.
- 21) Se mezclan "a" grs. de sustancia A y "b" grs. de sustancia B para formar el compuesto X con m partes en peso de A y n partes de B. Encontrar la cantidad de X formado durante el tiempo t.

### 3.5. APLICACIONES A LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS SIMPLES.-

Consideremos circuitos eléctricos simples compuestos de un resistor y un inductor o condensador en serie con una fuente de fuerza electromotriz (f.e.m.), a estos circuitos mostraremos en la figura a) y b) y su funcionamiento es simple de entender.



Ahora estableceremos las relaciones siguientes.

- 1° Una fuerza electromotriz (f.e.m) E (Volts) producido casi siempre por una batería o un generador, hace fluir una carga eléctrica Q (coulombios) y produce una corriente I (Amperios). La corriente se define como la rapidez de flujo de la carga Q y puede escribirse:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \dots (1)$$

- 2° Un resistor de resistencia R (ohms) es una componente del circuito que se opone a la corriente y disipa energía en forma de calor. Produce una caída de voltaje que está dada por la ley de ohm.  $E_R = RI$  ... (2)

- 3° Un inductor de inductancia L (henrios) se opone a cualquier cambio en la corriente produciendo una caída de voltaje de:  $E_L = L \frac{dI}{dt}$  ... (3)

- 4° Un condensador de capacitancia  $C$  (faradios) acumula o carga. Al hacerlo se resiste al flujo adicional de carga, produciendo una caída de voltaje de:  $E_c = \frac{Q}{c}$  ... (4)

Las cantidades  $R$ ,  $L$  y  $C$  son generalmente constantes dependientes de los componentes específicos del circuito;  $E$  puede ser constante o una función del tiempo. El principio fundamental que gobierna estos circuitos es la ley de los voltajes de Kirchoff. "La suma algebraica de todas las caídas de voltaje alrededor de un circuito cerrado es cero".

En el circuito de la figura (a), el resistor y el inductor produce caídas de voltaje  $E_R$  y  $E_L$ , respectivamente, pero la f.e.m. produce un aumento de voltaje  $E$ . (es decir, una caída de voltaje de  $-E$ ). Entonces la ley de los voltajes de Kirchoff da:

$$E_R + E_L - E = 0 \quad \dots (5)$$

reemplazando (3), (4) en (5) se tiene:  $L \frac{dI}{dt} + RI = E$

### EJERCICIOS DESARROLLADOS

- 1 Una inductancia de 2 henrios y una resistencia de 10 ohms se conecta en serie con una f.e.m. de 100 volts, si la corriente es cero cuando  $t = 0$ . ¿Cuál es la corriente después de 0.1 seg?

#### Solución

Como  $L = 2$ ,  $R = 10$  y  $E = 100$  entonces la ecuación que gobierna es:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \quad \text{reemplazando tenemos: } 2 \frac{dI}{dt} + 10I = 100 \quad \text{simplificando}$$

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 50 \quad \text{ecuación lineal en } I.$$

$$I(t) = e^{-5 \int dt} \left[ \int e^{5t} 50 dt + c \right] = e^{-5t} \left[ 50e^{5t} dt + c \right]$$

$$I(t) = e^{-5t} [10e^{5t} + c] \Rightarrow I_{(t)} = 10 + c \cdot e^{-5t} \quad \text{Como } I(0) = 0$$



$$0 = 10 + c \Rightarrow c = -10$$

$$\therefore I(t) = 10(1 - e^{-5t})$$

ahora para  $t = 0.1 \Rightarrow I(0.1) = 10(1 - e^{-0.5}) = 3.93$  amp.

② Un circuito en serie consiste de una resistencia de 120 ohms. y una inductancia de  $\frac{6}{\pi}$  henrios un generador de cc. de 220 voltios, se encuentra en serie con un generador de c.a. de 220 voltios (frecuencia de 60 ciclos) y de combinación conectada a un circuito por medio de un interruptor. Encontrar:

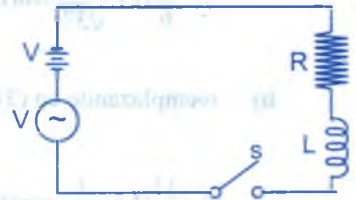
- La corriente en el tiempo  $t$  después que se ha cerrado el interruptor.
- La corriente después de  $\frac{1}{20\pi}$  seg.
- La corriente en estado permanente (o estacionaria)
- El voltaje en la inductancia y el voltaje en la resistencia cuando  $t = \frac{1}{20\pi}$  seg.

**Solución**

Datos:  $V_0 = 220$  voltios ;  $V = V_0 \text{ sen } \omega t = 220 \text{ sen } \omega t$

$$W = 2\pi f = 120 \text{ rad/seg. ; } R = 120 \text{ ohms.}$$

$$L = \frac{6}{\pi} \text{ henrios}$$



a) La ecuación que gobierna la corriente en el circuito al cerrar el interruptor S, es dado por la segunda Ley de Kirchoff.

$$L \frac{di}{dt} + R = V_0 + V = V_0(1 + \text{sen } \omega t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_0}{L}(1 + \text{sen } \omega t) \quad \dots (1)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$i = V_0 \left[ \frac{1}{R} + \frac{R \text{ sen } \omega t - L \omega \text{ cos } \omega t}{R^2 + L^2 \omega^2} \right] + c e^{-\frac{R}{L} t} \quad \dots (2)$$

aplicamos ahora la condición inicial, evidente de que para  $t = 0 \Rightarrow i = 0$

$$c = V_0 \left[ \frac{1}{R} - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \right] \text{ y reemplazando en (2)}$$

$$i = \frac{V_0}{R} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2}} \left[ \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \operatorname{sen} \omega t - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \cos \omega t \right] + V_0 \left( \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} - 1 \right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

definimos el ángulo  $\theta$  del modo siguiente:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{L\omega}{R}, \quad \cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$\text{entonces: } i = \left( \frac{V_0}{R} \right) + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \theta) + V_0 \left( \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} - \frac{1}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad \dots (3)$$

que es la solución final.

Reemplazando los valores numéricos dados, en (3)

$$i = \frac{11}{6} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{37}} \operatorname{sen}(120\pi t - \operatorname{arctg} 6) \right] \frac{31}{37} e^{-20\pi t} \quad \dots (4)$$

b) reemplazando en (3)  $t = \frac{1}{20\pi}$  seg.

$$i = \frac{11}{6} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{37}} \operatorname{sen}(6 - \operatorname{arctg} 6) \right] \frac{31}{37} e^{-1} \approx 0.969 \text{ amp.}$$

observe que el argumento de la serie es dado en radianes

c) La corriente permanente (o estacionaria) corresponde a  $t$  muy grande, entonces  $e^{-20\pi t}$  y por lo tanto la ecuación (4) se reduce.

$$i = \frac{11}{6} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{37}} \operatorname{sen}(120\pi t - \operatorname{arctg} 6) \right]$$

d)  $V_R = iR = 0.969 \times 120 \approx 116.3$  voltios.

$$V_L = L \frac{di}{dt} = \frac{220}{\sqrt{37}} \left[ 6 \cos(120\pi t - \text{arc. tg } 6) + \frac{31}{\sqrt{37}} e^{-20\pi t} \right] t = \frac{1}{20\pi} \quad \therefore V_L \approx 42.3 \text{ vlt.}$$

- 3) En un circuito RC el condensador tiene una carga inicial  $q_0$  y la resistencia R varia linealmente de acuerdo a la ecuación.  $R = k_1 + k_2 t$ , con  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$

La segunda Ley de Kirchoff, que suponemos válida pese a que R no es constante asegura que:  $Ri + \frac{q}{c} = E_0$  esto es:  $(k_1 + k_2 t) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q = E_0$

Encontrar i cuando  $t = 0.3$  segundos.

Si  $q_0 = 2$  coulombios,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $c = 0.05$  farandios,  $E_0 = 50$  voltios

**Solución**



De la ecuación dada se tiene:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c(k_1 + k_2 t)} q = \frac{E_0}{k_1 + k_2 t}$$

esta ecuación diferencial es:

$$q = e^{-\int \frac{dt}{c(k_1 + k_2 t)}} \left[ \int e^{\int \frac{dt}{c(k_1 + k_2 t)}} \frac{E_0}{k_1 + k_2 t} dt + C_0 \right]$$

$$q = e^{-\frac{1}{ck_2 \ln(k_1 + k_2 t)}} \left[ \int e^{\frac{1}{ck_2 \ln(k_1 + k_2 t)}} \frac{E_0}{k_1 + k_2 t} dt + C_0 \right]$$

$$q = [k_1 + k_2 t]^{\frac{1}{ck_2}} \left[ \int (k_1 + k_2 t)^{-\frac{1}{ck_2}} E_0 dt + C_0 \right] \Rightarrow q = CE_0 + k_1^{\frac{1}{ck_2}} (q_0 - CE_0)(k_1 + k_2 t)^{-\frac{1}{ck_2}}$$

y derivando para hallar la corriente eléctrica.  $i = \frac{dq}{dt} = (k_1)^{\frac{1}{ck_2}} \left( E_0 - \frac{q_0}{C} \right) (k_1 + k_2 t)^{-\left(\frac{1}{ck_2} + 1\right)}$

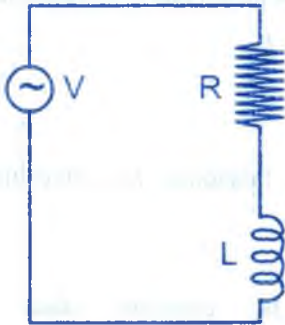
ahora reemplazando los valores numéricos:

$t = 0.3$  seg.  $q_0 = 2$  coul,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $c = 0.05$  farad.  $E_0 = 50$  voltios

encontrándose:  $i \approx 0.0244$  amperios

- 4 Hallar la intensidad de corriente que circula por un circuito RL impulsada por la fuerza electromotriz:  $V = V_0 e^{-2t} \cos 2t$  cuando  $L = 0.4$  henrios.

$$R = 5 \text{ ohmios, } V_0 = 100 \text{ voltios, } i = 0 \text{ para } t = 0$$



### Solución

De acuerdo a la segunda ley de Kirchoff, la corriente en el circuito es gobernada por la ecuación:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V \text{ y reemplazando } V = V_0 e^{-2t} \cos 2t$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \left(\frac{V_0}{L}\right)e^{-2t} \cos 2t$$

reemplazando los valores numéricos:

$$\frac{R}{L} = 12.5 \frac{\text{ohm}}{\text{henrios}} \text{ y } \frac{V_0}{L} = 250 \frac{\text{voltios}}{\text{henrios}}$$

entonces  $\frac{di}{dt} + 12.5i = 250e^{-2t} \cos 2t$  y la solución de esta ecuación es:

$$i = e^{-12.5t} \left[ \int e^{12.5t} 250e^{-2t} \cos 2t dt + c \right]$$

siendo C una constante de integración efectuando la integral se tiene:

$$i = e^{-12.5t} \left[ 250e^{10.5t} \frac{[10.5 \cos 2\pi t + 2\pi \sin 2\pi t]}{[(10.5)^2 + (2\pi)^2]} + C \right]$$

$$i = 1.66e^{-2t} [10.5 \cos 2\pi t + 2\pi \sin 2\pi t] + ce^{-12.5t}$$

usando ahora las condiciones iniciales de que para  $t = 0$ ,  $i = 0$ , entonces:  $C = -17.43$

Por tanto: 
$$i = 1.66[10.5 \cos 2\pi t + 2\pi \sin 2\pi t]e^{-2t} - 17.43e^{-12.5t}$$

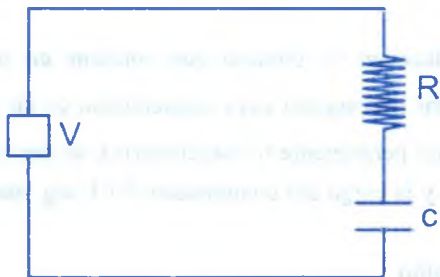
- 5 Se introduce una f.e.m. en un circuito que contiene en serie una resistencia de 10 ohms. y un condensador no cargado cuya capacidad es de  $5 \times 10^{-4}$  faradios. Encontrar la corriente y la carga en el condensador cuando:  $t = 0.01$  seg.

a) Si  $V = 100$  voltios

b) Si  $V = 100 \text{ sen } 120 t$  volts.

**Solución**

La ecuación para el circuito se obtiene de la segunda Ley de Kirchoff.  $Ri + \frac{q}{c} = V$



$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = V \quad (\text{se usa } i = \frac{dq}{dt})$$

y la solución de esta ecuación diferencial es:

$$q = e^{-\frac{t}{RC}} \left[ \int \frac{e^{\frac{t}{RC}} V}{R} dt + c \right] \quad \dots (1)$$

Siendo  $C_0$  una constante de integración

a) Si  $V = 100$  voltios constantes, entonces en (1) e integrando.  $q = VC + C_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

y usando la condición inicial de que para  $t = 0$ ,  $q = 0$ , se halla  $C_0$ , luego:

$$q = VC[1 - e^{-\frac{t}{RC}}] \quad \dots (2)$$

y la corriente eléctrica  $i$  es dado por:  $i = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$  ... (3)

reemplazando valores numéricos en (2) y (3) para  $t = 0.01$  seg. se encuentra:

$$q \approx 0.043 \text{ coul.}; \quad i \approx 1.35 \text{ amp.}$$

b) Si  $V = 100 \text{ sen } 20\pi t$  volt. entonces reemplazando en (1) e integrando y a la vez reemplazando los valores numéricos salvo,  $t$  se tiene:

$$q = 0.0022(5 \text{ sen } 120\pi t - 30\pi \cos 120\pi t) + C_0 e^{-200t} \text{ y usando la condición:}$$

$t = 0 \Rightarrow q = 0$  se halla  $C_0 = 0.0207$ , de modo que:

$$q = 0.0022(5 \text{ sen } 120\pi t - 30\pi \cos 120\pi t) + 0.0207 e^{-200t}$$



$$i = \frac{dq}{dt} = 0.83(5 \cos 120\pi t + 3\pi \sin 120\pi t) - 4.14e^{-200t}$$

y para  $t = 0.01$  seg. se tiene:  $q = 0.0131$  coul. ;  $i = -8.5$  amperios.

el signo menos en  $i$  indica que el sentido de la corriente en el circuito es contraria al caso (a)

- 6 Una f.e.m. de 100 voltios se introduce en un circuito que contiene en serie una resistencia de 10 ohms y un condensador no cargado cuya capacitancia es de  $5 \times 10^{-4}$  faradios. Cuando se ha alcanzado el estado permanente (o estacionario), se desconecta la f.e.m. del circuito. Encontrar la corriente y la carga del condensador 0.01 seg. después de la desconexión de la f.e.m.

### Solución

Este problema en su primera parte es decir cuando está conectado V, es igual a la parte (a) del problema anterior y por lo tanto se cumple:

$$q = VC[1 - e^{-\frac{t}{RC}}], \quad i = \left(\frac{V}{R}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$$

el estado permanente (o estacionario se cumple cuando  $t$  es un tiempo muy grande y entonces:  $e^{-\frac{t}{RC}}$  tiende a cero, por tanto los valores finales de carga y corriente serán:



$$q = VC = 0.05 \text{ Coulb.}, \quad i = 0.$$

En la segunda parte, cuando se desconecta la fuente en f.e.m. V del circuito (instante inicial  $t = 0$ , H) se tiene: para  $t = 0 \Rightarrow q = q_0 = 0.05$  coul. y la ecuación para el circuito de acuerdo a la segunda ley de Kirchoff, con  $V = 0$  será:

$$Ri + \frac{q}{c} = 0 \text{ es decir: } \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0, \text{ de donde:}$$

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots (1)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots (2)$$

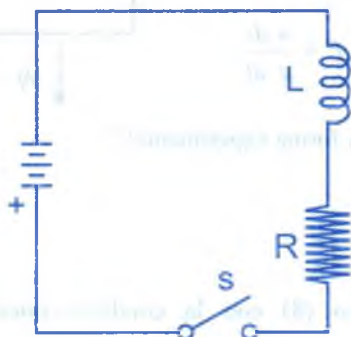
Reemplazando los valores numéricos en (1) y (2) para:  $t = 0.01$  seg. se encuentre

$$q = 0.00677 \text{ coul}, i = -1.354$$

El signo menos en  $i$  se refiere a que ahora el sentido de la corriente es contrario al caso en que la fuente de f.e.m. estaba conectada al circuito.

- 7 Una inductancia de 1 henry y una resistencia de 100 ohms. están conectadas en serie con una fuente constante  $E$  (volts.) por medio de un interruptor. El interruptor se cierra y 0.01 seg. más tarde la corriente es 0.5 amp. Encontrar  $E$ .

### Solución



Cuando se cierra el interruptor la ecuación diferencial para la corriente de acuerdo a la segunda ley de

Kirchoff es:  $L \frac{di}{dt} + Ri = E$ , de donde  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$

Luego la solución de esta ecuación diferencial.

$$i = e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \left[ \int e^{\left(\frac{R}{L}\right)t} \frac{E}{L} dt + C \right]$$

Siendo  $C$  constante de integración de donde:  $i = \frac{E}{R} + Ce^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$  por condiciones iniciales se

tiene: para  $t=0$ ,  $i=0 \Rightarrow C = -\frac{E}{R}$  por tanto:  $i = \frac{E}{R} [1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}]$

aquí reemplazando los valores para  $t = 0.01$  seg.  $i = 0.5$  amp., junto con el resto de

valores numéricos y despejando  $E$ :  $E = \frac{50}{1 - e^{-1}} \approx 79.4$  volts.

- 8 En el movimiento de un objeto a través de un cierto medio (aire a ciertas presiones es un ejemplo) el medio efectúa una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto móvil, supóngase que el cuerpo cae por acción de la gravedad, a través de tal medio. Si  $t$  representa el tiempo y  $v$  la velocidad positiva hacia abajo, y  $g$  es la aceleración de la gravedad constante usual, y  $w$  el peso del cuerpo, usando la ley de Newton, fuerza igual a masa por aceleración, concluir que la ecuación diferencial del movimiento es:  $\frac{w}{g} \frac{dv}{dt} = w - kv^2$ , donde  $kv^2$  es la magnitud de la fuerza de resistencia efectuada por el medio.

### Solución

La descripción matemática es:  $\frac{dv}{dt} = -kv^2$ , además  $F = w - kv^2$

para  $F = m \cdot a$ , también  $a = \frac{dv}{dt}$  y  $m = \frac{w}{g}$  Luego:  $\bar{F} = \frac{w}{g} \frac{dv}{dt}$

Por lo tanto se tiene: "fuerza viscosa es obtenida en forma experimental".

$$\frac{w}{g} \frac{dv}{dt} = w - kv^2$$



- 9 Resuélvase la ecuación diferencial del ejercicio (8) con la condición inicial que  $v = v_0$  cuando  $t = 0$  introducir la constante  $a^2 = \frac{w}{k}$  para simplificar las fórmulas.

### Solución

Como la ecuación diferencial es:  $\left(\frac{w}{g}\right) \frac{dv}{dt} = w - kv^2 \Rightarrow \left(\frac{w}{g}\right) \frac{dv}{w - kv^2} = dt$

$$\left(\frac{w}{gk}\right) \frac{dv}{\frac{w}{k} - v^2} = dt, \text{ como } a^2 = \frac{w}{k} \text{ se tiene: } \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2} = g dt \Rightarrow a^2 \int \frac{dv}{a^2 - v^2} = gt + c_1$$

$$\frac{a}{2} \ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right) = gt + c_1 \Rightarrow \ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right) = \frac{2gt}{a} + k$$

$$\frac{a+v}{a-v} = ce^{\frac{2gt}{a}} \quad \text{para } t=0, v=v_0$$

$$\frac{a+v_0}{a-v_0} = c \Rightarrow \text{para } t \geq 0; \quad \frac{a+v}{a-v} = \frac{a+v_0}{a-v_0} \exp\left(\frac{2gt}{a}\right)$$

- 10 Hay medios que oponen una fuerza de resistencia al paso de los cuerpos que los atraviesa proporcional a la primera potencia de la velocidad. Para tales medios plantear y resolver problemas similares a los ejercicios 8 y 9, excepto que, por conveniencia, debe escogerse una constante  $b = \frac{w}{k}$  para reemplazar a la constante  $a^2$  del ejercicio 9. Mostrar que  $b$  tiene las dimensiones de una velocidad.

### Solución

La descripción matemática es:  $\frac{dv}{dt} = -kv$ , además  $F = ma$  de donde:

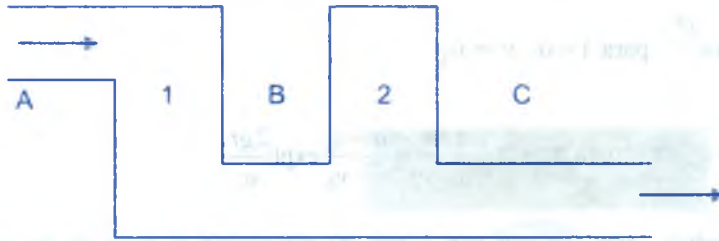
$$\left(\frac{w}{g}\right) \frac{dv}{dt} = w - kv \Rightarrow \frac{w dv}{w - kv} = g dt, \text{ integrando } \frac{w}{k} \int \frac{dv}{\frac{w}{k} - v} = \int g dt + c_1 \quad \text{pero } b = \frac{w}{k}$$

$$b \int \frac{dv}{b-v} = \int g dt + c_1 \Rightarrow \ln(b-v) = -\frac{gt}{b} + c_1 \Rightarrow b-v = ce^{-\frac{gt}{b}}$$

para  $t=0, v=v_0$  se tiene:  $b-v_0 = c$

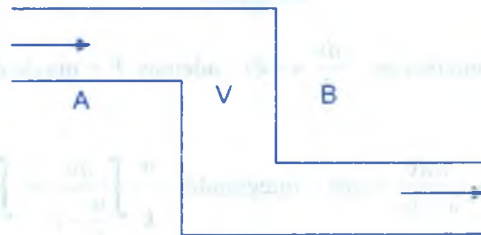
$$\text{Luego } v = b - ce^{-\frac{gt}{b}} \Rightarrow v = b - (b-v_0)e^{-\frac{gt}{b}} \Rightarrow v = b + (v_0 - b)e^{-\frac{gt}{b}}, t > 0$$

- 11 Dos corrientes están conectados mediante una cañería, tal como se muestra en la figura adjunta. Cada uno contiene 50 lts. de solución, con 10 gr. de soluto al tanque No. 1 y 5 grs. al tanque No. 2. Se abren las tres cañerías, haciéndose entrar agua a través de A. Por A, B y C circula líquido a razón de 2 litros/min. Encontrar la cantidad de soluto de ambos recipiente después de 30 minutos (las soluciones se mantienen homogéneas mediante agitadores).



### Solución

Antes de proceder a resolver el problema consideremos el caso más simple de un sólo recipiente de  $v$  litros de agua en el que se encuentra una mezcla de agua y sal (soluto). Se accionan simultáneamente las llaves de A y B haciéndose ingresar agua pura por A a razón de 5 litros/min. y se extrae solución por B en la misma proporción, para describir la cantidad de sal (soluto)  $x$  en función del tiempo se razona del modo siguiente:



Consideremos un intervalo de tiempo muy pequeño  $\Delta t$  minutos, entonces:

$S \Delta t =$  cantidad de solución que sale por B en  $\Delta t$  minutos.

$\frac{X}{V} =$  concentración uniforme de sal en la solución (gr/lts)

$(\frac{X}{V})S\Delta t =$  cantidad de sal que sale por B en  $t$  minutos por tanto la variación de sal el

recipiente  $\Delta x$  durante el  $\Delta t$  es dado por:  $\Delta x = -(\frac{S}{V})X\Delta t$

Luego  $\frac{dx}{dt} = -(\frac{S}{V})X$  y en el límite en que  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$\frac{dx}{dt} = -(\frac{S}{V})X$  que será la ecuación que gobierna  $X$  en el recipiente:



Si en el lugar de agua pura entra una solución salina con una concentración constante de  $c$  gr/lts por B, un análisis similar conduce fácilmente a la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = SC - \frac{S}{V} X \quad \dots (2)$$

Usando estas ideas es inmediato plantear el problema dado:

Llamemos:  $V_1$  = volumen del recipiente No. 1.

$X_1$  = Cantidad de soluto del recipiente No. 1 en el instante  $t$ .

$X_2$  = Cantidad de soluto del recipiente No. 2 en el instante  $t$ .

$V_2$  = Volumen del recipiente No. 2.

entonces se cumple: 
$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(\frac{S}{V_1}\right)X_1 \quad \dots (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{S}{V_1}\right)X_1 - \left(\frac{S}{V_2}\right)X_2 \quad \dots (4)$$

La ecuación (3) se puede integrar directamente reemplazando:

$$\frac{S}{V_1} = 0.004 \frac{1}{\text{min.}} \quad \text{y usando la condición inicial que}$$

para  $t = 0$ ,  $X_1 = X_{01} = 10$ grs. de soluto

Luego:  $X_1 = 10e^{-0.04t}$  gr. de soluto ... (5)

reemplazando (5) en (4) con  $\frac{S}{V_2} = 0.04 \frac{1}{\text{min.}}$

$$\frac{dx_2}{dt} + 0.04x_2 = 0.4e^{-0.04t} \quad \text{de donde la solución es: } x_2 = e^{-0.04t} \left[ \int (e^{0.04t})(0.4e^{-0.04t})dt + c \right]$$

donde C es una constante de integración, integrando esta ecuación, usando la condición inicial de que para  $t = 0$ ,  $X_2 = x_{02} = 5$  grs. se tiene:  $x_2 = (0.4t + 5)e^{-0.04t}$  ... (6)

finalmente reemplazando en (5) y (6).

$t = 30$  minutos se encuentra:  $X_1 = 3.01$  gr. de soluto y  $X_2 = 5.12$  gr. de soluto

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- ① Supongamos que el circuito RL de la figura (a) tiene los valores dados para la resistencia, la inductancia, la f.e.m. y la corriente inicial.

Halle una fórmula para la corriente en cualquier tiempo  $t$  y calcule la corriente después de un segundo.

- a)  $R = 10$  ohms.,  $L = 1$  henrios,  $E = 12$  volts.,  $I(0) = 0$  amp.  
 b)  $R = 8$  ohms.,  $L = 1$  henrios,  $E = 6$  volts.,  $I(0) = 1$  amp.  
 c)  $R = 50$  ohms.,  $L = 2$  henrios,  $E = 100$  volts.,  $I(0) = 0$  amp.  
 d)  $R = 10$  ohms.,  $L = 5$  henrios,  $E = 10\text{sen } t$ , volts.,  $I(0) = 1$  amp.  
 e)  $R = 10$  ohms.,  $L = 10$  henrios,  $E = e^t$  volts.,  $I(0) = 0$  amp.

- ② Use la resistencia, la capacitancia, la f.e.m. y la carga inicial dada para el circuito RC de la figura (b). Halle una expresión para la carga en cualquier tiempo  $t$ .

- a)  $R = 1$  ohms.,  $C = 1$  farad.,  $E = 12$  volts.,  $Q(0) = 0$  coulomb.  
 b)  $R = 10$  ohms.,  $C = 0.001$  farad.,  $E = 10 \cos 60 t$  volts,  $Q(0) = 0$  coulomb.  
 c)  $R = 1$  ohms.,  $C = 0.01$  farad.,  $E = \text{sen } 60 t$  volts.,  $Q(0) = 1$  coulomb.  
 d)  $R = 100$  ohms.,  $C = 10^{-4}$  farad.,  $E = 100$  volts.,  $Q(0) = 1$  coulomb.  
 e)  $R = 200$  ohms.,  $C = 5 \times 10^{-5}$  farad.,  $E = 1000$  volts.,  $Q(0) = 1$  coulomb.

- ③ Se conecta en serie una inductancia de 1 henry y una resistencia de 2 ohms, con una batería de  $6e^{-0.0001t}$  volts. inicialmente no fluye ninguna corriente. ¿Cuándo llegará la corriente a 0.5 amperios?

- 4 Una resistencia variable  $R = \frac{1}{5+t}$  ohms. y una capacitancia de  $5 \times 10^{-6}$  farad, se conecta en serie con una f.e.m. de 100 volts. ¿Cuál es la carga del condensador después de un minuto si  $Q(0) = 0$ ?
- 5 Halle la corriente de estado estacionario, si se conecta en serie una resistencia de 2.000 ohms. y una capacitancia de  $3 \times 10^{-6}$  farad. con un alternador de  $120 \cos 2t$  volts.
- 6 Un condensador de capacitancia  $4 \times 10^{-4}$  faradios descarga a través de una resistencia de 100 ohms, si al corriente es 1 amp. al final de 0.01 seg. ¿Cuál era la carga inicial del condensador?. ¿Cuanta resistencia debe sacarse del circuito para obtener la mitad de la corriente en el mismo tiempo? **Rpta:**  $q = 0.0487$  coulomb.,  $R = 2.49$  ohms.
- 7 Un condensador sin carga, de capacitancia  $c$  (farads) se descarga una fuente de voltaje constante a través de una resistencia  $R$  (ohms) ¿Cuándo será la corriente (amps) igual en magnitud a la carga (coulomb) del condensador? **Rpta:**  $t = Rc \ln\left(\frac{Rc+1}{Rc}\right)$  seg
- 8 Una f.e.m. de  $100 \sin 120\pi t$  volts. se introduce en un circuito que contiene en serie una resistencia de 100 ohms. y un condensador con capacitancia de  $5 \times 10^{-4}$  faradios se tiene una carga inicial en el condensador al tiempo  $t = 0$ , cuando la f.e.m. se introduce, tal que la corriente en el tiempo cero es 1 amp. (positiva) encontrar la corriente 0.1 seg. más tarde. **Rpta:** 0.181 amp.
- 9 Una resistencia de 10 ohms. se conecta en serie con una inductancia de  $L$  henrios. El circuito está conectado por medio de un interruptor a una fuente constante de  $E$  voltios si la corriente alcanza las  $\frac{3}{4}$  de su valor de estado permanente en 0.1 seg. Encontrar  $L$ . **Rpta:** 0.721 henrios.
- 10 Un cierto relevador (o interruptor magnético que está diseñado de manera que cierre un circuito cuando se aplica 60 voltios a sus terminales (es decir, cuando  $y = 60$  voltios). La bobina del relevador tiene una inductancia de  $\frac{1}{2}$  henry y opera de una fuente de 120 voltios c - c. Si el circuito se cierra 0.05 seg. después de conectado a la fuente. Encontrar:

a) La resistencia del relevador.

b) La corriente cuando se cierra el circuito.

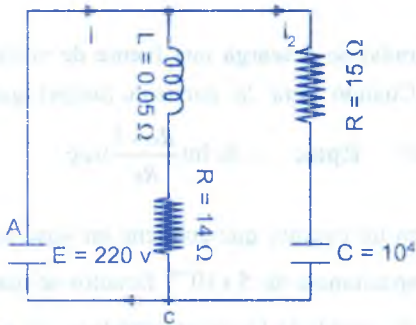
Despreciar la resistencia de los puntos.

Rpta: a)  $R = 6.95$  ohms.

b)  $i = 8.63$  amperios.

11

Una bobina de impedancia que tiene una resistencia de 14 ohmios y una inductancia de 0.05 henrios, y una rama que tiene una resistencia no inductiva de 15 ohmios y un condensador de capacidad  $10^{-4}$  faradios en serie, están conectados en paralelo a través de los terminales de una f.e.m. de 220 voltios. Hallar las expresiones en función del tiempo para la carga del condensador, la corriente en la bobina de impedancia, la corriente en la resistencia no inductiva y la corriente total. Ver figura.



Rpta:  $q = 0.022(1 - e^{-\frac{2.000t}{3}})$  ;  $i_2 = \frac{44}{3}e^{-\frac{2.000t}{3}}$

$i_1 = 15.71(1 - e^{-28t})$

$i = i_1 + i_2 = 15.71(1 - e^{-28t}) + \frac{44}{3}e^{-\frac{2.000t}{3}}$

12

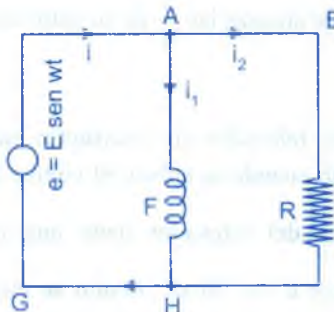
Para el sistema representado en la figura No. 1 obtener mediante la ley de la corriente en el punto A,  $i = i_1 + i_2$  y por la ley de la f.e.m. aplicando a los circuitos A R H G y A B H

G.  $L \frac{di_1}{dt} = E \text{ sen } \omega t$  ,  $Ri_2 = E \text{ sen } \omega t$  resolver estas ecuaciones para  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i$  en función de t, determinar una constante de integración teniendo en cuenta la condición  $i = 0$  cuando  $t = 0$ .

Rpta:  $i_2 = \frac{E}{R} \text{ sen } \omega t$

$i_1 = \frac{E}{L\omega} (1 - \cos \omega t)$

$i = i_1 + i_2$



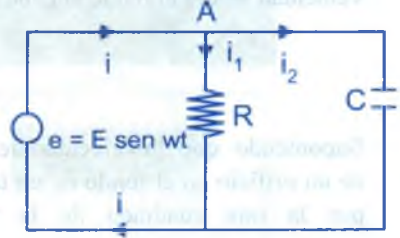


- 13) De la figura No. 2, deducir las leyes de Kirchoff.  $i = i_1 + i_2$ ,  $Ri_1 = E \text{ sen } wt$

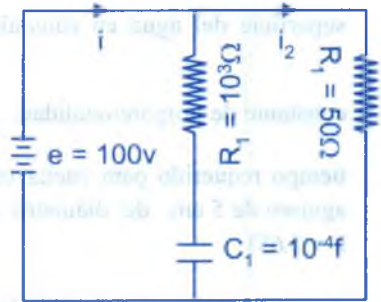
$\frac{1}{c} \int i_2 dt = \frac{q}{c} = E \text{ sen } wt$ , Hallar  $q$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  e  $y$  en función de  $t$ .

Rpta:  $i_1 = \frac{E}{R} \text{ sen } wt$ ,  $q = cE \text{ sen } wt$

$i_2 = cEw \cos wt$  ;  $i = i_1 + i_2$



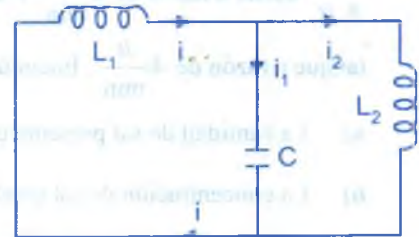
- 14) Deducir para el sistema indicado en la figura, tres ecuaciones aplicando las leyes de Kirchoff, supóngase que la carga del condensador es nula cuando  $t = 0$  y dedúzcase que siempre  $i_2 = 2$  amperios y que  $i_1 = \frac{1}{10} e^{-10t}$ , teniendo tanto rápidamente a cero.



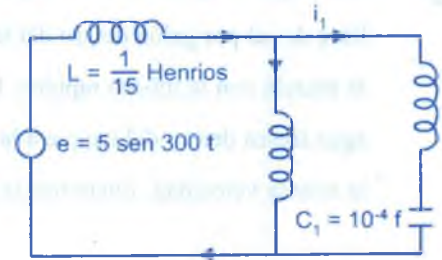
- 15) Si al principio la carga del condensador de la figura indicada es  $q_0$  e  $i_1 = 0$ .

Demostrar que  $q = q_0 \cos \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{cL_1 x L_2}} t$

“Observación  $e = 0$ ”.



- 16) Hallar  $i$  en función del tiempo  $t$  en el sistema representado en la figura indicada, si con cero todas las corrientes iniciales y la carga del condensador.





- 17) Un punto material de masa igual a 1 gr. se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculando desde el instante  $t = 0$ , e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante  $t = 10$  seg. La velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

$$\text{Rpta: } V = 10\sqrt{725} \frac{\text{cm}}{\text{seg}} \quad \text{Sug. } \frac{dv}{dt} = 20 \frac{t}{v}$$

- 18) Suponiendo que la velocidad de gasto de agua (volumen por unidad de tiempo) a través de un orificio en el fondo de un tanque sea proporcional al producto del área del orificio por la raíz cuadrada de la profundidad del agua, la ecuación diferencial es:

$$A \frac{dh}{dt} = -KB\sqrt{h}, \quad \text{donde } h \text{ (m) es la profundidad del agua y } A \text{ (m}^2\text{) es el área de la superficie del agua en cualquier tiempo } t \text{ (seg.) y } B \text{ (m}^2\text{) es el área del orificio. La}$$

constante de proporcionalidad,  $K \left( \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \right)$  se puede determinar empíricamente. Encontrar el tiempo requerido para vaciar un tanque cúbico de 1.20 m. por lado. El tanque tiene un agujero de 5 cm. de diámetro en el fondo y originalmente está lleno de agua (tomar  $k = 2.65$ )

$$\text{Rpta: } t \approx 10.2 \text{ minutos.}$$

- 19) A un tanque contiene 400 lts. de agua fresca, se le incorpora salmuera que contiene  $\frac{1 \text{ kg}}{8 \text{ lt}}$  de sal a razón de  $8 \frac{\text{lt}}{\text{min}}$  y la mezcla mantenida uniforme por agitación, abandona el tanque a razón de  $4 \frac{\text{lt}}{\text{min}}$ . Encontrar:

- La cantidad de sal presente cuando el tanque contiene 500 lts. de salmuera.
- La concentración de sal en el tanque al final de 1 hora.

- 20) Un tanque originalmente 100 galones de agua fresca. Se vierte agua que contiene media libra de sal por galón dentro del tanque a una velocidad de  $2 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ , y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez. Después de diez minutos se para el proceso, se vierte agua fresca dentro del tanque a la velocidad de  $2 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ , dejando salir también la mezcla a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal en el tanque al final de los 20 minutos.

$$\text{Rpta: } Q = 5 - e^{-0.2} (1 - e^{9.2}) \text{ lb}$$

- 21) Un tanque con capacidad de 500 galones contiene originalmente 200 galones de agua con 100 libras de sal en solución. Se introduce dentro del tanque agua que contiene una libra de sal por galón, a la velocidad de  $3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$  y se permite que la mezcla fluya afuera del tanque a una velocidad de  $2 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ . Encuéntrese la cantidad de sal en el tanque para cualquier tiempo (en libras por galón), anterior al instante cuando la solución principia a exceder la capacidad del tanque.  $Q = 200 + t - \frac{100(200)^2}{(200+t)^2}$  libras,  $t < 300$

- 22) Un cuerpo de masa constante  $m$  se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$  suponiendo que la atracción gravitacional de la tierra es constante, y despreciando todas las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo, encontrar:
- La máxima altura alcanzada por el cuerpo.
  - El tiempo en el que se alcanza la máxima altura.
  - El tiempo que tarda el cuerpo en retornar al punto de partida.

Rpta: a)  $\frac{V_0^2}{2g}$     b)  $\frac{V_0}{g}$     c)  $\frac{2V_0}{g}$

- 23) Un cuerpo es dejado caer verticalmente hacia abajo, con un velocidad inicial  $V_0$  en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese una relación entre la velocidad  $v$  y el tiempo  $t$ ; y también la velocidad límite  $v_l$  que alcanza después de un largo tiempo.  $\text{Rpta: } V = \frac{mg}{K} + (V_0 - \frac{mg}{K})e^{-\frac{kt}{m}}$

- 24) Un objeto de masa  $m$  se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.

Rpta:  $t = \frac{m}{K} \ln 10$



- 30 Un gran depósito contiene 100 gl. de salmuera en la que están disueltas 200 lb. de sal. A partir del tiempo  $t = 0$ , se introduce agua pura a razón de 3 galones por minuto y la mezcla (que se mantiene uniforme resolviéndola) sale del depósito a razón de 2 gl. por minuto. ¿Cuanto tiempo se necesitará para reducir la cantidad de sal que hay en el depósito a razón de 2 gl. por min. ¿Cuánto tiempo se necesitará para reducir la cantidad de sal que hay en el depósito de 100 lb.?
- Rpta:**  $100(\sqrt{2}-1)$  min.

### 3.6. APLICACIONES A LA ECONOMÍA.-

Para el planteamiento de las ecuaciones diferenciales aplicadas a la economía, es necesario dar algunos conceptos de los términos económicos.

- a) **Costo.-** Sea “y” el costo total de producir y comercializar “x” unidades de una mecánica, está dado por la función  $y = F(x)$ , Entonces:

El costo promedio por unidad es: 
$$\frac{y}{x} = \frac{F(x)}{x}$$

Si la producción total se incrementa en una cantidad  $\Delta x$  a partir de un cierto nivel “x” y si el correspondiente incremento en costo  $\Delta y$ , entonces el incremento promedio del costo por unidad de incremento en la producción es  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Luego el

costo marginal definiremos por:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = F'(x)$ , es decir que el costo marginal es la derivada del costo total  $y = F(x)$ .

- b) **Ingreso.-** Sea  $y = f(x)$  cualquier función de demanda donde “y” representa el precio unitario y “x” el número de unidades.

El ingreso total R es el producto de “x” por “y” es decir:

$$R = x y = x f(x)$$

El ingreso marginal con respecto a la demanda es la derivada del ingreso total con respecto a x.

$$\frac{dR}{dx} = R'(x)$$



- c) **Elasticidad.-** La elasticidad de punto de la función  $y = f(x)$  en el punto  $x$  está dado como la razón del cambio proporcional y con respecto al cambio unitario  $x$ .

$$E_x = \frac{E_y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{x} \frac{dx}{dy}$$

- d) **Renta Nacional, Consumo y Ahorro.-** Se llama función de consumo a la relación entre la renta nacional (total) disponible y el consumo nacional (total).

Luego la función consumo expresaremos mediante la ecuación:

$$c = f(x)$$

donde  $c$  representa el consumo nacional total y " $x$ " la renta nacional (total), entonces la propensión marginal al consumos es:

$$\frac{dc}{dx} = f'(x)$$

mediante una análisis teórico se tiene, la renta nacional es igual l consumo más el ahorro la cual se expresa.

$$x = c + s$$

La propensión marginal al consumo es:  $\frac{dc}{dx} = f'(x)$

La propensión marginal del ahorro es:  $\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}$

### Ejemplos.

- ① La relación entre el precio  $P$  y la cantidad demandada  $X$  es tal que la tasa de disminución en la demanda, a medida que el precio aumenta, es proporcional a la cantidad demanda e inversamente proporcional a la suma del precio más una constante. Encontrar la función de demanda si.  $P = P_0$  cuando  $X = X_0$ .

### Solución



Sea  $X = X(P)$  la función de la demanda, de acuerdo al problema la descripción matemática es:  $\frac{dX}{dp} = \frac{bx}{p+a}$  de donde  $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p+a}$  integrando

$$\ln X = \ln(p+a)^b c \Rightarrow X = (p+a)^b c \Rightarrow C = \frac{X}{(p+a)^b}, \text{ ahora para } P_0 = P, X = X_0$$

Luego la función de demanda es:  $X = \frac{X_0(P+a)^b}{(P_0+a)^b}$

- 2) La tasa de incremento del costo total  $y$ , a medida que crece el número  $X$  de unidades fabricadas, es proporcional a la suma de las unidades fabricadas más una constante e inversamente proporcional el costo total. Hallar la función de costo si  $y = y_0$  cuando  $x = 0$ , graficar la relación hallada.

### Solución

Sean  $X =$  unidades fabricadas.

$Y = Y(x)$  costo total de las unidades fabricadas,

de acuerdo al problema la descripción matemática es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x+b)}{y}, \text{ de donde } y dy = a(x+b) dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{a(x+b)^2}{2} + C, \text{ determinaremos } C \text{ para esto:}$$

$$y = y_0 \text{ cuando } x = 0 \Rightarrow \frac{y_0^2}{2} = ab^2 + C \Rightarrow C = \frac{y_0^2}{2} - ab^2 \text{ Es decir:}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{a(x+b)^2}{2} + \frac{y_0^2}{2} - ab^2 \Rightarrow y^2 = ax^2 + 2abx + y_0^2 \Rightarrow y = \sqrt{ax^2 + 2abx + y_0^2}$$

- 3) Supóngase que una suma de dinero está colocado a un interés que se acumula continuamente. Si la cantidad es  $S_0$ . ¿Cuándo el capital alcanzará la suma  $S = 2S_0$  si el grado de interés anual es 3%, 4%, 5%?

**Solución**

Llamemos:  $S(t)$  = inversión en cualquier momento ;  $S(0)$  = inversión original,  $K$  = interés

La descripción matemática es:  $\frac{dS(t)}{dt} = KS(t) \Rightarrow S(t) = Ae^{kt}$

determinaremos  $A$ , para esto se tiene: para  $t = 0 \Rightarrow S(0) = A$ ,

luego  $S(T) = S(0)e^{kT}$ , para un interés del 2%, ( $k = 0.02$ ),

$$S(t) = 2S(0), \quad 2S(0) = S(0)e^{0.02t} \Rightarrow \ln(2) = 0.02t$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0.02} \Rightarrow t = 34.66, \quad \text{para un interés del 3%, } k = 0.03$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0.03} \Rightarrow t = 23.10, \quad \text{para un interés del 4%, } k = 0.04$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0.04} \Rightarrow t = 17.33, \quad \text{para un interés del 5%, } k = 0.05$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0.05} \Rightarrow t = 32.19 \text{ años}$$

- 4 Un cierto hombre tiene una fortuna que aumenta a una velocidad proporcional al cuadrado de su riqueza presente. Si tenía un millón de pesos hace un año, y ahora tiene dos millones. ¿Cuánto tendrá dentro de seis meses?. ¿Dentro de dos años?.

**Solución**

Sea  $S(t)$  = fortuna del hombre. La descripción matemática es:

$$S'(t) = KS^2(t), \text{ que resolviendo se tiene: } -\frac{1}{S(t)} = Kt + C, \text{ encontraremos } C.$$

$$\text{para } t = 0, S(0) = S, \text{ luego } C = -\frac{1}{S(0)}, \text{ entonces } -\frac{1}{S(t)} = Kt - \frac{1}{S(0)}$$

$$k = \frac{1}{tS(0)} - \frac{1}{tS(t)}. \text{ Como } \frac{1}{S(t)} = \frac{1}{S(0)} - kt$$

$$\frac{1}{S(t)} = \frac{1 - kt(S(0))}{S(0)} \Rightarrow S(t) = \frac{S(0)}{1 - ktS(0)}$$

además  $S(0) = 1 \times 1000^6$  pesos = cantidad original

$S(t)$  = cantidad actual en  $t$  años.

$$\text{Como } K = \frac{1}{tS(0)} - \frac{1}{tS(t)} = \frac{1}{1 \times 10^6} - \frac{1}{2 \times 10^6} = \frac{1}{2} 10^{-6}$$

a) A los 6 meses = 0.5 años.

Si hace un año tenía  $10^6$  pesos, entre seis meses ha transcurrido  $t = 1 + 0.5 = 1.5$  años.

$$S(1.5) = \frac{10^6}{1 - \frac{10^{-6}}{2} \cdot 10^6 (1.5)} = \frac{10^6}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \cdot 10^6 \Rightarrow S(1.5) = 4'000.000 \text{ de pesos}$$

b) A los 2 años,  $S(2) = ?$  para  $t = 2$  años

$$S(2) = \frac{10^6}{1 - \frac{10^{-6}}{2} \cdot 10^6 \cdot 2} = \frac{10^6}{0} = \infty \Rightarrow S(2) = \infty \text{ pesos}$$

- 5) Un fabricante ha encontrado que el cambio en el costo de distribución  $D$ , a medida que aumenta las ventas  $S$ , es igual a una constante multiplicada por las ventas,  $m$  es otra constante Si  $D = 0$ , cuando  $S = 0$ . Hallar  $D$  como una función de  $S$  y diagramar la relación obtenida.

Solución

Sean  $D$  = costo de distribución  $D$ ,  $S$  = las ventas

$$\frac{dD}{dS} = \text{cambio en el costo de distribución } D$$

a medida que aumenta las ventas  $S$ . Según el problema, la descripción matemática es:

$$\frac{dD}{dS} = aS + b \quad \text{de donde: } dD = (aS + b) dS \quad \text{integrando} \quad D = \frac{aS^2}{2} + bS + C$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS.-

- ① La razón del incremento de las ventas  $S$ , a medida que crece la gestión de propaganda  $X$  es igual a una constante menos las ventas divididas por una constante más la gestión de propaganda. Hallar la relación entre las ventas y gestión de prop.ganda, si  $S = S_0$  cuando  $X = 0$  graficar la relación obtenida. **Rpta:**  $S = S_0 - \frac{a - S_0 x}{b}$
- ② Supóngase que la tasa de incremento en el costo de ordenar y sostener  $y$ , a medida que crece la magnitud de la orden  $S$ , es igual a la relación entre la suma de los cuadrados del costo y la magnitud, dividida por el doble producto del costo y el tamaño. Hallar la relación entre el costo de ordenar y sostener y el tamaño de la orden si  $y = 3$  cuando  $s = 1$  graficar la relación obtenida. **Rpta:**  $y = (85 + s^2)^2$
- ③ La relación entre el ingreso  $R$  y la cantidad demandada  $X$  es tal que la tasa de incremento en el ingreso, a medida que aumenta la cantidad demandada, es igual al doble del cubo del ingreso menos el cubo de la cantidad demandada, todo dividido por el triple del producto de la cantidad demandada y el cuadrado del ingreso. Encontrar la relación entre el ingreso y la cantidad demandada si  $R = 0$  cuando  $X = 10$ , graficar la relación obtenida. **Rpta:**  $R = (10x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$
- ④ La relación entre el costo de fabricación por cada ítem  $M$  y el número de clases de ítem fabricados  $N$  es tal que la tasa de incremento del costo de fabricación, a medida que aumenta el número de las clases de ítem, es igual a la razón del costo por ítem más el número de clases de ítem dividido por el número de clases de ítem. Hallar la relación entre el costo de fabricación por ítem y el número de clases de ítem fabricados si  $N = M_0$  cuando  $N = 1$ . **Rpta:**  $M = N(M_0 + \ln N)$

- 5) La relación entre el costo de operar un almacén de depósito y el número de galones de aceite almacenados en el depósito está dado por  $\frac{dy}{dx} = Kx + a$  donde  $y$  es el costo mensual de operar el depósito (en dólares) y  $x$  es el número de galones de aceite almacenados. Si  $y = y_0$  (costo fijo) cuando  $x = 0$ , hallar  $y$  como función de  $x$ , y graficar.

$$\text{Rpta: } y = \frac{kx^2}{2} + ax + c$$

- 6) La relación entre la utilidad neta  $P$  y el gasto de propaganda  $x$  es tal que la tasa de incremento de la utilidad neta a medida que crece el gasto de propaganda, es proporcional a la diferencia entre una constante y la utilidad neta. Hallar la relación entre la utilidad neta y el gasto de propaganda, si  $P = P_0$  cuando  $x = 0$  y graficar.

$$\text{Rpta: } P = a - (a - P_0)e^{-kx}$$

- 7) La razón del incremento en el costo  $y$  a medida que crece el número de unidades fabricadas  $x$  es igual del doble del cuadrado del costo menos el cuadrado del número de unidades dividido por el producto del costo y el número de unidades. Hallar la relación entre el costo y el número de unidades fabricadas si  $y = 3$  cuando  $x = 1$ .

$$\text{Rpta: } y = \sqrt{8x^4 + x^2}$$

- 8) La razón de crecimiento del volumen de ventas  $S$ , a medida que el precio  $P$  decrece, es proporcional al volumen de ventas e inversamente proporcional a la diferencia entre el precio y una constante. Hallar la relación entre el volumen de ventas y el precio, si

$$S = S_0 \text{ cuando } P = P_0. \quad \text{Rpta: } S = S_0 \left( \frac{P_0 - b}{P - b} \right)^a$$

- 9) La relación entre la utilidad neta  $P$  y el gasto de propaganda  $X$  es tal que la tasa de incremento de la utilidad neta, a medida que crece el gasto de propaganda es proporcional a la diferencia entre una constante y la utilidad neta. Hallar la relación entre la utilidad neta y el gasto de propaganda, si  $P = P_0$  cuando  $x = 0$ . **Rpta:**  $P = a - (a - P_0)e^{-kx}$



- 10) La relación entre el costo promedio “y” y el número de unidades producidas “x” es tal que el cambio en el costo promedio, a medida que crece el número de unidades es igual a la relación del número menos el costo promedio, dividido por el número de unidades.

Determinar la relación entre el costo promedio y el número de unidades producidas, si

$$\bar{y} = \frac{9}{2} \text{ cuando } x = 1, \text{ graficar la relación obtenida.} \quad \text{Rpta: } \bar{y} = \frac{x}{2} + \frac{4}{x}$$

- 11) El arrendamiento de un apartamento (dos alcobas, muebles “estándar”) en un colegio varía con la distancia del apartamento al campus. Supóngase que esta relación está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{K}{x} + a\right), \quad 1 \leq x \leq 10$$

en que “y” es el arrendamiento mensual (en dólares) y “x” es la distancia (en millas), K y a son una constantes, si  $y = 225$  cuando  $x = 1$ . Hallar “y” como una función de “x” y diagramar la relación obtenida. **Rpta:  $y = 225 + a - ax - K \ln x$**

## CAPÍTULO IV

### 4. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.-

En las ecuaciones diferenciales de orden superior consideraremos dos tipos especiales:

1° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma:  $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$  ... (1)

donde  $f(x)$  es una función sólo de  $x$ .

La solución de la ecuación (1) se obtiene por integración sucesivas, es decir:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x) dx + c_1$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int [\int f(x) dx + c_1] dx + c_2$$

$$y = \iint [\dots \int f(x) dx + c_1 \dots] dx + c_n$$

2° caso: Las ecuaciones diferenciales de la forma:  $\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y)$  ... (2)

donde  $g$  es una función solo de  $y$ .

para obtener la solución de la ecuación (2) se hace del modo siguiente:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y' \frac{dy'}{dy}, \text{ pero como}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(y) \text{ entonces } y' \frac{dy'}{dy} = g(y), \text{ de donde}$$

$$y' dy' = g(y) dy \text{ integrando se tiene: } \int y' dy' = \int g(y) dy + c_1 \Rightarrow \frac{y'^2}{2} = \int g(y) dy + c_1$$

$$y' = \sqrt{2 \left[ \int g(y) dy + c_1 \right]} \text{ separando las variables}$$

$$dy = \sqrt{2 \left[ \int g(y) dy + c_1 \right]} dx, \text{ de donde } \int \frac{dy}{\sqrt{2 \left[ \int g(y) dy + c_1 \right]}} = \int dx + c_2$$

$$\text{en forma similar si se tiene } \frac{d^3y}{dx^3} = g(y)$$

$$\text{se deduce que } \frac{d^3y}{dx^3} = y' \left[ y' \frac{d^2y'}{d^2y} + \left( \frac{dy'}{dy} \right)^2 \right]$$

**3° caso:** Las ecuaciones diferenciales de la forma.  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \dots (3)$

donde la ecuación (3) no contiene a  $y$ , se puede rebajar el orden de la ecuación tomando como nueva función incógnita la derivada de orden inferior de la ecuación dada, ó sea  $y^{(k)} = z$ . Obteniéndose la ecuación  $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$

**a) Ejemplos.-** Resolver las siguientes diferenciales.

①  $\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$

### Solución

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x dx + c_1 = xe^x - e^x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (xe^x - e^x + c_1) dx + c_2 = xe^x - 2e^x + c_1x + c_2$$

$$y = \int (xe^x - 2e^x + c_1x + c_2) dx + c_3 \Rightarrow y = xe^x - 3e^x + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + ay = 0$$

**Solución**

Como  $\frac{d^2 y}{dx^2} = y' \frac{dy'}{dy} \Rightarrow y' \frac{dy'}{dy} + ay = 0 \Rightarrow y' dy' + ay dy = 0$ , integrando se tiene:

$$\int y' dy' + \int a^2 y dy = c_1 \Rightarrow \frac{y'^2}{2} + a^2 \frac{y^2}{2} = c_1$$

$$y' = \sqrt{2c_1 - a^2 y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2c_1 - a^2 y^2}} = dx$$

$$\frac{1}{a} \arcsen \frac{ay}{\sqrt{2c_1}} = x + c_2 \Rightarrow \arcsen \left( \frac{ay}{\sqrt{2c_1}} \right) = ax + ac_2$$

$$\frac{ay}{\sqrt{2c_1}} = \text{sen}(ax + ac_2) \Rightarrow y = K_1 \text{sen } ax + K_2 \text{cos } ax$$

$$(3) \quad xy'' = y' \ln \left( \frac{y'}{x} \right)$$

**Solución**

$$y' = z \Rightarrow xz' = z \ln \left( \frac{z}{x} \right) \Rightarrow z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x}$$

es una ecuación homogénea  $z = ux$  de donde  $dz = u dx + x du$  entonces

$$dz = \frac{z}{x} \ln \left( \frac{z}{x} \right) dx \Rightarrow u dx + x du = u \ln u dx$$

$x du = (u \ln u - u) dx$ , separando la variable.

$$\frac{du}{u \ln u - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(\ln u - 1) = \ln cx \Rightarrow \ln u - 1 = cx \Rightarrow \ln u = 1 + cx$$

$$u = e^{1+cx} \Rightarrow \frac{z}{x} = e^{1+cx} \Rightarrow z = x e^{1+cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{1+cx} \Rightarrow dy = xe^{1+cx} dx \text{ integrando } y = \frac{x}{c} e^{1+cx} - \frac{1}{c^2} e^{1+cx} + k$$

④ Resolver  $xy'(yy'' - (y')^2) - y(y'')^2 = x^4 y^3$

### Solución

Sea:  $y = e^{\int Z(x) dx} \Rightarrow y' = Z(x)e^{\int Z(x) dx} \wedge y'' = Z'(x)e^{\int Z(x) dx} + (Z(x))^2 e^{\int Z(x) dx}$

Luego:  $xZ(x)e^{\int Z(x) dx} [e^{\int Z(x) dx} (z'(x)e^{\int Z(x) dx} + (z(x))^2 e^{\int Z(x) dx}) - (z(x))^2 e^{2 \int Z(x) dx}]$   
 $- e^{\int Z(x) dx} (z(x))^2 e^{2 \int Z(x) dx} = x^4 e^{3 \int Z(x) dx}$

$$e^{3 \int Z(x) dx} [xz(x)z'(x) + x(z(x))^3 - x(z(x))^3 - (z(x))^2] = x^4 e^{3 \int Z(x) dx} [xz(x)z'(x) - (z(x))^2] = x^4$$

$z'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)z(x) = x^3(z(x))^{-1}$ . Ecuación Diferencial de Bernoulli en  $z$  con  $n = -1$

$$\Rightarrow z^2 = e^{-2 \int \frac{1}{x} dx} [2e^{2 \int \frac{1}{x} dx} x^3 dx + c] = x^2(x^2 + c) \Rightarrow z = x\sqrt{x^2 + c}$$

$$\therefore y = e^{\int x\sqrt{x^2+c} dx} = e^{\frac{1}{3}(x^2+c)^{\frac{3}{2}}}$$

⑤  $y^2 y''' - 3yy'y'' + 2(y')^3 + \frac{y}{x}(yy'' - (y')^2) = \frac{y^3}{x^2}$

### Solución

Sea:  $y = e^{\int z(x) dx} \Rightarrow y' = z(x)e^{\int z(x) dx} \wedge y'' = z'(x)e^{\int z(x) dx} + z^2 e^{\int z(x) dx}$

$$y''' = z'' e^{\int z dx} + zz' e^{\int z dx} + 2ze^{\int z dx} z' + z^3 e^{\int z dx}$$

Reemplazando en la Ecuación Diferencial dada:



$$e^{2 \int z dx} (z'' e^{\int z dx} + 3zz' e^{\int z dx} + z^3 e^{\int z dx}) - (3e^{2 \int z dx} (z' e^{\int z dx} + z^2 e^{\int z dx}) + 2z^3 e^{\int z dx} + [x^{-1} e^{\int z dx} (e^{\int z dx} (z' e^{\int z dx} + z^2 e^{\int z dx})) - z^2 e^{2 \int z dx}] = x^{-2} e^{3 \int z dx}$$

$$e^{3 \int z dx} [z'' + 3zz' + z^3 - 3zz' - 3z^3 + 2z^3 + x^{-1} z' + x^{-1} z^2 - x^{-1} z^2] = x^{-2} e^{3 \int z dx} \Rightarrow z'' + \frac{1}{x} z' = x^{-2}$$

Sea:  $t = z' \Rightarrow t' = z''$

Luego la ecuación diferencial es de la forma:  $t' + \frac{1}{x} t = x^{-2}$  ecuación diferencial en t

$$\Rightarrow t = e^{-\int \frac{1}{x} dx} [e^{\int \frac{1}{x} dx} + x^{-2} dx + c] = x^{-1} (\int x^{-1} dx + c) = \frac{\ln x}{x} + \frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow z = \int \frac{\ln x}{x} dx + c \int \frac{dx}{x} \quad \therefore y = e^{\int (\ln^2 x + \ln x) dx}$$

⑥  $y = y' \operatorname{tg} x - (y')^2 \sec^2 x$

### Solución

Sea:  $z = \operatorname{sen} x \Rightarrow z' = (\cos x) \frac{dx}{dy}$  ;  $(z' = \frac{dz}{dy})$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x'} (\frac{z}{z'} x') - (\frac{1}{x'})^2 (\frac{x'}{z'})^2 \Rightarrow y = \frac{z}{z'} - \frac{1}{(z')^2} \Rightarrow y'(z')^2 - zz' + 1 = 0$$

Sea:  $z' = P \Rightarrow P^2 - zp + 1 = 0$  de donde

$$P^2 + 2yP \frac{dP}{dy} - P \frac{dz}{dy} - z \frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow P^2 + 2yP \frac{dP}{dy} - P^2 - z \frac{dP}{dy} = 0$$

$$\frac{dP}{dy} (2yP - z) = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow P = c_1 \Rightarrow z = c_1 y + c_2 \quad \therefore \operatorname{sen} x = c_1 y + c_2$$

$$\Rightarrow \text{en: } yc_1^2 - (\operatorname{sen} x)c_1 + 1 = 0 \text{ es decir: } c_1^2 y - c_1 \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

$$2yP - z = 0 \Rightarrow P = \frac{z}{2y} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{2y} \text{ integrando se tiene:}$$

$$\ln z = \frac{1}{2} \ln y + \ln K \Rightarrow z = Ky^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad \sin^2 x = K_1 y$$

7

$$xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$$

**Solución**

$$\text{Sea: } y' = yz \Rightarrow y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz', \text{ es decir: } y'' = y(z^2 + z')$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0 \text{ de donde } xz^2 + xz' - xz^2 - z = 0$$

$$xz' - z = 0 \text{ de donde } \frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0 \text{ integrando } \ln z - \ln x = \ln c_1 \text{ es decir: } \frac{z}{x} = c_1$$

$$\text{Como: } z = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{y'}{yx} = c_1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 x dx \text{ integrando se tiene } \ln y = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2$$

$$y = k_1 e^{\frac{c_1}{2} x^2}$$

8

$$x^2 yy'' = (y - xy')^2$$

**Solución**

$$\text{Sea: } y' = yz \Rightarrow y'' = y(z^2 + z') \Rightarrow x^2 y^2 = (z^2 + z') = [y - xy(z)]^2$$

$$\text{es } y^2 [x^2 z^2 + z^2 + z'] = y^2 [1 - xz]^2 \Rightarrow x^2 z^2 + x^2 z' = 1 + x^2 z^2 - 2xz$$

$$z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2} \Rightarrow z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[ \int e^{\int \frac{2}{x} dx} \cdot \frac{1}{x^2} dx + c \right] \text{ integrando}$$

$$z = x^2 [x + c] \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^{-1} + cx^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = (x^{-1} + cx^{-2}) dx$$

$$\ln y = \ln x + \frac{c_1}{x} + c_2 \Rightarrow y = xke^{\frac{c_1}{x}} \text{ La solución: } y = c_2 e^{\frac{1}{(x^2 + c_1)^{3/2}}}$$

**Observación.-** Cuando la ecuación diferencial es homogénea para la función y sus derivadas, la sustitución  $y' = yz$  ó  $y = e^{\int z dx}$  reduce el orden de una ecuación diferencial una unidad.

9  $4x^2 yy' = 9xy^2 + 6x + 54y^6 + 108y^4 + 72y^2 + 16$

**Solución**

$$4x^2 yy' = 3x(3y^2 + 2) + 2(3y^2 + 2)^3$$

Sea:  $z = 3y^2 + 2 \Rightarrow z' = 6yy' \Rightarrow \frac{2}{3}x^2 z' = 3xz + 2z^3 \Rightarrow z' - \frac{9}{2x}z = \frac{3}{x^2}z^3$ .

Bernoulli en z con:  $n = 3$

$$z^{-2} = e^{\int -\frac{9}{2x} dx} \left[ -2 \int e^{\int -\frac{9}{2x} dx} \left( -\frac{3}{x^2} dx + c \right) = x^{-9} \left( -6 \cdot \frac{x^8}{8} + c \right) \Rightarrow z^{-2} = -\frac{3}{4}x^{-1} + cx^{-9} \right]$$

ecuación:  $(3y^2 + 2)^2 = \frac{1}{-\frac{3}{4}x^{-1} + cx^{-9}} \Rightarrow (3y^2 + 2)^2 = \frac{4x^9}{-3x^8 + 4c}$

$$\therefore (3y^2 + 2)^2 (-3x^8 + 4c) - 4x^0 = 0$$

10  $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$

**Solución**

Sea:  $y' = yz \Rightarrow y'' = y(z^2 + z') \Rightarrow xy^2(z^2 + z') + xy^2 z^2 = 2y^2 z$

$$2xz^2 + xz' - 2z = 0 \Rightarrow z' - \frac{2}{x}z = -2z^2 \quad \text{Bernoulli con } n = 2$$

$$\frac{dz}{z} - \frac{2dx}{x} = 0, \text{ integrando se tiene: } \ln z - 2 \ln x = \ln c \Rightarrow z = cx^2$$

Pero:  $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} = cx^2 dx$  integrando se tiene:  $\ln y = \frac{c}{3}x^3 + c_1 \therefore y = k_1 e^{\frac{c}{3}x^3}$

$$(11) \quad yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$$

**Solución**

Sea:  $P = y' \Rightarrow y'' = P \frac{dp}{dy} \Rightarrow yP \frac{dp}{dy} - 2yP \ln y - P^2 = 0$ , factorizando se tiene:

$$P(y \frac{dp}{dy} - 2 \ln y - P) = 0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow y = c_1$$

ó  $\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}P = 2 \ln y$ ; lineal en P

$$\text{Luego: } P = e^{-\int \frac{dy}{y}} \left[ \int e^{\int \frac{dy}{y}} \cdot 2 \ln y \, dy + c_1 \right] = y \left[ \frac{2}{2} \ln^2 y + c_1 \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln^2 y + c_1 y \quad \text{integrando} \quad \int \frac{dy}{y \ln^2 y + c_1 y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y \ln^2 y + c_1 y} = dx \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln y}{c_1}\right) = x + c_2 \Rightarrow \ln y = c_1 \operatorname{tg}(x + c_2)$$

**b. EJERCICIOS PROPUESTOS.**

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = t^2$$

$$\text{Rpta: } x = \frac{t^4}{12} + c_1 t + c_2$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\text{Rpta: } y = (x+2)e^{-x} + x - 1$$

$$(3) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \cos^2 x, \quad y(0) = \frac{1}{32}, \quad y'(0) = \frac{1}{8}, \quad y''(0) = \frac{1}{8}, \quad y'''(0) = 0$$

$$\text{Rpta: } y = \frac{x^4}{48} + \frac{x^2}{8} + \frac{\cos 2x}{32}$$

④  $\frac{d^3 y}{dx^3} = x \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$  **Rpta:**  $y = x \cos x - 3 \operatorname{sen} x + x^2 + 2x$

⑤  $y'' = 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$  **Rpta:**  $y = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c_1 x + c_2$

⑥  $y'''' = x e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 2$  **Rpta:**  $y = -(x+3)e^{-x} + \frac{3x^2}{2} + 3$

⑦  $y'' = (2y+3) - 2y^2 = 0$  **Rpta:**  $\frac{1}{2} \ln(2y+3) = c_1 x + c_2$

⑧  $1 + y'^2 = yy''$  **Rpta:**  $y = K \cosh\left(\frac{x+c}{K}\right)$

⑨  $yy'' - y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$  **Rpta:**  $y = e^{2x}$

⑩  $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$  **Rpta:**  $\ln y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

⑪  $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$  **Rpta:**  $y = e^{\frac{x+c_2}{x+c_1}}$

⑫  $y''(1+y) = y'^2 + y'$  **Rpta:**  $\ln[c_1(y+1) - 1] = c_1(x+c_2)$

⑬  $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$  **Rpta:**  $x = \sqrt{y} - \frac{c_1}{2} \ln(2\sqrt{y} + c_1) + c_2$

⑭  $y'' \frac{y'}{x-1} = x(x-1), \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -1$  **Rpta:**  $y = \frac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)$

⑮  $(1-x^2)y'' - xy' = 2$  **Rpta:**  $y = (\operatorname{arcsen} x)^2 + c_1 \operatorname{arcsen} x + c_2$

⑯  $(1+x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0$  **Rpta:**  $y = \left(1 + \frac{1}{c_1^2}\right) \ln(1+c_1 x) - \frac{x}{c_1} + c_2$



$$(17) \quad y''''(x-1) - y'' = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1, \quad y''(2) = 1$$

$$\text{Rpta: } y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 6x + 4)$$

$$(18) \quad y^2 \cos x (\cos x + 2yy') = 2y \operatorname{sen} x (\cos x + 2yy') y' - 4yy' \cos x \quad \text{sug: } y^2 = z, \quad \operatorname{sen} x = \omega$$

$$(19) \quad y'' - y'^2 + yy'^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad \text{Rpta: } y^2 - 2y - 2e^{x-y} = 2x - 3$$

$$(20) \quad \text{Hallar la ecuación de una curva que satisface a la ecuación diferencial: } yy'' = 2(y')^2 + y^2 \text{ y tenga pendiente } \sqrt{3} \text{ en el punto } (0,1) \quad \text{Rpta: } 2y = \sec(x + \frac{\pi}{3})$$

$$(21) \quad (y'' + y')e^x + (\cos x + x^2)y' + (2x - \operatorname{sen} x)y = -\operatorname{sen} x + 2x$$

$$(22) \quad 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$$

$$(23) \quad xy'(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4 y^3$$

$$(24) \quad y^2 y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 + \frac{x}{y}(yy'' - y'^2) = \frac{y^3}{x^2}$$

$$(25) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = x + \operatorname{sen} x$$

$$(26) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{a + bx}{x^2}$$

$$(27) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + x^2$$

$$(28) \quad y'' = x \ln x, \quad y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$$

$$(29) \quad y''' = x + \cos x$$

$$(30) \quad y''' = \frac{x}{(x+2)^3}, \quad y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$$

$$(31) \quad y'' = ae^y$$

$$(32) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{a}{y^3}$$

$$(33) \quad y^3, \quad y'' = -1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

$$(34) \quad y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$(35) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{2}y^2, \quad y'(1) = y(1) = 1$$

$$(36) \quad 2 \frac{d^2 y}{dx^2} = e^y, \quad y'(0) = -1, \quad y(0) = 0$$

$$(37) \quad y'' = -\frac{1}{2y^3}$$

- 38)  $y''y^3 = 1$ ,  $y = 1$ ,  $y' = 1$  para  $x = \frac{1}{2}$
- 39)  $yy'' - y'^2 = \frac{yy'}{1+x}$
- 40)  $y'' = \operatorname{sen} y \cos y$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $y'(0) = -1$
- 41)  $yy'' - y'^2 = y^2 y'$
- 42)  $y''' = xe^{-x^2}$ ,  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
- 43)  $(y'+2)e^{-y}y'' = 1$
- 44)  $y'' - y'^2 + yy'^3 = 0$
- 45)  $y = y' \operatorname{tg} x - y'^2 \sec x$
- 46)  $x^2 y''^2 - x^2 y' y'' - y'^2 = 0$
- 47)  $(x^2 + y^2)y'' = (1 + y'^2)(xy' - y)$
- 48)  $a^2 y'^2 = 1 + y^2$ ,  $\pm(x+c_2) = a \ln \left[ \frac{y+c_1 + \sqrt{(y+c_1)^2 - a^2}}{a} \right]$  ó  $y+c_1 = \pm a \cosh \left( \frac{x+c_2}{2} \right)$
- 49)  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sec^2 y \cdot \operatorname{tg} y$ ,  $y' = -1$ ,  $x = \ln 2$ ,  $y = \frac{\pi}{4}$
- 50)  $\cos^3 y \frac{d^2 y}{dx^2} = \operatorname{sen} y$ ,  $y' = \sqrt{2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$

## CAPÍTULO V

### 5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN $n$

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$  son de la forma siguiente:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x) y = R(x) \quad \dots (1)$$

donde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $R$  son funciones solo de  $x$  ó constante.

La ecuación diferencial (1) se puede escribir en la forma:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \dots (2)$$

La ecuación (2) nos indica que están relacionadas, la variable independiente  $x$ , la variable dependiente  $y$ , y las derivadas  $y', y'', \dots, y^{(n)}$

Si en la ecuación (1) la función  $R(x) = 0$ , se obtiene:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0 \quad \dots (3)$$

A la ecuación diferencial (3) se denomina ecuación diferencial lineal homogénea.

Si en la ecuación (1), la función  $R(x) \neq 0$ , la ecuación diferencial (1) se denomina ecuación diferencial lineal no homogénea.

Si  $y_1, y_2$  son soluciones de la ecuación diferencial (3) y si  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias, entonces  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  es una solución de la ecuación (3).

Como  $y_1, y_2$  son soluciones de la ecuación (3) entonces:

$$a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0$$

$$a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0$$

sumando y agrupando se tiene:

$$a_n(x)(c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)}) + a_{n-1}(x)(c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)}) + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

$$a_n(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n-1)} + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

entonces  $c_1y_1 + c_2y_2$  es una solución de la ecuación diferencial (3)

En general si,  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de (3) y si  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son constantes, entonces  $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ , es una solución de la ecuación diferencial (3).

### 5.1 INDEPENDENCIA LINEAL DE LAS FUNCIONES.-

Consideremos un sistema finito de n funciones:  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  definidas en algún intervalo (a,b), diremos que estas funciones son linealmente independientes si existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  escalares tal que:

$$\alpha_1f_1(x) + \alpha_2f_2(x) + \dots + \alpha_nf_n(x) = 0 \text{ entonces } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Si alguno de los  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  es diferente de cero, entonces diremos que  $f_1, f_2, \dots, f_n$  son funciones linealmente dependientes.

**Ejemplos:** Averiguar si las funciones dadas son linealmente independientes.

①  $f_1(x) = x, f_2(x) = 2x, f_3(x) = x^2$

#### Solución

Por determinar si  $\alpha_1f_1(x) + \alpha_2f_2(x) + \alpha_3f_3(x) = 0$  entonces  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

Luego  $\alpha_1x + \alpha_22x + \alpha_3x^2 = 0$ , derivando

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 x = 0$ , derivando nuevamente.

$$2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2$$

Como  $\alpha_3 = 0$  y  $\alpha_1 = -2\alpha_2 \Rightarrow f_1(x), f_2(x)$  y  $f_3(x)$  no son linealmente independientes.

## 5.2. EL WRONSKIANO.-

Suponiendo que las  $n$  funciones:  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  son diferenciables cada uno al menos  $(n - 1)$  veces en un intervalo  $a < x < b$ , entonces de la ecuación  $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$  por diferenciación sucesiva se tiene:

$$\left. \begin{aligned} c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n &= 0 \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' + \dots + c_n f_n' &= 0 \\ c_1 f_1'' + c_2 f_2'' + \dots + c_n f_n'' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)} + c_2 f_2^{(n-1)} + \dots + c_n f_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{... } (\alpha)$$

Consideraremos a  $(\alpha)$  como un sistema de ecuaciones en  $c_1, c_2, \dots, c_n$

El sistema de ecuaciones  $(\alpha)$  no tiene solución, excepto cuando todos los  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son ceros.

Si el determinante de los coeficientes de  $c_1, c_2, \dots, c_n$  no es nulo es decir:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \dots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0, \text{ entonces diremos que las funciones:}$$



$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  son linealmente independientes, al determinante de los coeficientes del sistema ( $\alpha$ ) denotaremos por  $W$ , es decir:

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \dots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Llamaremos el Wronskiano de las funciones:  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$

**Ejemplo N°1:** Demostrar que las funciones:  $e^x, e^{2x}, e^{3x}$  son linealmente independiente.

**Solución**

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces las funciones  $e^x, e^{2x}, e^{3x}$ , son linealmente independiente.

**Ejemplo N°2:** Demostrar que las funciones  $e^x, \cos x, \sin x$  son linealmente independiente.

**Solución**

$$W = \begin{vmatrix} e^x & \cos x & \sin x \\ e^x & -\sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 2e^{2x} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces las funciones  $e^x, \cos x, \sin x$  son linealmente independiente.

**Ejemplo N°3:** Hallar el Wronskiano de las funciones:  $f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}$

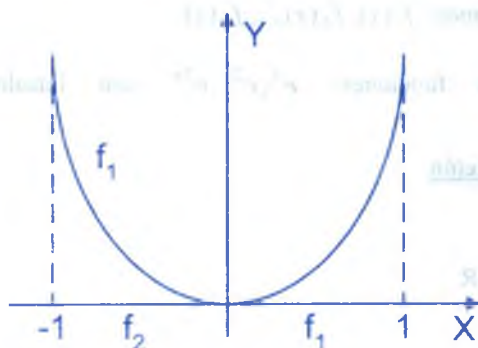
**Solución**

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \quad \text{para } x \neq 0$$

Luego  $W = -\frac{2}{x}$ ; para  $x \neq 0$

### OBSERVACIÓN

Que el Wronskiano  $W \neq 0$ , para que las funciones sean linealmente independiente es una condición necesaria pero no suficiente, por ejemplo las funciones:



$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

son linealmente independiente y su Wronskiano es cero.

Este sistema de funciones es linealmente independiente puesto que para

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , se cumple la identidad:  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$ . En efecto:

$$\text{Si } x \in [-1, 0] \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$$

$$x^2 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 x^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\text{Si } x \in [0, 1] \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$$

$$\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 x^2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 x^2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0. \text{ Luego } \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Consideremos el Wronskiano en  $[-1, 0]$  y en  $[0, 1]$

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Por lo tanto: } W[f_1, f_2] = 0 \text{ en } [-1, 1]$$

**EJERCICIOS PROPUESTOS.**

I. Obténgase el Wronskiano de las siguientes funciones indicadas:

①  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$  para  $n > 1$  **Rpta:**  $W = 0! 1! \dots (n-1)!$

②  $e^{mx}, e^{nx}$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros y  $m \neq n$  **Rpta:**  $W = (n-m)e^{(m+n)x}$

③  $\operatorname{senh} x, \operatorname{cosh} x$  **Rpta:**  $W = -1$

④  $x, xe^x$  **Rpta:**  $W = x^2 e^x$

⑤  $e^x \operatorname{sen} x, e^x \operatorname{cos} x$  **Rpta:**  $W = -e^{2x}$

⑥  $\cos^2 x, 1 + \cos 2x$  **Rpta:**  $W = 0$

⑦  $e^{-x}, xe^{-x}$  **Rpta:**  $W = e^{-2x}$

⑧  $e^x, 2e^x, e^{-x}$  **Rpta:**  $W = 0$

⑨  $2, \cos x, \cos 2x$  **Rpta:**  $W = -8 \operatorname{sen}^3 x$

⑩  $e^{-3x} \operatorname{sen} 2x, e^{-3x} \operatorname{cos} 2x$  **Rpta:**  $W = -2e^{-6x}$

II. Mediante el Wronskiano, demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos son linealmente independiente.

①  $1, e^{-x}, 2e^{2x}$  **②**  $\ln x, x \ln x$

③  $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$  **④**  $e^{ax} \operatorname{sen} bx, e^{ax} \operatorname{cos} bx, b \neq 0$

⑤  $1, \operatorname{sen}^2 x, 1 - \operatorname{cos} x$  **⑥**  $\ln \frac{x-1}{x+1}, 1$

⑦  $\sqrt{1-x^2}, x$  **⑧**  $\operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{cos}^2 x$

⑨  $x^2, x^4, x^8$  **⑩**  $e^x, x e^x, x^2 e^x$

III. Demostrar que las funciones dadas son linealmente independiente y su Wronskiano es cero, construir las gráficas de estas funciones.

$$\textcircled{1} \quad f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad f_1(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x|x|, \quad -1 < x < 1$$

IV.

\textcircled{1} Demostrar que el Wronskiano de las funciones:  $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx}$  es

$$e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

\textcircled{2} Demostrar que las funciones:  $e^{2x}, xe^{2x}, e^{2x} \sin x, e^{2x} \cos x$  son linealmente independiente.

\textcircled{3} Demostrar que el Wronskiano de las funciones:  $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$  es:

$$x^{\alpha+\beta+\gamma-3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha(\alpha-1) & \beta(\beta-1) & \gamma(\gamma-1) \end{vmatrix}$$

### 5.3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes son de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad \dots (1)$$

donde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son constantes.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales, primero consideramos el polinomio característico de la forma siguiente:

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Como el polinomio característico  $P(r) = 0$  es de grado n entonces se puede obtener las siguientes raíces  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  los cuales pueden ser, reales distintos, reales de multiplicidad o números complejos.

Luego para dar la solución de la ecuación (1) consideremos los siguientes casos:

**1º Caso** Cuando las raíces de la ecuación polinómica  $P(r) = 0$  son reales y distintos:

$r_1 < r_2 < \dots < r_n$  entonces el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1) tiene la forma siguiente  $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ , y la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea (1) es:

$$y_g = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

**2º Caso** Cuando las raíces de la ecuación polinómica  $P(r) = 0$  alguna de las raíces son de multiplicidad, consideremos  $r_1 = r_2 = \dots = r_k = r$  y donde r es la raíz de multiplicidad k, y  $n - k$  son las demás raíces y distintas.

Luego el sistema fundamental de soluciones tiene la siguiente forma:

$$e^{rx}, x e^{rx}, x^2 e^{rx}, \dots, x^{k-1} e^{rx}, e^{r_1 x}, \dots, e^{r_n x}$$



y la solución general de la ecuación diferencial (1) es:

$$y_g = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + c_3 x^2 e^{r_1 x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{r_1 x} + c_{k+1} e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

**3º Caso** Cuando las raíces de la ecuación polinómica  $P(r) = 0$  alguna de estas raíces son complejas:  $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ ,  $r_2 = \alpha_1 - i\beta_1$ ,  $r_3 = \alpha_2 + i\beta_2$ ,  $r_4 = \alpha_2 - i\beta_2$

y las demás raíces supongamos que sean reales y distintas.

Luego el sistema fundamental de soluciones son de la forma siguiente:

$$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x, e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x, e^{r_5 x}, \dots, e^{r_n x}$$

y la solución general de la ecuación diferencial (1) es:

$$y_g = c_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + c_2 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + c_3 e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x + c_4 e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x + c_5 e^{r_5 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

**a. Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

①  $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$

Solución

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$  es

$P(r) = r^2 - 1 = 0$ , y sus raíces  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = -1$ , de donde el sistema fundamental de soluciones es:  $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$  es decir  $e^x, e^{-x}$  y la solución general es:  $y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

②  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

Solución

El polinomio característico, correspondiente a la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \text{ es } P(r) = r^2 - 3r + 2 = 0$$

de donde  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ , luego el sistema fundamental de soluciones es:  $e^x, e^{2x}$  y la solución general  $y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

3  $y'' - 4y' + 4y = 0$

**Solución**

El polinomio característico a la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ es } P(r) = r^2 - 4r + 4 = 0 \text{ de donde } r = 2 \text{ de multiplicidad 2.}$$

Luego el sistema fundamental de soluciones es:  $e^{2x}$ ,  $xe^{2x}$  y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

4  $y'' + y = 0$

**Solución**

El polinomio característico de la ecuación diferencial:

$$y'' + y = 0 \text{ es } P(r) = r^2 + 1 = 0 \text{ de donde: } r_1 = i, r_2 = -i.$$

Luego el sistema fundamental de soluciones es:  $\cos x$ ,  $\sin x$ , y la solución general es:

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

5  $y'' + y' + y = 0$

**Solución**

El polinomio característico a la ecuación diferencial:

$$y'' + y' + y = 0, \text{ es } P(r) = r^2 + r + 1 = 0, \text{ de donde } r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Luego el sistema de solución es:  $e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ,  $e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$  y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

6  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

**Solución**

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$$P(r) = r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0, \text{ de donde: } r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = 2, \text{ luego}$$

el sistema fundamental de soluciones es:  $e^{-x}, e^x, e^{2x}$  y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

7  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

**Solución**

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$ , de donde  $r_1 = -1$  de multiplicidad 3, luego el sistema fundamental de soluciones es:  $e^{-x}, xe^{-x}, x^2 e^{-x}$  y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$$

8  $y''' - y'' + y' - y = 0$

**Solución**

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 - r^2 + r - 1 = 0$ , de donde:  $r_1 = 1, r_2 = i, r_3 = -i$ , luego el sistema fundamental de soluciones es:  $e^x, \cos x, \sin x$ , y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

9  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

**Solución**

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ , de donde:  $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$ , luego el sistema fundamental de soluciones es:  $e^x, e^{2x}, e^{3x}$  y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

$$(10) \quad y^{iv} - y = 0$$

**Solución**

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 - 1 = 0$ , de donde:  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = i$ ,  $r_4 = -i$ , luego el sistema fundamental de soluciones es:  $e^{-x}$ ,  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$$(11) \quad y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$$

**Solución**

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = 0$ , de donde:  $r = 1$  de multiplicidad 4, luego el sistema fundamental de soluciones es:  $e^x$ ,  $xe^x$ ,  $x^2 e^x$ ,  $x^3 e^x$  y la solución general es:

$$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x$$

$$(12) \quad y^{iv} - 8y'' + 16y = 0$$

**Solución**

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$$P(r) = r^4 - 8r^2 + 16 = 0, \text{ de donde: } (r^2 - 4)^2 = 0$$

$$r_1 = -2 \text{ de multiplicidad } 2 ; r_2 = 2 \text{ de multiplicidad } 2$$

Luego el sistema fundamental de soluciones es:  $e^{-2x}$ ,  $xe^{-2x}$ ,  $e^{2x}$ ,  $xe^{2x}$  y la solución general es:  $y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$

$$(13) \quad y^{iv} + 2y'' + y = 0$$

**Solución**

El polinomio característico a la ecuación diferencial es:

$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ , de donde:  $r_1 = i$  de multiplicidad 2 y  $r_2 = -i$  de multiplicidad 2

Luego el sistema fundamental de soluciones es:  $\cos x$ ,  $x \cos x$ ,  $\sin x$ ,  $x \sin x$  y la solución general es:  $y_g = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$

14

$$\frac{d^6 y}{dx^6} + 6 \frac{d^4 y}{dx^4} + 9 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$$

### Solución

El polinomio característico de la ecuación diferencial es:

$$P(r) = r^6 + 6r^4 + 9r^2 + 4 = 0, \text{ de donde:}$$

$$r_1 = i \text{ de multiplicidad 2 ; } r_2 = -i \text{ de multiplicidad 2 ; } r_3 = 2i, r_4 = -2i$$

De acuerdo al tercer caso, el sistema fundamental de soluciones es:  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $x \cos x$ ,  $x \sin x$ ,  $\cos 2x$ ,  $\sin 2x$  y la solución general es:

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x$$

### b) EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = e^{2x} (c_1 x + c_2)$$

3

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = e^{-\frac{x}{2}} \left[ c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$$

5

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$



- 6  $y'''' - 2y'' - y' + 2y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$
- 7  $y'''' + 3y'' - 3y' + y = 0$  **Rpta:**  $e^{-x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) = y$
- 8  $y'''' - y'' + y' - y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$
- 9  $y'''' - y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left[ c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$
- 10  $y'''' - y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$
- 11  $y'''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$  **Rpta:**  $y = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)$
- 12  $6y'''' - y'' - 6y' + y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x/6}$
- 13  $y'''' - y'' - 3y' - y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_3 e^{(1-\sqrt{2})x}$
- 14  $y'''' - y = 0$   
**Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left[ c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right] + e^{-\frac{x}{2}} \left[ c_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$
- 15  $\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$
- 16  $\frac{d^3 y}{dx^3} + 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{-2x}$
- 17  $\frac{d^4 y}{dx^4} = y$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$
- 18  $\frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x$
- 19  $\frac{d^4 y}{dx^4} + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

$$(20) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) e^x$$

$$(21) \quad 2 \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{\frac{x}{2}}$$

$$(22) \quad 2 \frac{d^3 y}{dx^3} - 7 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})x} + c_3 e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})x}$$

$$(23) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - 14 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x} + c_3 e^{(-2+\sqrt{3})x} + c_4 e^{(-2-\sqrt{3})x}$$

$$(24) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = A \cos kx + B \sin kx$$

$$(25) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = e^x (A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x)$$

$$(26) \quad 4 \frac{d^4 y}{dx^4} + 5 \frac{d^2 y}{dx^2} - 9y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos \frac{3}{2}x + c_4 \sin \frac{3}{2}x$$

$$(27) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} + 4y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$

$$(28) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$

$$(29) \quad \frac{d^5 y}{dx^5} + 2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 10 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 10y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^{-2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + e^x (c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x)$$

$$(30) \quad 2y'' - 3y' + y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^x$$

- (31)  $y'' - 9y' + 9y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^{\frac{(9+3\sqrt{5})x}{2}} + c_2 e^{\frac{(9-3\sqrt{5})x}{2}}$
- (32)  $y'' + y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$  Rpta:  $y = e^x$
- (33)  $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$  Rpta:  $y = 2xe^{3x}$
- (34)  $y'' + 8y' - 9y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$  Rpta:  $y = \frac{1}{10} e^{-9(x-1)} + \frac{9}{10} e^{x-1}$
- (35)  $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$  Rpta:  $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$
- (36)  $y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$  Rpta:  $y = e^{-2x} \cos x + 2e^{-2x} \operatorname{sen} x$
- (37)  $y'''' - y'' - y' + y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}$
- (38)  $y'''' - 5y'' + 4y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$
- (39)  $y'''' - 3y'''' + 3y'' - y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$
- (40)  $y'' - 3y'''' + 3y'''' - 3y'' + 2y' = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$
- (41)  $y'''' - 8y' = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 e^{2x} + e^{-x} (c_3 \cos \sqrt{3}x + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}x)$
- (42)  $y'''' + 8y'' + 16y = 0$   
Rpta:  $y = e^x [(c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \operatorname{sen} x] + e^{-x} [(c_5 + c_6 x) \cos x + (c_7 + c_8 x) \operatorname{sen} x]$
- (43)  $y'''' + 6y'''' + 9y'' = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) e^{-3x}$
- (44)  $4y'''' - 3y' + y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^{\frac{x}{2}}$
- (45)  $4y'''' - 4y'''' - 23y'' + 12y' + 36y = 0$  Rpta:  $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (c_3 + c_4 x) e^{\frac{3x}{2}}$
- (46)  $y'' - y'''' = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x - c_5 e^{-x}$

- 47)  $y^{iv} - 2y'' - 3y'' + 4y' + 4y = 0$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + (c_3 + c_4x)e^{2x}$
- 48)  $y^{iv} + 2y''' - 6y'' - 16y' - 8y = 0$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + c_3e^{(1+\sqrt{3})x} + c_4e^{(1-\sqrt{3})x}$
- 49)  $y''' - 3y' - 2y = 0$  cuando  $x = 0, y = 0, y' = 9, y'' = 0$  **Rpta:**  $y = 2e^{2x} + (3x - 2)e^{-x}$
- 50)  $y^{iv} + 3y''' + 2y'' = 0$  cuando  $x = 0, y = 0, y' = 4, y'' = -6$  **Rpta:**  $y = 2(x + e^{-x} - e^{-2x})$
- 51)  $y''' + y'' - y' - y = 0$ , cuando  $x = 0, y = 1$ , cuando  $x = 2, y = 0$  y también cuando  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$ . **Rpta:**  $y = \frac{1}{2}(2 - x)e^{-x}$
- 52)  $y'' - 6y' + 25y = 0$  **Rpta:**  $y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$
- 53)  $y'' - y = 0$ , cuando  $x = 0, y = y_0, y' = 0$  **Rpta:**  $y = y_0 \cosh x$
- 54)  $y'' + y = 0$ , cuando  $x = 0, y = y_0, y' = 0$  **Rpta:**  $y = y_0 \cos x$
- 55)  $y''' + 5y'' + 17y' + 13y = 0$ , cuando  $x = 0, y = 0, y' = 1, y'' = 6$  **Rpta:**  $y = e^{-x} - e^{-2x} \cos 3x$
- 56)  $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ ,  $k$  real cuando  $t = 0, x = 0, y \frac{dx}{dt} = v_0$  **Rpta:**  $x = \left(\frac{v_0}{k}\right) \sin kt$
- 57)  $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$ , cuando  $x = 0, y = 0, y' = -1, y'' = 5$  **Rpta:**  $y = e^{-x} - \cos 2x$
- 58)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + k^2x = 0$ ,  $k > b > 0$  cuando  $t = 0, x = 0$  y  $\frac{dx}{dt} = v_0$  **Rpta:**  $x = \left(\frac{v_0}{a}\right)e^{-bt} \sin at$  donde:  $a = \sqrt{k^2 - b^2}$
- 59)  $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$ , cuando  $x = 0, y = 1, y' = -2, y'' = 2$
- 60)  $y^{iv} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{-x} \cos 2x + c_4e^{-x} \sin 2x$

- 61  $y'''' - 2y'' + 2y' = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \operatorname{sen} x$
- 62  $y'''' + 8y'' + 16y = 0$  Rpta:  $y = e^x [(c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \operatorname{sen} x] + e^{-x} [(c_5 + c_6 x) \cos x + (c_7 + c_8 x) \operatorname{sen} x]$
- 63  $y'''' - 4y'' + 4y' = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$
- 64  $y'''' - y'' = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \operatorname{sen} x$
- 65  $y'''' - 8y = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 e^{2x} + e^{-x} [c_3 \cos \sqrt{3}x + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}x]$
- 66  $2y'''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}$
- 67  $y'''' - 3y' - y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$
- 68  $y'''' - 5y'' + 4y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$
- 69  $y'''' - 3y'' + 3y' - y = 0$  Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$
- 70  $y'''' + y = 0$  Rpta:  $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + e^{\sqrt{3}/2x} (c_3 \cos \frac{x}{2} + c_4 \operatorname{sen} \frac{x}{2}) + e^{-\sqrt{3}/2x} (c_5 \cos \frac{x}{2} + c_6 \operatorname{sen} \frac{x}{2})$
- 71  $y'''' - 3y'' + 3y'''' - 3y'' + 2y' = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \operatorname{sen} x$
- 72  $y'''' + y' = 0, y''(0) = 1, y'(0) = 1, y(0) = 0$  Rpta:  $y = 2 - 2 \cos x + \operatorname{sen} x$
- 73  $y'''' - y'' + y' - y = 0$  Rpta:  $y = A \cos x + B \operatorname{sen} x + c e^x$
- 74  $y'''' + y' = 0$  Rpta:  $y = A \cos x + B \operatorname{sen} x + c$
- 75  $y'''' - y'' - y' + y = 0$  Rpta:  $y = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-x}$
- 76  $y'''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$  Rpta:  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x}$



- 77)  $y'''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$
- 78)  $y'' - 12y' + 35y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{7x}$
- 79)  $y^{iv} - 8y'''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$  **Rpta:**  $y = e^{2x} [(c_1 + c_2 x) \operatorname{sen} 3x + (c_3 + c_4 x) \operatorname{cos} 3x]$
- 80)  $9y'' - 30y' + 25y = 0$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{5x}{3}}$
- 81)  $y^{iv} - 6y'''' + 7y'' + 6y' - 8y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{4x}$
- 82)  $y'' - 4y' + 2y = 0$  **Rpta:**  $y = e^{\frac{2x}{3}} [c_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{3} x + c_2 \operatorname{cos} \frac{\sqrt{2}}{3} x]$
- 83)  $y'''' - 2y'' + 3y' - 6y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{2x} + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{3} x + c_3 \operatorname{cos} \sqrt{3} x$
- 84)  $y^{iv} - 4y'''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \operatorname{cos} x$
- 85)  $y'''' + 9y' = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 \operatorname{cos} 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + c_3$
- 86)  $y^{iv} - 13y'' + 36y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}$
- 87)  $y^{iv} + 2y'' + y' = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$
- 88)  $y^{iv} = 8y'' - 16y$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (c_4 + c_3 x) e^{-2x}$
- 89)  $y'''' - 13y'' - 12y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_3 e^{-3x} + c_3 e^{4x}$
- 90)  $y^{iv} + y = 0$  **Rpta:**  $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} (c_1 \operatorname{cos} \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} (c_3 \operatorname{cos} \frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}})$
- 91)  $64y^{viii} + 48y^{vi} + 12y^{iv} + y'' = 0$   
**Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \operatorname{cos} \frac{x}{2} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c_7 x + c_8$

$$(92) \quad y^{(n)} + \frac{n}{1}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{(n-2)} + \dots + \frac{n}{1}y' + y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = e^{-x}(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_nx^{n-1})$$

$$(93) \quad y''' = y', y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = -1 \quad \text{Rpta: } y = 1 + \cos x$$

$$(94) \quad 4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0 \quad \text{Rpta: } x = (c_1 + c_2t)e^{2.5t}$$

$$(95) \quad y^{iv} + 8y^{iv} + 16y'' = 0 \quad \text{Rpta: } y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)\cos 2x + (c_5 + c_6x)\sin 2x$$

$$(96) \quad y^{iv} + 4y''' + 8y' + 4y = 0 \quad \text{Rpta: } y = e^{-x}[(c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x]$$

$$(97) \quad y^{iv} + 4y''' + 5y' + 4y = 0$$

$$\text{Rpta: } y = c_1e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}x} + c_2e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}x} + c_3e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$(98) \quad y^{iv} + 4y^{iv} + 4y'' = 0 \quad \text{Rpta: } y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)\cos\sqrt{2}x + (c_5 + c_6x)\sin\sqrt{2}x$$

$$(99) \quad y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0 \quad \text{Rpta: } y = c_1e^{2x} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x$$

$$(100) \quad y''' + 2y'' = 0, \text{ cuando } x = 0, y = -3, y' = 0, y'' = 12$$

#### 5.4. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes son de la forma siguiente:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = R(x) \quad \dots (1)$$

donde  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  son constantes reales.

Para obtener la solución general de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes, primero se determina la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea  $Y_g$ , y después se busca una solución particular cualquiera de la ecuación diferencial no homogénea  $Y_p$ , y la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea más la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, es decir:

$$Y = Y_g + Y_p$$

Es decir que el problema se reduce a encontrar una solución particular  $Y_p$  de la ecuación diferencial lineal no homogénea. Cuando la función  $R(x)$  de la ecuación (1) tiene la forma:

$$R(x) = e^{\alpha x} [(P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x))]$$

donde  $P_n(x)$  y  $Q_m(x)$  son polinomios de grado  $n$  y  $m$  respectivamente, entonces la solución particular  $Y_p$  de la ecuación (1) es de la forma:

$$Y_p = x^s e^{\alpha x} [\tilde{P}_K(x) \cos(\beta x) + \tilde{Q}_K(x) \sin(\beta x)]$$

donde  $K = \max \{n, m\}$  y  $s$  es el orden de multiplicidad de la raíz  $r = \alpha \pm i\beta$ ;  $\tilde{P}_K(x)$  y  $\tilde{Q}_K(x)$  son polinomios en  $x$  de grado  $K$ , de coeficientes indeterminados, para determinar la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Consideremos los siguientes casos:

**1º Caso:** Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función  $R(x) = P_n(x)$  entonces:

a) Si  $r = 0$ , no es raíz de la ecuación característica  $P(r) = 0$ , entonces la solución particular es:

$$Y_p = \tilde{P}_n(x)$$

- b) Si  $r = 0$ , es raíz de la ecuación característica  $P(r) = 0$  entonces la solución particular es:

$$Y_p = x^s \tilde{P}_n(x)$$

donde  $s$  es la multiplicidad de  $r = 0$

- 2º Caso:** Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función  $R(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$  donde  $\alpha$  es real, entonces:

- a) Si  $r = \alpha$  no es raíz de la ecuación característica  $P(r) = 0$  entonces la solución particular es:

$$Y_p = e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x)$$

- b) Si  $r = \alpha$  es raíz de la ecuación característica  $P(r) = 0$ , entonces la solución particular es:

$$Y_p = x^s e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x)$$

donde  $s$  es la multiplicidad de  $r = \alpha$

- 3º Caso:** Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función  $R(x) = P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$  donde  $P_n(x)$  y  $Q_m(x)$  son funciones polinómicas de grado  $n$  y  $m$  respectivamente, entonces:

- a) Si  $r = \pm i\beta$  no son raíces de la ecuación característica  $P(r) = 0$  entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$Y_p = \tilde{P}_K(x) \cos(\beta x) + \tilde{Q}_K(x) \sin(\beta x)$$

donde  $K = \max \{n, m\}$

- b) Si  $r = \pm i\beta$  es raíz de la ecuación característica  $P(r) = 0$ , entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$Y_p = x^s \left[ \tilde{P}_K(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin \beta x \right]$$

donde  $K = \max \{n, m\}$  y  $s$  es la multiplicidad de  $r = \pm i\beta$

**4° Caso:** Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) es la función  $R(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$  donde  $P_n(x)$  y  $Q_m(x)$  son funciones polinómicas de grado  $n$  y  $m$  respectivamente, entonces:

a) Si  $r = \alpha \pm i\beta$  no es raíz de la ecuación característica  $P(r) = 0$  entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$Y_p = e^{\alpha x} [(P_K(x) \cos \beta x + Q_K(x) \sin \beta x)]$$

donde  $K = \max \{n, m\}$

b) Si  $r = \alpha \pm i\beta$  es raíz de la ecuación característica  $P(r) = 0$  entonces la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$Y_p = x^s e^{\alpha x} [(P_K(x) \cos \beta x + Q_K(x) \sin \beta x)]$$

donde  $K = \max \{n, m\}$  y  $s$  es la multiplicidad de  $r = \alpha \pm i\beta$

a) **Ejemplos:** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} = 3$$

### Solución

Sea  $P(r) = r^2 + 3r = 0$  la ecuación característica donde  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = -3$ . luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea o solución complementaria es:

$$Y_g = c_1 + c_2 e^{-3x}$$

para la solución particular se obtiene de acuerdo a la parte b) del 1° Caso, es decir:

$$Y_p = Ax$$

Como  $Y_p = Ax \Rightarrow Y_p' = A \Rightarrow Y_p'' = 0$ , reemplazando en la ecuación

de donde  $0 + 3A = 3 \Rightarrow A = 1$ , por lo tanto  $Y_p = x$  y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:  $Y = Y_g + Y_p$

es decir:  $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + x$



$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 15y = -(15x^2 + 4x + 13)$$

Solución

Sea  $P(r) = r^2 - 2r - 15 = 0$  el polinomio característico, de donde:  $r_1 = -3$  y  $r_2 = 5$ , luego la solución complementaria o solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x}$$

Para la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, se obtiene de acuerdo a la primera parte del primer caso es decir:  $y_p = Ax^2 + Bx + C$

de donde  $y_p' = 2Ax + B \Rightarrow y_p'' = 2A$ , que reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$2A - 4Ax - 2B - 15Ax^2 - 15Bx - 15C = -(15x^2 + 4x + 13)$$

$$-15Ax^2 - (4A + 15B)x + 2A - 2B - 15C = -(15x^2 + 4x + 13)$$

de donde por identidad se tiene:

$$\begin{cases} -15A = -15 \\ -(4A + 15B) = -4 \\ 2A - 2B - 15C = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases} \quad \text{Luego: } y_p = x^2 + 1$$

por lo tanto la solución general de la ecuación es:  $y = y_g + y_p$

es decir:  $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x} + x^2 + 1$

$$(3) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4y = -4x^5 + 390x$$

Solución

El polinomio característico es:  $P(r) = r^4 - 3r^2 - 4 = 0$  de donde:

$$r_1 = -2, r_2 = 2, r_3 = i \quad \text{y} \quad r_4 = -i$$

y la solución complementaria o solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

Para la solución particular se debe tener en cuenta la primera parte del 1° Caso de donde se tiene:  $y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$ , de donde derivando y reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} -4A = -4 \\ -4B = 0 \\ -60A - 4C = 0 \\ -36B - 4D = 0 \\ 120A - 18C - 4E = 390 \\ 24B - 12D - 4F = 0 \end{array} \right\} \text{ de donde } \begin{cases} A = 1 \\ C = -15 \\ B = D = E = F = 0 \end{cases}$$

Luego  $y_p = x^5 - 15x^3$  y la solución general es:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + x^5 - 15x^3$$

④

$$y'' + 3y' = e^x$$

### Solución

El polinomio característico es  $P(r) = r^2 + 3r = 0$ , de donde  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = -3$ , luego la solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g = c_1 + c_2 e^{-3x}$  y de acuerdo a la parte a, del segundo caso la solución particular es:

$$y_p = Ae^x \text{ de donde } y_p' = Ae^x \Rightarrow y_p'' = Ae^x$$

$$\text{como } y'' + 3y' = e^x \Rightarrow Ae^x + 3Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

Luego la solución particular  $y_p = \frac{e^x}{4}$  y la solución general de la ecuación no homogénea

$$\text{es: } y = y_g + y_p \text{ es decir: } y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{e^x}{4}$$

$$(5) \quad y'' - 4y' = xe^{4x}$$

**Solución**

El polinomio característico es:  $P(r) = r^2 - 4r = 0$  de donde  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 4$ , luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:  $y_g = c_1 + c_2 e^{4x}$  y de acuerdo a la parte b, del segundo caso se tiene la solución particular de la forma:

$$y_p = x(Ax + B)e^{4x}$$

Es decir:  $y_p = (Ax^2 + Bx)e^{4x}$  y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:  $y = y_g + y_p$

$$(6) \quad y'' + y = \sin x - \cos x$$

**Solución**

El polinomio característico es:  $P(r) = r^2 + 1 = 0$ , de donde:  $r_1 = i$ ,  $r_2 = -i$ . Luego la solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea es:  $y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

La solución particular de acuerdo a la parte b, del 3er. caso es de la forma:

$$y_p = x(A \cos x + B \sin x)$$

Es decir:  $y_p = Ax \cos x + Bx \sin x$  y la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:  $y = y_g + y_p$  es decir:  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x$

$$(7) \quad y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$$

**Solución**

El polinomio característico es:  $P(r) = r^2 - 4r + 8 = 0$ , de donde:

$r_1 = 2 + 2i$ ,  $r_2 = 2 - 2i$ , luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:  $y_p = xe^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$  de donde  $y = y_g + y_p$

$$(8) \quad y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$$

**Solución**

El polinomio característico es:  $P(r) = r^2 - r - 2 = 0$ , de donde:  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 2$

Luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$  y de acuerdo a la parte a, del 2do. caso la solución particular es de la forma:  $y_p = Ae^x + Be^{-2x}$

9

$$y'''' - 4y' = xe^{2x} + \cos x + x^2$$

### Solución

El polinomio característico es:  $P(r) = r^4 - 4r = 0$ , de donde:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = -2$ ,  $r_3 = -2$ , luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$  y de acuerdo al 1er y 2do. y 3er. caso la solución particular es de la forma:

$$y_p = x(Ax + B)e^{2x} + C \cos x + D \sin x + x(Ex^2 + Kx + G)$$

$$y_p' = 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} + (2Ax + B)e^{2x} - C \sin x + D \cos x + 3Ex^2 + 2Fx + G$$

$$y_p'' = 8(Ax^2 + Bx)e^{2x} + 12(2Ax + B)e^{2x} + 12Ae^{2x} + C \cos x - D \sin x + 6E$$

reemplazando en la ecuación diferencial e igualando coeficientes se tiene:

$$12A + 8B = 0 \qquad -5D = 0 \qquad 6E - 4G = 0$$

$$16A = 1 \qquad -12E = 1$$

$$5C = 1 \qquad -8F = 0$$

de donde:  $A = \frac{1}{16}$ ,  $B = \frac{3}{32}$ ,  $G = \frac{1}{5}$ ,  $D = F = 0$ ,  $E = -\frac{1}{12}$ ,  $C = -\frac{1}{8}$ , Es decir:

$$y_p = \frac{e^{2x}}{32}(2x^2 - 3x) + \frac{\cos x}{5} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:  $y = y_g + y_p$

$$(10) \quad y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$$

### Solución

El polinomio característico es:  $P(r) = r^2 + 2r + 2 = 0$  de donde  $r_1 = -1 + i$ ,  $r_2 = -1 - i$ , luego la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$y_g = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$  y de acuerdo al 2do. y 4to. caso la solución particular es:

$$y_p = xe^{-x}(A \cos x + B \operatorname{sen} x) + (Cx + D)e^{-x}$$

derivando y reemplazando en la ecuación diferencial e igualando coeficientes se tiene

que:  $A = 0$ ,  $B = \frac{1}{2}$ ,  $C = 1$ ,  $D = 0$  es decir:  $y_p = \frac{x}{2}e^{-x} \operatorname{sen} x + xe^{-x}$  y la solución

general de la ecuación diferencial no homogénea es:  $y = y_g + y_p$

### b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

I.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} - 5y = 5x$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} - x + \frac{4}{5}$$

$$(3) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 + c_2 e^x - c_3 e^{-x} - \frac{x^2}{2} - x$$

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 4(x-1)$$

$$\text{Rpta: } y = e^{2x}(c_1 x + c_2) + x$$

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 2(x+1)^2$$

$$\text{Rpta: } y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + x^2$$

$$(6) \quad y'' + y' + y = x^2 + 2x - 2$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + x^2 - 4$$



- 7  $y^{iv} + 4y'' = 8(6x^2 + 5)$  **Rpta:**  $y = c_1x + c_2 + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x + x^2(x^2 + 2)$
- 8  $y^{iv} - 3y'' + 3y' - y = (2+x)(2-x)$  **Rpta:**  $y = e^x(c_1x^2 + c_2x + c_3) + x^2 + 6x + 8$
- 9  $2y'' - 9y' + 4y = 18x - 4x^2$  **Rpta:**  $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{4x} + 1 - x^2$
- 10  $y^{iv} - 2y'' + y = x^2 - 5$  **Rpta:**  $y = e^x(c_1x + c_2) + e^{-x}(c_3x + c_4) + x^2 - 1$
- 11  $y^{iv} - 3y'' + 2y' = 6x(x-3)$  **Rpta:**  $y = c_1 + e^x(c_2x + c_3) + c_4e^{-2x} + x^3$
- 12  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 25x^2 + 12$  **Rpta:**  $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + 2 + 4x + 5x^2$
- 13  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 12x - 10$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2e^{2x} + 2x - x^2$
- 14  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 2x, y(0) = 0, y'(0) = 1$  **Rpta:**  $y = e^x - \frac{e^{-2x}}{2} - x - \frac{1}{2}$
- 15  $y'''' + 4y' = x, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$  **Rpta:**  $y = \frac{3}{16}(1 - \cos 2x) + x^2$
- 16  $y^{iv} + 2y'' + y = 3x + 4, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1$   
**Rpta:**  $y = (x-4)\cos x - (\frac{3}{2}x + 4)\operatorname{sen} x + 3x + 4$
- 17  $y^{iv} + y'' = x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(c_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{x^4}{24}$
- 18  $y'' + 2y' + 3y = 9x$  **Rpta:**  $y = c_1e^{-x} \cos \sqrt{2}x + c_2e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}x + 3x - 2$
- 19  $y'' + y' - 2y = 14x + 2x - 2x^2$  **Rpta:**  $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + x^2 - 6$
- 20  $y'' + y = x^2 + 2, y(0) = y'(0) = 2$  **Rpta:**  $y = x^2 + 2 \operatorname{sen} x$

- (21)  $y'' + y' + y = x^4 + 4x^3 + 12x^2$  Rpta:  $y = c_1 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x + x^4$
- (22)  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2x^2 - 3x - 17$  Rpta:  $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x - 2x^2 - 9x + 2$
- (23)  $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$  Rpta:  $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x} + \frac{2}{9} x^2 + \frac{5}{27} x + \frac{11}{27}$
- (24)  $y' + 4y' - 5y = 1$  Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - 0.2$
- (25)  $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$  Rpta:  $y = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{2x} - x - 4$
- (26)  $y'' + y''' = x^2 - 1$  Rpta:  $y = \frac{x^5}{60} - \frac{x^3}{2} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x$
- (27)  $y''' - y' = 3(2-x)$ ,  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$  Rpta:  $y = e^x + x^3$
- (28)  $y''' - y' = x$  Rpta:  $c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{x^2}{2} = y$
- (29)  $y'' - 2y' + y = -2$  Rpta:  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} - 2$
- (30)  $y'' + 9y - 9 = 0$  Rpta:  $y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + 1$
- (31)  $y''' + y'' = 1$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2}$
- (32)  $5y''' - 7y'' - 3 = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\frac{7x}{5}} - \frac{3x^2}{14}$
- (33)  $y^{iv} - 6y''' + 6 = 0$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{6x} + \frac{x^3}{6}$
- (34)  $3y^{iv} + y''' = 2$  Rpta:  $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}$
- (35)  $y^{iv} - 2y''' - 2y' + y = 1$  Rpta:  $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (c_3 + c_4 x) e^x - 1$

- 36)  $y''+2y'+2y=1+x$  **Rpta:**  $y = e^{-x}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{cos} x) + \frac{x}{2}$
- 37)  $7y''-y'=14x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{\frac{x}{7}} - 7x^2 - 98x$
- 38)  $y'''-y''+y'=x^2+x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x$
- 39)  $y''-4y'+4y=x^2$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$
- 40)  $y''+8y'=8x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}$
- 41)  $y''-2y'+y=x^3$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x)e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$
- 42)  $y^{iv} + y'' = x^2 + x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{cos} x + c_4 \operatorname{sen} x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2$
- 43)  $y''-6y'+9y=x^2-x+3$ ,  $y(0)=\frac{4}{3}$ ,  $y'(0)=\frac{1}{27}$  **Rpta:**  $y = (1-3x)e^{3x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{27} + \frac{1}{3}$
- 44)  $y'''-y=2x$ ,  $y(0)=y'(0)=0$ ,  $y''(0)=2$  **Rpta:**  $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2x$
- 45)  $y''-4y'+4y=x^2$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$
- 46)  $y''-y'+y=x^3+6$  **Rpta:**  $y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 \operatorname{cos} x \frac{\sqrt{3}}{2} + c_2 \operatorname{sen} x \frac{\sqrt{3}}{2}) + x^3 + 3x^2$
- 47)  $y''-y=2-x^2$ ,  $y(0)=2$ ,  $y'(0)=0$
- 48)  $y''+6y'+10y=x^4+2x^2+2$
- 49)  $y'''+3y''+3y'+y=x^4+4x^3+10x^2+20x+1$

II.- Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales:

①  $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$  **Rpta:**  $y = c_1e^{3x} + c_2e^{4x} - xe^{4x}$

②  $y'' - 2y' + y = 2e^x$  **Rpta:**  $y = e^x(c_1 + c_2x + x^2)$

③  $y'' = xe^x + y$  **Rpta:**  $c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{(x^2 - x)e^x}{4}$

④  $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2x + \frac{x^3}{6})e^{2x}$

⑤  $y'' - 6y' + 9y = e^x$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2x)e^{3x} + \frac{e^x}{4}$

⑥  $y'' - 3y' - 4y = 30e^{-x}$  **Rpta:**  $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x} - 5e^x$

⑦  $y'' - 3y' - 4y = 30e^{4x}$  **Rpta:**  $y = (c_1 + 6x)e^{4x} + c_2e^{-x}$

⑧  $y'' - y = 8xe^x$  **Rpta:**  $y = c_1e^{-x} + e^x(c_2 - 2x + 2x^2)$

⑨  $y'' - y = e^{-x}$  **Rpta:**  $y = c_1e^x + (c_2 - \frac{x}{4})e^{-x} - c_3 \cos x + c_4 \sin x$

⑩  $y'' + y = 10e^{2x}$  cuando  $x = 0, y = 0 \wedge y' = 0$  **Rpta:**  $y = 2(e^{2x} - \cos x - 2 \sin x)$

⑪  $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$  **Rpta:**  $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x} + \frac{e^{4x}}{3}$

⑫  $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$  **Rpta:**  $y = c_1e^{-5x} + c_2e^{-5x} + 7x^2e^{-5x}$

⑬  $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$  **Rpta:**  $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}$

⑭  $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$  **Rpta:**  $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{e^{2x}}{2}$

⑮  $2y'' + y' - y = 2e^x$  **Rpta:**  $y = c_1e^{-x} + c_2e^{\frac{x}{2}} + e^x$

- 16  $y'' + a^2 y = e^x$  **Rpta:**  $y = c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax + \frac{e^x}{a^2 + 1}$
- 17  $y'' + 4y' + 2y = xe^{-2x}$  **Rpta:**  $y = y_g - \frac{x}{2} e^{-2x}$
- 18  $6y'' + 2y' - y = 7x(x+1)e^x$  **Rpta:**  $y = y_g + (x^2 - 3x + \frac{30}{7})e^x$
- 19  $y''' - 2y'' + 10y' = 3xe^x$  **Rpta:**  $y = y_g + \frac{x-1}{3} e^x$
- 20  $y'' - y' + \frac{y}{4} = xe^{\frac{x}{2}}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{x}{2}} + y_p$
- 21  $y'' - y' = 6x^5 e^x$  **Rpta:**  $y = c_1 + (x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 102x^3 + 360x^2 - 720x + c_2) e^x$
- 22  $y'' - y = 2e^{-x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + xe^{-x}$
- 23  $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x + 2xe^{3x}$
- 24  $y'' + 2y' + y = e^{-2x}$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + e^{-2x}$
- 25  $3y^{(iv)} + 8y''' + 6y'' = (x^3 - 6x^2 + 12x - 24)e^{-x}$   
**Rpta:**  $y = c_1 + c_2 x + e^{-\frac{x}{3}} [c_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{3} x + c_4 \cos \frac{\sqrt{2}}{3} x] + (x^3 - 6x^2 + 12x) e^{-x}$
- 26  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 2e^{2x}$  **Rpta:**  $y = (c_1 + mc^2 x) e^x + 2e^{2x}$
- 27  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 3xe^x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + xe^x - \frac{4}{3} e^x$
- 28  $y'' - 2ky' + k^2 y = e^x, k \neq 1$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x) e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$



- 29  $y'' - 4y' + 3y = 9e^{-3x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} - \frac{9}{2} x e^{-3x}$
- 30  $y'' + 3y' = 3x e^{-3x}$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) e^{-3x}$
- 31  $y'' + 5y' + 6y = 10(1-x)e^{-2x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + (20x - 5x^2) e^{-2x}$
- 32  $y'' + y' + y = (x + x^2) e^x$  **Rpta:**  $y = e^{-\frac{x}{2}} \left( c_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \left( \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \right) e^x$
- 33  $y'' - 3y' + 2y = x e^x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{2x} + \left( c_2 - x - \frac{x^2}{2} \right) e^x$
- 34  $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{e^{4x}}{18} \left( x^2 - x + \frac{7}{18} \right)$
- 35  $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x) e^{3x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{e^{3x}}{5} (x^2 - x + 2)$
- 36  $y'' - 2y''' - 2y' + y = e^x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 x e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{x^2}{4} e^x$
- 37  $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7) e^{-x}$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$  **Rpta:**  $y = e^{2x} - e^{3x} + x e^{-x}$
- 38  $y'' - 2y' - 3y = (x - 2) e^x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \left( -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) e^x$
- 39  $y'' - 5y' + 6 = (x + 1)^2 e^{-2x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \left( \frac{x^2}{20} + \frac{29}{200} x + \frac{441}{4000} \right) e^{-2x}$
- 40  $4y'' - 4y' + y = (x - 1) e^{\frac{x}{2}}$  **Rpta:**  $y = e^{\frac{x}{2}} (c_1 x + c_2) + x^2 \left( \frac{x}{24} - \frac{1}{8} \right) e^{\frac{x}{2}}$
- 41  $y'' - 2y' + y = (x + 1) e^x$  **Rpta:**  $y = e^x (c_1 x + c_2) + x^2 \left( \frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right) e^x$
- 42  $y'' + 2y' = (4x^2 + 6x - 1) e^{2x}$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x} + \frac{x}{4} (x - 1) e^{2x}$

$$(43) \quad y'' - 4y = 6e^x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

$$(44) \quad y'''' + y' - 10y = 29e^{4x}$$

$$(45) \quad y'' + 4y' + 5y = 10e^{-3x}, \quad \text{cuando } x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0$$

III.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$(1) \quad y'' + y = 3 \sin 2x + x \cos x \quad \text{Rpta: } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{3} \cos 2x - \frac{5}{9} \sin 2x$$

$$(2) \quad y'' + y = \cos x - \sin x \quad \text{Rpta: } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} (\cos x + \sin x)$$

$$(3) \quad y'' + 9y = \cos 3x \quad \text{Rpta: } y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + \frac{x}{6} \sin 3x$$

$$(4) \quad y'' + y' - 6y = \sin x \cdot \cos x \quad \text{Rpta: } y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{104} (5 \sin 2x + \cos 2x)$$

$$(5) \quad y'' + 2y' + y = \sin 2x \quad \text{Rpta: } y = e^{-x} (c_1 + c_2 x) - \frac{1}{25} (3 \sin 2x + 4 \cos 2x)$$

$$(6) \quad y'' - 4y' + 5y = \cos x + \sin x \quad \text{Rpta: } y = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{\cos x}{4}$$

$$(7) \quad y'' - y = \sin x - 2 \cos x \quad \text{Rpta: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{x}{4} (\cos x + 2 \sin x)$$

$$(8) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sin x \quad \text{Rpta: } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

$$(9) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \cos x \quad \text{Rpta: } y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{\cos x}{3}$$

$$(10) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 5 \sin 2x \quad \text{Rpta: } y = (c_1 + c_2 x) e^x + (c_3 + c_4 x) e^{-x} + \frac{\sin 2x}{5}$$

$$(11) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 4x \sin x \quad \text{Rpta: } y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{x}{2} \sin x - \frac{\cos x}{8}$$

$$(12) \quad y'' + 4y' - 2y = 8 \sin 2x \quad \text{Rpta: } y = c_1 e^{-(\sqrt{6}+2)x} + c_2 e^{(\sqrt{6}-2)x} - \frac{12 \sin 2x + 16 \cos 2x}{25}$$

13)  $y'' + y = 4x \cos x$  **Rpta:**  $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x + x \cos x$

14)  $y'' - 2my' + m^2 y = \operatorname{sen}(nx)$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x)e^{mx} + \frac{(m^2 - n^2)\operatorname{sen}(nx) + 2mn \cos nx}{(m^2 + n^2)^2}$

15)  $y'' + a^2 y = 2 \cos(mx) + 3 \operatorname{sen}(mx)$ ,  $m \neq a$

**Rpta:**  $y = c_1 \cos(ax) + c_2 \operatorname{sen}(ax) + \frac{2 \cos(mx) + 3 \operatorname{sen}(mx)}{a^2 - m^2}$

16)  $4y'' + 8y' = x \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{-2x} - \left(\frac{x}{20} - \frac{7}{50}\right) \operatorname{sen} x - \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right) \cos x$

17)  $y'' + y = x^2 \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = \left(c_1 + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{6}\right) \cos x + \left(c_2 + \frac{x^2}{4}\right) \operatorname{sen} x$

18)  $y'''' - y = \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{1}{2} (\cos x - \operatorname{sen} x)$

19)  $y'' + y = 2 \cos x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  **Rpta:**  $y = \cos x + x \operatorname{sen} x$

20)  $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$  **Rpta:**  $y = \cos 2x + \frac{1}{3} (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x)$

21)  $y'' + 4y = 4(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$ ,  $y(\pi) = y'(\pi) = 2$

**Rpta:**  $y = 3\pi \cos 2x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + x(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$

22)  $y'' + 4y = -12 \operatorname{sen} 2x$  **Rpta:**  $Y = A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x + 3x \cos 2x$

23)  $y'' + y = -9 \cos 2x$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$  **Rpta:**  $y = \operatorname{sen} x - \cos x + 3 \cos 2x$

24)  $y'' + 2y' + 2y = -2 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  **Rpta:**  $y = e^{-x} \operatorname{sen} x + \cos 2x$

25)  $y'' + 2y' + 2y = 2 \operatorname{sen} 2x - 4 \cos 2x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  **Rpta:**  $y = 2e^{-x} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

26)  $y'' + 4y' + 3y = 4 \operatorname{sen} x + 8 \cos x$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$  **Rpta:**  $y = 3e^{-x} + 2 \operatorname{sen} x$

27.  $y'' + y = 2 \cos x$  **Rpta:**  $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x \sin x$
28.  $y'' - 3y' + 2y = 14 \sin 2x - 18 \cos 2x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \sin 2x + 3 \cos 2x$
29.  $y'' + k^2 y = \sin(bx)$ ,  $k \neq b$  **Rpta:**  $y = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) + \frac{\sin(bx)}{k^2 - b^2}$
30.  $y'' - 7y' + 6y = \sin x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^x + \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74}$
31.  $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2} \cos 2x$  **Rpta:**  $y = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - \frac{\cos 2x}{2} - 2 \sin 2x$
32.  $y'' + y' + \sin 2x = 0$ ,  $y(\pi) = y'(\pi) = 1$  **Rpta:**  $y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{\sin x}{3} - \cos x$
33.  $y'' - 4y' + 3y = 2 \cos x + 4 \sin x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \cos x$
34.  $y''' - y'' + y' - y = 4 \sin x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + (c_2 + x) \cos x + (c_3 - x) \sin x$
35.  $y'' + y = 2 \cos x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$  **Rpta:**  $y = (c + x) \sin x$
36.  $y'' - 4y' + 3y = 20 \cos x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + 2 \cos x - 4 \sin x$
37.  $y'' + y' - 2y = -6(\sin 2x + 3 \cos 2x)$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 2$
38.  $y'' + y = -60 \sin 4x$ ,  $y(0) = 8$ ,  $y'(0) = 14$
39.  $y'' + 4y' + 5y = 8(\sin 3x - 3 \cos 3x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -7$ .

IV.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1.  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 2e^{2x} \sin x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{3}{5} e^{2x} \sin x - \frac{e^{2x}}{5} \cos x$
2.  $4y'' - 5y' + y = e^x (\sin 2x - \cos 2x)$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{x/4} + \frac{e^x}{146} (-11 \sin 2x + 5 \cos 2x)$

$$\textcircled{3} \quad y''' + y'' - 2y = e^{-x}(2 \cos x + x \sin x) \quad \text{Rpta: } y = c_1 e^x + e^{-x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x) - \frac{x e^{-x}}{2} \sin x$$

$$\textcircled{4} \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sin x \quad \text{Rpta: } y = e^{-2x}(c_1 x + c_2) - e^{-2x} \sin x$$

$$\textcircled{5} \quad y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \cos x \quad \text{Rpta: } y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{x e^{-2x}}{2} \sin x$$

$$\textcircled{6} \quad y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x \quad \text{Rpta: } y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{x e^x}{2} \sin x$$

$$\textcircled{7} \quad y'''' + 4y''' - 12y'' = 8e^{2x} \cos x \sin x \quad \text{Rpta: } y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-6x} - \frac{1}{68} e^{2x}(5 \sin 2x + 3 \cos 2x)$$

$$\textcircled{8} \quad y'' + 2y' + y = e^x \cos x \quad \text{Rpta: } y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{e^x}{25}(3 \cos x + 4 \sin x)$$

$$\textcircled{9} \quad y'' + 2y' + 5y = e^x \sin 2x \quad \text{Rpta: } y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - \frac{x e^{-x}}{4} \cos 2x$$

$$\textcircled{10} \quad y'' - y' = e^x \sin x \quad \text{Rpta: } y = c_1 + c_2 e^x - \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\textcircled{11} \quad y'' + 2y' + y = x^2 e^x \cos x \quad \text{Rpta: } y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}(-x^2 \cos x + 4x \sin x + 6 \cos x)$$

$$\textcircled{12} \quad y'''' - 3y''' + 3y'' - y = e^x \cos 2x \quad \text{Rpta: } y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x - \frac{e^x}{8} \sin 2x$$

V.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\textcircled{1} \quad y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6 \quad \text{Rpta: } y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{18}(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})e^{3x} + \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{2} \quad y'' + 2y' = 3 + 4 \sin 2x \quad \text{Rpta: } y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{3x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$



③  $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$

**Rpta:**  $y = \frac{7}{10} \operatorname{sen} 2x - \frac{19}{40} \cos 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{5} e^x$

④  $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$  **Rpta:**  $y = 4xe^x - 3e^x + \frac{x^2}{6} e^x + 4$

⑤  $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3 \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}} + (x^2 - 6x + 14) - \frac{3}{10} \operatorname{sen} x - \frac{9}{10} \cos x$

⑥  $y'' + y' + y = \operatorname{sen}^2 x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{13} + \frac{3 \cos 2x}{26}$

⑦  $y'' + y' + y = 2 \operatorname{senh} x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{15}}{2} x + c_2 e^{-x/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{2} x + \frac{e^x}{6} - \frac{e^{-x}}{4}$

⑧  $y'' - y' - 2y = \cosh 2x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{xe^{2x}}{6} + \frac{e^{-2x}}{8}$

⑨  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2x + \operatorname{sen} 2x)$

**Rpta:**  $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) - \frac{xe^{-x}}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} e^{-x}$

⑩  $y^{(4)} - y^{(4)} = xe^x - 1$  **Rpta:**  $y = \frac{x^4}{24} + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 + (\frac{x^2}{2} - 4x + c_5) e^x$

⑪  $y^{(4)} - 4y' = xe^{2x} + \operatorname{sen} x + x^2$

**Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{\cos x}{5} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} + \frac{e^{2x}}{2} (2x^2 - 3x)$

⑫  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$

**Rpta:**  $y = \frac{x}{2} e^{-x} \operatorname{sen} x + xe^{-x} + e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$

$$(13) \quad y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{\cos x}{2}$$

$$\text{Rpta: } y = \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{4}\right)e^x + (c_1 + c_2x)e^{-x} + \left(c_3 - \frac{x}{8}\right)\cos x + c_4 \sin x$$

$$(14) \quad y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2 \quad \text{Rpta: } y = c_1 + c_2e^{-x} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right) + \frac{e^x}{2} + \frac{\sin x}{20} - \frac{\cos 2x}{10}$$

$$(15) \quad y^v + 4y''' = e^x + 3 \sin 2x + 1$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x + \frac{e^x}{5} + \frac{x^3}{24} + \frac{3x}{32} \sin 2x$$

$$(16) \quad y'' - y' = x^2 - e^{-x} + e^x \quad \text{Rpta: } y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + xe^{-x} + \frac{x}{2}$$

$$(17) \quad y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \sin x \quad \text{Rpta: } y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{e^x}{2} + \frac{\cos x - 2 \sin x}{5}$$

$$(18) \quad y'' - 4y' = 4x + \sin x + \sin 2x$$

$$\text{Rpta: } y = (c_1 + c_2x)e^x + x + 1 + \frac{1}{25}(4 \cos x + 3 \sin x) + \frac{\cos 2x}{8}$$

$$(19) \quad y'' - 4y' + 5y = 1 + \cos^2 x + e^{2x}$$

$$\text{Rpta: } y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1)e^{2x} + \frac{3}{10} + \frac{\cos 2x}{130} - \frac{4 \sin 2x}{65}$$

$$(20) \quad y'' - 2y' + 4y = e^x \cos x + x^2 + \sin 2x$$

$$\text{Rpta: } y = c_1e^{-2x} + (c_2 \cos x + c_3 \sin x)e^x + \frac{1}{8}(2x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{40}(\sin 2x + 3 \cos 2x) + \frac{xe^x}{20}(3 \sin x - \cos x)$$

$$(21) \quad y'' + 2y' = 3 + 4 \sin 2x$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{3x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

22)  $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  **Rpta:**  $y = 4xe^x - 3e^x + \frac{x^3 e^x}{6} + 4$

23)  $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3 \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{e^x}{25} (3 \cos x + 4 \operatorname{sen} x)$

24)  $y'' - 8y' + 15y = (15x^2 + 14x + 1) + e^x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x} + (x+1)^2 + \frac{e^x}{8}$

25)  $y'''' + 4y'' + 4y = e^{-2x} + 8(x+1)$  **Rpta:**  $y = c_1 + e^{-2x}(c_2 x + c_3) + x^2 - \frac{x^2 e^{-2x}}{4}$

26)  $y^{iv} - y'''' + y'' = 12x^2 - 24x + e^{-x}$   
**Rpta:**  $y = c_1 + c_2 x + e^{\frac{x}{2}} [c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x] + (x^4 - 12x^2) + \frac{e^{-x}}{3}$

27)  $y^{iv} - 8y'' + 16y = x \operatorname{senh} x(2x)$   
**Rpta:**  $y = e^{2x}(c_1 x + c_2) + e^{-2x}(c_3 x + c_4) + x^2 e^{2x} (\frac{x}{192} - \frac{1}{128}) - x^3 e^{-2x} (\frac{x}{192} + \frac{1}{128})$

28)  $y'''' - y' = (x + e^x)^2$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{e^{2x}}{6} - x(\frac{x^2}{3} + 2) + \frac{x}{2}(x-3)e^x$

29)  $y'''' + y'' + y' + y = x \operatorname{cosh}(-x)$   
**Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \frac{e^x}{8}(x-3/2) + \frac{x}{8}(x+2)e^{-x}$

30)  $y'''' + 2y'' + y' = \operatorname{sen} x + 2 \cos 2x$   
**Rpta:**  $y = c_1 + e^{-x}(c_2 x + c_3) - \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{1}{25} (3 \operatorname{sen} 2x + 4 \cos 2x)$

VI.- Dar la forma de la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales

1)  $y'' - 4y' = x^2 e^{2x}$  **Rpta:**  $y_p = x e^{2x} (Ax^2 + Bx + C)$

2)  $y'' + 9y = \cos 2x$  **Rpta:**  $y_p = A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$

③  $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$  **Rpta:**  $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + cx^2 e^{2x}$

④  $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$  **Rpta:**  $y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$

⑤  $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$  **Rpta:**  $y_p = e^x (Ax^2 + Bx + C) + xe^{2x} (Dx + E)$

⑥  $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$

**Rpta:**  $y_p = xe^x [(Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x]$

⑦  $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2 e^{-3x} + \sin 3x$

**Rpta:**  $y_p = x(A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5) + x(B_1 x^2 + B_2 x + B_3) e^{-3x} + D \sin 3x + E \cos 3x$

⑧  $y'' + y = x(1 + \sin x)$  **Rpta:**  $y_p = A_1 x + A_2 + x(B_1 x + B_2) \sin x + x(D_1 x + D_2) \cos x$

⑨  $y'' + 5y' + 6y = e^x \cos 2x + e^{2x} (3x + 4) \sin x$

**Rpta:**  $y_p = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x) + (D_1 + D_2 x) e^{2x} \sin x + (E_1 x + E_2) e^{2x} \cos x$

⑩  $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 2e^{-x} \cos x + 4e^{-x} x^2 \sin x$

**Rpta:**  $y_p = Ae^{-x} + x(B_1 x^2 + B_2 x + B_3) e^{-x} \cos x + x(C_1 x^2 + C_2 x + C_3) e^{-x} \sin x$

⑪  $y'' + 3y' + 2y = e^x (x^2 + 1) \sin 2x + 3e^x \cos x + 4e^x$

**Rpta:**  $y_p = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^x \sin 2x + (B_1 x^2 + B_2 x + B_3) e^x \cos 2x + e^{3x} (D \cos x + E \sin x) + Fe^x$

⑫  $y'' + 4y' = x^2 \sin 2x + (6x + 7) \cos 2x$

**Rpta:**  $y_p = x(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) \sin 2x + (B_1 x^2 + B_2 x + B_3) \cos 2x$

⑬  $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{-x} + x \sin 2x$

**Rpta:**  $y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3 + x^2 (B_1 x + B_2) e^{2x} + (C_1 x + C_2) \sin 2x + (D_1 x + D_2) \cos 2x$

$$(14) \quad y'' - 4y' + 4 = x(2e^{2x} + x \operatorname{sen} x)$$

$$(15) \quad y'' + 2y' + 2y = x^2 - 3xe^{-2x} \cos 5x$$

$$(16) \quad y''' - 3y' - 2y = e^x(1 + xe^x)$$

$$(17) \quad y'' + 5y' + 4y = 2 \cos x$$

$$(18) \quad y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \operatorname{sen} 2x)$$

$$(19) \quad y''' - y'' + y = 2(x + 2e^{-x})$$

$$(20) \quad y''' + 3y'' - 4y = 9xe^{-2x} + 4x$$

### 5.5. MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETRO.-

Consideremos una ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constante de tercer orden.

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + a_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = f(x) \quad \dots (1)$$

donde  $a_1, a_2, a_3$  son constantes y  $f(x)$  es una función sólo de  $x$  ó constante.

Suponiendo que la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

Luego la solución particular de la ecuación (1) es:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

donde  $u_1, u_2, u_3$  son funciones incógnitas que satisfacen a las condiciones siguientes.

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 = 0 \\ u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_3 y_3' = 0 \\ u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_3 y_3'' = f(x) \end{cases} \quad \dots (2)$$

La ecuación (2) es un sistema de ecuaciones en  $u_1, u_2, u_3$ , el método consiste en:

1<sup>ro</sup> Escribir la solución general de la ecuación diferencial homogénea.

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$



2<sup>do</sup> Reemplazar  $c_1, c_2, c_3$  por las funciones incógnitas  $u_1, u_2, u_3$  obteniendo la solución particular de la ecuación (1).

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

3<sup>ro</sup> Formar el sistema bajo las condiciones de la ecuación (2).

4<sup>to</sup> Por medio de integración obtenemos  $u_1, u_2$  y  $u_3$ .

a) **Ejemplos.-** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

①

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$$

### Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación homogénea para esto se tiene:

$$p(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i, r_2 = -i \text{ de donde } y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

la solución particular de la ecuación diferencial es:  $y_p = u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$ , tal que

$$\begin{cases} u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x = 0 \\ u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x = \operatorname{cosec} x; \text{ de donde} \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \cos \operatorname{cosec} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -1 \Rightarrow u_1 = -1 \Rightarrow u_1 = -x$$

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \cos \operatorname{cosec} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = c \operatorname{tg} x \Rightarrow u_2 = c \operatorname{tg} x \Rightarrow u_2 = \ln(\operatorname{sen} x)$$

$$y_p = -x \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_g + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + \sin x \cdot \ln(\sin x)$$

$$\therefore y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + \sin x \cdot \ln(\sin x)$$

2

$$y'' + 4y = 4 \sec^2 x$$

### Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$$P(r) = r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2i, r_2 = -2i \text{ por lo tanto } y_g = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

la solución particular de la ecuación diferencial es:  $y_p = u_1 \cos 2x + u_2 \sin 2x$ , tal que

$$\begin{cases} u_1 \cos 2x + u_2 \sin 2x = 0 \\ -2u_1 \sin 2x + 2u_2 \cos 2x = 4 \sec^2 x \end{cases} \quad \dots (\alpha)$$

reemplazando el sistema  $(\alpha)$  se tiene:

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ 4 \sec^2 x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{-4 \sec^2 x \sin 2x}{2} = -2 \sec^2 x \cdot \sin 2x \Rightarrow u_1 = 4 \ln(\cos x)$$

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & 4 \sec^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{4 \sec^2 x \cdot \cos 2x}{2}$$

$$u_2 = 2 \sec^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 - 2 \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow u_2 = 4x - 2 \operatorname{tg} x$$

Como  $y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin 2x$ , al reemplazar se tiene:

$$\therefore y_p = 4 \cos 2x \cdot \ln(\cos x) + (4x - 2 \operatorname{tg} x) \sin 2x$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial dada es:  $y = y_g + y_p$

$$\textcircled{3} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec^2 x$$

### Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$$P(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i, r_2 = -i; \text{ de donde } y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

la solución particular de la ecuación diferencial es  $y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x$ , donde  $u_1, u_2$  son funciones incógnitas, que cumplen la condición siguiente:

$$\begin{cases} u_1 \cos x + u_2 \sin x = 0 \\ -u_1 \sin x + u_2 \cos x = \sec^2 x \end{cases} \quad \dots (\alpha)$$

resolviendo el sistema  $(\alpha)$  se tiene:

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec^2 x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} x \cdot \sec x \Rightarrow u_1 = -\sec x$$

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \sec x \Rightarrow u_2 = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

Como  $y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x$  reemplazando se tiene:  $y_p = -1 + \sin x \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|$

y la solución general de la ecuación diferencial es:  $y = y_g + y_p$

$$\textcircled{4} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos x \operatorname{cosec} x$$

### Solución

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial homogénea, para esto se tiene:

$$P(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i, r_2 = -i. \text{ Por lo tanto } y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

la solución particular de la ecuación diferencial es  $y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x$ , donde  $u_1, u_2$  son funciones incógnitas, que cumplen la condición siguiente:

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0 \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \cos x \operatorname{cosec} x \operatorname{tg} x \end{cases} \dots (\alpha)$$

resolviendo el sistema  $(\alpha)$  se tiene:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos x \operatorname{cosec} x \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -c \operatorname{tg} x \Rightarrow u_1 = -\ln(\sin x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cos x \operatorname{cosec} x \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = c \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow u_2 = -c \operatorname{tg} x - x$$

Luego  $y_p = -\cos x \cdot \ln|\sin x| - (c \operatorname{tg} x + x) \sin x$  y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_g + y_p$$

### b. EJERCICIOS PROPUESTOS.

- ①  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = c \operatorname{tg} x$       **Rpta:**  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \sin x \cdot \ln|\cos x - c \operatorname{tg} x|$
- ②  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec x$       **Rpta:**  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|$
- ③  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 4c \operatorname{tg} 2x$       **Rpta:**  $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \sin 2x \cdot \ln|\cos 2x - c \operatorname{tg} 2x|$
- ④  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sec x$       **Rpta:**  $y = e^{-x}(c_1 + x) \sin x + e^{-x}[c_2 + \ln(\cos x)] \cos x$
- (  $y'' + 4y' + 4y = x^{-2} e^{-2x}$       **Rpta:**  $y = e^{-2x}[c_1 - 1 + c_2 x - \ln x]$

- ⑥  $y''+y = \operatorname{tg}^2 x$  **Rpta:**  $y = y_g + \operatorname{sen} x \cdot \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2 \cos x} - 1$
- ⑦  $y''+y = \sec^2 x \cdot \operatorname{csc} x$  **Rpta:**  $y = y_g - \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{csc} 2x - c \operatorname{tg} 2x)$
- ⑧  $y''-2y'+y = e^{2x} (e^x + 1)^{-2}$  **Rpta:**  $y = y_g + e^x \ln(1 + e^x)$
- ⑨  $y''-3y'+2y = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$  **Rpta:**  $y = y_g + e^x \operatorname{arctg}(e^{-x}) - \frac{e^{2x}}{2} \ln(1 + e^{-2x})$
- ⑩  $y''+y = \sec^3 x$  **Rpta:**  $y = y_g + \frac{\sec x}{2}$
- ⑪  $y''+y = \operatorname{tg} x$  **Rpta:**  $y = y_g - \cos x \cdot \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$
- ⑫  $y''-y = e^{-2x} \operatorname{sen}(e^{-x})$  **Rpta:**  $y = y_g - \operatorname{sen} e^{-x} - e^x \cos e^{-x}$
- ⑬  $y''-3y'+2y = \cos(e^{-x})$  **Rpta:**  $y = y_g - e^{2x} \cos(e^{-x})$
- ⑭  $9y''+y = \sec\left(\frac{x}{3}\right)$  **Rpta:**  $y = [c_1 + \frac{x}{3}] \operatorname{sen} \frac{x}{3} + [c_2 + \ln(\cos \frac{x}{3})] \cos \frac{x}{3}$
- ⑮  $y''-y = \operatorname{sen}^2 x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{2}{5} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{5}$
- ⑯  $y''-y = x^2 e^{\frac{x^2}{2}}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{\frac{x^2}{2}}$
- ⑰  $y''-2y'+2y = 3x + e^x \operatorname{tg} x$   
**Rpta:**  $y = (c_1 \operatorname{sen} x + [c_2 - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)] \cos x) e^x + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2}$
- ⑱  $y''+y = x \cos x$  **Rpta:**  $y = (c_1 + \frac{x^2}{4}) \operatorname{sen} x + (c_2 + \frac{x}{4}) \cos x$
- ⑲  $y'''-7y'-6y = 26e^{-2x} \cos x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + (c_2 + 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x) e^{-2x} + c_3 e^{3x}$



- 20  $y''+3y'+2y = \operatorname{sen}(e^x)$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + (c_2 + \operatorname{sen} e^x) e^{-2x}$
- 21  $y''+4y = \sec 2x$  **Rpta:**  $y = A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x + \frac{\cos 2x}{4} \cdot \ln(\cos 2x) + \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x$
- 22  $y''+2y'+y = e^{-x} \ln(x)$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + x^2 e^{-x} \left( \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{3}{4} \right)$
- 23  $y''+4y'+4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \ln x - e^{-2x}$
- 24  $y''-2y'+y = -e^x \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 x) e^x - \cos x e^x$
- 25  $y''-4y'+4y = (3x^2 + 2)e^x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + (3x^2 + 12x + 20) e^x$
- 26  $y'''-y''-y'+y = 4xe^x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^x + \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) e^x$
- 27  $y'''-y' = \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + \frac{\cos x}{2}$
- 28  $y'''-3y''-y'+3y = 1 + e^x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} - \frac{2}{3} e^{-3x} - e^{-2x}$
- 29  $y'''-2y'' = 4(x+1)$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} - \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{3}{4} \right)$
- 30  $y'''-3y''-2y = 9e^{-x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x} - \frac{3x^2}{2} e^{-x}$
- 31  $y'''-7y''+6y = 2 \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x} + \frac{1}{25} (4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x)$
- 32  $y'''-y' = \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + \frac{\cos x}{2}$
- 33  $y'' - y'' = 2xe^x$  **Rpta:**  $y = c_2 + c_3 x + c_4 e^{-x} + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} x + c_1 \right) e^x$

- 34)  $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$  **Rpta:**  $y = y_g + e^x$
- 35)  $y' - y' - 2y = 2e^{-x}$  **Rpta:**  $y = y_g - \frac{2x}{3}e^{-x}$
- 36)  $y'' + 4y = 3 \operatorname{csc} 2x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  **Rpta:**  $y = y_g + \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2x \ln(\operatorname{sen} 2x) - \frac{3}{2} x \cos 2x$
- 37)  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$ ,  $x > 0$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \ln x - e^{-2x}$
- 38)  $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$  **Rpta:**  $y = y_g + \frac{3x^2}{2} e^{-x}$
- 39)  $y''' - y' = x$  **Rpta:**  $y = A + Be^x + ce^{-x} - \frac{x^2}{2}$
- 40)  $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$  **Rpta:**  $y = e^x(c_1 x + c_2) + (x^2 + 4x + 7)$
- 41)  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + e^{-2x}$  **Rpta:**  $y = e^{2x}(c_1 x + c_2) + \frac{e^{-2x}}{16} + \frac{x^2}{2} e^{2x}$
- 42)  $y''' - 2y'' - 3y' = 9(x + 1)$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x} - \frac{x}{2}(3x + 2)$
- 43)  $y''' + 2y'' - y' = \operatorname{cosh}(x)$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \frac{x}{12} e^x - \frac{x}{4} e^{-x}$
- 44)  $y'' - 8y' + 12y = 4x \operatorname{senh} 2x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x} - \frac{x}{8}(2x + 1) - \frac{1}{128}(8x + 3)e^{-2x}$
- 45)  $y''' + y'' - y' - y = \operatorname{senh} x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + \frac{x}{8} e^x + \frac{x^2}{8} e^{-x}$
- 46)  $y'' + 5y' + 6y = (x + 1)^2$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{1.8}(18x^2 + 6x + 7)$

47)  $y'' + 5y' + 6y = (x+1)^2$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{1.8} (18x^2 + 6x + 7)$

48)  $y'' + 4y' - 5y = 12 \cosh x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} + x e^x - \frac{3}{4} e^{-x}$

49)  $y'''' - 2y'' - y' + 2y = (x+1)^2$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{4} (2x^2 + 6x + 9)$

50)  $y'''' + 3y'' - y' - 3y = e^x + e^{-3x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} + \frac{x}{8} e^x + \frac{x}{8} e^{-3x}$

51)  $y'''' - 3y'' + 3y' - y = e^x + 1$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + \frac{x^3 e^x}{6}$

52)  $y'' + 2y' + 2y = \text{sen } 2x + \cos 2x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

**Rpta:**  $y = e^{-x} + \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{11}{10} \text{sen } x\right) + \frac{\text{sen } 2x}{10} - \frac{3}{10} \cos 2x$

53)  $y'' - y' - 2y = e^{3x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$  **Rpta:**  $y = \frac{e^{-x}}{12} + \frac{2e^{2x}}{3} + \frac{e^{3x}}{4}$

54)  $y'' + 2y' - 3y = 1 + x e^x$  **Rpta:**  $y = y_g + \frac{1}{16} (2x^2 - x) e^x - \frac{1}{3}$

55)  $y'' + 4y = 3x \cos 2x$  **Rpta:**  $y = y_g + Ax \cos 2x + Bx \text{sen } 2x$

56)  $y'' + y' - 2y = 2x - 40 \cos 2x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{x}{2} \cos x$

57)  $y'' + 3y' + 2y = 1 + 3x + x^2$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{x^2}{2}$

58)  $y'''' + y'' - 4y' - 4y = 3e^{-x} - 4x - 6$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + (c_3 - x) e^{-x} + x + \frac{1}{2}$

**5.6. ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER.-**

Las ecuaciones diferenciales de Euler son de la forma:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad \dots (\alpha)$$

donde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  son constantes.

Para resolver la ecuación diferencial  $(\alpha)$  se transforma a una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes, mediante la sustitución.

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x, \text{ además } \frac{dx}{dt} = e^t$$

$$\text{también } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dx} \text{ de donde } \frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy' / dt}{dx / dt} = e^{-t} \frac{dy'}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-t} \left( e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \text{ de donde } \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

en la misma forma se hace los cálculos si la ecuación diferencial es de orden 3, 4, etc.

También son ecuaciones diferenciales de Euler las ecuaciones de la forma siguiente:

$$a_n (ax + b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} (ax + b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 (ax + b) \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad \dots (\beta)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial  $(\beta)$  se transforma en forma similar al caso anterior mediante la sustitución:

$$ax + b = e^t \Rightarrow t = \ln(ax + b). \quad \text{Además } \frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = ae^{-t} \frac{dy}{dt} \quad \text{de donde se tiene} \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = ae^{-t} \frac{dy}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} = ae^{-t} \frac{dy'}{dt} = ae^{-t} \frac{d}{dt} (ae^{-t} \frac{dy}{dt}) = a^2 e^{-2t} (e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2y}{dt^2})$$

de donde:  $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 e^{-2t} \left[ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right]}$

Las ecuaciones diferenciales no homogéneas de Euler son de la forma:

$$\boxed{a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = x^\alpha P_m(\ln(x))} \quad \dots (\gamma)$$

donde  $m$  es el grado de  $P_m(\ln(x))$

Para resolver la ecuación diferencial  $(\gamma)$  se transforma en forma similar a los casos anteriores.

**a. Ejemplos.-** Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

①

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

**Solución**

Sea  $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ , además  $\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$ ;  $\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$

reemplazando en la ecuación diferencial.

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + e^t \cdot e^{-t} \frac{dy}{dt} - y = 0, \text{ simplificando}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0, \text{ ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes.}$$



Sea  $P(r) = r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$ .

Luego la solución es  $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ , de donde  $y = c_1 x + \frac{c_2}{x}$

②  $(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$

**Solución**

Sea  $x+2 = e^t \Rightarrow t = \ln(x+2)$  además:  $\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$ ;  $\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 3e^t \cdot e^{-t} \frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

de donde al simplificar se tiene:  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - 3y = 0$ , que es una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes:

Sea  $P(r) = r^2 + 2r - 3 = 0$ , de donde:  $r_1 = -3, r_2 = 1$

Luego la solución es:  $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t \quad \therefore y = \frac{c_1}{(x+2)^3} + c_2(x+2)$

③  $x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$

**Solución**

Sea  $x = e^t \Rightarrow t = \ln(x)$  además:  $\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$ ;  $\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + e^t \cdot e^{-t} \frac{dy}{dt} + y = e^t (6 - t), \text{ al simplificar se tiene:}$$

$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = (6 - t)e^t$ , ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes:

Sea  $P(r) = r^2 + 1 = 0$ , de donde:  $r_1 = i$ ,  $r_2 = -i$

Luego la solución complementaria es:

$y_g = c_1 \cos t + c_2 \sin t$  y la solución particular es:

$$y_p = (At + B)e^t \Rightarrow y_p' = Ae^t + (At + B)e^t \Rightarrow y_p'' = 2Ae^t + (At + B)e^t$$

como  $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = (6-t)e^t$  entonces  $2Ae^t + 2(At + B)e^t + (At + B)e^t = (6-t)e^t$

$$2At + 2A + 2B = 6 - t \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{7}{2}$$

Luego  $y_p = -\frac{t}{2} + \frac{7}{2}$ , y la solución general es:  $y(t) = y_g + y_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{t}{2} + \frac{7}{2}$

$$\therefore y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) - \frac{1}{2}(\ln x - 7)$$

④

$$(2x+1)^2 y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0$$

### Solución

Sea  $2x+1 = e^t \Rightarrow t = \ln(2x+1)$ , además:  $\frac{dy}{dx} = 2e^{-t} \frac{dy}{dt}$ ;  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 4e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$

Reemplazando en la ecuación diferencial dada:

$$e^{2t} \cdot 8e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) + 2e^t \cdot 4e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 2e^{-t} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$8e^{-t} \left[ \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right] + 8e^{-t} \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] + 2e^{-t} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$4 \left[ \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right] + 4 \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] + \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 4 \frac{d^3 y}{dt^3} - 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} = 0$$

Sea  $P(r) = 4r^3 - 8r^2 + 5r = 0$ , de donde:  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1 + \frac{i}{2}$ ,  $r_3 = 1 - \frac{i}{2}$

y la solución general de esta ecuación es:  $y(t) = c_1 + c_2 e^{t/2} \cos \frac{t}{2} + c_3 e^{t/2} \sin \frac{t}{2}$

$$\therefore y = c_1 + c_2(2x+1) \cos\left(\frac{\ln(2x+1)}{2}\right) + c_3(2x+1) \sin\left(\frac{\ln(2x+1)}{2}\right)$$

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Resolver los siguientes ejercicios:

- ①  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 |x| + c_2 |x|^{-2}$
- ②  $x^2 y'' + xy' + 9y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 \sin(3 \ln |x|) + c_2 \cos(3 \ln |x|)$
- ③  $4x^2 y'' - 8xy' + 9y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x^{\frac{3}{2}} + c_2 x^{\frac{3}{2}} \ln x$
- ④  $x^2 y'' - 3xy' + 7y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x^2 \cos \sqrt{3} \ln x + c_2 x^2 \sin \sqrt{3} \ln x$
- ⑤  $x^2 y'' + xy' - p^2 y = 0$ ,  $p$  es una constante. **Rpta:**  $y = c_1 |x|^p + c_2 |x|^{-p}$ ,  $p \neq 0$
- ⑥  $x^3 y'' - 2x^2 y' - 17xy' - 7y = 0$  **Rpta:**  $y = |x|^{-1} (c_1 + c_2 \ln |x|) + c_3 |x|^7$
- ⑦  $x^3 y'' + 4x^2 y' - 2y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 |x|^{-1} + c_2 |x|^{\sqrt{2}} + c_3 |x|^{-\sqrt{2}}$
- ⑧  $2x^2 y'' + xy' - y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x + \frac{c_2}{\sqrt{x}}$
- ⑨  $x^3 y'' - 3x^2 y' + 6xy' - 6y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$
- ⑩  $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$  **Rpta:**  $y = \frac{1}{x} (c_1 + c_2 \ln |x|)$
- ⑪  $x^2 y'' + 2xy' + 6y = 0$  **Rpta:**  $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \ln(x)\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \ln(x)\right) \right]$

- 12)  $xy'' + y' = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 \ln|x|$
- 13)  $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1(2x+1) + c_2(2x+1)\ln(2x+1)$
- 14)  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^4$
- 15)  $(x+1)^2 y'' - 12y' = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 + \frac{c_2}{(x+1)^2} + c_3(x+1)^5$
- 16)  $y'' + \frac{4y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = 0$  **Rpta:**  $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$
- 17)  $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{y}{x^2} = 0$  **Rpta:**  $y = x(c_1 \ln x + c_2)$
- 18)  $y'' + \frac{5}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = 0$  **Rpta:**  $y = \frac{1}{x^2} [c_1 \cos(\ln(x)) + c_2 \operatorname{sen}(\ln(x))]$
- 19)  $9y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{y}{x^2} = 0$  **Rpta:**  $y = x^{\frac{1}{3}}(c_1 \ln x + c_2)$
- 20)  $y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0$  **Rpta:**  $y = x^{-\frac{3}{2}} [c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x))]$
- 21)  $y''' + \frac{4}{x}y'' + \frac{8y'}{x^2} + \frac{y}{x^3} = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x^{-1} + c_2 \cos(\ln x) + c_3 \operatorname{sen}(\ln x)$
- 22)  $y''' + \frac{4y''}{x} + \frac{y'}{x^2} + \frac{y}{x^3} = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x + x^{-1}(c_2 \ln x + c_3)$
- 23)  $y''' + \frac{y'}{x^2} - \frac{y}{x^3} = 0$  **Rpta:**  $y = x[c_1(\ln(x))^2 + c_2 \ln(x) + c_3]$
- 24)  $y''' + \frac{3y''}{x} + \frac{y'}{x^2} + \frac{y}{x^3} = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x^{-1} + x^{\frac{1}{2}} [c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)]$

(25)  $y'' + \frac{5}{x-1}y' + \frac{4}{(x-1)^2}y = 0$  **Rpta:**  $y = (x-1)^2 [c_1 \ln(x-1) + c_2]$

(26)  $y'' + \frac{7y'}{x-2} + \frac{12y}{(x-2)^2} = 0$  **Rpta:**  $y = x^{-3} [c_1 \cos(\sqrt{3} \ln(x-2)) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3} \ln(x-2))]$

(27)  $4y'' + \frac{y}{(x-a)^2} = 0$  **Rpta:**  $y = \sqrt{x-a} [c_1 \ln(x-a) + c_2]$

(28)  $y'' + \frac{y'}{x+a} - \frac{8y}{(x+a)^2} = 0$  **Rpta:**  $y = c_1(x+a)^4 + c_2(x+a)^{-2}$

(29)  $y''' + \frac{3y''}{x+a} + \frac{y'}{(x+a)^2} - \frac{y}{(x+a)^3} = 0$

**Rpta:**  $y = c_1(x+a) + (x+a)^{-\frac{1}{2}} [c_2 \cos(\frac{3}{2} \ln(x+a)) + c_3 \operatorname{sen}(\frac{3}{2} \ln(x+a))]$

(30)  $x^2 y'' - xy' + y = 2x$  **Rpta:**  $y = x [c_1 + c_2 \ln(x) + c_3 \ln^2(x)]$

(31)  $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2 \ln x$  **Rpta:**  $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ln x - \frac{3}{2}$

(32)  $x^2 y'' - xy' - 3y = -\frac{16 \ln x}{x}$  **Rpta:**  $y = \frac{1}{x} (c_1 + c_2 x^4 + \ln(x) + 2 \ln^2(x))$

(33)  $x^2 y'' + xy' + 9y = \operatorname{sen}(\ln x^3)$  **Rpta:**  $y = y_g - \frac{1}{6} (\ln(x)) \cos(\ln x^3)$

(34)  $x^3 y'' + 4x^2 y' + xy' + y = x$  **Rpta:**  $y = y_g + \frac{x}{2}$

(35)  $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2 \ln^2 x + 12x$  **Rpta:**  $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ln^2 x - 3 \ln x + 2x + 7$

(36)  $x^2 y'' + xy' - y = x^m, |m| \neq 1$  **Rpta:**  $y = \frac{x^m}{m^2 - 1} + c_1 x + \frac{c_2}{x}$



37)  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$  **Rpta:**  $y = c_1 x + c_2 x^2 + 1 + (x^2 + 2x) \ln x$

38)  $x^2 \frac{dy}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2}$

39)  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = x \ln(x)$  **Rpta:**  $y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{x^3}{2} (\ln(x)) - \frac{3x^3}{4}$

40)  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x + c_2 x^2$

41)  $x^2 y'' - 6y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x^3 + c_2 x^2$

42)  $x^2 y'' + \frac{y}{4} = 0$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 \ln(x)) \sqrt{x}$

43)  $x^2 y'' - xy' + y = 0$  **Rpta:**  $y = [c_1 + c_2 \ln(x)]x$

44)  $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0, y(1) = 4, y'(1) = 13$  **Rpta:**  $y = x + 3x^4$

45)  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0, y(1) = 0, y'(1) = -2$  **Rpta:**  $y = x - x^3$

46)  $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 3$  **Rpta:**  $y = (1 + \ln(x))x^2$

47)  $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$  **Rpta:**  $y = \frac{c_1}{x} + c_2 x + c_3 x^2$

48)  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$  **Rpta:**  $y = (c_1 + c_2 \ln x) \frac{1}{x}$

49)  $y'' = \frac{2y}{x^2}$  **Rpta:**  $y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}$

50)  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$  **Rpta:**  $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{x}{2}$

51)  $(1+x)^2 y'' + 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$  **Rpta:**  $y = (x+1)^2 [c_1 + c_2 \ln(x+1)] + (x+1)^2$

52  $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 \cos(2 \ln(x)) + c_2 \operatorname{sen}(2 + \ln(x))$

53  $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$

54  $(x-1)^2 y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 (x-1)^{-3} + c_2 (x-1)^{-4}$

55  $2x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 |x|^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right) + c_2 |x|^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right)$

56  $(x-2)^2 y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$

**Rpta:**  $y = c_1 (x-2)^{-2} \cos(2 \ln|x-2|) + c_2 (x-2)^{-2} \operatorname{sen}(2 \ln|x-2|)$

57  $x^2 y'' + 7xy' + 5y = x$  **Rpta:**  $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-5} + c_2 x^{-5} + \frac{x}{12}$

58  $x^2 y'' - 3xy' + 4y = \ln x$  **Rpta:**  $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \operatorname{Ln} x + \frac{1}{4} \operatorname{Ln} x + \frac{1}{4}$

59  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x$  **Rpta:**  $y = c_2 x + c_2 x^2 + x^2 \ln x + \ln x + \frac{3}{2}$

60  $x^2 y'' + xy' + 4y = \operatorname{sen}(\ln x)$  **Rpta:**  $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln x) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(\ln x)$

61  $3x^2 y'' + 12xy' + 9y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{3}{2} \ln x\right) + c_2 \ln x + c_2 x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2} \ln x\right)$

62  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = \cos x + \frac{1}{x}$  **Rpta:**  $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} + \frac{\ln x}{x}$

63  $(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6 \ln(x+1)$  **Rpta:**  $y = \frac{c_1 + c_2 \ln(x+1) + \operatorname{Ln}^3(x+1)}{x+1}$

64  $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} - 6y = 0$  **Rpta:**  $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

$$(65) \quad x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6x \frac{dy}{dx} + 18y = 0 \quad \text{Rpta: } y = (c_1 + c_2 \ln x)x^3 + c_3 x^{-2}$$

$$(66) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 4y = 2x \ln x, \quad x > 0$$

**Rpta:**  $y = c_1 \operatorname{sen}(\ln x^2) + c_2 \cos(\ln x^2) + \frac{x \ln x^2}{5} - \frac{4x}{25}$

$$(67) \quad x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \quad \text{Rpta: } y = (c_1 + c_2 \ln x)x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$(68) \quad (2x-3)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6(2x-3) \frac{dy}{dx} + 12y = 0 \quad \text{Rpta: } y = c_1(2x-3) + c_2(2x-3)$$

$$(69) \quad x^2 y'' - xy' + \frac{3}{4}y = 0 \quad (70) \quad x^3 y'''' - 3x^2 y''' + 6xy'' - 6y = 0$$

$$(71) \quad xy'''' + 3y''' = 0 \quad (72) \quad x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} - 15y = x^3$$

$$(73) \quad x^2 y'' + xy' - 9y = x^3 + 1 \quad (74) \quad x^3 y'''' + 4x^2 y''' - 8xy'' + 8y = 0$$

$$(75) \quad x^2 y'''' + xy''' + 4y'' = 1 + \cos(2 \ln x)$$

$$(76) \quad (3+x)^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 3(3+x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (6+2x) \frac{dy}{dx} = 0$$

## CAPÍTULO VI

### 6. OPERADORES DIFERENCIALES.-

Supongamos que  $D$  denota la diferenciación con respecto a  $x$ ,  $D^2$  la segunda diferenciación con respecto a  $x$  y así sucesivamente, es decir, para el entero  $k$  positivo.

$$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}$$

Luego a la expresión:  $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$

se le llama OPERADOR DIFERENCIAL DE ORDEN "n"; y es tal que, al aplicarse a cualquier función "y" produce el resultado siguiente:

$$\{L(D)\}(y) = a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_{n-1} D y + a_n y$$

donde los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  pueden ser funciones de  $x$  ó constantes.

**Observación.-** Dos operadores  $L_1$  y  $L_2$  son iguales si y sólo si producen el mismo resultado sobre alguna función.

es decir:

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_1(y) = L_2(y)$$

**Observación.-**  $(L_1 \cdot L_2)y = L_1(L_2(y))$ , y si los operadores  $L_1$  y  $L_2$  tienen coeficientes constantes entonces se cumple.

$$L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$$

### 6.1. LEYES FUNDAMENTALES DE OPERADORES.-

$$\textcircled{1} \quad L_1 + L_2 = L_2 + L_1$$

$$\textcircled{2} \quad (L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$$

$$\textcircled{3} \quad (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$$

$$\textcircled{4} \quad L_1 \cdot (L_2 + L_3) = L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_3$$

$$\textcircled{5} \quad \text{Si } m, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow D^{m+n} = D^m \cdot D^n$$

## 6.2. PROPIEDADES.-

Sean  $m, n, r, k$  constantes reales  $r, k \in \mathbb{Z}^+$ , entonces se cumple

$$1^{\text{ro}} \quad D^k (e^{rx}) = r^k e^{rx}$$

ahora deduciremos el efecto de un operador  $L$  sobre  $e^{mx}$ .

para esto, Sea:  $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{L(D)\}(e^{mx}) &= a_0 D^n e^{mx} + a_1 D^{n-1} e^{mx} + \dots + a_{n-1} D e^{mx} + a_n e^{mx} \\ &= a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \dots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx} \\ &= e^{mx} (a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n) \\ &= e^{mx} L(m) \end{aligned}$$

Es decir:  $\{L(D)\}(e^{mx}) = e^{mx} L(m)$ ; por lo tanto se tiene:

$$2^{\text{do}} \quad \{L(D)\}(e^{mx}) = e^{mx} L(m)$$

**Observación.-** Si  $m$  es raíz de  $L(m) = 0$ , entonces  $L(D)e^{mx} = 0$

Determinar el efecto del operador  $(D-m)^k$  sobre  $x^k e^{mx}$ , es decir:

$$(D-m)(x^k e^{mx}) = kx^{k-1} e^{mx} + mx^k e^{mx} - mx^k e^{mx} = kx^{k-1} e^{mx}$$

$$(D-m)^2(x^k e^{mx}) = k(k-1)x^{k-2} e^{mx}$$

$$(D-m)^3(x^k e^{mx}) = k(k-1)(k-2)x^{k-3} e^{mx}$$

$$(D-m)^k(x^k e^{mx}) = k! e^{mx} = e^{mx} D^k x^k, \text{ por lo tanto:}$$

$$3^{\text{ro}} \quad (D-m)^k(x^k e^{mx}) = k! e^{mx}$$

**Observación.-** Si,  $n > k \Rightarrow (D-m)^n(x^k e^{mx}) = 0$



4<sup>to</sup> Para cada función con "n" derivando se cumple:  $(D-m)^n (e^{mx} u) = e^{mx} D^n u$

5<sup>to</sup> Si  $L(D) = (D-r)^k \varphi(D)$  entonces

$$L(D)(x^k e^{rx}) = (D-r)^k \varphi(D)(x^k e^{rx}) = k!(e^{rx}) \varphi(D) = k! \varphi(r) e^{rx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L(D)} e^{rx} = \frac{x^k e^{rx}}{k! \varphi(r)}$$

**Ejemplo.**  $D(D-2)^3(D+1)y = e^{2x}$

6<sup>to</sup> Si L es un polinomio  $\Rightarrow L(D)(e^{rx} u) = e^{rx} L(D+r)u$

**Ejemplo.-**  $(D-3)^2(D+1)^3(y) = x^2 e^{2x}$

### 6.3. MÉTODOS ABREVIADOS.-

1<sup>ro</sup> La ecuación  $(D-r)^n y = e^{rx} (b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p)$ ,  $b_p \neq 0$

tiene una solución particular única de la forma:  $y_p = x^n e^{rx} R_p(x)$

donde  $R_p(x)$  es un polinomio de grado p, dado por:

$$R_p(x) = \frac{b_0}{1.2.3\dots n} + \frac{b_1 x}{2.3\dots(n+1)} + \dots + \frac{b_p x^p}{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

2<sup>do</sup> La ecuación  $(D-r)^n y = e^{sx} Q_p(x)$ ,  $r \neq s, r, s \in \mathbb{C}$  donde  $Q_p(x)$  es un polinomio de grado "p"; tiene una solución particular única de la forma:

$$y_p = e^{sx} u \text{ donde } u = e^{ax} (b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p)$$

donde  $a = s - r$  y luego aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

3<sup>ro</sup> La ecuación  $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = R_0$  con  $R_0 = \text{constante}$  y

$$a_n \neq 0; \text{ tiene como solución particular a } y_p = \frac{R_0}{a_n}$$

4<sup>to</sup> La ecuación  $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_k D^{n-k})y = R_0$  con  $R_0 = \text{constante}$  y  $a_k \neq 0$ ;

tiene como solución particular a  $y_p = \frac{R_0 x^k}{a_k}$

5<sup>to</sup> Aplicamos ahora el operador inverso:  $\frac{1}{L(D)}$ , definido por  $\frac{1}{L(D)}(L(D))y = y$  ahora

si aplicamos este operador a:  $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n)y = b(x)$  se obtiene:

$$y = \frac{1}{L(D)}(b(x))$$

es decir:  $y = \frac{1}{D-r_1} \cdot \frac{1}{D-r_2} \cdot \frac{1}{D-r_3} \dots \frac{1}{D-r_n} b(x) \dots (*)$

La ecuación (\*) se resuelve de acuerdo al siguiente cuadro.

Hacer	Por Resolver	Obtener
$z = \frac{1}{D-r_n} b(x)$	$z' - r_n z = b(x)$	$z = e^{r_n x} \int e^{-r_n x} b(x) dx$
$v = \frac{1}{D-r_{n-1}} z(x)$	$v' - r_{n-1} v = z(x)$	$v = e^{r_{n-1} x} \int e^{-r_{n-1} x} z(x) dx$
$y = \frac{1}{D-r_1} w(x)$	$y' - r_1 y = w(x)$	$y = e^{r_1 x} \int e^{-r_1 x} w(x) dx$

Obtenemos  $y = e^{r_1 x} \int e^{(r_2 - r_1)x} \int e^{(r_3 - r_2)x} \dots \int e^{(r_n - r_{n-1})x} \int e^{-r_n x} b(x) (dx)^n$

6<sup>to</sup> Suponiendo que  $f(D) = (D-r_1)(D-r_2)\dots(D-r_n)$  en el cual los factores son todos distintos, entonces existe el desarrollo de fracciones parciales.

$\frac{1}{f(D)} = \frac{A_1}{D-r_1} + \frac{A_2}{D-r_2} + \dots + \frac{A_n}{D-r_n}$ , en el que  $A_1, \dots, A_n$  son constantes. Entonces:

$$y = A_1 e^{\alpha_1 x} \int b(x) e^{-\alpha_1 x} dx + A_2 e^{\alpha_2 x} \int b(x) e^{-\alpha_2 x} dx + \dots + A_n e^{\alpha_n x} \int b(x) e^{-\alpha_n x} dx$$

al calcular tanto las integrales de  $5^{\text{to}}$ ,  $6^{\text{to}}$  se descartaran las constantes de integración cuando aparecen, de otro modo estaríamos calculando la primitiva en vez de la integral particular de la ecuación diferencial.

7<sup>o</sup> Una integral particular de una ecuación diferencial lineal  $F(D)(y) = b(x)$  con coeficientes constante está dado por  $\phi_p = \frac{1}{F(D)} b(x)$  y para ciertas formas de  $b(x)$  se abrevian el cálculo de éste operador.

a) Si  $b(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{F(\alpha)} e^{\alpha x}; F(\alpha) \neq 0$

b) Si  $b(x) = \text{sen}(\alpha x + \beta)$  ó  $b(x) = \text{cos}(\alpha x + \beta)$  entonces

$$\phi_p = \frac{1}{F(D^2)} \text{sen}(\alpha x + \beta) = \frac{1}{F(-\alpha^2)} \text{sen}(\alpha x + \beta); F(-\alpha^2) \neq 0$$

$$\text{ó } \phi_p = \frac{1}{F(D^2)} \text{cos}(\alpha x + \beta) = \frac{1}{F(-\alpha^2)} \text{cos}(\alpha x + \beta); F(-\alpha^2) \neq 0$$

c) Si  $b(x) = x^p \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)} x^p = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_p D^p) x^p, a_0 \neq 0$

Obtenido desarrollando  $\frac{1}{F(D)}$ , según potencias crecientes de  $D$  y suprimiendo todos los términos potencias  $D^p$ , puesto que  $D^n x^p = 0$  para  $n > p$

d) Si  $b(x) = e^{\alpha x} R(x) \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} R(x) =$

e) Si  $b(x) = xR(x) \Rightarrow \phi_p = \frac{1}{F(D)} xR(x) = x \frac{1}{F(D)} R(x) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2} R(x)$

f)  $\frac{1}{F_1(D)F_2(D)} b(x) = \frac{1}{F_1(D)} \cdot \frac{1}{F_2(D)} b(x) \Rightarrow \phi_p \frac{1}{F_1(D)} \left[ \frac{1}{F_2(D)} b(x) \right]$

$$g) \frac{1}{F(D)} \sinh(ax) = \frac{F(-D)}{F(a) \cdot F(-a)} \sinh(ax) \quad \text{si } F(a) \cdot F(-a) \neq 0$$

$$h) \frac{1}{F(D)} \cosh(ax) = \frac{F(-D)}{F(a) \cdot F(-a)} \cosh(ax) \quad \text{si } F(a) \cdot F(-a) \neq 0$$

$$i) \frac{1}{(D^2 + a^2)^n} \sin ax = \frac{x^n}{(2a)^n n!} \sin\left(ax - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$j) \frac{1}{(D^2 + a^2)^n} \cos ax = \frac{x^n}{(2a)^n n!} \cos\left(ax - \frac{n\pi}{2}\right)$$

**Observación:**

$$\begin{cases} e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \\ e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \\ \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\beta x} = \cosh \beta x + \sinh \beta x \\ e^{-\beta x} = \cosh \beta x - \sinh \beta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sinh \beta x = \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \\ \cosh \beta x = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \end{cases}$$

a) **Ejemplos.-** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

①  $(D^4 - 8D^2 + 16)(y) = xe^{2x}$

**Solución**

$$F(D) = D^4 - 8D^2 + 16 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2, r_3 = r_4 = -2$$

Luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$$\phi_c(x) = (c_1 + c_1 x)e^{2x} + (c_2 + c_3 x)e^{-2x}, \quad \text{para la solución particular se tiene:}$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{F(D)} xe^{2x} = \frac{xe^{2x}}{(D-2)^2(D+2)^2} \quad \text{donde } r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 = -2, r_4 = -2$$

$$\phi_p(x) = e^{\eta x} \int e^{(\eta_2 - \eta)x} \int e^{(\eta_3 - \eta_2)x} \int e^{(\eta_4 - \eta_3)x} \int e^{-\eta_4 x} b(x) (dx)^4$$

$$\begin{aligned} \phi_p(x) &= e^{2x} \int e^0 \int e^{-4x} \int e^0 \int e^{2x} x e^{2x} (dx)^4 = e^{2x} \int \int e^{-4x} \int \int x e^{4x} (dx)^4 \\ &= e^{2x} \int \int e^{-4x} e^{4x} \left(\frac{x}{16} - \frac{3}{32}\right) (dx)^2 = e^{2x} \int \int \left(\frac{x}{16} - \frac{3}{32}\right) (dx)^2 \end{aligned}$$

$$\phi_p(x) = e^{2x} \left(\frac{x^3}{96} - \frac{3x^2}{64}\right)$$

$$\therefore y = \phi c(x) + \phi p(x) = (c_0 + c_1 x) e^{2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-2x} + e^{2x} \left(\frac{x^3}{96} - \frac{3x^2}{64}\right)$$

②  $D(D-1)^3(y) = (x^2 + 2x)e^x$

### Solución

$$P(r) = r(r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = r_3 = r_4 = 1, \text{ entonces}$$

$\phi c(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2)e^x$ ; ahora calcularemos la solución particular:

$$\phi p(x) = \frac{1}{D(D-1)^3} (x^2 + 2x)e^{2x} = \frac{1}{D(D-1)^2} \left[ \frac{1}{D-1} (x^2 + 2x)e^x \right] \quad \dots (1)$$

haciendo  $z = \frac{1}{D-1} (x^2 + 2x)e^x$  entonces:  $\frac{dz}{dx} - z = (x^2 + 2x)e^x$  cuya solución es

$$z = e^{-\int -dx} \left[ \int e^{\int -dx} (x^2 + 2x)e^x dx \right] = e^x \int (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)e^x \text{ reemplazando en (1)}$$

$$\phi p(x) = \frac{1}{D(D-1)^2} \left[ \frac{x^3}{3} + x^2 \right] e^x = \frac{1}{D(D-1)} \left[ \frac{1}{D-1} \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) e^x \right] \quad \dots (2)$$

Sea  $z = \frac{1}{D-1} \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) e^x$  entonces  $\frac{dz}{dx} - z = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) e^x$ , cuya solución es:

$$z = e^{-\int -dx} \left[ \int e^{\int -dx} \left( \frac{x^3}{3} + x^2 \right) e^x dx \right] = e^x \left[ \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} \right], \text{ reemplazando en (2)}$$



$$\phi_p(x) = \frac{1}{D(D-1)} \left( \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} \right) e^x = \frac{1}{D} \left[ \frac{1}{D-1} \left( \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} \right) e^x \right] \quad \dots (3)$$

Sea  $z = \frac{1}{D-1} \left( \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} \right) e^x$  entonces  $\frac{dz}{dx} - z = \left( \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} \right) e^x$  cuya solución es:

$$z = e^{-\int -dx} \left[ \int e^{\int -dx} \left( \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} \right) e^x dx \right] = e^x \left( \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} \right), \text{ reemplazando en (3).}$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D} \left( \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} \right) e^x \Rightarrow \phi_p(x) = \int \left( \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} \right) e^x dx = \frac{x^5}{60} e^x$$

La solución general de la ecuación es:  $\phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

$$\therefore \phi(x) = c_1 + (c_2 + c_3x + c_4x^2) e^x + \frac{x^5}{60} e^x$$

③

$$(D-1)^3(D-2)^3 y = x^2 e^{3x}$$

### Solución

Sea  $P(r) = (r-1)^3(r-2)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1$  de multiplicidad 3 y  $r_2 = 2$  de multiplicidad 3

$$y_c = (c_1 + c_2 + c_3x^2) e^x + (c_4 + c_5x + c_6x^2) e^{2x}$$

ahora calcularemos la solución particular.

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{(D-1)^3(D-2)^3} x^2 e^{3x} = e^{3x} \frac{1}{(D+2)^3(D+1)^3} x^2 \\ &= e^{3x} \frac{1}{(D+2)^3} \left[ \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1} x^2 \right] \end{aligned}$$

$$y_p = e^{3x} \frac{1}{(D+2)^3} (1-3D+6D^2)x^2 = e^{3x} \frac{1}{(D+2)^3} (x^2 - 6x + 12)$$

$$y_p = e^{3x} \frac{1}{D^3 + 6D^2 + 12D + 8} (x^2 - 6x + 12)$$

$$y_p = e^{3x} \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{16} D + \frac{3}{16} D^2 \right) (x^2 - 6x + 12) \Rightarrow y_p = e^{3x} \left( \frac{x^2}{8} - \frac{9}{8} x + 3 \right)$$

La solución general es:  $y = y_c + y_p$

④  $(D^3 - 4D^2 + 3D)(y) = x^2$

**Solución**

Sea  $P(r) = r^3 - 4r^2 + 3r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 3$

de donde  $\phi_c(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{3x}$ ; ahora calcularemos la solución particular.

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 3D} x^2 = \frac{1}{D} \left( \frac{1}{D^2 - 4D + 3} \right) x^2$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D} \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{9} D + \frac{13}{27} D^2 \right) x^2 = \frac{1}{D} \left( \frac{x^2}{3} + \frac{8x}{9} + \frac{26}{27} \right) \Rightarrow \phi_p(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{4x^2}{9} + \frac{26}{27} x$$

Luego la solución general de la ecuación es:  $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{3x} + \frac{x^3}{9} + \frac{4x^2}{9} + \frac{26}{27} x$

⑤  $(D^2 - 1)(y) = x^2$

**Solución**

Sea  $P(r) = r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$ ; de donde  $\phi_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

calculando la solución particular se tiene:  $\phi_p(x) = \frac{1}{D^2 - 1} x^2 = (-1 - D^2) x^2 = -x^2 - 2$

Luego la solución general es  $\phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

$$\therefore \phi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x^2 - 2$$

⑥  $D^4(D^2 - 1)(y) = x^2$

**Solución**

Sea  $P(r) = r^4(r^2 - 1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0$  multiplicidad 4 y  $r_2 = 1, r_3 = -1$  de donde

$\phi_c(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^x + c_6e^{-x}$ ; ahora calcularemos la solución particular

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^4(D^2-1)}x^2 = \frac{1}{D^4}(-1-D^2)x^2 = \frac{1}{D^4}(-x^2-2)$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^3}\left(-\frac{x^2}{3}-2x\right) = \frac{1}{D^2}\left(-\frac{x^4}{12}-x^2\right) = \frac{1}{D}\left(-\frac{x^5}{60}-\frac{x^3}{3}\right) \Rightarrow \phi_p(x) = -\frac{x^6}{360} - \frac{x^4}{12}$$

y la solución general es  $\phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

⑦  $(D^4 + 10D^2 + 9)(y) = \cos(4x+6) + \text{sen}(2x+3)$

**Solución**

Sea  $P(r) = r^4 + 10r^2 + 9 = 0 \Rightarrow (r^2+1)(r^2+9) = 0$

de donde  $r_1 = i, r_2 = -i, r_3 = 3i, r_4 = -3i$  entonces

$y_c = c_1 \cos x + c_2 \text{sen} x + c_3 \cos 3x + c_4 \text{sen} 3x$ ; calculando la solución particular.

$$y_p = \frac{1}{D^4 + 10D^2 + 9} = (\cos(4x+6) + \text{sen}(2x+3))$$

$$y_p = \frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)} \cos(4x+6) + \frac{1}{(D^2+1)(D^2+9)} \text{sen}(2x+3)$$

$$y_p = \frac{1}{(-16+1)(-16+9)} \cos(4x+6) + \frac{1}{(-4+1)(-4+9)} \text{sen}(2x+3)$$

$$y_p = \frac{\cos(4x+6)}{105} - \frac{1}{15} \text{sen}(2x+3); \text{ y la solución general es } y = y_c + y_p$$

⑧  $(D^4 + 3D^3 - 15D^2 - 19D + 30)(y) = e^{4x}$

**Solución**

Sea  $P(r) = r^4 + 3r^3 - 15r^2 - 19r + 30 = 0$  de donde

$r_1 = 1, r_2 = 3, r_3 = -2, r_4 = -5$  entonces  $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{-5x}$

calculando la solución particular se tiene:  $y_p = \frac{1}{D^4 + 3D^3 - 15D^2 - 19D + 30} e^{4x}$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)(D+5)} e^{4x} = \frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)(4+5)} e^{4x} = \frac{e^{4x}}{162}$$

Luego la solución general de la ecuación es:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{-5x} + \frac{e^{4x}}{162}$

9  $(D^8 + 39D^6 + 138D^4 + 126D^2 + 900)(y) = \text{sen}(4x+1) + \text{cos}(6x+2)$

**Solución**

$$P(r) = r^8 + 39r^6 + 138r^4 + 126r^2 + 900 = 0 \text{ de donde}$$

$$(r^2 + 1)(r^2 + 9)(r^2 + 4)(r^2 + 25) = 0 \Rightarrow \text{se tiene}$$

$$r_1 = i, r_2 = -i, r_3 = 3i, r_4 = -3i, r_5 = 2i, r_6 = -2i, r_7 = 5i, r_8 = -5i$$

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \text{sen } x + c_3 \cos 3x + c_4 \text{sen } 3x + c_5 \cos 2x + c_6 \text{sen } 2x + c_7 \cos 5x + c_8 \text{sen } 5x$$

ahora calculando la solución particular:

$$y_p = \frac{1}{D^8 + 39D^6 + 138D^4 + 126D^2 + 900} [\text{sen}(4x+1) + \text{cos}(6x+2)]$$

$$y_p = \frac{1}{(D^2 + 1)(D^2 + 9)(D^2 + 4)(D^2 + 25)} \text{sen}(4x+1) +$$

$$+ \frac{1}{(D^2 + 1)(D^2 + 9)(D^2 + 4)(D^2 + 25)} \text{cos}(6x+1)$$

$$y_p = \frac{\text{sen}(4x+1)}{(-16+1)(-16+9)(-16+4)(-16+25)} + \frac{\text{cos}(6x+1)}{(-36+1)(-36+9)(-36+4)(-36+25)}$$

$$y_p = -\frac{1}{11340} \text{sen}(4x+1) + \frac{1}{332640} \text{cos}(6x+1)$$

La solución general es  $\phi(x) = y_c + y_p$

$$(10) \quad (D^2 + 3D + 2)(y) = x \cos 2x$$

Solución

Sea  $P(r) = r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = -2$  entonces  $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

ahora hallaremos la solución particular

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 3D + 2} x \cos 2x = x \frac{1}{D^2 + 3D + 2} \cos 2x - \frac{2D + 3}{(D^2 + 3D + 2)^2} \cos 2x$$

$$y_p = x \frac{\cos 2x}{D^2 + 3D + 2} - \frac{2D + 3}{D^4 + 6D^3 + 13D^2 + 12D + 4} \cos 2x$$

$$y_p = x \frac{1}{-4 + 3D + 2} \cos 2x - \frac{2D + 3}{(-4)^2 + 6(-4)D + 13(-4) + 12D + 4} \cos 2x$$

$$y_p = x \frac{1}{3D - 2} \cos 2x + \frac{2D + 3}{4(3D + 8)} \cos 2x = x \frac{3D + 2}{9D^2 - 4} \cos 2x + \frac{(2D + 3)(3D - 8)}{4(9D^2 - 64)} \cos 2x$$

$$y_p = \frac{x}{-40} (3D + 2) \cos 2x + \frac{1}{4} \left( \frac{6D^2 - 7D - 24}{-100} \right) \cos 2x$$

$$y_p = \frac{x}{-20} (3 \operatorname{sen} 2x - \cos 2x) + \frac{1}{200} (24 \cos 2x - 7 \operatorname{sen} 2x) \quad \therefore \phi(x) = y_c + y_p$$

$$(11) \quad (D^4 + 8D^2 + 9)(y) = \cos 3x + e^{2x}$$

Solución

Sea  $P(r) = r^4 + 8r^2 - 9 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = 3i, r_4 = -3i$

$\phi_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 3x + c_4 \operatorname{sen} 3x$ ; calculando la solución particular se tiene:

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^4 + 8D^2 - 9} (\cos 3x + e^{2x}) = \frac{1}{(D^2 + 9)(D^2 - 1)} \cos 3x + \frac{1}{(D^2 + 9)(D^2 - 1)} e^{2x}$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^2 + 9} \frac{\cos 2x}{10} + \frac{e^{2x}}{39}; \text{ pero se observa que } \cos 3x = \operatorname{Re}(e^{3ix}) \text{ entonces}$$



$$\phi_p(x) = -\frac{1}{10(D^2+9)} \cos 3x + \frac{e^{2x}}{39} = -\frac{1}{10} \frac{e^{3ix}}{(D+3i)^2+9} + \frac{e^{2x}}{39}$$

$$\phi_p(x) = -\frac{1}{10} \frac{e^{3ix}}{D^2+6iD} + \frac{1}{39} e^{2x} \Rightarrow a_0(D+6i)=1 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{6i}$$

$$\phi_p(x) = \frac{\operatorname{Re}(e^{3ix})}{60i} + \frac{e^{2x}}{39} = x \left( \frac{i \cos 3x - \operatorname{sen} 3x}{60} \right) + \frac{e^{2x}}{39} \Rightarrow \phi_p(x) = -\frac{x \operatorname{sen} 3x}{60} + \frac{e^{2x}}{39}$$

Luego la solución general es:  $y = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

12

$$(D+1)(D-2)^3(y) = x^2 e^{2x} + x e^x$$

### Solución

Sea  $P(r) = (r+1)(r-2)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2$  multiplicidad 3.

entonces  $y_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} + c_4 x^2 e^{2x}$

calculando la solución particular se tiene:

$$y_p = \frac{1}{(D+1)(D-2)^3} (x^2 e^{2x} + x e^x) = \frac{1}{(D+1)(D-2)^2} \left[ \frac{1}{D-2} (x^2 e^{2x} + x e^x) \right] \quad \dots (1)$$

Sea  $z = \frac{1}{D-2} (x^2 e^{2x} + x e^x)$  de donde:  $\frac{dz}{dx} - 2z = x^2 e^{2x} + x e^x$ , ecuación lineal en z.

$$z = e^{-\int -2dx} \left[ \int e^{\int -2dx} (x^2 e^{2x} + x e^x) dx \right] \Rightarrow z = e^{2x} \left[ \int e^{-2x} (x^2 e^{2x} + x e^x) dx \right]$$

$$z = e^{2x} \int (x^2 + x e^{-x}) dx = e^{2x} \left( \frac{x^3}{3} - x e^{-x} - e^{-x} \right) = \frac{x^3}{3} e^{2x} - x e^x - e^{2x} \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$y_p = \frac{1}{(D+1)(D-2)^2} \left( \frac{x^3}{3} e^{2x} - x e^x - e^{2x} \right) = \frac{1}{(D+1)(D-2)} \left[ \frac{1}{D-2} \left( \frac{x^3}{3} e^{2x} - x e^x - e^{2x} \right) \right] \dots (3)$$

Sea  $z = \frac{1}{D-2} \left( \frac{x^3}{3} e^{2x} - x e^x - e^{2x} \right)$  de donde

$$\frac{dz}{dx} - 2z = \frac{x^3}{3}e^{2x} - xe^x - e^{2x} \text{ ecuación lineal en } z$$

$$z = e^{-\int -2dx} \left[ \int e^{\int -2dx} \left( \frac{x^3}{3}e^{2x} - xe^x - e^{2x} \right) dx \right]$$

$$z = e^{2x} \left[ \int \left( \frac{x^3}{3} - xe^{-x} - 1 \right) dx \right] = e^{2x} \left( \frac{x^4}{12} - xe^{-x} - e^{-x} - x \right) \quad \dots (4)$$

reemplazando (4) en (3) se tiene:  $y_p = \frac{1}{(D+1)(D-2)} \left[ \frac{x^4}{12} e^{2x} - xe^x - e^x - xe^{2x} \right]$

$$y_p = \frac{1}{(D+1)} \left[ \frac{1}{D-2} \left( \frac{x^4}{12} e^{2x} - xe^x - e^x - xe^{2x} \right) \right] \quad \dots (5)$$

Sea  $z = \frac{1}{D-2} \left( \frac{x^4}{12} e^{2x} - xe^x - e^x - xe^{2x} \right)$  de donde

$$\frac{dz}{dx} - 2z = \left( \frac{x^4}{12} - x \right) e^{2x} - (x+1)e^x \text{ ecuación lineal en } z$$

$$z = e^{-\int -2dx} \left[ \int e^{\int -2dx} \left[ \left( \frac{x^4}{12} - x \right) e^{2x} - (x+1)e^x \right] dx \right]$$

$$z = e^{-2x} \int \left( \frac{x^4}{12} - x - (x+1)e^{-x} \right) dx = \left( \frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2} \right) e^{2x} + (2+x)e^{-x} \quad \dots (6)$$

$$y_p = \frac{1}{(D+1)} \left[ \left( \frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2} \right) e^{2x} + (x+2)e^{-x} \right]$$

$$\frac{dy_p}{dx} + y_p = \left( \frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2} \right) e^{2x} + (x+2)e^{-x} \text{ lineal en } z$$

$$y_p = e^{-\int dx} \left[ \int e^{\int dx} \left[ \left( \frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2} \right) e^{2x} + (x+2)e^{-x} \right] dx \right] = e^{-x} \left[ \int \left[ \left( \frac{x^5}{60} - \frac{x^2}{2} \right) e^{3x} + (x+2)e^{2x} \right] dx \right]$$

$$y_p = \left( \frac{x^5}{180} e^{2x} - \frac{x^4}{108} + \frac{x^3}{81} \right) e^{3x} - \left( \frac{x}{2} + \frac{5}{4} \right) e^x; \text{ La solución general es } y = y_c + y_p$$

$$(13) \quad (D^2 - 4D + 3)(y) = 100x^4 e^{3x} + 340e^x \cos 2x$$

**Solución**

Sea  $P(r) = r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$  entonces  $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

calculando la solución particular se tiene:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 3} (100x^4 e^{3x} + 340e^x \cos 2x) = \frac{1}{(D-3)(D-1)} (100x^4 e^{3x} + 340e^x \cos 2x)$$

$$y_p = 100e^{3x} \frac{1}{(D-3+3)(D-1+3)} x^4 + 340e^x \frac{1}{(D-3+1)(D-1+1)} \cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x} \frac{1}{D(D+2)} x^4 + 340e^x \frac{1}{D(D-2)} \cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x} \frac{1}{D} \left( \frac{1}{2} - \frac{D}{4} \right) x^4 + 340e^x \frac{1}{D^2 - 2D} \cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x} \frac{1}{D} \left( \frac{x^4}{2} - x^3 \right) + 340e^x \left( \frac{1}{-4 - 2D} \cos 2x \right)$$

$$y_p = 100e^{3x} \int \left( \frac{x^4}{2} - x^3 \right) dx - \frac{340e^x}{2} \frac{(D-2)}{D^2 - 4} \cos 2x$$

$$y_p = 100e^{3x} \left( \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} \right) - 170e^x \frac{(D-2)}{-4-4} \cos 2x = 100e^{3x} \left( \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{65}{4} (D-2) \cos 2x$$

$$y_p = 10x^5 e^{3x} - 25x^4 e^{3x} - \frac{65}{4} \cos 2x - \frac{65}{4} \sin 2x$$

La ecuación general es:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + (10x^5 - 25x^4) e^{3x} - \frac{65}{4} (\sin 2x + \cos 2x)$

$$(14) \quad (D^2 + D + 1)(y) = e^{3x} + 6e^x - 3e^{-2x} + 5$$

**Solución**

Sea  $P(r) = r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ,  $r_2 = -\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$  entonces

$\phi_c(x) = (c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{-x/2}$ , ahora calcularemos la solución particular

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^2+D+1}(e^{3x} + 6e^x - 3e^{-2x} + 5) = \frac{1}{D^2+D+1}e^{3x} + \frac{6e^x}{D^2+D+1} - \frac{3e^{-2x}}{D^2+D+1} + \frac{5}{D^2+D+1}$$

$$\phi_p(x) = \frac{e^{3x}}{9+3+1} + \frac{6e^x}{1+1+1} - \frac{e^{-2x}}{4-2+1} + 5 = \frac{e^{3x}}{13} + 2e^x - \frac{e^{-2x}}{3} + 5$$

$$\phi_p(x) = \frac{e^{3x}}{13} + 2e^x - \frac{e^{-2x}}{3} + 5$$

$\frac{5}{D^2+D+1} = \frac{5e^0}{D^2+D+1} = \frac{5e^0}{0+0+1} = 5$ . Luego la solución general es:  $y = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

15

$$(D^3 + D^2 + D + 1)(y) = e^x + e^{-x} + \sin 2x$$

### Solución

Sea  $P(r) = r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -1$ ,  $r_2 = i$ ,  $r_3 = -i$  entonces

$$\phi_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{D^3 + D^2 + D + 1}(e^x + e^{-x} + \sin 2x) \text{ , entonces:}$$

$$\phi_p(x) = \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}e^x + \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}e^{-x} + \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}\sin 2x$$

$$\phi_p(x) = \frac{e^x}{4} + \frac{1}{2(D+1)}e^{-x} - \frac{1}{3} \frac{1}{D+1} \sin 2x \quad \dots (1)$$

Sea  $z = \frac{e^{-x}}{(D+1)} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + z = e^{-x}$  , cuya solución es:

$$z = e^{-\int dx} \left[ \int e^{-\int dx} e^{-x} dx \right] = e^{-x} x \Rightarrow z = xe^{-x} \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:  $\phi_p(x) = \frac{e^x}{4} + \frac{xe^{-x}}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{D-1}{D^2-1} \right) \text{sen } 2x$

$$\phi_p(x) = \frac{e^x}{4} + \frac{xe^{-x}}{2} - \frac{1}{3} \frac{(D-1)}{D^2-1} \text{sen } 2x = \frac{1}{4} (e^x + 2xe^{-x}) + \frac{1}{15} (2 \cos 2x - \text{sen } 2x)$$

La solución general es:  $\phi(x) = \phi_c(x) + \phi_p(x)$

#### 6.4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER MEDIANTE EL OPERADOR D.-

Para resolver las ecuaciones diferenciales de Euler mediante el operador D, se tiene en cuenta el criterio siguiente:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D(D-1)y \quad ; \quad x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$$

generalizando se tiene:  $x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\dots(D-n+1); \quad n=1,2,\dots, y \quad x=e^t$

**Ejemplo:** Resolver la ecuación  $x^2 y'' + xy' + y = x$

##### Solución

$$x^2 y'' + xy' + y = x \Rightarrow (D(D-1) + D + 1)y = e^t$$

$$(D^2 + 1)y = e^t \Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + 1} e^t = \frac{e^t}{2} \Rightarrow y_p = \frac{x}{2}$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen } x + \frac{x}{2}$$

**Ejemplo:** Resolver la ecuación  $x^2 y'' - xy' + y = x \ln^3 x$

##### Solución



$x^2 y'' - xy' + y = x \ln^3 x$  pasando a operadores

$$(D(D-1) - D + 1)y = t^3 e^t \Rightarrow (D^2 - 2D + 1)y = t^3 e^t$$

cuya solución complementaria es  $y_c = c_1 e^t + c_2 t e^t$ ,  $y_c = c_1 x + c_2 x \ln x$

La solución particular es  $y_p = \frac{1}{(D-1)^2} t^3 e^t = e^t \frac{1}{D^2} t^3$

$$y_p = e^t \frac{1}{D} \frac{t^4}{4} = e^t \frac{t^5}{20} = x \frac{\ln^5 x}{20}$$

La solución general de la ecuación es:  $y = y_c + y_p = c_1 x + c_2 x \ln x + x \frac{\ln^5 x}{20}$

### b) EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Encuentre una solución particular de:

①  $(D+2)^2 y = 12x e^{-2x}$

Rpta:  $y_p = 2x^3 e^{-2x}$

②  $(D-2)^3 y = 6x e^{2x}$

Rpta:  $y_p = \frac{x^4}{4} e^{2x}$

③  $(D+3)^3 y = 15x^2 e^{-3x}$

Rpta:  $y_p = \frac{x^5}{4} e^{-3x}$

④  $D^2(D-2)^2 y = 16e^{2x}$

Rpta:  $y_p = 2x^2 e^{2x}$

⑤  $(D^2 - D - 2)y = 18x e^{-x}$

Rpta:  $y_p = (3x^2 + 2x)e^{-x}$

⑥  $(D-2)^2 y = 20 - 3x e^{2x}$

Rpta:  $y_p = 5 - \frac{x^3}{2} e^{2x}$

⑦  $(D+1)^2 y = e^{-x} + 3x$

Rpta:  $y_p = \frac{x^2 e^{-x}}{2} + 3x - 6$

$$\textcircled{8} \quad (D^2 - 4)y = 16xe^{-2x} + 8x + 4 \quad \text{Rpta: } y_p = -(2x + 1)(xe^{-2x} + 1)$$

$$\textcircled{9} \quad (D^2 - 4D + 4)y = 6x^2 e^{2x} \quad \text{Rpta: } y_p = \frac{x^4}{2} e^{2x}$$

$$\textcircled{10} \quad (D - 3)^2 y = e^{3x} \quad \text{Rpta: } y_p = \frac{x^2}{2} e^{3x}$$

$$\textcircled{12} \quad D(D - 2)y = e^{2x} \quad \text{Rpta: } y_p = \frac{x}{2} e^{2x}$$

$$\textcircled{12} \quad D^2(D + 1)y = e^{-x} \quad \text{Rpta: } y_p = xe^{-x}$$

$$\textcircled{13} \quad (D^2 + 4D + 5)y = 4e^{-2x} \cos x \quad \text{Rpta: } y_p = 2xe^{-2x} \sin x$$

$$\textcircled{14} \quad (D^2 - 4D + 13)y = 24e^{2x} \sin 3x \quad \text{Rpta: } y_p = -4xe^{2x} \cos 3x$$

$$\textcircled{15} \quad (D^2 - 3D + 2)y = 72xe^{-x} \quad \text{Rpta: } y_p = 2(6x + 5)e^{-x}$$

$$\textcircled{16} \quad (D^2 + 4)y = 12(\sin x + \sin 2x) \quad \text{Rpta: } y_p = 4 \sin x - 3x \cos 2x$$

$$\textcircled{17} \quad (D^2 + 4)y = 20(e^x - \cos 2x) \quad \text{Rpta: } y_p = 4e^x - 5x \sin 2x$$

$$\textcircled{18} \quad (D^2 + 16)y = 8(x + \sin x) \quad \text{Rpta: } y_p = x \left( \frac{1}{2} - \cos 4x \right)$$

$$\textcircled{19} \quad (D^2 + 4)y = 8 \sin x \cos x \quad \text{Rpta: } y_p = -x \cos 2x$$

$$\textcircled{20} \quad (D^2 + 4)y = 8 \cos^2 x \quad \text{Rpta: } y_p = 1 + x \sin 2x$$

$$\textcircled{21} \quad (D^3 + D^2 + D + 1)y = 2e^{2t} \quad \text{Rpta: } y_p = \frac{2}{15} e^{2t}$$

$$\textcircled{22} \quad (D - 1)^3(D + 1)y = -2e^t \quad \text{Rpta: } y_p = -t^3 \frac{e^t}{3!}$$

$$(23) \quad (D^2 + 4)y = e^{it}$$

$$\text{Rpta: } y_p = \frac{e^{it}}{3}$$

$$(24) \quad (D^4 - 1)y = 2 \operatorname{senh} t$$

$$\text{Rpta: } y_p = \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cosh} t$$

$$(25) \quad D^2(D+2)y = 2 + e^{-t/2}$$

$$\text{Rpta: } y_p = \frac{t^2}{4} + \frac{16}{4} e^{-t/2}$$

$$(26) \quad (D^2 + 1)y = 3t^4$$

$$\text{Rpta: } y_p = 3t^4 - 36t + 72$$

$$(27) \quad (2D+1)y = (t-3)e^{-t}$$

$$\text{Rpta: } y_p = (1-t)e^{-t}$$

$$(28) \quad (D^2 - 3D + 2)y = 2 + t$$

$$\text{Rpta: } y_p = \frac{1-2t}{4}$$

$$(29) \quad (D^4 + 2D^2 + 1)y = \cos t$$

$$\text{Rpta: } y_p = \frac{t^2}{8} \cdot \cos t$$

$$(30) \quad (D^2 + 1)y = 3 \operatorname{sen} 2t - 2 \operatorname{cos} 2t$$

$$\text{Rpta: } y_p = -\operatorname{sen} 2t + \frac{2}{3} \operatorname{cos} 2t$$

II. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$(1) \quad (D^3 - 5D^2 + 8D - 4)y = e^{2x}$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}$$

$$(2) \quad (D^2 - 3D + 2)y = e^x + e^{2x}$$

$$\text{Rpta: } y = (c_1 - x)e^x + (c_2 + x)e^{2x}$$

$$(3) \quad D^2(D-2)^3 y = 48e^{2x}$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2 + 2x^3)e^{2x}$$

$$(4) \quad (D^2 + 16)y = 14 \operatorname{cos} 3x$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 \operatorname{cos} 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x + 2 \operatorname{cos} 3x$$

$$(5) \quad (D^3 + 3D^2 - 4)y = x e^{-2x}$$

$$\text{Rpta: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} - \frac{1}{18}(x^3 + x^2)e^{-2x}$$

$$(6) \quad (D^2 - 4D + 13)y = 24e^{2x} \operatorname{cos} 3x$$

$$\text{Rpta: } y = e^{2x}(c_1 \operatorname{cos} 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + 3 \operatorname{cos} x)$$

- 7)  $(D^2 - 4D + 13)y = 24e^{2x} \cos 3x$  **Rpta:**  $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + 4x \operatorname{sen} 3x)$
- 8)  $(D^2 + 4)y = 2 \cos x \cos 3x$  **Rpta:**  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{x}{4} \operatorname{sen} 2x - \frac{\cos 4x}{12}$
- 9)  $(D^2 + 25)y = \operatorname{sen} 5x$  **Rpta:**  $y = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x - 0.1x \cos 5x$
- 10)  $D(D^2 + 1)y = \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 \cos x + (c_3 - \frac{x}{2}) \operatorname{sen} x$
- 11)  $(D^2 - 9D + 18)y = e^{-3x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^{3x} + (c_2 + \frac{e^{-3x}}{9}) e^{6x}$
- 12)  $D^2(D^2 + 1)y = \operatorname{sen} x$  **Rpta:**  $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + \frac{x}{2}) \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$
- 13)  $(D^2 + D + 2)y = 2(1 + x - x^2)$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + x^2$
- 14)  $(D^2 - 1)y = \operatorname{sen}^2 x$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{10}$
- 15)  $(D^2 - 1)y = (1 + e^{-x})^{-2}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1 + e^{-x} \ln(1 + e^x)$
- 16)  $(D^2 - 3D + 2)y = \operatorname{sen} e^{-x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \operatorname{sen} e^{-x}$
- 17)  $(D^2 + D + 1)y = e^{3x} + 6e^x - 3e^{-2x} + 15$  **Rpta:**  $y_p = \frac{e^{3x}}{13} + 2e^x - e^{-2x} + 5$
- 18)  $(D^3 + 2D^2 - 6D + 8)y = xe^{-3x}$  **Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + c_3 e^{-2x} - \frac{e^{-3x}}{784}(28x + 34)$
- 19)  $(D^3 + 1)y = \cos x$  **Rpta:**  $y = \phi_c(x) + \frac{1}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$
- 20)  $(D^2 + 4)y = \operatorname{sen} 2x$  **Rpta:**  $y = \phi_c(x) - \frac{x \cos 2x}{4}$

- (21)  $(D^3 + D^2 + D + 1)y = e^x + e^{-x} + \operatorname{sen} x$   
**Rpta:**  $y = \phi_c(x) + \frac{1}{4}(e^x + 2xe^{-x}) - \frac{x}{4}(\operatorname{sen} x + \cos x)$
- (22)  $(D^2 - 1)y = x^2 \operatorname{sen} 3x$   
**Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - \frac{25x^2 - 13}{250} \operatorname{sen} 3x - \frac{3x}{25} \cos 3x$
- (23)  $(D^2 + 3D + 2)y = x \operatorname{sen} 2x$   
**Rpta:**  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - \frac{30x - 7}{200} \cos 2x - \frac{5x - 12}{100} \operatorname{sen} 2x$
- (24)  $D^4(D^2 - 1)y = x^2$   
**Rpta:**  $y = \phi_c(x) - \frac{1}{360}(x^6 + 30x^4)$
- (25)  $(D^2 - 2D - 1)y = e^x \cos x$   
**Rpta:**  $y = \phi_c(x) - \frac{e^x \cos x}{3}$
- (26)  $(D^2 - 4D + 3)y = 2xe^{3x} + 3e^x \cos 2x$   
**Rpta:**  $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{e^{3x}}{2}(x^2 - x) - \frac{3}{8}e^x(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)$
- (27)  $(D^3 - 2D + 4)y = x^4 + 3x^2 - 5 + 2$   
**Rpta:**  $y = c_1 e^{-2x} + e^x(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x) + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} - \frac{5x}{2} - \frac{7}{8}$
- (28)  $(D^2 + 2)y = x^3 + x^2 + e^{-2x} + \cos 3x$   
**Rpta:**  $y = \phi_c(x) + \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - 3x - 1) + \frac{e^{-2x}}{6} - \frac{\cos 3x}{7}$
- (29)  $(D^2 + 5D + 6)y = e^{-2x} \operatorname{sen}^2 x(1 + 2 \operatorname{tg} x)$   
**Rpta:**  $y = \phi_c(x) + e^{-2x} \operatorname{tg} x$
- (30)  $(D^2 + D)(D - 2)^3(y) = e^{2x} + e^{-x} \operatorname{sen} 3x$   
**Rpta:**  $y = c_0 + c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2)e^{2x} + \frac{x^3}{36}e^{-2x} + \frac{e^{-x}}{7860}(6 \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 3x)$
- (31)  $(D^2 + 6D + 9)(y) = 2xe^{3x} + 9x^2 - 3$   
**Rpta:**  $y = (c_0 + c_1 x)e^{3x} + \frac{x^3}{3}e^{3x} + x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{1}{3}$



- 32)  $(D^2 + 6D + 9)(y) = 2e^{-2x} \operatorname{sen} x$       Rpta:  $y = (c_0 + c_1 x)e^{-3x} - e^{-2x} \cos x$
- 33)  $(D^3 + 6D^2 + 9D)(y) = x^3 + e^x$       Rpta:  $y = c_0 + (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \frac{e^x}{4} + \frac{x^4}{36} + \frac{2x^3}{27} + \frac{3x^2}{27} + \frac{24}{2165}$
- 34)  $[(D-1)(3-D)(4+D)(6+D)-40](y) = e^{-x} x \cos(-2x)$
- 35)  $y^{(12)} + 12y^{(10)} + 48y^{(8)} + 65y^{(6)} + 12y^{(4)} + 48y^{(2)} + 64y = \cos 3x - \operatorname{sen} x$
- 36)  $(64D^8 + 48D^6 + 12D^4 + D^2)(y) = \operatorname{sen}(x/2) + \cos(x/2) + e^{-\frac{x}{2}}$
- 37)  $D^2(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)(y) = (x^2 + 1)(1 - e^x)$
- 38)  $(D^3 - D^2 - D + 1)(y) = 7 - 6x - 3x^2 + x^3 + x^4 e^{5x}$
- 39)  $(D^8 - 2D^4 + 1)(y) = (2x - 1) \cosh^2 x$       40)  $y^{(100)} + 100y = \cos x + x^{100}$
- 41)  $(D^2 + 64)^{30}(y) = \cosh x + \cos 8 + \operatorname{sen} 8x$
- 42)  $(D-1)^3(D-2)^4(D-3)^3(y) = e^x(2-3x+4x^2) + e^{2x}(3-2x+x^2-x^3) + x^3 e^{3x}$
- 43)  $(D-2)(D^2 - 2D + 5)^2(y) = xe^x \cos 2x$
- 44)  $(D^2 - 2D + 2)^2(y) = e^x(2x \cos x - 6 \operatorname{sen} x) + xe^{-x}$
- 45)  $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 14y^{(3)} + 62y^{(2)} + 149y^{(1)} + 149y + 130y = e^x + x$
- 46)  $y^{VIII} - 2y^{IV} + y = \cos 4x + \operatorname{sen} 6x$
- 47)  $y^{VI} + 9y^{IV} + 24y^{II} + 16y = e^{2x} + x^{12}$
- 48)  $y^{VIII} + 13y^{VI} + 60y^{IV} + 112y^{II} + 64y = e^{-4x} + \cos x + \operatorname{sen} x + \cosh 5x$
- 49)  $y^{IX} + 3y^{VIII} + 8y^{VII} + 16y^{VI} + 23y^V + 29y^{IV} + 18y^{III} + 20y^{II} + 12y^I + 4y = e^{-x} + 4 \operatorname{senh} x$

$$(50) \quad y^{(12)} + 21y^{(10)} + 147y^{(8)} + 344y^{(6)} + 21y^{(4)} + 147y^{(2)} + 343y = 4 + \cos 2x$$

$$(51) \quad (D^5 + 2D^3 + 10D^2 + D + 10)y = 0 \quad (52) \quad (D^2 + 1)y = 2 \sec^3 x$$

$$(53) \quad (D^9 - 4D)y = 6e^{-x} - 3e^x, \quad y = 7, \quad Dy = 9, \quad D^2y = 19 \quad \text{Cuando } x = \ln 2$$

$$(54) \quad (D^9 + 4D)y = 8 \cos 2x + 4 \quad (55) \quad (D^4 - D^3 - 7D^2 + 3D)y = e^{3x}x^2$$

$$(56) \quad (D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1)y = e^x \cos 2x \quad (57) \quad (D^3 - D)y = 1 + x^5$$

$$(58) \quad (3D^4 + 8D^3 + 6D^2)y = (x^3 - 6x^2 + 12x - 24)e^{-x}$$

$$(59) \quad (D^8 + 8D^4 + 17)y = e^{2x} + \cos 3x \quad (60) \quad D^3(D^2 + 1)^4 y = \sin x + \cos x + 1$$

$$(61) \quad (D^5 + 4D^4 + 14D^3 + 62D^2 + 149D + 130)y = 60e^{100x}$$

III. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$(1) \quad x^2 y'' + xy' + 4y = \sin(\ln x) \quad \text{Rpta: } y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x) + \frac{1}{3} \sin(\ln x)$$

$$(2) \quad x^2 y'' + 7xy' + 5y = x \quad \text{Rpta: } y = \frac{c_1}{|x|} + \frac{c_2}{|x|^5} + \frac{x}{12}$$

$$(3) \quad 3x^2 y'' + 12xy' + 9y = 0 \quad \text{Rpta: } y = \frac{c_1}{|x|^2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x|\right) + \frac{c_2}{|x|^2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x|\right)$$

$$(4) \quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad \text{Rpta: } y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x + \frac{\ln x}{4} + \frac{1}{4}$$

$$(5) \quad (D^4 + 8D^2 + 16)^3 (y) = \cos 5x + \sin 2x + e^{-3x}$$

$$\text{Rpta: } y_g = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5) \sin 2x$$

$$y_p = \frac{\cos 5x}{2!^9} + x^6 \frac{\sin(2x - 3\pi)}{4 \cdot 6!} + \frac{e^{-3x}}{(13)^6}; \quad y = y_g + y_p$$

$$(6) \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2 \ln x \quad (7) \quad x^2 y'' + xy' + 4y = \operatorname{sen}(\ln x)$$

$$(8) \quad y''' + \frac{3y''}{x+a} + \frac{y'}{(x+a)^2} - \frac{y}{(x+a)^3} = (x+a)^{-1} \cos(3 \ln(x+a))$$

$$(9) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = \cos x + \frac{1}{x} \quad (10) \quad x^3 y'''' + 2x^2 y''' - xy'' + y = x^2 \operatorname{Ln} x$$

$$(11) \quad x^2 y'' + xy' + 4y = \cos(2 \ln x) \quad (12) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2 \ln^2 x + 12x$$

$$(13) \quad (x+1)^3 y''' + (x+1)^2 y'' + 3(x+1)y' - 8y = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$(14) \quad (2x+1)^4 y'' + 3(2x+1)^3 y' + (2x+1)^2 y = 6 \ln(2x+1)$$

$$(15) \quad x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 4 \ln x + \cos(\ln x^4) + \operatorname{sen}(2 \ln x)$$

$$(16) \quad x^2 y'' + xy' + 9y = \operatorname{sen}(\ln x^3) + \cos(\ln x^3) \quad (17) \quad x^2 y''' + xy'' + 4y' = 1 + \cos(2 \ln x)$$

$$(18) \quad x^3 D^3 y - 3x^2 D^2 y + 6xDy - 6y = 60x^6 + 12x^{18}$$

$$(19) \quad x^4 y'''' - 6x^3 y'''' + 15x^2 y''' + 9xy'' - 9y = \cos(\ln x) + x^{-4} + \operatorname{sen}(\ln x^3)$$

$$(20) \quad (D^4 - 1)(y) = \cos x + \cos x \operatorname{sen} x + x^3 e^x \quad (21) \quad (D^4 + 8D^2 + 32)(y) = xe^x + 1$$

$$(22) \quad y^{VI} + 9y^{IV} + 24y''' + 16y = e^{2x} + x^7 \quad (23) \quad (D^6 + 1)^2(y) = e^x + x^{24}$$

$$(24) \quad (3x-1)^3 y^{IV} + (3-9x)^2 y''' + (3x-1)y'' = 36x^2 - 24x + 4$$

$$(25) \quad (D^2 + 81)^8(y) = \cos(9x + b^3) + \operatorname{sen}(9x + 2 - b^3), \text{ donde } b \text{ es cualquier constante real.}$$

## CAPÍTULO VII

### 7. ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES

Las ecuaciones diferenciales de orden  $n$ , de coeficientes variables son de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad \dots (1)$$

donde  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$  son funciones de variable real  $x, y$  continuas en un intervalo.

Suponiendo que  $a_n(x) \neq 0$ , entonces la ecuación (1) se puede expresar en la forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + b_n(x)y = g(x) \quad \dots (2)$$

La solución de la ecuación (2) es la suma de la solución general  $y_g$  de la ecuación diferencial homogénea correspondiente, más una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente.

Si  $y_1, y_2, \dots, y_n$  es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2) entonces la solución particular de la ecuación (2) es:

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \dots + c_n(x)y_n \quad \dots (\alpha)$$

donde  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  son funciones incógnitas de  $x$  por determinarse.

Para determinar las funciones incógnitas se forma el siguiente sistema:

Sea  $c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \dots + c_n(x)y_n = 0$ , entonces:

$$(\beta) \begin{cases} y_1 c_1'(x) + y_2 c_2'(x) + \dots + y_n c_n'(x) = 0 \\ y_1' c_1'(x) + y_2' c_2'(x) + \dots + y_n' c_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} c_1'(x) + y_2^{(n-1)} c_2'(x) + \dots + y_n^{(n-1)} c_n'(x) = g(x) \end{cases}$$

al resolver el sistema  $(\beta)$  se obtiene:  $\frac{dc_i(x)}{dx} = f_i(x)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  donde

$$c_i = \int f_i(x) dx, \text{ este resultado se sustituye en } (\alpha) \text{ obteniéndose la solución particular } y_p$$

Veremos para una ecuación de 2do. orden.

$y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x)$ , donde  $y_1, y_2$ , es un sistema de soluciones.

Luego la solución particular es:  $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

donde  $c_1(x)$ ,  $c_2(x)$  son funciones por determinarse para esto formaremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y_1 c_1'(x) + y_2 c_2'(x) = 0 \\ y_1' c_1'(x) + y_2' c_2'(x) = R(x) \end{cases} \text{ de donde } W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \text{ Entonces}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{R(x)y_2}{W[y_1, y_2]} \Rightarrow c_1(x) = -\int \frac{R(x)y_2 dx}{W[y_1, y_2]}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{R(x)y_1}{W[y_1, y_2]} \Rightarrow c_2(x) = -\int \frac{R(x)y_1 dx}{W[y_1, y_2]}$$

### Ejemplo:

① Resolver la ecuación diferencial siguiente:

$$(\cos x - \operatorname{sen} x)y'' + 2 \operatorname{sen} x \cdot y' - (\operatorname{sen} x + \cos x)y = e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)^2, \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = \operatorname{sen} x$$



Solución

La ecuación diferencial dada se puede escribir en la forma:

$$y'' + \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} y' - \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x} y = e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

La solución particular es  $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

donde  $c_1(x)$ ,  $c_2(x)$  son funciones incógnitas de  $x$  por determinarse:

$$\text{Luego: } \begin{cases} y_1 c_1'(x) + y_2 c_2'(x) = 0 \\ y_1' c_1'(x) + y_2' c_2'(x) = e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x c_1'(x) + \operatorname{sen} x c_2'(x) = 0 \\ e^x c_1'(x) + \cos x c_2'(x) = e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & \operatorname{sen} x \\ e^x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{sen} x \Rightarrow c_1(x) = \cos x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & \operatorname{sen} x \\ e^x & \cos x \end{vmatrix}} = e^x \Rightarrow c_2(x) = e^x$$

Luego la solución particular es  $y_p = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$  y la solución general es:

$$y = c_1 e^x + c_2 \operatorname{sen} x + e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

②

Resolver la ecuación diferencial:  $xy'' - y' - 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}$ ,  $y_1 = e^{x^2}$ ,  $y_2 = e^{-x^2}$

Solución

$y'' - \frac{1}{x} y' - 4x^2 y = 16x^2 e^{x^2}$ ; La solución particular es:  $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

donde  $c_1(x), c_2(x)$  son funciones por determinarse:

Luego: 
$$\begin{cases} e^{x^2} c_1'(x) + e^{-x^2} c_2'(x) = 0 \\ 2xe^{x^2} c_1'(x) - 2xe^{-x^2} c_2'(x) = 16x^3 e^{x^2} \end{cases}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x^2} \\ 16x^3 e^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & 2xe^{-x^2} \end{vmatrix}} = 4x \Rightarrow c_1(x) = 2x^2$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x^2} & 0 \\ 2xe^{x^2} & 16x^3 e^{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & 2xe^{-x^2} \end{vmatrix}} = -4xe^{2x^2} \Rightarrow c_2(x) = -e^{2x^2}$$

Luego  $y_p = 2x^2 e^{x^2} - e^{x^2}$  y la solución general es:  $y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2} - e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$

**TEOREMA.-** Mostrar que la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$  se transforma en  $\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x)u = 0$ , haciendo el cambio de variable  $y = u(x)v(x)$ , y escogiendo  $V(x)$  en forma apropiada

### Demostración

Sea  $y = u v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = v \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + u \frac{d^2 v}{dx^2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$v \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + u \frac{d^2 v}{dx^2} + P(x) \left( v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \right) + Q(x)uv = 0$$

$$v \frac{d^2 u}{dx^2} + \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + P(x) \frac{dv}{dx} + Q(x)v \right) u + \left( P(x)v + 2 \frac{dv}{dx} \right) \frac{du}{dx} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} + \left( \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P(x)}{v} \frac{dv}{dx} + Q(x) \right) u + \left( P(x) + \frac{2}{v} \frac{dv}{dx} \right) \frac{du}{dx} = 0} \quad \dots (1)$$

ahora daremos la forma deseada, escogiendo  $v(x)$  de modo que  $P(x) + \frac{2}{v} \frac{dv}{dx} = 0$ , de

donde  $\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2} P(x)$  entonces  $\ln v = -\frac{1}{2} \int P(x) dx$  de donde  $v = e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx}$

Luego la ecuación (1) se reduce a:

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} + \left( \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P(x)}{v} \frac{dv}{dx} + Q(x) \right) u = 0} \quad \dots (2)$$

haciendo  $f(x) = \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P(x)}{v} \frac{dv}{dx} + Q(x)$ , la ecuación (2)

queda en la forma:

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x)u = 0}$$

**Ejemplo.-** Resolver la ecuación diferencial  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + xy = 0$

### Solución

A la ecuación diferencial dada escribiremos así:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \dots (1)$$

donde  $P(x) = \frac{2}{x}$  y  $Q(x) = 1$ ; haciendo el cambio  $y = uv$  ... (2)

donde  $v = e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{v''}{v} + P \frac{v'}{v} + Q(x) = \frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) + 1 = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} + 1 = 1$$

como la ecuación (1) se transforma en la forma  $\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x)u = 0$  entonces  $\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0$

de donde  $P(r) = r^2 + 1 = 0$ , cuyas raíces son  $r_1 = i$ ,  $r_2 = -i$

La solución es  $u = c_1 \cos x + c_2 x$  como  $y = uv = \frac{u}{x} \Rightarrow u = xy$

$\therefore$  La solución es  $xy = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

**Observación:** Si  $y_1$  es una solución de la ecuación diferencial  $y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x)$  se puede determinar la segunda solución  $y_2$  de la ecuación diferencial mediante la expresión:  $y_2 = v(x)y_1$  donde  $v(x)$  es una función por determinar.

**Teorema.-** Si  $Y_1$  es la solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

Demostrar que  $Y_2 = cY_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{Y_1^2} dx$  es también solución de la ecuación diferencial

### Demostración

Como  $Y_1$  es una solución de la ecuación diferencial entonces

$$Y_1'' + P(x)Y_1' + Q(x)Y_1 = 0 \text{ (lo verifica)}$$

de acuerdo a la observación se tiene  $Y = Y_1 z$  es la solución general donde  $z$  es la función incógnita derivando se tiene  $Y' = Y_1 z' + Y_1' z$

$$Y'' = Y_1 z'' + 2Y_1' z' + Y_1'' z$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial

$$Y_1 z'' + 2Y_1' z' + Y_1'' z + P(x)(Y_1 z' + Y_1' z) + Q(x)Y_1 z = 0$$

$$Y_1 z'' + (2Y_1' + P(x)Y_1)z' + \underbrace{(Y_1'' + P(x)Y_1' + Q(x)Y_1)}_0 z = 0$$

$$Y_1 z'' + (2Y_1' + P(x)Y_1)z' = 0 \Rightarrow z'' + \left(2\frac{Y_1'}{Y_1} + P(x)\right)z' = 0 \quad \dots (1)$$

haciendo  $z' = u \Rightarrow z'' = u'$  reemplazando en (1) se tiene:

$$u' + \left(\frac{2Y_1'}{Y_1} + P(x)\right)u = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} = -\left(\frac{2Y_1'}{Y_1} + P(x)\right) \text{ integrando } \ln u = -2 \ln Y_1 - \int P(x) dx + c_1$$

$$\ln u Y_1^2 = -\int P(x) dx + c_1 \text{ levantando el logaritmo}$$

$$u Y_1^2 = e^{-\int P(x) dx + c_1} = c \cdot e^{-\int P(x) dx} \text{ entonces } u = c \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2} \text{ pero } u = z'$$

$$z' = c \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2} \text{ integrando se tiene: } z = c \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2} dx + c_1 \text{ como } Y = Y_1 z$$

$$Y = Y_1 \left[ c \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2} dx + c_1 \right] = c Y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2} dx + c_1 Y_1$$

Se observa que la segunda solución de la ecuación diferencial es dada por:

$$Y_2 = c Y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2} dx$$

**Ejemplo.-** Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \text{ donde } Y_1 = x \text{ es la solución particular.}$$

### Solución

de acuerdo al teorema anterior la segunda solución es:  $Y_2 = c Y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2} dx \dots (1)$



Luego a la ecuación diferencial expresaremos en la forma.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{1-x^2} y = 0 \text{ de donde } P(x) = \frac{-2x}{1-x^2}, \text{ ahora reemplazamos en (1).}$$

$$Y_2 = cY_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2} dx = cx \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} dx = cx \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx = cx \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$$

$$Y_2 = cx \left( \int \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} \right) \right] dx \right)$$

$$Y_2 = cx \left[ -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) \right] \Rightarrow Y_2 = c \left[ -1 + \frac{x}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right]$$

Luego la solución general es  $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \therefore Y = c_1 x + c_2 \left( -1 + \frac{x}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right)$

### Ejemplos:

- ① Hallar la segunda solución de la ecuación diferencial:  $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$  donde  $\phi_1(x) = e^{x^2}$

#### Solución

Sea  $\phi_2(x) = ve^{x^2}$  donde  $v' = u$  derivando se tiene:  $\phi_2'(x) = v'e^{x^2} + 2xve^{x^2}$

$\phi_2''(x) = e^{x^2} v'' + 4xe^{x^2} v' + (4x^2 + 2)e^{x^2} v$ , reemplazando en la ecuación diferencial

$$e^{x^2} v'' + 4xe^{x^2} v' + (4x^2 + 2)e^{x^2} v - 4xe^{x^2} v' - 8x^2 e^{x^2} v - 2e^{x^2} v = 0$$

$$e^{x^2} v'' + (4x - 4x)e^{x^2} v' + (8x^2 - 8x^2 + 2 - 2)e^{x^2} v = 0$$

de donde  $e^{x^2} v'' = 0 \rightarrow v'' = 0 \rightarrow u' = 0$

$$u = 1 \text{ pero } v' = u \rightarrow v' = 1 \rightarrow v = x$$

Luego la segunda solución es:  $\phi_2(x) = xe^{x^2}$

y la solución general es:  $y = c_1 e^{x^2} + c_2 x e^{x^2}$

2 Resolver la ecuación diferencial:  $y'' \cdot y' + y e^{2x} = x e^{2x} - 1$ ,  $y_1 = \operatorname{sen} e^x$

### Solución

Sea  $y_2 = y_1 v$ , la segunda solución de la ecuación diferencial homogénea.

$$y_2 = \operatorname{sen} e^x \cdot v \Rightarrow y_2' = v' \operatorname{sen} e^x + \cos e^x \cdot e^x v$$

$$y_2'' = \operatorname{sen} e^x \cdot v'' + 2e^x \cos e^x \cdot v' + e^{2x} (\cos e^x - e^x \operatorname{sen} e^x) v = 0$$

$$\text{Luego: } \operatorname{sen} e^x \cdot v'' + 2e^x \cos e^x \cdot v' + e^{2x} [\cos e^x - e^x \operatorname{sen} e^x] v = 0$$

$$\text{simplificando se tiene: } \operatorname{sen} e^x \cdot v'' + (2e^x \cos e^x - \operatorname{sen} e^x) v' = 0, \quad v' = u$$

$$\operatorname{sen} e^x \cdot u' + (2e^x \cos e^x - \operatorname{sen} e^x) u = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} + 2e^x \operatorname{tg} e^x - 1 = 0, \quad \text{integrando se tiene}$$

$$\ln u + \ln \operatorname{sen}^2 e^x = x \Rightarrow \ln u \cdot \operatorname{sen}^2 e^x = x \Rightarrow u \operatorname{sen}^2 e^x = e^x$$

$$u = e^x \operatorname{csc}^2 e^x \Rightarrow v' = e^x \operatorname{csc}^2 e^x$$

$$v = -c \operatorname{tg} e^x \text{ como } y_2 = \operatorname{sen} e^x \cdot v \Rightarrow y_2 = -\operatorname{sen} e^x \cdot \frac{\cos e^x}{\operatorname{sen} e^x} \Rightarrow y_2 = -\cos e^x$$

Luego la solución complementaria es:  $y_g = c_1 \operatorname{sen} e^x + c_2 \cos e^x$

Ahora hallaremos  $y_p$  por método variación de parámetro:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} e^x u_1' + \cos e^x u_2' = 0 \\ e^x \cos e^x u_1' - e^x \operatorname{sen} e^x u_2' = x e^{2x} - 1 \end{cases}$$

$$u_1' = x e^x \cos e^x - \frac{\cos e^x}{e^x} \Rightarrow u_1 = x e^x \cos e^x - \frac{\cos e^x}{e^x}, \quad \text{integrando se tiene:}$$

$$u_1 = x \operatorname{sen} e^x - \int e^x \frac{\operatorname{sen} e^x}{e^x} dx - \int \frac{\cos e^x}{e^x} dx = x \operatorname{sen} e^x - \frac{\cos e^x}{e^x}$$

$$u_2 = x \operatorname{sen} e^x + \frac{\cos e^x}{e^x}, \text{ como } y_p = u_1 \operatorname{sen} e^x + u_2 \cos e^x \text{ se tiene: } y_p = x \text{ al simplificar}$$

Luego la solución general es:  $y = x + c_1 \operatorname{sen} e^x + c_2 \cos e^x$

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Resolver las siguientes ecuaciones:

①  $xy'' - y' - 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}, y = e^{x^2}, y = e^{-x^2}$  Rpta:  $y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2} + (2x^2 - 1)e^{x^2}$

③  $x(1 - x \ln x)y'' + (1 + x^2 \ln x)y' - (x+1)y = (1 - x \ln x)^2 e^x, y_1 = e^x, y_2 = \ln x$

Rpta:  $y = c_1 e^x + c_2 \ln x + e^x(x + x \ln x + \ln x)$

③  $x^2(\ln x - 1)y'' + xy' + y = 0, y_1 = x$  Rpta:  $y = c_1 \ln x + c_2 x$

④  $y'' \pm (\operatorname{tg} x - 2c \operatorname{tg} x)y' + 2c \operatorname{tg}^2 x \cdot y = 0, y_1 = \operatorname{sen} x$  Rpta:  $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen}^2 x$

⑤  $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4, y_1 = \frac{1}{x}$  Rpta:  $y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x} + x^4$

⑥  $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3), y_1 = x^2$  Rpta:  $y = x^3 + c_1 x^2 + c_2(2x-1)$

⑦  $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 \cdot e^x, y_1 = e^x$  Rpta:  $y = c_1 x + c_2 e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x$

⑧  $y'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x$  Rpta:  $y_2 = x$

⑨  $xy'' - (x+1)y' + y = 0, y_1 = e^x$  ⑩  $x^2 y'' - 7xy' + 15y = 0, y_1 = x^3$

⑪  $xy'' + 2y' + xy = 0$  Rpta:  $y = \frac{c_1 \cos x}{2} + \frac{c_2 \operatorname{sen} x}{2} - \frac{\cos x}{2}$

12)  $\sin x \cdot y'' + 2 \cos x \cdot y' \cdot \sin x \cdot y = 2 \cos 2x$ , tal que  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ,  $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Rpta:  $y = \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x}$

13)  $y'' - 4y' - 12y = 0$ ,  $y_1 = e^{6x}$

Rpta:  $c_1 e^{6x} + c_2 e^{2x}$

14)  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ ,  $y_1 = x$

Rpta:  $y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2}$

15)  $\cos^2 x \cdot y'' - \sin x \cos x \cdot y' - y = \sin x$ ,  $y_1 = \sec x$ ,  $y_2 = \operatorname{tg} x$

16)  $(x^2 D^2 - 2xD + 2)y = x^3 \ln x$ , sabiendo que  $y_g = c_1 x + c_2 x$  es la solución de la ecuación homogénea

17)  $(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y'y = \frac{(x-1)^2}{x}$ ,  $y_1 = \frac{1}{x}$

18)  $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$ ,  $y_1 = e^{x^2}$

19)  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ,  $y_1 = x$

20)  $(2x+1)y'' + (4x-2)y' + 8y = 0$ ,  $Y_1 = e^{mx}$

21)  $y'' + y' \operatorname{tg} x + y \cos^2 x = 0$ ,  $Y_1 = \cos x (\sin x)$

22)  $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = x^{-2}$ ,  $Y_1 = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$

23)  $(1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$ ,  $Y_1 = e^{-7x}$

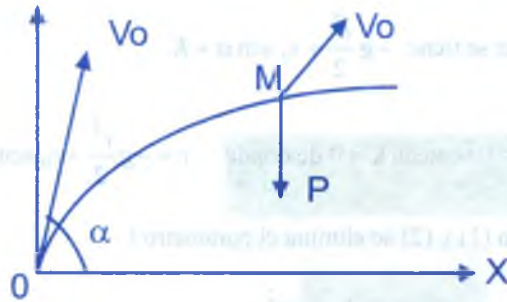
24)  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

25)  $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + (x^2 + 2x + 3)y = 0$

## 7.1. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN.-

### 1er Problema.- Trayectoria de un proyectil.-

Consideremos un proyectil de peso  $p$  lanzando con un ángulo  $\alpha$  sobre el plano vertical. Estudiaremos la forma de una trayectoria, despreciando la resistencia del aire.



A causa de la dirección de la velocidad inicial  $v_0$ , el proyectil tiende a elevarse pero como consecuencia de la fuerza vertical de la gravedad  $p = mg$ , la trayectoria se curva hacia el suelo, ubiquémonos en el punto M de la trayectoria, al cabo del tiempo  $t$  después del lanzamiento, y sean  $x$  e  $y$  las coordenadas de ese punto. Como se observa en la figura.

Como la única fuerza aplicada al proyectil es la gravedad, proyectamos éste sobre los dos ejes aplicando la fórmula fundamental  $F = ma$ :

$$\text{Sobre el eje horizontal} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$\text{Sobre el eje vertical} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -p = -mg.$$

Con el signo -, puesto que la fuerza  $p$  actúa en sentido contrario al positivo de  $y$ , resulta.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \text{ de donde } \frac{dx}{dt} = c = v_0 \cos \alpha \Rightarrow x = v_0 \cos \alpha t + c$$

entonces, para  $t = 0$ ,  $x = 0$  de donde  $c = 0$

$$\text{Obteniendo:} \quad x = v_0 t \cos \alpha \quad \dots (1)$$

$$\text{También: } \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -gt + c$$

para  $t = 0$ , y como  $\frac{dy}{dt}$  que es la proyección vertical de la velocidad  $v_0$  es igual a  $v_0 \sin \alpha$

$$\text{igual a } v_0 \sin \alpha \text{ de donde: } v_0 \sin \alpha = 0 + c \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$$



que al integrar se tiene  $-g \frac{t^2}{2} + v_0 \operatorname{sen} \alpha + K$

para  $t = 0, y = 0$  se tiene  $k = 0$  de donde  $y = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \operatorname{sen} \alpha$  ... (2)

de la ecuación (1) y (2) se elimina el parámetro  $t$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha = -ax^2 + bx$$

que representa una parábola de eje paralelo al eje  $y$ , pasando por un máximo.

### 2<sup>do</sup> Problema.- Problema del resorte vertical.-

Un peso  $p$  es atraído por un punto fijo  $A$  proporcionalmente a la distancia. Cuando este peso se coloca en "O" a una distancia  $OA = a$  y debajo del punto  $A$ , la atracción de  $A$  sobre el peso  $p$  es igual y opuesto al peso  $p$ .

Hallar la ecuación del movimiento del peso  $p$ .

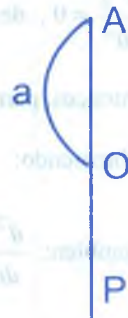
Suponiendo que se le abandone sin velocidad inicial en el punto  $A$ . ¿Cuál es la duración de la oscilación del peso  $p$  y cual es su velocidad cuando llegue a  $O$ ? No se considera resistencia <<del aire.

Llamamos  $x$  a la distancia del peso  $p$  al origen  $A$ , en un instante cualquiera y contemos positivamente hacia abajo se tiene  $p = mg$ .

Además la fuerza atractiva hacia  $A$  es de la forma  $-kx$ , dirigida en sentido inverso al peso, y la ecuación fundamental es:

$$\sum \text{de las fuerzas} = mr, \text{ nos da: } mg - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

por otra parte, de acuerdo con el enunciado, se tiene en  $O$   $mg = ka \Rightarrow k = \frac{mg}{a}$  de donde:



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{mg}{a} x = mg \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{a} x = g$$

ecuación fundamental de segundo orden incompleto, cuya solución es:

$$x = M \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t + N \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{a}} t + a$$

para  $t = 0$ ,  $x = 0$ , así como  $\frac{dx}{dt}$  se tiene  $M = -a$  y  $N = 0$ , de donde

$$\begin{cases} x = a - a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \\ \frac{dx}{dt} = \sqrt{ga} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{a}} t \end{cases} \quad \dots (1)$$

por lo tanto el movimiento  $x = f(t)$  es sinusoidal y el peso  $p$  oscila de 0 a  $2a$ . el período es

$$T = \frac{2\pi}{r} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

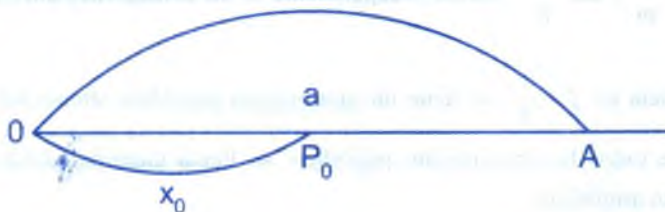
En 0,  $x = a$  y de acuerdo a la ecuación (1) se tiene:  $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$

de donde la velocidad es  $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{ag}$

**3er Problema.-** Movimiento de un punto atraído o repelido por un centro fijo o, proporcionalmente a la distancia.-

En este problema consideremos dos casos:

**a)** El primer caso de atracción



Sea  $P_0$  la posición normal de la abscisa  $x_0$ ,  $v_0$  la velocidad inicial dirigida hacia el entero O, y llamaremos  $m$  a la masa del cuerpo.

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es:  $F = -k^2 x$  ( $k^2$  es una constante positiva)

Como el signo -, puesto que  $f$  se dirige en sentido inverso de  $x$ .

La fórmula fundamental del movimiento  $F = ma$  da  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x$

que haciendo  $\omega^2 = \frac{k^2}{m}$  se tiene:  $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

ecuación diferencial de segundo orden y su solución es:

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  que es sinusoidal.

Ahora calculando A y B se tiene: para  $t = 0$ ,  $x = x_0$  se tiene  $A = x_0$

Además  $v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$

y para  $t = 0$ ,  $v = v_0$  se tiene  $v_0 = B\omega \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$

de donde se tiene:  $x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = M \sin(\omega t - \varphi)$

el coeficiente de  $t$  es la pulsación  $\omega$ , de donde el período

T es:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k}$  siendo independiente de las condiciones iniciales.

La frecuencia es  $f = \frac{1}{T}$ , se tiene un movimiento periódico sinusoidal: es decir, el más sencillo de todos los movimiento periódico, se llama también movimiento pendular o movimiento armónico.-

La cantidad  $x$  se denomina elongación o amplitud instantánea de la vibración,  $M$  es la amplitud de  $y$ ,  $\phi$  la fase.

Si en un fenómeno vibratorio, la amplitud instantánea viene dado por:  $x = A \sin \omega t$  la velocidad es:  $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$  y la aceleración.

$r = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$  la fuerza que produce el movimiento (o la fuerza resultante), es, llamado  $m$  a la masa del cuerpo en movimiento y "a" a la aceleración:

$$F = ma = -m\omega^2 x = k\omega^2 x$$

resultando proporcionalmente al cuadrado de la frecuencia.

#### b) Segundo caso de repulsión

Siendo la fuerza  $F = +k^2 x$

La ecuación del movimiento es:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = \frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$ , ( $\omega^2 = \frac{k^2}{m}$ )

y la solución de  $\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$  es:  $x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

Con las condiciones del primer caso se calcula A y B obteniendo finalmente:

$$x = x_0 \left( \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \right) + \frac{v_0}{\omega} \left( \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right) \Rightarrow x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sinh \omega t$$

#### 4<sup>to</sup> Problema.- Sólido girando alrededor de un eje.-

Sea  $I$  el momento de inercia con relación al eje y  $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$  la aceleración angular entonces la fórmula fundamental de los cuerpos que giran alrededor de un eje es:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \sum \text{ de los momentos de las fuerzas}$$

Sea  $\theta$  el ángulo de desviación de la posición de equilibrio y  $c \theta$  el momento resultante de las fuerzas aplicadas.

Momento que supondremos proporcional al ángulo  $\theta$ .

Como este momento actúa en sentido inverso al del ángulo  $\theta$ , es negativo, de donde la ecuación.

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\theta \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} + c\theta = 0$$

al resolver la ecuación se tiene:  $\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{c}{I}}t - \varphi\right)$

el movimiento resulta perpendicular ó sinusoidal, y como el coeficiente de  $t$  representa la pulsación  $\omega$  se deduce el periodo.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}$$

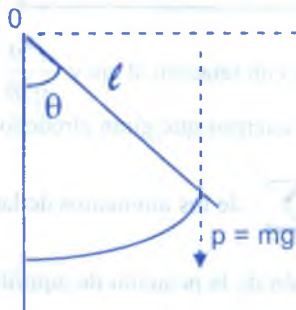
que es independiente de la amplitud.

Esto es lo que se produce cuando el par  $c\theta$  es debido a la torsión de un hilo elástico y un resorte espiral o un muelle, como ocurre en el balanceo en espiral o un reloj, o en el cuadro móvil de un aparato eléctrico de medida.

### 7.1.1 APLICACIÓN AL PÉNDULO SIMPLE.-

Tomemos el ángulo  $\theta$ , el momento de la fuerza  $p = mg$ , que tiende a volver al estado de equilibrio, es momento =  $p \cdot \ell \sin \theta = mg\ell \sin \theta$ , y si se supone que el ángulo  $\theta$  es lo bastante pequeño para que se puedan confundir el seno y el ángulo ( $\theta < 10^\circ$  a  $20^\circ$ ), podrá escribirse.

$$\text{momento} = mg\ell \theta = c\theta$$





Por otra parte, el momento de inercia con respecto al eje es  $I = m\ell^2$ , el periodo  $T$  es, por consiguiente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} = 2\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

**5<sup>to</sup> Problema.-** Oscilaciones forzadas de un sistema oscilante cualquiera. resonancia.-

Considerando el caso general de una masa de peso  $m$ , sometida a una fuerza proporcional, con la amplitud  $x$  del desplazamiento, dirigida en sentido inverso y sin amortiguación.

La ecuación del movimiento es:  $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ , ( $k^2 > 0$ )

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

en consecuencia, el sistema es oscilante y la amplitud instantánea es:

$$x = x_0 \sin\sqrt{\frac{k^2}{m}}t \text{ es decir, una senoide sin amortiguar.}$$

Sea  $\omega^2 = \frac{k^2}{m}$  y supongamos ahora que este sistema, capaz de oscilar, está sometido a una causa exterior, sinusoidal y de pulsación  $\omega$ , será pues, una fuerza impuesta que va a actuar sobre el sistema, y si  $x_0$  es la amplitud máxima, la ecuación del movimiento se convierte en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = k^2x_0 \sin \omega t \quad \dots (1)$$

ecuación de segundo orden, cuya solución es:  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + k^2 A \sin(\omega t + \varphi) = k^2 x_0 \sin \omega t$$

$A(k^2 - m\omega^2) \sin(\omega t + \varphi) = k^2 x_0 \sin \omega t$ , por lo tanto:

$$\begin{cases} \text{Si } k^2 < m\omega^2 < \omega_0, A = \frac{k^2 x_0}{k^2 - m\omega^2}, \varphi = 0 \\ \text{Si } k^2 > m\omega^2 > \omega_0, A = \frac{k^2 x_0}{m\omega^2 - k^2}, \varphi = \pi \end{cases}$$

resulta que: para  $\omega < \omega_0$  el movimiento está en fase

para  $\omega > \omega_0$  el movimiento está en oposición

Si  $\omega = \omega_0$ ,  $A = \infty$ , hay resonancia: la amplitud del movimiento crece considerablemente, y hay de enormes fuerzas.

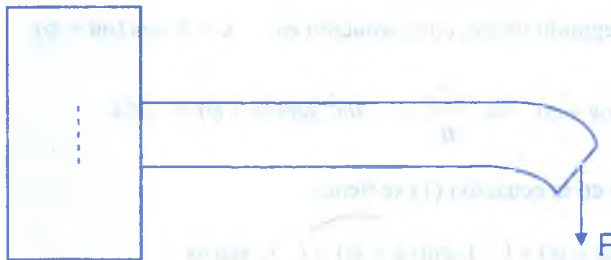
Así la resonancia (mecánica aquí) permite, con fuerzas pequeñas, obtener intensos e incluso violentos efectos.

En radio y con circuitos oscilantes se obtiene efectos análogos, lo que permite corregir intensas y de tensiones muy altas o sobretensiones utilísimas para amplificadores ó emisiones.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (\text{cuando } \theta \text{ no es pequeño})$$

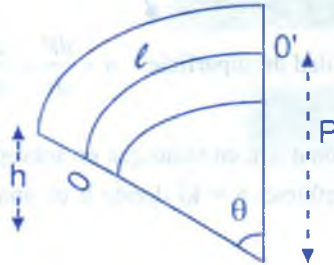
**6<sup>o</sup> Problema.-** Establecimiento de la fórmula fundamental de resistencia de materiales (flexión de vigas).

Suponemos una viga horizontal apoyada en dos puntos, pero, por razones de simplicidad y claridad, tomemos antes una viga horizontal sujeta a un extremo y sometida a otro a una fuerza  $p$ .



Sea  $0$  ó la fibra neutra, donde el esfuerzo es nulo, es decir, donde la longitud no cambia, encima la materia se estira y debajo se comprime.

Llamemos, asimilando la viga curvada a un arco de círculo.



$S$  la sección de la viga.

$p$  el radio de curvatura de la fibra neutra.

$l$  la longitud inicial de la viga.

$y$  la distancia de una fibra cualquiera encima de la línea neutra.

Se tiene para la fibra media.

$$l = p\theta$$

y para la fibra a la distancia  $y$ , de la longitud ha aumentado en  $d\ell$

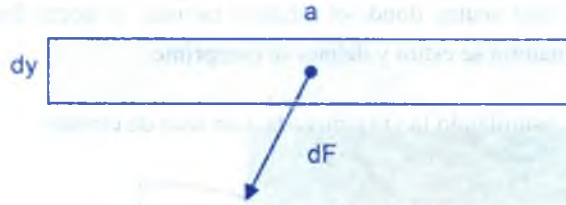
$$l + d\ell = (p + y)\theta$$

de donde  $d\ell = y\theta = y \frac{1}{p}$

el alargamiento unitario  $i$  es  $i = \frac{d\ell}{l} = \frac{y}{p}$

denominemos " $a$ " el espesor de la viga (perpendicular al plano de la figura) y sea  $dy$  un pequeño aumento de  $y$ .

Sobre la superficie  $a \cdot dy$  se ejerce una fuerza  $dF$ .



Sea  $n$  el esfuerzo por unidad de superficie.  $n = \frac{dF}{ds} = \frac{dF}{ady}$

ahora bien,  $i$  es proporcional a  $n$ , en tanto que no sobrepasa el límite de elasticidad (la Ley de Hooke), y puede escribirse,  $n = ki$  donde  $k$  es una constante, que ha sido calificada módulo de elasticidad  $E$ .

Sea, por consiguiente  $n = E i$

$$\frac{dF}{ady} = E \left( \frac{y}{p} \right) \text{ de donde } dF = \frac{aE}{p} y dy \quad \dots (1)$$

es la suma de todos los  $dF$  sustituida la parte izquierda de la viga supuesta elevada, y equilibrando con la fuerza de la derecha.

En efecto, estando en equilibrio todo el sistema, tomemos los momentos con respecto al punto "O" de todas las fuerzas, y escribamos que la suma algebraica de todos los momentos es nula, o incluso que:  $\Sigma$  de los momentos de las fuerzas de la izquierda =  $\Sigma$  de los momentos de las fuerzas de la derecha.

Es decir  $\int y dF = M$  que se llama también momento de flexión.

Multiplicando la ecuación (1) por  $y$  se tiene:

$$y dF = \frac{aE}{p} y^2 dy, \text{ integrando } \int_0^i y dF = M = \frac{E}{p} \int a y^2 dy$$

ahora bien,  $ay^2 dy$  es el momento de inercia de la lámina  $dy$  con respecto a la línea neutra y si se llama  $Y$  el momento de inercia de la sección  $s$  con respecto al eje que pasa por O y por G.

$$I = \int ay^2 dy$$

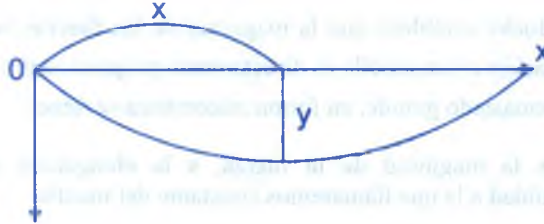
se tendrá  $M = \frac{EI}{p}$ , por otra parte el radio de curvatura es:  $p = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$  pero como las flexiones de las vigas son siempre muy ligeras,  $y'$  que es la pendiente, resulta prácticamente nula en cada punto, por lo tanto  $p = \frac{1}{y''}$ , lo que da  $M = EIy''$

es decir: 
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Fórmula fundamental de la flexión en resistencia de materiales.

**7<sup>mo</sup> Problema.-** Cálculo de la flexión de una viga.-

Consideremos una viga horizontal apoyada en dos puntos en sus extremos, esta viga se va a flexionar, para esto tomemos el eje de la viga como eje de las  $x$  y llamemos  $y$  la desnivelación vertical de la viga en un punto cualquiera, es decir la flexión.



Si se considera:

$I$  = momento de inercia de la sección de la viga con respecto a su centro de gravedad.

$E$  = el módulo de elasticidad del metal.

$M$  = suma de los momentos de todas las fuerzas situadas a la derecha (o a la izquierda) de la sección considera a la distancia  $x$ , comprendido los momentos debidos a la reacciones de los puntos de apoyo.

$P$  = radio de curvatura de la viga, en un punto cualquiera de la abscisa  $x$ .

Se tiene la misma fórmula que en el caso de la viga sujeta: 
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

cuya solución da la flexión  $y$  en un punto cualquiera.



**8<sup>vo</sup> Problema.-** Vibraciones de una masa pendiente de un muelle.-

Para formular la ecuación diferencial de este problema se necesita dos leyes de la física, la segunda de Newton y la ley de Hooke.

La segunda Ley de Newton establece que la variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo por unidad de tiempo es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y su sentido es la de la fuerza resultante.

Expresando en forma matemática es: 
$$\frac{d}{dt}(mv) = KF$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $v$  su velocidad,  $F$  la fuerza resultante que actúa sobre él,  $K$  una constante de proporcionalidad.

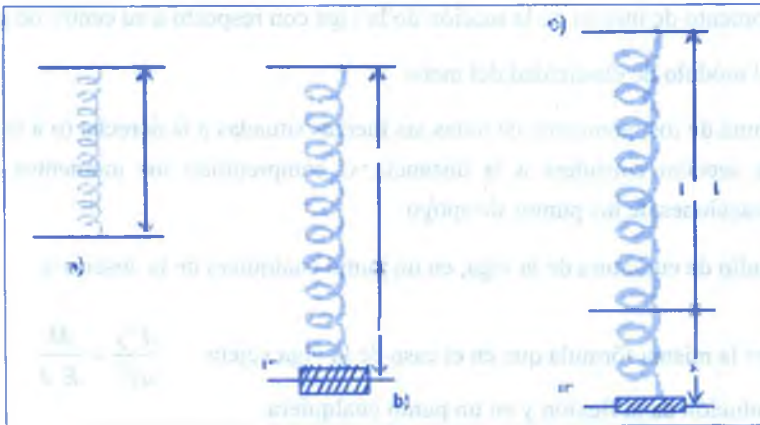
Si  $m$  se considera constante  $\Rightarrow m \frac{d}{dt} = KF$

de donde  $F = K m a$ , donde  $a = \frac{dv}{dt}$

La ley de Hooke establece que la magnitud de las fuerzas necesarias para producir una cierta elongación en un muelle es directamente proporcional a la elongación, supuesto que ésta no es demasiado grande, en forma matemática se tiene:  $|F| = Ks$

donde  $F$  es la magnitud de la fuerza,  $s$  la elongación y  $K$  es una constante de proporcionalidad a la que llamaremos constante del muelle.

Para formular el problema consideremos lo siguiente:



- a) longitud natural  $L$       b) masa en equilibrio, muelle con deformación  $L + \ell$       c) masa a una distancia  $x$  por debajo de posición de equilibrio; longitud del muelle con deformación  $L + \ell + x$ .

Ahora consideremos las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$ .

- 1° La fuerza de gravedad  $F_1 = mg$   $g$  es la aceleración debido a la gravedad.  
 2° La fuerza recuperadora del muelle, por la ley de Hooke se tiene  $F_2 = -K(x + \ell)$  por ser la fuerza recuperadora  $F_2$  igual a la magnitud pero de sentido opuesto a las fuerzas de gravedad, y que para la posición  $x = 0$ , se tiene:

$$-mg = -K(0 + \ell) \Rightarrow mg = K\ell \quad \text{por lo tanto} \quad F_2 = -Kx - mg$$

- 3° La fuerza de resistencia del medio llamado fuerza de amortiguamiento, que se expresa así:  $F_3 = -a \frac{dx}{dt}$ ,  $a > 0$   
 4° Cualesquiera fuerzas exteriores que actúan sobre la masa que será expresado por  $F_4 = F(t)$  ahora aplicando la segunda ley de Newton  $F = ma$ , donde

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad \text{se tiene:} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - Kx - mg - a \frac{dx}{dt} + F(t) \quad \text{de donde:}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$$

Que es la ecuación diferencial del movimiento de la masa sujeta al muelle.

**9° Problema.-** Movimiento libre no amortiguado.-

De la ecuación diferencial del movimiento.  $m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$

para el caso del movimiento libre no amortiguado

se tiene  $a = 0$  y  $F(t) = 0 \quad \forall t$  entonces:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0$  si,  $\lambda^2 = \frac{K}{m}$

$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0$ , cuya solución es:  $x = c_1 \cos \lambda t + c_2 \operatorname{sen} \lambda t$

donde  $c_1, c_2$  constantes arbitrarias y para

$x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = v_0$  se tiene  $c_1 = \frac{v_0}{\lambda}$ ,  $c_2 = x_0$

$$x = \frac{v_0}{\lambda} \cos \lambda t + x_0 \operatorname{sen} \lambda t$$

expresaremos en la forma siguiente:  $x = c \left( \frac{v_0}{c} \cos \lambda t + \frac{x_0}{c} \operatorname{sen} \lambda t \right)$

donde  $c = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2 + x_0^2} > 0$  siendo  $\frac{v_0}{c} = -\operatorname{sen} \phi$

$\frac{x_0}{c} = \cos \phi$  obteniendo  $x = c \cos(\lambda t + \phi) \Rightarrow x = c \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}} t + \phi\right)$

por lo tanto el movimiento libre no amortiguado de la masa es un movimiento armónico simple.

### 10<sup>mo</sup> Problema.- Movimiento libre amortiguado.-

De la ecuación diferencial del movimiento  $m \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$ , para el caso del movimiento libre amortiguado se tiene:  $F(t) = 0 \quad \forall t$  resultando la ecuación diferencial

$m \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + Kx = 0$  de donde  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = 0$  siendo  $2b = \frac{a}{m}$ ,  $\lambda^2 = \frac{K}{m}$

para la solución de este problema se presenta tres casos que dependen del signo de  $b^2 - \lambda^2$ .

**Caso 1.-** Movimiento Oscilatorio Amortiguado.-

Si  $b < \lambda$  entonces la solución es:  $x = e^{-bt} [c_1 \sin \sqrt{\lambda^2 - b^2} t + c_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - b^2} t]$

que también se puede expresar en la forma:  $x = e^{-bt} \cos[\sqrt{\lambda^2 - b^2} t + \phi]$  donde

$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} > 0$  y  $\phi$  está determinado por las ecuaciones:

$$-\sin \phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} ; \quad \cos \phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

**Caso 2.-** Amortiguador Crítico.- Si  $b = \lambda$ ; La solución es  $x = (c_1 + c_2 t)e^{-bt}$

**Caso 3.-** Amortiguamiento Super Crítico.- Si  $b > \lambda$

Entonces la solución es:  $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

donde  $r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \lambda^2}$ ,  $r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \lambda^2}$

### **Ivo Problema.-** Circuitos eléctricos.-

En las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a circuitos en serie contiene una fuerza electromotriz, elementos de resistencia, inducción y capacidad.

Una fuerza electromotriz (por ejemplo una batería o un generador) produce un flujo de corriente en un circuito cerrado y que esta corriente produce lo que se llama caída de tensión (o voltaje).

Para la caída de tensión en cada elemento de resistencia, inducción y capacidad se tiene las tres leyes siguientes:

- 1° La caída de tensión en un elemento de Resistencia es dado por  $E_R = Ri$  donde R es una constante de proporcionalidad llamada resistencia e i la intensidad de la corriente.

2° La caída de tensión en un elemento de inducción es dado por:  $E_L = L \frac{di}{dt}$  donde L es una constante de proporcionalidad llamada inductancia e i la intensidad de la corriente.

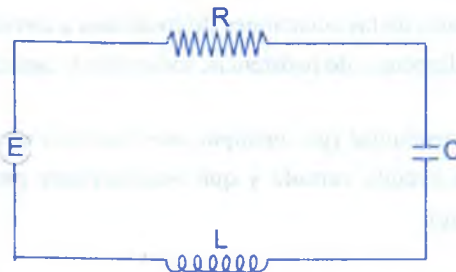
3° La caída de tensión en un elemento de capacidad o condensador es dado por:  $E_c = \frac{1}{c} q$  donde c es una constante de proporcionalidad llamada capacitancia y q es la carga eléctrica instantánea en el condensador como  $i = \frac{dq}{dt}$  entonces:  $E_c = \frac{1}{c} \int i dt$

Las leyes fundamentales en el estudio de los circuitos eléctricos son:

- a) Ley de Kirchoff (forma 1).- La suma algebraica de las caídas instantáneas de tensión, a lo largo de un circuito cerrado en un sentido específico es cero.
- b) Ley de Kirchoff (forma 2).- La suma de las caídas de tensión en los elementos de inducción, resistencia y capacidad, es igual a la fuerza electromotriz total en un circuito cerrado.

Consideremos el circuito siguiente:

En este diagrama y en los posteriores emplearemos los siguientes símbolos convencionales.



E fuerza electromotriz (batería o generador)



R resistencia



L inductor



C Condensador



Aplicando la ley de Kirchoff, al circuito y utilizando las leyes de caídas de tensión se

obtiene la ecuación:  $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}q = E$

Como  $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$  entonces:  $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E$

de esta ecuación se tiene:  $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = \frac{dE}{dt}$

Por lo tanto se tiene las dos ecuaciones.

Ecuaciones diferenciales para la carga  $q$  y la corriente  $i$ :

Si el circuito no tiene condensador la ecuación se reduce a:  $L \frac{di}{dt} + Ri = E$

y así se tiene inductor, la ecuación se reduce a:  $R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E$

### Ejercicios Propuestos.-

- ① En el extremo de un muelle espiral sujeto al techo, se coloca un peso de 8 libras. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el muelle se ha alargado 6 pulgadas. A continuación, el peso se desplaza 3 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se abandona en  $t = 0$  con una velocidad inicial de 1 pie/seg., dirigida hacia abajo. Despreciando la resistencia del medio y suponiendo que no existen fuerzas exteriores, determinar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento resultante:

Amplitud del movimiento  $\sqrt{\frac{5}{8}}$  pie

Rpta: el periodo  $2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$  seg.

frecuencia es  $\frac{4}{\pi}$  oscilaciones/seg.

- 2) En el extremo inferior de un muelle espiral sujeto al techo se suspende un peso de 12 libras. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el muelle queda alargado 1.5 pulgadas. A continuación se lleva el peso 2 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y se abandona partiendo del reposo en  $t = 0$ . Hallar el desplazamiento del peso en función del tiempo. Determinar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento resultante. **Rpta:**  $x = \frac{\cos 16t}{6} \cdot \frac{1}{6}$  pies  $\cdot \frac{\pi}{8}$  oscilaciones/seg.

- 3) Al extremo inferior de un muelle espiral suspendido del techo se liga un peso de 4 lbs. El peso queda en su posición de equilibrio en la que el muelle está alargado 6 pulgadas. En el instante  $t = 0$  se golpea el peso de modo que se pone en movimiento con una velocidad inicial de 2 pies/seg. dirigida hacia abajo.

- Determinar el desplazamiento resultante y la velocidad del peso en función del tiempo.
- Hallar la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.
- Determinar los instantes en los que el peso se encuentra 1.5 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y moviéndose hacia abajo.
- Determinar los instantes en que se encuentra 1.5 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y movimiento hacia arriba.

**Rpta:** a)  $x = -\frac{\sin 8t}{4}$       b)  $\frac{1}{4}$  pies;  $\frac{\pi}{4}$  seg;  $\frac{4}{\pi}$  oscilaciones/seg.

c)  $t = \frac{\pi}{48} + \frac{n\pi}{4}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )      d)  $t = \frac{5\pi}{48} + \frac{n\pi}{4}$  ( $n = 0, 1, \dots$ )

- 4) La naturaleza de un muelle espiral es tal que un peso de 225 lbs. le deforma 6 pulgadas. El muelle se encuentra suspendido del techo, a su extremo inferior se liga un peso de 16 lbs. que, a continuación, queda en su posición de equilibrio. Entonces se lleva a una posición 4 pulgadas por debajo de la del equilibrio y se abandona en  $t = 0$  con una velocidad inicial de 2 pies/seg. dirigida hacia abajo.

- Determinar el desplazamiento resultante como función del tiempo.

- b) Hallar la amplitud, período y frecuencia del movimiento resultante.
- c) ¿En qué instante atraviesa el peso su posición de equilibrio y cuál es su velocidad en ese instante?

**Rpta:** a)  $x = -\frac{\sin 10t}{5} + \frac{\cos 10t}{3}$       b)  $\frac{\sqrt{34}}{15}$  pies;  $\frac{\pi}{5}$  (seg),  $\frac{5}{\pi}$  oscilaciones/seg.

c) 0.103 seg; -3.888 pies/seg.

- 5) De un resorte vertical cuya constante de rigidez es igual a 300 Kg/m. se suspende un peso de 118 Kg. Si el peso se levanta 76.6 mm. sobre su posición de equilibrio y luego se le suelta. calcular el instante en que el peso se halla a 38.3 mm. debajo de su posición de equilibrio y moviéndose hacia abajo. Halle también la amplitud, período y frecuencia del movimiento.

**Rpta:**  $x = 7.66 \sin(5t + \frac{3\pi}{2})$ , amplitud 7.66 cm

El periodo  $\frac{2\pi}{5}$ , la frecuencia  $\frac{5}{2\pi}$  ciclos/seg.

- 6) Un peso de 1.84 Kg. suspendido de un resorte lo estira 76.5 mm. se tira del peso hasta bajarlo 153 mm. de su posición de equilibrio y luego se le suelta. Suponiendo que el peso actúa una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 3 v kg. siendo v la velocidad instantánea en m/seg. hallar la ecuación del movimiento del peso después de haberlo soltado.

**Rpta:**  $x = 0.153\sqrt{2}e^{-8t} \sin(8t + \frac{\pi}{4})$

- 7) Una masa de 100 gr. se suspende de un extremo de un resorte y el otro extremo se suspende de un soporte fijo dejando que el sistema alcance el reposo. En la posición de equilibrio el resorte se estira 5 cm. La masa se tira 5 cm. hacia abajo y se suelta con una velocidad de 7 cm/seg. Encuentre la ecuación del movimiento de este sistema para las siguientes fuerzas de amortiguamiento.

a)  $2.800 \frac{dx}{dt} \frac{gr - cm}{seg^2}$

b)  $3.500 \frac{dx}{dt} \frac{gr - cm}{seg^2}$

**Rpta:** a)  $x = (5 + 77t)e^{-14t}$

b)  $x = 7e^{-7t} - 2e^{-28t}$

- 8) Una masa  $m$  se proyecta verticalmente hacia arriba desde "O" con una velocidad inicial  $v_0$ . Hallar la altura máxima alcanzada, suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad. **Rpta:** altura máxima  $x = \frac{1}{k} [v_0 - \frac{g}{k} \ln(\frac{g + kv_0}{g})]$

- 9) Se ha colocado una cadena sobre una clavija pulida, colgando, de un lado 8 dm. y del otro 12 dm. Hallar el tiempo que la cadena tarda, al resbalar, en caerse.

a) Si se prescinde del rozamiento.

b) Si el rozamiento es igual al peso de 1 dm. de cadena.

**Rpta:** a)  $t = \sqrt{\frac{10}{g}} \operatorname{arc.cosh} \frac{1}{2}(x+2) = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$

b)  $t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln \frac{2}{3} (x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x})$

- 10) En el extremo inferior de un muelle sujeto al techo se fija un peso de 32 libras. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, en la que el alargamiento del muelle es de 2 pies. A continuación se lleva dicho peso 6 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se abandona  $t = 0$ , no existe fuerzas exteriores, pero la resistencia del medio en libras es numéricamente igual a  $4 \frac{dx}{dt}$ , donde  $\frac{dx}{dt}$  es la velocidad instantánea en pies por segundo. Determinar el movimiento resultante para el peso pendiente del muelle.

**Rpta:**  $x = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-2t} \cos(2\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6})$

- 11) Al extremo inferior de un muelle espiral suspendido del techo se sujeta un peso de 8 lbs. que queda en reposo en su posición de equilibrio con el muelle alargado 0.4 pies, se lleva entonces el peso 6 pulgadas por debajo de dicha posición de equilibrio y se abandona en  $t = 0$ . La resistencia del medio es, en libras, numéricamente igual a  $2 \frac{dx}{dt}$  donde  $\frac{dx}{dt}$  es la velocidad instantánea en pies por segundo.



- a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento, así como las condiciones iniciales.
- b) Resolver el problema de valores iniciales planteado en la parte a) para determinar el desplazamiento del peso en función del tiempo.

**Rpta:** a)  $\frac{1}{4} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 20x = 0, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0$

b)  $x = e^{-4t} \left( \frac{\sin 8t}{4} + \frac{\cos 8t}{2} \right)$

12

En el extremo inferior de un muelle espiral suspendido de un soporte fijo se coloca un peso de 8 lbs. El peso queda en reposo en su posición de equilibrio, posición en la que el muelle se encuentra deformado 6 pulgadas. A continuación se desplaza el peso 9 pulgadas por debajo de dicha posición y se abandona en  $t = 0$ . El medio ofrece una resistencia que es, en libras, numéricamente igual a  $4 \frac{dx}{dt}$ , siendo  $\frac{dx}{dt}$  la velocidad instantánea en pies por segundo. Determinar el desplazamiento del peso en función del tiempo.

**Rpta:**  $x = (6t + \frac{3}{4})e^{-8t}$

13

Se ha suspendido un peso de 7.26 Kg. cuya constante de rigidez es 7.44 Kg/m. se aplica una fuerza externa dada por  $F(t) = 10.9 \sin 10t$ ,  $t \geq 0$ , se supone que actúa una fuerza de amortiguamiento que expresada en Kg. es numéricamente igual a 5.95  $v$ , siendo  $v$  la velocidad instantánea del peso en m/seg. inicialmente el peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio. Halle la posición del peso en cualquier instante.

**Rpta:**  $x = 0.2925e^{-1.55t} - 0.212e^{-6.45t} - 0.0915 \sin 10t - 0.0813 \cos 10t$

14

Se suspende un peso de 14.5 Kg. de un resorte vertical cuya constante de rigidez es 5.95 Kg/m. se aplica una fuerza  $F(t) = 7.26 \sin 2t$ ,  $t \geq 0$ . Suponiendo que cuando  $t = 0$  el cuerpo se encuentra en reposo en su posición de equilibrio y que la fuerza amortiguadora es despreciable, determine la posición y la velocidad del peso en cualquier instante.

**Rpta:**  $x = 0.61 \sin 2t - 1.22t \cos 2t$  ;  $y = 2.44 \sin 2t$



- 15) Una viga horizontal de  $2\ell$  metros de longitud está apoyada en sus extremos. Hallar la ecuación de su curva y su máxima deformación vertical (flecha) cuando tiene una carga uniformemente distribuida de  $\omega$  Kg/m.

$$\text{Rpta: } y = \frac{\omega}{24EI}(4\ell x^3 - x^4 - 8\ell^3 x) ; -y \text{ max} = \frac{5\omega\ell^4}{24EI}$$

- 16) Resolver el problema 15) si actúa, además, una carga de  $W$  Kg en medio de la viga.

$$\text{Rpta: } y = \frac{\omega}{24EI}(4\ell x^3 - x^4 - 8\ell^3 x) + \frac{W}{12EI}(3\ell x^2 - |\ell - x|^3 - 6\ell^2 x + \ell^3)$$

$$-y \text{ max} = \frac{5\omega\ell^4}{24EI} + \frac{W\ell^3}{6EI}$$

- 17) Una viga horizontal de  $\ell$  metros de longitud está empotrada en un extremo y libre en el otro. Hallar la ecuación de su curva elástica y la flecha máxima si la carga uniformemente repartida es  $\omega$  Kg/m. **Rpta:**  $y = \frac{\omega}{24EI}(4\ell x^3 - 6\ell^2 x^2 - x^4) ; -y \text{ max} = \frac{\omega\ell^4}{8EI}$

- 18) Una viga horizontal de  $\ell$  metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Hallar la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima si tiene una carga uniformemente distribuida de  $\omega$  Kg/m. **Rpta:**  $y = \frac{\omega x^2}{24EI}(2\ell x - \ell^2 - x^2), -y \text{ max} = \frac{\omega\ell^4}{384EI}$

- 19) Resolver el problema 18) si además actúa un peso  $W$  Kg. en el punto medio de la viga.

$$\text{Rpta: } y = \frac{\omega}{24EI}(2\ell x^3 - \ell^2 x^2 - x^4) + \frac{W}{48EI}(\ell^3 - 6\ell^2 x + 9\ell x^2 - 4x^3), \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell$$

$$-y \text{ max} = \frac{1}{384EI}(\omega\ell^4 + 2W\ell^3)$$

- 20) Una viga de longitud  $3\ell$  está libremente apoyada en los extremos. Hay una carga uniforme  $\omega$  por unidad de longitud y carga  $\omega$  aplicada a una distancia  $\ell$  de cada extremo. Tome el origen en el punto medio de la viga y halle la ecuación de la curva elástica y la máxima de flexión.

**Rpta:**  $y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{\omega}{2} \left( \frac{9}{8} \ell^2 x^2 - \frac{x^4}{12} \right) \right] + \omega \left( \frac{3}{4} \ell x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{\ell^2 x}{8} + \frac{\ell^3}{48} \right), \frac{\ell}{2} \leq x \leq \frac{3\ell}{2}$

$$-y \text{ max} = \frac{1}{384EI} (405\omega\ell^4 + 368\omega\ell^3)$$

**21** Un circuito eléctrico consta de una inductancia de 0.1 henrios, una resistencia de 20 ohmios, y un condensador cuya capacidad es de 25 microfaradios (1 microfaradio =  $10^{-6}$  faradios). Hallar la carga de  $q$  y la corriente  $y$  en el tiempo  $t$ , siendo las condiciones iniciales:

a)  $q = 0.05$  coulombios,  $i = \frac{dq}{dt} = 0$ , para  $t = 0$

b)  $q = 0.05$  coulombios,  $i = -0.2$  amperios para  $t = 0$

**Rpta:** a)  $q = e^{-100t} (0.05 \cos 624.5t + 0.008 \sin 624.5t)$  ;  $i = -0.32e^{-100t} \sin 624.5t$

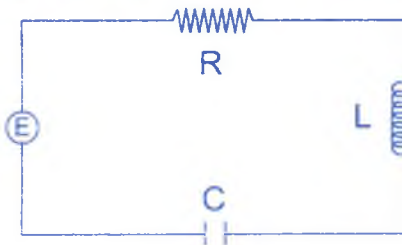
b)  $q = e^{-100t} (0.05 \cos 624.5t + 0.0077 \sin 624.5t)$

$i = e^{-100t} (-0.2 \cos 624.5t - 32.0 \sin 624.5t)$

**22** Un circuito consta de una inductancia de 0.05 henrios, una resistencia de 20 ohmios, un condensador cuya capacidad es de 100 microfaradios y una f.e.m. de  $E = 100$  voltios. Hallar  $i$  y  $q$  siendo las condiciones iniciales  $q = 0$   $i = 0$  para  $t = 0$ .

**Rpta:**  $q = e^{-200t} (-0.01 \cos 400t - 0.005 \sin 400t) + 0.01$  ;  $i = 5e^{-200t} \sin 400t$

**23** Sea  $L = 10$  henry (h),  $R = 250$  ohms (r),  $C = 10^{-3}$  farads (f) y  $E = 900$  volts. (v) en el circuito de la figura. Suponga que no hay carga presente y que no está fluyendo corriente en el momento  $t = 0$  en que se aplica  $E$ , calcule la corriente y la carga para todo valor  $t > 0$ .



**Rpta:**  $I(t) = 6(e^{-5t} - e^{-20t})$

$$Q(t) = \frac{1}{10} (9 - 12e^{-5t} + 3e^{-20t})$$

24) En los ejercicios, halle la corriente de estado estacionario en el circuito RLC de la figura de 23) donde:

- a)  $L = 5$  henrys,  $R = 10$  ohms,  $C = 0.1$  farad,  $E = 25$  sent volts.  
 b)  $L = 10$  henrys,  $R = 40$  ohms,  $C = 0.025$  farad,  $E = 100 \cos 5t$  volts.  
 c)  $L = 1$  henrys,  $R = 7$  ohms,  $C = 0.1$  farad,  $E = 100 \sin 10t$  volts.  
 d)  $L = 2.5$  henrys,  $R = 10$  ohms,  $C = 0.08$  farad,  $E = 100 \cos 5t$  volts

25) Halle la corriente transitoria en el circuito RLC de la figura de 23) para los ejercicios de 24).

26) Dado que  $L = 1$  henrys,  $R = 1200$  ohms,  $C = 10^{-6}$  farad,  $Y(0)=Q(0) = 0$  y  $E = 100 \sin 600 t$ , volts, determine la corriente transitoria y la corriente de esta estacionario.

**Rpta:**  $I_T = \frac{e^{-600t}}{2320} (297 \sin 800t - 96 \cos 800t)$ ;  $I_E = \frac{1}{580} (24 \cos 600t - 27 \sin 600t)$

27) Se conecta una inductancia de  $L$  henrios, una resistencia  $R$  ohms. y una capacitancia  $C$  farads, en serie con una f.e.m. de  $E_0 \sin \omega t$  volts. suponga que  $Q(0) = I(0) = 0$  y  $4L > R^2 C$ .

- a) Halle la expresión para  $Q(t)$  y  $I(t)$ .    b) ¿Que valor de  $\omega$  producirá resonancia?

**Rpta:** b)  $\omega = \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$

28) Resuelva el ejercicio 27) para  $4L < R^2 C$     **Rpta:** b) ningún  $\omega$  produce resonancia.



## CAPÍTULO VIII

### 8. SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en las funciones incógnitas.  $x_1 = \psi_1(t)$ ,  $x_2 = \psi_2(t), \dots, x_n = \psi_n(t)$  es de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

#### NOTACIÓN VECTORIAL

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_n, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

donde  $x_1 = \psi_1(t), \dots, x_n = \psi_n(t)$  son diferenciables y con derivadas continuas en (a,b) llamadas solución del sistema.

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de "n" funciones incógnitas se puede escribir en la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t);$$

Si  $b_i(t) = 0$ , el sistema se llama homogénea y si  $b_i(t) \neq 0$  el sistema se llama no homogénea. Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales existen los siguientes métodos:

**MÉTODO:** Reducción de un Sistema a una Ecuación Diferencial de n-Esimo Orden.-

Consideremos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + f(t) & \dots (1) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) & \dots (2) \end{cases}$$

donde a, b, c, d, son constantes f(t), g(t) son funciones conocidas: x(t), y(t) son funciones incógnitas de la ecuación (1) despejamos  $y = \frac{1}{b} \left( \frac{dx}{dt} - ax - f(t) \right)$

reemplazando y en (2) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{b} \left( \frac{dx}{dt} - ax - f(t) \right) \right] = cx + \frac{d}{b} \left( \frac{dx}{dt} - ax - f(t) \right) + g(t)$$

$$\frac{1}{b} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{adx}{dt} - \frac{d}{dt} (f(t)) - cx - \frac{d}{b} \left( \frac{dx}{dt} - ax - f(t) \right) - g(t) = 0$$

simplificando se tiene:

$$A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + cx = R(t)$$

donde A, B, C son constante que es una ecuación diferencial de coeficientes constantes.

**Ejemplo.-**

①

Resolver: 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 - 2y & \dots (1) \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2t & \dots (2) \end{cases}$$

**Solución**

De (1) se tiene  $y = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{dx}{dt} \right)$  Reemplazando en (2):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} \right) = 2x - 2t \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} = 2x - 2t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t$$

es una ecuación no homogénea.



El polinomio general de la ecuación homogénea es:  $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2i, r_2 = -2i$ .

La solución general de la ecuación homogénea es:  $x_g = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ .

La solución particular es:  $x_p = At + B$

$$x_p^* = A \Rightarrow x_p^* = 0 \Rightarrow 0 + 4(At + B) = 4t$$

$$4A = A \Rightarrow A = 1, B = 0 \Rightarrow x_p = t$$

La solución general de la ecuación no homogénea es:  $x = x_g + x_p = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + t$

②

$$\text{Resolver: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y & \dots (1) \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y & \dots (2) \end{cases}$$

### Solución

De (1) se tiene  $y = \frac{1}{2}(x - \frac{dx}{dt})$  reemplazando en (2)

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \left( x - \frac{dx}{dt} \right) \right] = x + \frac{3}{2} \left( x - \frac{dx}{dt} \right), \text{ calculando la derivada}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} = x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \frac{dx}{dt}, \text{ al simplificar se tiene: } \frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

El polinomio característico es  $P(r) = r^2 - 4r + 5 = 0$  de donde  $r_1 = 2 + i, r_2 = 2 - i$

La solución general es:  $x_g = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

es decir:  $x_g = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x$

③

$$\text{Resolver: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 & \dots (1) \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0 & \dots (2) \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1$$

**Solución**

de (2) despejamos  $x$  es decir  $x = y + \frac{dy}{dt}$ , reemplazando en (1)

$$\frac{d}{dt}\left(y + \frac{dy}{dt}\right) + 3\left(y + \frac{dy}{dt}\right) + y = 0, \text{ efectuando la derivada se tiene: } \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

Polinomio característico  $P(r) = r^2 + 4r + 4 = 0$ , de donde  $r = -2$  de multiplicidad 2.

$$x = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}, \quad x(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1, \text{ reemplazando en (1)}$$

$$-2c_1e^{-2t} - 2c_2te^{-2t} + c_2e^{-2t} + 3c_1e^{-2t} + 3c_2te^{-2t} + y(t) = 0$$

$$c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_2e^{-2t} + y(t) = 0$$

$$e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_2e^{-2t} + 1 = 0 \Rightarrow 1 + c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -2$$

la solución es  $x = e^{-2t} - 2te^{-2t}$ , análogamente para  $y = e^{-2t}(1 + 2t)$

4 Resolver: 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} & \dots(1) \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1 & \dots(2) \end{cases}$$

**Solución**

$$\frac{1}{2}y = 3x - \frac{dx}{dt} - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}, \text{ reemplazando en (2)}$$

$$\frac{3}{2}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} - 3t - \frac{1}{4} = 12x - 4\frac{dx}{dt} - 12t^2 - 2t + 6 - 2t - 1, \text{ al simplificar}$$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} + 12x = 12t^2 - 8t - 6 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 6t^2 - 4t - 3 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$\Rightarrow r = 2, \quad r = 3; \quad x_g = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}, \text{ la solución particular es:}$$

$$x_p = At^2 + Bt + C \Rightarrow x_p' = 9At + B \Rightarrow x_p'' = 9A$$

reemplazando en la ecuación diferencial:

$$2A - 10At - 5B + 6At^2 + 6Bt + 6C = 6t^2 - 4t - 3$$

$$6A = 6 \Rightarrow A = 1$$

$$(-10A + 6B) = -4 \Rightarrow B = 1$$

$$2A - 5B + 6C = -3$$

$$2 - 5 + 6C = -3$$

$$C = 0 \qquad x = x_g + x_p$$

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + t^2 + t$$

**MÉTODO:** Matricial para Sistema de Primer Orden con Coeficientes Constantes.-

Consideremos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones es de la forma:

$$x_1 = \beta_1 e^{rt}, \quad x_2 = \beta_2 e^{rt}, \quad \dots, \quad x_n = \beta_n e^{rt}, \quad \text{donde } \beta_i, \quad i = 1, \dots, n \text{ son constantes}$$

Como

$$\left. \begin{aligned} x_1 = \beta_1 e^{rt} &\rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \beta_1 r e^{rt} \\ x_2 = \beta_2 e^{rt} &\rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \beta_2 r e^{rt} \\ &\vdots \\ x_n = \beta_n e^{rt} &\rightarrow \frac{dx_n}{dt} = \beta_n r e^{rt} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$\begin{cases} \beta_1 r e^{rt} = a_{11} \beta_1 e^{rt} + a_{12} \beta_2 e^{rt} + \dots + a_{1n} \beta_n e^{rt} \\ \beta_2 r e^{rt} = a_{21} \beta_1 e^{rt} + a_{22} \beta_2 e^{rt} + \dots + a_{2n} \beta_n e^{rt} \\ \vdots \\ \beta_n r e^{rt} = a_{n1} \beta_1 e^{rt} + a_{n2} \beta_2 e^{rt} + \dots + a_{nn} \beta_n e^{rt} \end{cases}$$

simplificando se obtiene:

$$\begin{cases} \beta_1 r = a_{11} \beta_1 + a_{12} \beta_2 + \dots + a_{1n} \beta_n \\ \beta_2 r = a_{21} \beta_1 + a_{22} \beta_2 + \dots + a_{2n} \beta_n \\ \vdots \\ \beta_n r = a_{n1} \beta_1 + a_{n2} \beta_2 + \dots + a_{nn} \beta_n \end{cases}$$

$$(\alpha) \begin{cases} (a_{11} - r) \beta_1 + a_{12} \beta_2 + \dots + a_{1n} \beta_n = 0 \\ a_{21} \beta_1 + (a_{22} - r) \beta_2 + \dots + a_{2n} \beta_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} \beta_1 + a_{n2} \beta_2 + \dots + (a_{nn} - r) \beta_n = 0 \end{cases}$$

$\alpha$  es un sistema de ecuaciones homogéneas y tiene solución no nula sí y solo si:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

Luego  $P(r) = 0$  valores propios del sistema y cada valor de  $r$  determinará  $\beta_1$ .

Veremos para el caso de 3 ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + cz \\ \frac{dy}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z \\ \frac{dz}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z \end{cases}$$

Las soluciones son  $x = \lambda e^{rt}$ ,  $y = ue^{rt}$ ,  $z = ne^{rt}$ , donde  $\lambda, u, n, r$ , son constantes.

$$\begin{cases} x = \lambda e^{rt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \lambda r e^{rt} \\ y = ue^{rt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = ue^{rt} \\ z = ne^{rt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = ue^{rt} \end{cases} \dots (3)$$

Reemplazando (3) en (1) se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda r e^{rt} = a \lambda e^{rt} + b u e^{rt} + c n e^{rt} \\ u r e^{rt} = a_1 \lambda e^{rt} + b_1 u e^{rt} \\ n r e^{rt} = a_2 \lambda e^{rt} + b_2 u e^{rt} + c_2 n e^{rt} \end{cases}, \text{ simplificando se tiene:}$$

$$\begin{cases} \lambda r = a \lambda + b u + c n \\ u r = a_1 \lambda + b_1 u + c_1 n \\ n r = a_2 \lambda + b_2 u + c_2 n \end{cases} \text{ igualando a cero } \begin{cases} (a-r)\lambda + b u + c n = 0 \\ a_1 \lambda + (b_1-r)u + c_1 n = 0 \\ a_2 \lambda + b_2 u + (c_2-r)n = 0 \end{cases}$$

Luego:  $p(r) = \begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1-r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p(r) = 0$

Si  $r_1, r_2, r_3$  son las raíces del polinomio

$P(r) = 0$  Si  $r = r_1$ , se resuelve el sistema y se obtiene:  $\lambda_1, u_1, n_1$

Si  $r = r_2$ , se resuelve el sistema y se obtiene:  $\lambda_2, u_2, n_2$



Si  $r = r_3$ , se resuelve el sistema y se obtiene:  $\lambda_3, u_3, n_3$

Obteniéndose las soluciones particulares:

$$x_1 = \lambda_1 e^{r_1 t}, \quad y_1 = u_1 e^{r_1 t}, \quad z_1 = n_1 e^{r_1 t}$$

$$x_2 = \lambda_2 e^{r_2 t}, \quad y_2 = u_2 e^{r_2 t}, \quad z_2 = n_2 e^{r_2 t}$$

$$x_3 = \lambda_3 e^{r_3 t}, \quad y_3 = u_3 e^{r_3 t}, \quad z_3 = n_3 e^{r_3 t}$$

La solución general es:

$$\begin{cases} x = c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1 \\ y = c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 z_2 \\ z = c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3 z_3 \end{cases}$$

**Ejemplos.-**

①

Resolver:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = y - z \end{cases}$$

**Solución**

$$p(r) = \begin{vmatrix} 2-r & -1 & 3 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 0 & 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \\ r_3 = 2 \end{cases}$$

②

Resolver:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = y - z \end{cases}$$

**Solución**

$$p(r) = \begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1-r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-r \end{vmatrix} = 0 \text{ reemplazando } p(r) = \begin{vmatrix} 2-r & -1 & 3 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 0 & 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-r)[-1(1-r)(1+r) + 1] + (-1-r) + 3 = 0$$

$$(2-r)[-(-1-r^2)+1] + 2-r = 0 \Rightarrow (2-r)r^2 + (2-r) = 0 \Rightarrow (r^2+1)(2-r) = 0 \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} (a-r)\lambda + bu + cn = 0 \\ a_1\lambda + (b_1-r)u + c_1n = 0, \text{ reemplazando los datos se tiene:} \\ a_2\lambda + b_2u + c_2n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\lambda - u + 3n = 0 \\ \lambda - u - n = 0 \\ 0\lambda + u - 3n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3n \\ \lambda = 4n, n = 1 \\ u = 3, \lambda = 4 \end{cases}$$

**Ejercicios Propuestos.-**

Resolver los siguientes ejercicios:

1

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = z + x \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y \\ \frac{dy}{dt} = -2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$$

6

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 9x + 2y \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + t & x(0) = -\frac{7}{9} \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2t & y(0) = -\frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y & x(\pi) = -1 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y & y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{9} \begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = e^{-t} - y & x(0) = -2 \\ \frac{2dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \sin t - 2y & y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{10} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$\textcircled{11} \begin{cases} 2\frac{dx}{dt} = 6x - y - 6t^2 - t + 3 & x(0) = 2 \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1 & y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{12} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

$$\textcircled{13} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

$$\textcircled{14} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$$

$$\textcircled{15} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x \\ \frac{dy}{dt} = -3x + y \end{cases}$$

$$\textcircled{16} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = 2y + e^{-t} \end{cases}$$

$$\textcircled{17} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y + t + 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + t - 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{18} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y + 3te^t \\ \frac{dy}{dt} = x + y + e^t \end{cases}$$

$$\textcircled{19} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

$$\textcircled{20} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

$$(21) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$(22) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$$

$$(23) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2x + 2\frac{dy}{dt} = 2 - 4e^{2t} \\ 2\frac{dx}{dt} - 3x + 3\frac{dy}{dt} - y = 0 \end{cases}$$

$$(24) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

$$(25) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x - 2\frac{dy}{dt} = 2t \\ 2\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} - 2y = 7 \end{cases}$$

$$(26) \begin{cases} Dx - (D+1)y = e^{-t} \\ x + (D-1)y = e^{2t} \end{cases}$$

$$(27) \begin{cases} (D+2)x + (D+1)y = t \\ 5x + (D+3)y = t^2 \end{cases}$$

$$(28) \begin{cases} (D+1)x + (2D+7)y = e^t + 2 \\ -2x + (D+3)y = e^t - 1 \end{cases}$$

$$(29) \begin{cases} (D-1)x + (D+3)y = e^{-t} - 1 \\ (D+2)x + (D+1)y = e^{2t} + t \end{cases}$$

## CAPÍTULO IX

### 9. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

**Procedimientos.-** El método para obtener la solución de una ecuación diferencial en serie de potencias es similar a la técnica de los coeficientes indeterminados para ello se necesita conocer la derivada de una serie de potencias y de las propiedades de series de potencias.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} x^{k+2} \\ \textcircled{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ \textcircled{3} \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m} x^{n+p} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+k} x^{n+p+k} \end{aligned}$$

El proceso para obtener la solución en serie de potencia de una ecuación diferencial veremos mediante el siguiente ejemplo.

Hallar la solución en serie de potencias de la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ .

#### Solución

Suponiendo que la solución de la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$  ... (1)

en serie de potencia es:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  ... (2)



ahora determinaremos los coeficientes  $c_n$ , para que (2) converja a una función que satisfaga (1) para esto derivamos (2) término a término, es decir:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial (1):

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

enseguida debemos de igualar las potencias y se obtiene aplicando las propiedades de las series de potencias

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = 0, \quad \text{ahora igualamos los inicios es decir:}$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1}x^n = 0$$

$$\text{Luego efectuamos la suma de las series} \quad c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} - 2c_{n-1})x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualamos término a término se tiene:  $c_1 = 0$

$$(n+1)c_{n+1} - 2c_{n-1} = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_{n+1} = \frac{2c_{n-1}}{n+1} \quad \text{se llama fórmula de recurrencia}$$

$$\text{para } n = 1, \quad c_2 = \frac{2c_0}{2} = c_0$$

$$n = 2, \quad c_3 = \frac{2c_1}{3} = 0$$

$$n = 3, \quad c_4 = \frac{2c_2}{4} = \frac{c_2}{2} = \frac{c_0}{2} = \frac{c_0}{2!}$$

$$n = 4, \quad c_5 = \frac{2c_3}{6} = 0$$

$$n = 5, \quad c_6 = \frac{2c_4}{6} = \frac{c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_0}{3!}$$

$$n = 6, \quad c_7 = \frac{2c_5}{7} = 0$$

$$n = 7, \quad c_8 = \frac{2c_6}{8} = \frac{c_0}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!}$$

$$\text{como } y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

$$y = c_0 + c_0 x^2 + \frac{c_0}{2!} x^4 + \frac{c_0}{3!} x^6 + \frac{c_0}{4!} x^8 + \dots$$

$$y = c_0 \left( 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots \right) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

Que es la solución de la ecuación diferencial.

## 9.1. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN ENTORNO A PUNTOS ORDINARIOS.-

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0 \quad \dots (1)$$

la ecuación (1) se escribe en la forma.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{donde } P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ y } Q(x) = \frac{a_3(x)}{a_2(x)}$$

para obtener la solución de la ecuación diferencial (1) entorno a puntos ordinarios daremos las siguientes definición.

**Función Analítica.-** Una función  $f(x)$  se dice que es analítica en  $x = x_0$ , si se puede representar en serie de potencia en  $(x - x_0)$  con radio de convergencia  $R > 0$ .

**Observación General.-** Las funciones elementales (todas las funciones que conocemos) se puede escribir como una serie de Taylor y por lo tanto serán analíticas.

**Definición.-** Se dice que  $x = x_0$  es una punto ordinario de la ecuación (1) si  $P(x)$  y  $Q(x)$  tienen una serie de potencia en  $(x - x_0)$  con un radio de convergencia  $R > 0$ .

Si un punto no es punto ordinario, se dice que es un punto singular de la ecuación.

**Ejemplo.-** En la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} + e^x \frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 0$ , todo valor finito de  $x$  es un punto ordinario. En particular vemos que  $x = 0$  es un punto ordinario puesto que  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \dots$  y  $\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$  convergencia para todo valor finito de  $x$ .

**Ejemplo.-** La ecuación diferencial  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\sin x)y = 0$  tiene un punto ordinario en  $x = 0$  puesto que se puede demostrar que  $Q(x) = \frac{\sin x}{x}$  tiene el desarrollo en serie de potencias  $Q(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$  que converge para todos los valores finitos de  $x$ .

**Ejemplo.-** La ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} + (\ln x)y = 0$ , tiene un punto singular en  $x = 0$ , puesto que  $Q(x) = \ln x$  no tiene un desarrollo en serie de potencia de  $x$ .

**Observación.-** Estudiaremos primeramente el caso en que la ecuación  $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ , sus coeficientes son polineales y no tiene factores comunes, un punto  $x = x_0$  es.

- i) Un punto ordinario sí  $a_2(x_0) \neq 0$       ii) Un punto singular sí  $a_2(x_0) = 0$

**Ejemplo.-**

- a) Los puntos singulares de la ecuación diferencial  $(x^2 - 4)y'' + 2xy' + 6y = 0$  son las soluciones de  $x^2 - 4 = 0$  es decir  $x = \pm 2$ , todos los otros valores finitos de  $x$  son puntos ordinarios.
- b) Los puntos singulares no necesariamente son números reales. La ecuación  $(x^2 + 4)y'' + xy' - y = 0$ , tiene puntos singulares para las soluciones de  $x^2 + 4 = 0$  es decir  $x = \pm 2i$ , todos los otros valores finitos de  $x$ , reales ó complejos, son puntos ordinarios.

**Notas.-** Ahora encontraremos soluciones en serie de potencia entorno a puntos ordinarios para ecuaciones diferenciales de tipo (1) y para esto enunciaremos el siguiente teorema sin demostrarlo.

**Teorema.-** Si  $x = x_0$  es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \text{ siempre podemos encontrar dos}$$

soluciones distintos en serie de potencias, que son de la forma  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ .

Una solución en serie converge por lo menos para  $|x - x_0| < R_1$ , donde  $R_1$  es la distancia al punto singular más cercano, para resolver una ecuación diferencial de segundo orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \text{ buscamos dos conjuntos diferentes de coeficientes}$$

$c_n$  de modo que se tenga dos series de potencias linealmente independientes  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$ , ambas desarrolladas entorno al mismo punto ordinario  $x = x_0$ .

Luego la solución general de la ecuación diferencial es  $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

**Ejemplo.-** Resolver la ecuación diferencial de segundo orden.  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2xy = 0$

### Solución

**Nota.-** Para simplificar, supondremos que un punto ordinario está siempre localizado en  $x = 0$ , ya que si no la está, la sustitución  $t = x - x_0$  traslada el valor  $x = x_0$  a  $t = 0$ .

Si  $x = 0$  es un punto ordinario de la ecuación diferencial entonces  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  es la solución en serie de potencias de la ecuación dada de donde.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

por lo tanto al reemplazar se tiene:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0$

ahora debemos de igualar las potencias y para esto se aplica las propiedades de las series

de potencias:  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_{n-1} x^n = 0$

Luego igualando los inicios es decir:  $1.2.c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1} x^n = 0$

ahora efectuaremos la suma algebraica de las series

$$1.2.c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1) c_{n+2} - 2c_{n-1}) x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:  $.2.c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} - 2c_{n-1} = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$



La última expresión es equivalente a.  $c_{n+2} = \frac{2c_{n+1}}{(n+2)(n+1)}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

ahora iterando se tiene:  $n = 1$ ,  $c_3 = \frac{2c_0}{2.3} = \frac{2c_0}{2.3}$

$$n = 2, \quad c_4 = \frac{2c_1}{3.4}$$

$$n = 3, \quad c_5 = \frac{2c_2}{4.5} = 0$$

$$n = 4, \quad c_6 = \frac{2c_3}{5.6} = \frac{2^2 c_0}{2.3.5.6}$$

$$n = 5, \quad c_7 = \frac{2c_4}{6.7} = \frac{2^2 c_1}{3.4.6.7}$$

$$n = 6, \quad c_8 = \frac{2c_5}{7.8} = 0, \quad \text{etc.}$$

como  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$

$$y = c_0 + c_1 x + \frac{2c_0}{2.3} x^3 + \frac{2c_1}{3.4} x^4 + \frac{2^2 c_1}{3.4.6.7} x^7 + \dots$$

$$y = c_0 + \frac{2c_0}{2.3} x^3 + \frac{2^2 c_0}{2.3.5.6} x^6 + \frac{2^3 c_0}{2.3.5.6.8.9} x^9 + \dots + c_1 x + \frac{2c_1}{3.4} x^4$$

$$+ \frac{2^2 c_1}{3.4.6.7} x^7 + \frac{2^3 c_1}{3.4.6.7.9.10} x^{10} + \dots$$

$$y = c_0 \left( 1 + \frac{2}{2.3} x^3 + \frac{2^2}{2.3.5.6} x^6 + \frac{2^3}{2.3.5.6.8.9} x^9 + \dots \right)$$

$$+ c_1 \left( x + \frac{2x^4}{3.4} + \frac{2^2}{3.4.6.7} x^7 + \frac{2^3}{3.4.6.7.9.10} x^{10} + \dots \right)$$

**Ejemplo.-** Resolver la ecuación de segundo orden  $\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$

### Solución

de acuerdo a la nota el punto ordinario se toma  $x = 0$  entonces la solución en serie de potencia es  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$  ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$ , ahora ponemos las  $x$

en una misma potencia  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} + c_n] x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = 0$ , igualando los inicios de las series se tiene.

$$2c_2 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} + c_n] x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = 0$$

efectuando la suma algebraica de la serie:

$$2c_2 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} + (n+1) c_n] x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando términos a término se tiene.

$$\begin{aligned} 2c_2 + c_0 = 0 & \Rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2} \\ (n+1)(n+2) c_{n+2} + (n+1) c_n = 0 & \Rightarrow c_{n+2} = -\frac{c_n}{n+2} \end{aligned}$$

para:  $n = 1, \quad c_3 = -\frac{c_1}{3}$

$$n = 2, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2.4}$$

$$n = 3, \quad c_5 = -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3.5}$$

$$n = 4, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6} = -\frac{c_0}{2.4.6}$$

$$n = 5, \quad c_7 = -\frac{c_5}{7} = -\frac{c_1}{3.5.7}$$

Generalizando se tiene:  $c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2.4.6\dots(2n)}$  y  $c_{2n+1} = \frac{(1)^n c_1}{1.3.5\dots(2n+1)}$

como  $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_{2n}x^{2n} + c_{2n+1}x^{2n+1} + \dots$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_0 x^{2n}}{2.4.6\dots(2n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_1 x^{2n+1}}{1.3.5\dots(2n+1)}$$

**Ejemplo.-** Resolver la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ , mediante series de potencia de  $x$ , sabiendo que  $y(0) = 0$

**Solución**

Tomamos a  $x_0 = 0$  como punto ordinario, por lo tanto la solución es  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ,

ahora determinaremos los coeficientes  $c_n$ , obteniéndose mediante la derivada

$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  entonces  $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ , reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = 1 + \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \right) x^n = 1; \text{ ahora ponemos las } x \text{ en una misma potencia.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k} \right) x^n = 1; \text{ efectuando la suma algebraica de la serie.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k}) x^n = 1$$

como se tiene un término independiente en el segundo miembro entonces desarrollamos

$$\text{para } n=0 \text{ en la serie: } c_1 - \sum_{k=0}^0 c_k \cdot c_{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k}] x^n = 1$$

aplicamos el método de los coeficientes indeterminados e igualando términos a término

$$\text{se tiene: } c_1 - c_0^2 = 1 \quad \text{y} \quad (n+1)c_{n+1} - \sum_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k} = 0$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} c_1 = 1 + c_0^2 \\ c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}, \text{ aplicando la condición inicial } y(0) = 0 \text{ se tiene.}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$y(0) = c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \text{ de donde } c_1 = 1$$

$$\text{para: } n=1, \quad c_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 c_k \cdot c_{1-k} = \frac{1}{2} [c_0 \cdot c_1 + c_1 \cdot c_0] = 0$$

$$n=2, \quad c_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 c_k \cdot c_{2-k} = \frac{1}{3} [c_0 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot c_0] = \frac{1}{3}$$

$$n=3, \quad c_4 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 c_k \cdot c_{3-k} = \frac{1}{4} [c_0 \cdot c_3 + c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1 + c_3 \cdot c_0] = 0$$

$$n=4, \quad c_5 = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 c_k \cdot c_{4-k} = \frac{1}{5} [c_0 \cdot c_4 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_2 + c_3 \cdot c_1 + c_4 \cdot c_0] = \frac{2}{15}$$

$$n = 5, \quad c_6 = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 c_k \cdot c_{5-k} = 0$$

$$n = 6, \quad c_7 = \frac{1}{7} \sum_{k=0}^6 c_k \cdot c_{6-k} = \frac{17}{315}$$

Luego la solución queda en la forma:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$

$$y = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots$$

$$\therefore y = \operatorname{tg} x.$$

**Ejemplo.-** Hallar la solución general de la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$

### Solución

Tomemos a  $x_0 = 0$  como punto ordinario, por lo tanto la solución en serie de potencias

alrededor de  $x_0 = 0$  es:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

de donde  $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0, \text{ poniendo las } x \text{ en una misma potencia}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n x^n = 0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene:

$$2c_2 - 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3c_n x^n = 0$$



efectuando la suma algebraica de la serie.

$$2c_2 - 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n+3)c_n]x^n = 0$$

efectuando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término.

$$2c_2 - 3c_0 = 0 \quad \text{y} \quad (n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n+3)c_n = 0$$

$$c_2 = \frac{3c_0}{2} \quad \text{y} \quad c_{n+2} = \frac{(2n+3)c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{para } n=1, \quad c_3 = \frac{5c_1}{2.3}$$

$$n=2, \quad c_4 = \frac{7c_2}{3.4} = \frac{3.7}{2.3.4.5}c_0$$

$$n=3, \quad c_5 = \frac{9c_3}{4.5} = \frac{5.9}{2.3.4.5}c_1$$

$$n=4, \quad c_6 = \frac{11}{5.6}c_4 = \frac{3.7.11}{2.3.4.5.6}c_0$$

reemplazando en la solución se tiene.  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$$y = c_0 + c_1 x + \frac{3}{2}c_0 x^2 + \frac{5c_1}{2.3}x^3 + \frac{3.7}{2.3.4.5}x^4 + \frac{5.9.c_1}{2.3.4.5}x^5 + \frac{3.7.11.c_0}{2.3.4.5.6}x^6 + \dots$$

$$y = c_0 \left( 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3.7}{2.3.4.5}x^4 + \frac{3.7.11}{2.3.4.5.6}x^6 + \dots \right) + c_1 \left( x + \frac{5}{2.3}x^3 + \frac{5.9}{2.3.4.5}x^5 + \dots \right)$$

$$y = c_0 \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.7 \dots (4n-1)}{(2n)!} x^{2n} \right] + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.5.9 \dots (4n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

**Ejemplo.-** Resolver la ecuación diferencial  $(x^2 + 1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$ , mediante series de potencias de  $x$ .

**Solución**

Tomando como punto ordinario a  $x_0 = 0$  entonces la solución es:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \text{ entonces } \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

ahora reemplazamos a la ecuación diferencial dada.

$$(x^2 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

poniendo las  $x$  en una misma potencia.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

ahora poniendo los indices iguales se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} - c_n] x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + 2c_2 - c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} - c_n + n c_n] x^n = 0$$

$$2c_2 - c_0 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) c_n + (n+1)(n+2) c_{n+2} - c_n + n c_n] x^n = 0$$

$$2c_2 - c_0 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)(n+2) c_{n+2} + (n+1)(n-1) c_n] x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases} 2c_2 - c_0 = 0 \\ 6c_3 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+1)(n-1)c_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{c_0}{2} \\ c_3 = 0 \\ c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}c_n, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{para } n = 2, \quad c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{c_0}{2 \cdot 4} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 2!}$$

$$n = 3, \quad c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0$$

$$n = 4, \quad c_6 = -\frac{3c_4}{6} = \frac{1 \cdot 3c_0}{2^3 \cdot 3!}$$

$$n = 5, \quad c_7 = -\frac{4c_5}{7} = 0$$

$$n = 6, \quad c_8 = -\frac{5c_6}{8} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot c_0}{2^4 \cdot 4!}$$

$$n = 7, \quad c_9 = -\frac{6c_7}{9} = 0$$

$$n = 8, \quad c_{10} = -\frac{7c_8}{10} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot c_0}{2^5 \cdot 5!}, \text{ etc.}$$

$$\text{como } y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$y = c_1 x + c_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} x^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5 \cdot 5!} x^{10} + \dots \right)$$

$$y_1(x) = c_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} x^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5 \cdot 5!} x^{10} + \dots \right)$$

$$y_1(x) = c_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2^n n!} x^{2n} \right), \quad |x| < 1$$

$$y_2(x) = c_1 x \quad \therefore \quad y = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \quad \text{la solución general.}$$

**Ejemplo.-** Determinar el valor de  $r$  para que la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + ry = 0$ , tenga soluciones en series de potencias de  $x$  de la

$$\text{forma } y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

### Solución

tomando a  $x_0 = 0$  como punto ordinario entonces la solución es  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ , entonces  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$ , ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} r c_n x^n = 0, \quad \text{poniendo las } x \text{ en una misma potencia}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} r c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} + r c_n] x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n = 0 \quad \text{ahora poniendo los inicios iguales se tiene.}$$

$$2c_2 + r c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} + r c_n] x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n = 0$$

efectuando la suma algebraica de las series.

$$2c_2 + r c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} + (r - 2n) c_n] x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} 2c_2 + rc_0 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} + (r-2n)c_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{r}{2}c_0 \\ c_{n+2} = -\frac{r-2n}{(n+1)(n+2)}c_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{para } n=1, \quad c_3 = -\frac{r-2}{2.3}c_1$$

$$n=2, \quad c_4 = -\frac{r-4}{3.4}c_2 = \frac{r(r-4)}{2.3.4}c_0$$

$$n=3, \quad c_5 = -\frac{r-6}{4.5}c_3 = \frac{(r-2)(r-6)}{2.3.4.5}c_1$$

$$n=4, \quad c_6 = -\frac{r-8}{5.6}c_4 = -\frac{r(r-4)(r-8)}{2.3.4.5.6}c_0$$

$$n=5, \quad c_7 = -\frac{r-10}{6.7}c_5 = -\frac{(r-2)(r-6)(r-10)}{2.3.4.5.6.7}c_1, \text{ etc.}$$

$$\text{como } y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{r}{2!} x^2 c_0 - \frac{r-2}{3!} c_1 x^3 + \frac{r(r-4)}{4!} c_0 x^4 + \frac{(r-2)(r-6)}{5!} c_1 x^5 -$$

$$\frac{r(r-4)(r-8)}{6!} c_0 x^6 - \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)}{7!} c_1 x^7 + \dots$$

$$y = c_0 \left( 1 - \frac{r}{2!} x^2 + \frac{r(r-4)}{4!} x^4 - \frac{r(r-4)(r-8)}{6!} x^6 + \dots \right) +$$

$$+ c_1 \left( x - \frac{r-2}{3!} x^3 + \frac{(r-2)(r-6)}{5!} x^5 - \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)}{7!} x^7 + \dots \right)$$



$$y = c_0 \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)\dots(r-(4n+2))}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right) \\ + c_1 \left( x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r(r-2)(r-6)(r-10)\dots(r-(4n+2))}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)$$

Los valores de  $r$  son para todo  $r \neq 0, 2n$ , donde  $n \in \mathbb{Z}^+$

**Ejemplo.-** Resolver la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} - (x+1)y = 0$  mediante series de potencia de  $x$ .

### Solución

Sea  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  la solución en serie de potencia de  $x$  derivando se tiene

$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$  ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - (x+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0; \text{ poniendo las } x \text{ en una misma potencia.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2) c_{n+2} - c_n) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

$$2c_2 - c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} - c_n - c_{n-1}] x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminado e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases} 2c_2 - c_0 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n - c_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{c_0}{2} \\ c_{n+2} = \frac{c_n + c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

para simplificar en estos casos, primero podemos elegir  $c_0 \neq 0$ ,  $c_1 = 0$ , y esto nos dará una solución; la otra solución proviene de elegir  $c_0 = 0$ ,  $c_1 \neq 0$ .

Para el primer caso se tiene:

$$\text{para } n = 1, \quad c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_0}{2 \cdot 3}$$

$$n = 2, \quad c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{c_0}{24}$$

$$n = 3, \quad c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \left( \frac{c_0}{2 \cdot 3} + \frac{c_0}{2} \right) \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{c_0}{30}, \text{ etc.}$$

luego una solución en series es:  $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots$

$$y_1 = c_0 + \frac{c_0}{2}x^2 - \frac{c_0}{6}x^3 + \frac{c_0}{24}x^4 + \frac{c_0}{30}x^5 + \dots = c_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} + \dots \right)$$

la otra solución es para  $c_0 = 0$ ,  $c_1 \neq 0$ .

$$n = 1, \quad c_3 = \frac{c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_0}{6}$$

$$n = 2, \quad c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_1}{12}$$

$$n = 3, \quad c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{c_1}{120}, \text{ etc.}$$

Luego la solución en serie es:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots$

$$y_2(x) = c_1 x + \frac{c_1}{6} x^3 + \frac{c_1}{12} x^4 + \frac{c_1}{120} x^5 + \dots = c_1 \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \dots \right)$$

La solución general de la ecuación diferencial es.

$$y = c_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} + \dots \right) + c_1 \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots \right)$$

**Ejemplo.-** Resolver la ecuación diferencial  $(x^2 + x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (x-2)y = 0$ , mediante series de potencias de  $x - 1$ .

### Solución

Los puntos ordinarios son  $\forall x \neq 0, x \neq -1$ , en particular es punto ordinario  $x_0 = 1$ , entonces la ecuación diferencial admite una solución en serie de potencia

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n \quad \text{de donde sus derivadas son} \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-1)^{n-1} \quad \text{y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-1)^{n-2}, \quad \text{para que el procedimiento sea más sencillo haremos el}$$

siguiente cambio de variable.

$$u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1 \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy'}{du} = \frac{d}{du} \left( \frac{dy}{du} \right) = \frac{d^2 y}{du^2}$$

$$\text{como:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-1)^{n-1} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-1)^{n-2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{du} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n u^{n-1} \\ \frac{d^2 y}{du^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n u^{n-2} \end{array} \right.$$

al reemplazar en la ecuación diferencial  $x(x+1) \frac{d^2 y}{dx^2} + (x-2)y = 0$

$(u+1)(u+2)\frac{d^2y}{du^2} + (u-1)y = 0$ , de donde

$$(u+1)(u+2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2} + (u-1) \sum_{n=0}^{\infty} nc_n u^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n + 3 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-1} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2} + (u-1) \sum_{n=0}^{\infty} nc_n u^n = 0$$

poniendo en una misma potencia a  $u$ .

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)c_{n+1} u^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2)c_{n+2} u^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)c_{n+1} u^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n) u^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} u^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^n + \sum_{n=1}^{\infty} (3n(n+1)c_{n+1} - c_{n-1}) u^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n) u^n = 0$$

ahora poniendo los inicios iguales se tiene.

$$4c_2 - c_0 + (12c_3 + 6c_2 - c_1 + c_0)u + \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1) - 1)c_n + c_{n-1} + 3n(n+1)c_{n+1} + 2(n+1)(n+1)c_{n+2} u^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando término a término se tiene:

$$\begin{cases} 4c_2 - c_0 \\ 12c_3 + 6c_2 - c_1 + c_0 = 0 \\ 3n(n+1)c_{n+1} + 2(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n(n-1) - 1)c_n + c_{n-1} = 0 \end{cases}$$

de donde  $c_2 = \frac{c_0}{4}$  y  $c_3 = \frac{1}{12}(c_1 - \frac{5}{2}c_0)$

$$c_{n+2} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} (-c_{n-1} - (n^2 - n - 1)c_n - 3n(n+1)c_{n+1}), \quad \forall n \geq 2$$

para  $n = 2$ ,  $c_4 = \frac{1}{2.3.4} \left( \frac{7}{2}c_0 - \frac{5}{2}c_1 \right)$

$n = 3$ ,  $c_5 = \frac{1}{2.4.5} \left( -\frac{107}{24}c_0 - \frac{10}{3}c_1 \right)$

$n = 4$ ,  $c_6 = \frac{1}{2.5.6} \left( -\frac{263}{24}c_0 - \frac{421}{48}c_1 \right)$

como la solución en serie será.  $y(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4 + \dots$

ahora reemplazando los valores de  $c_n$ .

$$y(u) = c_0 + c_1 u + \frac{c_0}{4} u^2 + \frac{1}{12} \left( c_1 - \frac{5}{2} c_0 \right) u^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{7}{2} c_0 - \frac{5}{2} c_1 \right) u^4 + \\ + \frac{1}{40} \left( -\frac{107}{24} c_0 + \frac{10}{3} c_1 \right) u^5 + \frac{1}{60} \left( -\frac{263}{24} c_0 - \frac{421}{48} c_1 \right) u^6 + \dots$$

$$y(u) = c_0 \left( 1 + \frac{u^2}{4} - \frac{5}{24} u^3 + \frac{7}{48} u^4 - \frac{107}{960} u^5 + \dots \right) + c_1 \left( u + \frac{u^3}{12} - \frac{5}{48} u^4 + \frac{u^5}{12} + \dots \right)$$

como  $u = x - 1$  entonces al sustituir se tiene:

$$y(x) = c_0 \left[ 1 + \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{5}{24} (x-1)^3 + \frac{7}{48} (x-1)^4 - \frac{107}{960} (x-1)^5 + \dots \right] \\ + c_1 \left[ (x-1) + \frac{(x-1)^3}{12} - \frac{5}{48} (x-1)^4 + \frac{(x-1)^5}{12} + \dots \right]$$

**Ejemplo.-** Hallar la solución de la ecuación diferencial  $(1-x) \frac{dy}{dx} + y = 1+x$ , que satisface la condición inicial  $y(0) = 0$ .



Solución

aplicando la serie de Taylor  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  solución en serie ahora derivamos

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \text{ reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene.}$$

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1+x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1+x$$

poniendo las  $x$  en una misma potencia.  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1+x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)c_{n+1} + c_n]x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = 1+x; \text{ ahora poniendo los inicios iguales.}$$

$$c_1 + c_0 + (2c_2 + c_1 - c_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)c_{n+1} + c_n - n c_n]x^n = 1+x$$

$$\begin{cases} c_1 + c_0 = 1 \\ 2c_2 = 1 \\ (n+1)c_{n+1} + c_n - n c_n = 0, \forall n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_0 \\ c_2 = \frac{1}{2} \\ c_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} c_n \end{cases}$$

$$\text{para } n=2, \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$n=3, \quad c_4 = \frac{2}{4} c_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$n=4, \quad c_5 = \frac{3}{5} c_4 = \frac{1}{4 \cdot 5}$$

aplicando la condición inicial  $y(0) = 0$  se tiene:  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 1$ , de donde, por lo tanto, si la solución en serie de potencia es

$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots$  es decir

$$\therefore y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

**Ejemplo.-** Halla la solución en serie de potencia de la ecuación diferencial

$$(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad \text{que satisface las condiciones iniciales}$$

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 6$$

**Solución.**

Tomando a  $x_0 = 0$  como punto ordinario, entonces la solución en serie de potencia es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{derivando se tiene } \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación dada.

$$(x^2 - 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

poniendo las  $x$  en una misma potencia.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} 3n c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

poniendo los indices iguales se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 2c_2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (3n c_n + c_{n-1}) x^n = 0$$

$$-2c_2 + (3c_1 + c_0 - 6c_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 + 2n)c_n + c_{n-1} - (n+1)(n+2)c_{n+2}] x^n = 0$$

aplicando término a término se tiene: 
$$\begin{cases} -2c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_0 - 6c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{1}{6}(c_0 + 3c_1) \end{cases}$$

$$(n^2 + 2n)c_n + c_{n-1} - (n+1)(n+2)c_{n+2} = 0 \quad \text{para } \forall n \geq 2$$

de donde 
$$c_{n+2} = \frac{c_{n-1} + n(n+2)c_n}{(n+1)(n+2)} \quad \forall n \geq 2$$

para  $n = 2$ , 
$$c_4 = \frac{c_1 + 8c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_1}{3 \cdot 4}$$

$n = 3$ , 
$$c_5 = \frac{c_2 + 15c_3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4}c_3 = \frac{1}{2 \cdot 4}(c_0 + 3c_1)$$

$n = 4$ , 
$$c_6 = \frac{c_3 + 24c_4}{5 \cdot 6} = \frac{c_0 + 15c_1}{5 \cdot 6^2}$$

de las condiciones iniciales se tiene  $y(0) = c_0 = 4$

$y'(0) = c_1 = 6$  entonces se tiene:  $c_0 = 6$ ,  $c_1 = 6$ ,  $c_2 = 0$

$$c_3 = \frac{11}{3}, \quad c_4 = \frac{1}{2}, \quad c_5 = \frac{11}{4}, \quad c_6 = \frac{47}{90}$$

como la solución es:  $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots$

$$y(x) = 4 + 6x + \frac{11}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{11}{4}x^5 + \frac{47}{90}x^6 + \dots$$

**Observación.-** El método de solución de las ecuaciones diferenciales por medio de series de potencia, se puede aplicar cuando los coeficientes no son polinomios.

**Ejemplo.-** Hallar la solución de la ecuación diferencial por medio de series de potencia.

$$y'' + (\cos x)y = 0$$

### Solución

Se conoce que  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ , como  $x_0 = 0$  es un punto ordinario entonces

la solución en serie de potencia es  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

de donde sus derivados son:  $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$  y  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$\begin{aligned} y'' + (\cos x)y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \\ &= (2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \dots) + \\ &\quad + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots) \\ &= (c_0 + 2c_2) + (c_1 + 6c_3)x + \left(-\frac{c_0}{2} + c_2 + 12c_4\right)x^2 + \left(20c_5 + c_3 - \frac{c_1}{2}\right)x^3 + \dots = 0 \end{aligned}$$

por el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} c_0 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 6c_3 = 0 \\ -\frac{c_0}{2} + c_2 + 12c_4 = 0 \\ -\frac{c_1}{2} + c_3 + 20c_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{c_0}{2} \\ c_3 = -\frac{c_1}{6} \\ c_4 = \frac{c_0}{12} \\ c_5 = \frac{c_1}{30} \end{cases}$$

como  $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots$

$$y = \left(c_0 - \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{c_0}{12}x^4 + \dots\right) + \left(c_1x - \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_1}{30}x^5 + \dots\right)$$

$$y = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \dots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{30} + \dots\right)$$

**Ejemplo.-** Hallar la solución de la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \operatorname{sen} x$  en serie de potencias que satisfice las condiciones iniciales  $y(0) = y'(0) = 0$ .

### Solución

como  $x_0 = 0$  es un punto ordinario, entonces suponemos que  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  es la

solución de la ecuación diferencial dada, de donde sus derivados son  $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$  y

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ , además se conoce  $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , ahora

reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a las series del primer miembro ponemos en la misma potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

La serie del primer miembro lo expresaremos como la suma de una serie de potencias impares de  $x$  en una serie de potencias pares de  $x$ , puesto que la serie de potencias del segundo miembro contiene solo potencias impares de  $x$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(2n+2)(2n+3)c_{2n+3} + c_{2n+1}] x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)(2n+2)c_{2n+2} + c_{2n}] x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

por el método de los coeficientes indeterminados se tiene:



$$\begin{cases} c_{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \left[ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} - c_{2n+1} \right], \quad \forall n \geq 0 \\ c_{2n} = \frac{c_{2n}}{(2n+1)(2n+2)} \end{cases}$$

fórmula de recurrencia.

para  $n = 0$ ,  $c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} [1 - c_1]$ ,  $c_2 = -\frac{c_0}{1 \cdot 2}$

$n = 1$ ,  $c_5 = \frac{1}{4 \cdot 5} \left[ -\frac{2}{3!} + \frac{c_1}{3!} \right]$ ,  $c_4 = \frac{(-1)^2 c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$n = 2$ ,  $c_7 = \frac{1}{6 \cdot 7} \left[ \frac{3}{5!} - \frac{c_1}{5!} \right]$ ,  $c_6 = \frac{(-1)^3 c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

como la solución  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \frac{(-1)}{2!} c_0 x^2 + \frac{1}{3!} [1 - c_1] x^3 + \frac{(-1)^2}{4!} c_0 x^4$$

$$+ \frac{1}{4 \cdot 5} \left[ -\frac{2}{3!} + \frac{c_1}{3!} \right] x^5 + \frac{(-1)^3}{6!} c_0 x^6 + \frac{1}{6 \cdot 7} \left[ \frac{3}{5!} - \frac{c_1}{5!} \right] x^7 + \dots$$

$$y(x) = c_0 \left( 1 + \frac{(-1)^1}{2!} x^2 + \frac{(-1)^2}{4!} x^4 + \frac{(-1)^3}{6!} x^6 + \dots \right)$$

$$+ c_1 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) + \left[ \frac{x^3}{3!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{3x^7}{7!} + \dots \right]$$

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

como  $y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$  y  $c_1 = 0$   $\therefore y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

**Ejemplo:** Hallar la solución de la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 2y = e^x$  en serie de potencia que satisfice las condiciones iniciales  $y(0) = y'(0) = 0$ .

### Solución

como  $x_0 = 0$  es un punto ordinario, entonces suponemos que  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  es la solución de la ecuación diferencial dada, de donde sus derivadas son:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \quad \text{además se tiene: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ luego al}$$

reemplazar en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ahora ponemos en potencias de  $x$  iguales.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} - 2 c_n] x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

poniendo los indices iguales se tiene.

$$2c_2 - 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} - 2c_n + n c_n] x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} 2c_2 - 2c_0 = 1 \\ (n+1)(n+2) c_{n+2} - 2c_n + n c_n = \frac{1}{n!}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} + c_0$$

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[ \frac{1}{n!} + (2-n)c_n \right], \forall n \geq 1$$

aplicando las condiciones iniciales en la solución  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

$$y(0) = y'(0) = 0 = c_0 = c_1 \quad \text{entonces} \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{para } n = 1, \quad c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} \left[ \frac{1}{2} + c_1 \right] = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3!}$$

$$n = 2, \quad c_4 = \frac{1}{3 \cdot 4} \left[ \frac{1}{2} + 0 \right] = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{4!}$$

$$n = 3, \quad c_5 = \frac{1}{4 \cdot 5} \left[ \frac{1}{6} - c_3 \right] = \frac{1}{4 \cdot 5} \left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right] = 0$$

$$n = 4, \quad c_6 = \frac{1}{5 \cdot 6} \left[ \frac{1}{24} - 2c_4 \right] = -\frac{1}{6!}$$

$$n = 5, \quad c_7 = \frac{1}{6 \cdot 7} \left[ \frac{1}{120} - 5c_5 \right] = \frac{1}{7!}$$

como la solución es  $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$   $\therefore y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

### 9.1.1 SOLUCIÓN ENTORNO A PUNTOS SINGULARES.-

Se ha estudiado la solución en series de potencias de la ecuación diferencial  $a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0$  en torno a un punto ordinario  $x = x_0$  sin mayores dificultades, sin embargo cuando  $x = x_0$  es un punto singular no siempre es posible

encontrar una solución de la forma  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ ; entonces nuestro problema será

de encontrar una solución en series de potencias de la forma  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ ,

donde  $r$  es una constante que se debe determinar.

### 9.1.2 PUNTOS SINGULARES REGULARES E IRREGULARES.-

Un punto singular  $x = x_0$  de la ecuación diferencial  $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$  se denomina punto singular regular si  $(x - x_0)P(x)$  y  $(x - x_0)^2Q(x)$  son ambas analíticas en  $x_0$ , en otros términos  $(x - x_0)P(x)$  y  $(x - x_0)^2Q(x)$  tienen una serie de potencia en  $(x - x_0)$  con radio de convergencia  $R > 0$ .

Un punto singular que no es regular se denomina punto irregular de la ecuación.

**Observación:** Cuando en la ecuación diferencial  $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$  los coeficientes son polinomios sin factores comunes, la definición anterior es equivalente a:

Sea  $a_2(x_0) = 0$ , obtenga  $P(x)$  y  $Q(x)$  simplificando  $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$  y  $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$  respectivamente

hasta que estas sean fracciones racionales irreducibles. Si el factor  $x - x_0$  es a lo más de primer grado en el denominador de  $P(x)$  y a lo más de segundo grado en el denominador de  $Q(x)$  entonces  $x = x_0$  es un punto singular regular.

**Ejemplo:** En la ecuación diferencial  $(x^2 - 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x - 1)\frac{dy}{dx} + y = 0$ , los puntos singulares son  $x = -1$ ,  $x = 1$ , al dividir a la ecuación diferencial entre  $(x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$  obtiene  $P(x) = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)^2}$  y  $Q(x) = \frac{1}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$

analizando a  $P(x)$  y  $Q(x)$  en cada punto singular para que  $x = -1$  sea un punto singular regular, el factor  $x + 1$  puede aparecer a lo sumo elevado a la primera potencia en el denominador de  $P(x)$  y a lo sumo elevado a la segunda potencia en el denominador de  $Q(x)$  observamos que  $P(x)$  y  $Q(x)$  no cumple la primera condición por lo tanto concluimos que  $x = -1$  es un punto singular irregular, para que  $x = 1$  sea un punto singular regular, el factor  $x - 1$  puede aparecer a lo sumo elevado a la primera potencia en el denominador de  $P(x)$  y a lo más elevado a la segunda potencia en el denominador de  $Q(x)$  por lo tanto analizando  $P(x)$  y  $Q(x)$  ambas verifican la condición, Luego  $x = 1$  es un punto singular regular.

**Ejemplo:** A la ecuación diferencial  $x^2(x+1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x^2-1) \frac{dy}{dx} + 2y = 0$  dividimos entre  $x^2(x+1)^2$ , es decir:  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x-1}{x^2(x+1)} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^2(x+1)^2} y = 0$

Luego  $x = 0$  es un punto singular irregular, puesto que  $(x - 0)$  aparece elevado a la segunda potencia en el denominador de  $P(x)$  pero  $x = -1$  si es un punto singular regular.

**Ejemplo:** A la ecuación diferencial  $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 30y = 0$  dividimos entre  $1-x^2$ , es decir:  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{(1-x)(1+x)} \frac{dy}{dx} + \frac{30}{(1-x)(1+x)} y = 0$

Los puntos  $x = 1$ ,  $x = -1$  son puntos singulares regulares.

**Ejemplo:** En la ecuación diferencial  $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 5y = 0$   $x = 0$  es un punto singular irregular puesto que  $Q(x) = \frac{5}{x^3}$ .

## 9.2. MÉTODO DE FROBENIUS.-

La solución de las ecuaciones diferenciales  $a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$  en serie de potencia entorno a un punto singular regular, se obtiene mediante el siguiente teorema debido a "Ferdinand George Frobenius".

**Teorema:** Si  $x = x_0$  es un punto singular regular la ecuación diferencial

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \text{ existe al menos una solución en series}$$

de potencias de la forma  $y = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r}$  donde el número  $r$  es una constante a determinar.

La serie convergerá al menos en algún intervalo  $0 < |x-x_0| < R$ .



**Ecuación Indicial:** A la ecuación diferencial  $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$

escribiremos en la forma  $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$  ... (1)

Si  $x = x_0$  es un punto singular de la ecuación diferencial (1), entonces quiere decir que  $xP(x)$  y  $x^2Q(x)$  son analíticas en  $x_0 = 0$  y en consecuencia admite desarrollo en series de potencias, a la ecuación cuadrática en  $r$  dado por  $r(r-1) + P_0r + q_0 = 0$  se denomina "Ecuación Indicial" de la ecuación diferencial (1) donde  $P_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xP(x)$  y  $q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2Q(x)$  a los valores  $r_1$  y  $r_2$  de la ecuación indicial se le llama raíces indiciales ó exponentes de la singularidad.

**Teorema:** Demostrar que la ecuación indicial de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad \text{alrededor del punto singular regular}$$

$$x_0 = 0 \quad \text{es } r(r-1) + P_0r + q_0 = 0.$$

### Demostración

como  $x_0 = 0$  es un punto singular regular entonces por el teorema de Frobenius existe

una solución en serie de potencias de la forma  $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$  ahora

calculamos las derivadas  $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1}$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$ .

por otra parte, como  $x_0 = 0$  es un punto singular regular, entonces  $xP(x)$  y  $x^2Q(x)$  son analíticas  $x_0 = 0$  en consecuencia admiten desarrollo en series de potencias es decir:

$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$ ,  $x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ , donde ambas series convergen en un

intervalo  $|x| < R$ , centrado en  $x_0 = 0$ , ahora reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \frac{x^{r-1}}{x} \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^n + \frac{x^r}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (r+k)c_n P_{n-k} \right] x^n + x^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} c_k q_{n-k} \right] x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)c_n + \sum_{k=0}^n (k+r)c_k P_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k}] x^{n+r-2} = 0$$

por el método de los coeficientes indeterminados se tiene:

$$(n+r)(n+r-1)c_n + \sum_{k=0}^n [(k+r)P_{n-k} + q_{n-k}]c_k = 0, \quad \forall n \geq 0$$

pero  $n = 0$ , se tiene;  $r(r-1)c_0 + (rP_0 + q_0)c_0 = 0$

como  $c_0 \neq 0$ , entonces  $r(r-1) + rP_0 + q_0 = 0$ .

Que es la ecuación indicial de la ecuación diferencial.

**Ejemplo:** Resolver la ecuación diferencial  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - y = 0$  aplicando el método de Frobenius.

### Solución

Sea  $x_0 = 0$  un punto singular regular de la ecuación diferencial entonces por Frobenius la

solución en series de potencias es  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ , cuyas derivadas son

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)c_n + 3(n+r)c_n] x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] = 0$$

$$x^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)((n+r-1)+3)c_n] x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1} \right] = 0$$

$$x^r \left[ \frac{r(r+2)c_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r+2)c_n - c_{n-1}] x^{n-1} \right] = 0$$

$$\begin{cases} r(r+2)c_0 = 0 \\ (n+r)(n+r+2)c_n - c_{n-1} = 0, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad \dots (\alpha)$$

Luego  $r(r+2) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -2$ .

$$\text{para } r_1 = 0, \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{para } n = 1, \quad c_1 = \frac{c_0}{1 \cdot 3}$$

$$n = 2, \quad c_2 = \frac{c_1}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2c_0}{2!4!}$$

$$n = 3, \quad c_3 = \frac{c_2}{3 \cdot 5} = \frac{2c_0}{3!5!}$$

$$n = 4, \quad c_4 = \frac{c_3}{4 \cdot 6} = \frac{2c_0}{4!6!}$$

$$c_n = \frac{2c_0}{n!(n+2)!}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

por lo tanto una solución en serie es:  $Y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c_0 x^n}{n!(n+2)!} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{n!(n+2)!}$ , para  $|x| < \infty$

cuando  $r_2 = -2$ , la ecuación ( $\alpha$ ) se transforma en

$$(n-2)n.c_n - c_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow c_n = \frac{c_{n-1}}{(n-2)n}$$

$$\text{para } n = 1 \text{ y } n = 2, \quad \begin{cases} -c_1 - c_0 = 0 \\ c_2 - c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

$$n = 3, \quad c_3 = \frac{c_2}{1 \cdot 3}$$

$$n = 4, \quad c_4 = \frac{c_3}{2 \cdot 4} = \frac{c_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2c_2}{2!4!}$$

$$n = 5, \quad c_5 = \frac{c_4}{3 \cdot 5} = \frac{2c_2}{3!5!}$$

$$n = 6, \quad c_6 = \frac{c_4}{3 \cdot 5} = \frac{2c_2}{3!5!}$$

$$c_n = \frac{2c_2}{(n-2)!n!}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Luego la otra solución es:  $y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2c_2}{(n-2)!n!} x^{n-2}$

### 9.2.1 CASOS DE RAÍCES INDICIALES.-

Para aplicar el método de Frobenius se distinguen tres casos de acuerdo con la naturaleza de las raíces indiciales; para simplificar, supongamos que  $r_1$  y  $r_2$  son las soluciones reales de la ecuación indicial, donde  $r_1$  es mayor que  $r_2$ . La solución en series de potencias de la ecuación diferencial entorno a un punto singular regular lo trataremos en el siguiente teorema.

**Teorema.-** Sea  $x_0 = 0$  un punto singular regular de la ecuación diferencial de segundo

$$\text{orden } \frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0, \text{ supongamos que } x p(x) \text{ y } x^2 Q(x) \text{ son}$$

analíticas en el intervalo  $|x| < R$  y sean  $r_1$  y  $r_2$  las raíces reales de la ecuación indicial  $r(r-1) + P_0 r + Q_0 = 0$ , donde  $r_1 > r_2$ , entonces la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes  $Y_1(x)$  y  $Y_2(x)$ , validez para  $|x| < R$  donde la

primera solución es  $Y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}$ , donde  $c_0 = 1$  y la segunda

solución  $Y_2(x)$  depende de  $r_1 - r_2$  es decir:

a) Si  $r_1 - r_2$  no es un entero positivo, entonces:  $Y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$ ,

donde  $b_0 = 1$ .

b) Si  $r_1 - r_2$  es un entero positivo, entonces:  $Y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + c Y_1(x) \ln|x|$ ,

donde  $b_0 = 1$ .

c) Si  $r_1 = r_2$ , entonces la segunda solución es:  $Y_2(x) = Y_1(x) \ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ,

donde  $b_0 = 0$ .

**Nota:** En la parte b) del teorema se tiene si  $r_1 - r_2$  es un entero la segunda solución se

puede obtener en la forma  $Y_2(x) = Y_1(x) \int \frac{e^{-P(x)dx}}{Y_1^2(x)} dx$  siempre que  $Y_1(x)$  sea una

solución conocida de la ecuación diferencial  $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ .



**Ejemplo:** Resolver la ecuación diferencial  $2x \frac{d^2 y}{dx^2} + (x+1) \frac{dy}{dx} + y = 0$ , aplicando el método de Frobenius.

**Solución**

como  $x_0 = 0$  es un punto singular regular entonces existe solución en series de potencia de la forma,  $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ , donde  $r$  es constante por calcularse.

Calculando las derivadas se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + (x+1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1) c_n x^{n+r} = 0$$

poniendo las  $x$  en potencias iguales se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r) c_{n-1} x^{n+r-1} = 0; \text{ poniendo los inicios iguales.}$$

$$r(2r-1) c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r) c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$r(2r-1) x^{r-1} + x^{r-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(2n+2r-1) c_n + (n+r) c_{n-1}] x^n \right) = 0$$

ahora aplicando el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} r(2r-1) = 0 \\ (n+r)(2n+2r-1)c_n + (n+r)c_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{para } n \geq 1.$$

$$r(2r-1) = 0 \text{ entonces } r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = 0.$$

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n+2r-1} \text{ la fórmula de recurrencia.}$$

$$\text{para } r_1 = \frac{1}{2} \text{ se tiene } c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

$$\text{para } n = 1, \quad c_1 = -\frac{c_0}{2 \cdot 1}$$

$$n = 2, \quad c_2 = -\frac{c_1}{2 \cdot 2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 2!}$$

$$n = 3, \quad c_3 = -\frac{c_2}{2 \cdot 3} = -\frac{c_0}{2^3 \cdot 3!}$$

$$n = 4, \quad c_4 = -\frac{c_3}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 4!}$$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = x^{\frac{1}{2}} \left( c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right) = x^{\frac{1}{2}} c_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n \right)$$

$$Y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n+\frac{1}{2}} \text{ es la primera solución, para } r_2 = 0, \text{ se tiene la segunda}$$

$$\text{solución, } c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n-1} \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\text{para } n = 1, \quad c_1 = -\frac{c_0}{1}$$

$$n = 2, \quad c_2 = -\frac{c_1}{3} = \frac{c_0}{1.3}$$

$$n = 3, \quad c_3 = -\frac{c_2}{5} = -\frac{c_0}{1.3.5}$$

$$n = 4, \quad c_4 = -\frac{c_3}{7} = \frac{c_0}{1.3.5.7}$$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1.3.5 \dots (2n-1)} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ puesto que } r = r_2 = 0$$

$$Y_2(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1.3.5 \dots (2n-1)} x^n \text{ para } |x| < \infty$$

Luego la solución general es:  $Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la ecuación diferencial  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - y = 0$

### Solución

Del ejemplo, el método de Frobenius proporciona solamente una solución de esta

ecuación dado por  $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!(n+2)!} x^n = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \dots$

de la observación se tiene una segunda solución.  $Y_2(x) = Y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2(x)} dx$

$$\begin{aligned}
 Y_2(x) &= Y_1(x) \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} \frac{dx}{Y_1^2(x)} = Y_1(x) \int \frac{dx}{x^3 \left[1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{360} + \dots\right]^2} \\
 &= Y_1(x) \int \frac{dx}{x^3 \left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{x^3}{30} + \dots\right]} = Y_1(x) \int \frac{1}{x^3} \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} - \frac{19}{270}x^3 + \dots\right) dx \\
 &= Y_1(x) \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{3x^2} + \frac{1}{4x} - \frac{19}{270} + \dots\right) dx = Y_1(x) \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{4} \ln x - \frac{19}{270}x + \dots\right) \\
 &= \frac{1}{4} Y_1(x) \ln x + Y_1(x) \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19}{270}x + \dots\right)
 \end{aligned}$$

Luego la solución general en el intervalo  $0 < x < \infty$  es

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 \left[ \frac{1}{4} Y_1(x) \ln x + Y_1(x) \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19}{270}x + \dots\right) \right]$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la ecuación diferencial  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 4y = 0$

### Solución

como  $x_0 = 0$  es un punto singular regular, entonces la solución en series es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \text{ de donde sus derivadas es } \frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \text{ y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+r} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 4c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$r^2 c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1}] x^{n+r-1} = 0$$

$$r^2 c_0 x^{r-1} + x^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1}] x^n = 0$$

ahora aplicando el método de los coeficientes indeterminados.  $r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 0$

$$(n+r)^2 c_n - 4c_{n-1} = 0 \Rightarrow c_n = \frac{4c_{n-1}}{(n+r)^2} \text{ como } r_1 = r_2 = 0 \text{ entonces } c_n = \frac{4c_{n-1}}{n^2}$$

$$\text{para } n=1, \quad c_1 = \frac{4c_0}{1^2}$$

$$n=2, \quad c_2 = \frac{4c_1}{2^2} = \frac{4^2 c_0}{(1 \cdot 2)^2} = \frac{4^2 c_0}{(2!)^2}$$

$$n=3, \quad c_3 = \frac{4c_2}{3^2} = \frac{4^3 c_0}{(3!)^2}$$

$$c_n = \frac{4^n c_0}{(n!)^2}$$

Luego la solución resulta.  $Y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^n}{(n!)^2}$  para  $|x| < \infty$

para obtener la segunda solución linealmente independiente hacemos  $c_0 = 1$

$$\text{como se conoce } Y_2(x) = Y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{Y_1^2(x)} dx$$



$$\begin{aligned}
 Y_2(x) &= Y_1(x) \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{Y_1^2(x)} dx = Y_1(x) \int \frac{dx}{x[1+4x+4x^2+\frac{16}{9}x^3+\dots]^2} \\
 &= Y_1(x) \int \frac{dx}{x[1+4x+24x^2+\frac{16}{9}x^3+\dots]} = Y_1(x) \int \frac{1}{x} (1-8x+40x^2-\frac{1472}{9}x^3+\dots) dx \\
 &= Y_1(x) \int (\frac{1}{x}-8+4x-\frac{1472}{9}x^2+\dots) dx = Y_1(x) [\ln x -8x+2x^2-\frac{1472}{27}x^3+\dots] \\
 Y_2(x) &= Y_1(x) \ln x + Y_1(x) (-8x+2x^2-\frac{1472}{27}x^3+\dots)
 \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) \ln x + Y_1(x) (-8x + 2x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \dots)$$

**Ejemplo:** Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + (1+x)y = 0 \text{ alrededor del primer punto singular regular } x_0 = 0.$$

### Solución

como  $x_0 = 0$  es un punto singular regular, entonces la primera solución diferencial dada

$$\text{es: } Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \text{ calculando sus derivadas } Y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} \text{ y}$$

$$Y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2},$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial dado.

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} + (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+r)(n+r-1)c_n - (n+r)c_n + c_n] x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(2n+2r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$(r-1)(2r-1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)(2n+2r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$(r-1)(2r-1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(2n+2r-1)c_n + c_{n-1}] x^{n+r} = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} (r-1)(2r-1)c_0 = 0, & c_0 \neq 0 \\ (n+r-1)(2n+2r-1)c_n + c_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} r_1 = 1, & r_2 = \frac{1}{2} \\ c_n = -\frac{c_{n-1}}{(n+r-1)(2n+2r-1)} \end{cases}$$

$$r_1 = 1 \text{ se tiene } c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(2n+1)} \quad \text{para } n \geq 1$$

$$\text{para } n = 1, \quad c_1 = -\frac{c_0}{1 \cdot 3}$$

$$n = 2, \quad c_2 = -\frac{c_1}{2 \cdot 5} = \frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$n = 3, \quad c_3 = -\frac{c_2}{3 \cdot 7} = -\frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$n = 4, \quad c_4 = -\frac{c_3}{4 \cdot 9} = \frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$$

$$n = 5, \quad c_5 = -\frac{c_4}{5 \cdot 11} = -\frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9}$$

$$\text{como } Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$Y_1(x) = x \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 6 \cdot 7^2 \cdot 8 \cdot 9 \dots} x^n \right)$$

$$Y_1(x) = x \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(2n+1)} \right) \quad \text{para } c_0 = 1 \neq 0.$$

ahora calculamos la segunda solución,

como  $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$  no es un entero entonces de la parte a) del teorema se tiene

$$Y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{donde } b_0 = 1.$$

$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{\left(n - \frac{1}{2}\right)2n} = -\frac{b_{n-1}}{n(2n-1)}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{para } n = 1, \quad b_1 = -\frac{b_0}{1}$$

$$n = 2, \quad b_2 = -\frac{b_1}{2 \cdot 3} = \frac{b_0}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$n = 3, \quad b_3 = -\frac{b_2}{3 \cdot 5} = -\frac{b_0}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

$$n = 4, \quad b_4 = -\frac{b_3}{4 \cdot 7} = \frac{b_0}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$n = 5, \quad b_5 = -\frac{b_4}{5 \cdot 9} = -\frac{b_0}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n b_0}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 6 \cdot 7^2 \cdot 8 \dots} = \frac{(-1)^n b_0}{n!(2n-1)}$$

$$Y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[ b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n b_0}{n!(2n-1)} \right] \quad \text{para } b_0 = 1 \neq 0$$

$$Y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(2n-1)} \right]$$

Luego la solución general es dado por:  $Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$

**Ejemplo:** Aplicando Frobenius, hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

### Solución

como  $x_0 = 0$  es un punto singular regular, entonces la primera solución es:

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad \text{calculando las derivadas } \frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \quad \text{y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} \quad \text{reemplazando en la ecuación diferencial dada se}$$

$$\text{tiene: } x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\text{poniendo las } x \text{ en igual potencias se tiene: } \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

poniendo los inicios iguales.

$$r^2 c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$r^2 c_0 x^{r-1} + x^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)^2 c_n + c_{n-1}] x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r^2 c_0 = 0 \\ (n+r)^2 c_n + c_{n-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 = 0 \\ c_n = -\frac{c_{n-1}}{(n+r)^2} \end{cases}$$

para  $r = r_1 = r_2 = 0$ ,  $c_n = -\frac{c_{n-1}}{n^2} \quad \forall n \geq 1$ .

para  $n = 1$ ,  $c_1 = -\frac{c_0}{1^2}$

$n = 2$ ,  $c_2 = -\frac{c_1}{2^2} = \frac{c_0}{2^2}$

$n = 3$ ,  $c_3 = -\frac{c_2}{3^2} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 3^2}$

$n = 4$ ,  $c_4 = -\frac{c_3}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{(n!)^2} \quad \text{para } c_0 = 1$$

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$$

ahora calculamos la segunda solución  $Y_2(x)$  pero como  $r_1 = r_2 = 0$  por la parte c) del teorema se tiene



$$Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r} + Y_1(x) \ln x \Rightarrow Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + Y_1(x) \ln x, \text{ donde } r = 0.$$

$$Y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} \right) \ln x; \text{ calculando las derivadas se tiene:}$$

$$Y_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} \right) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$$

$$Y_2''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-2}}{(n!)^2} \right) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} \right) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^n}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} \right) \ln x \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} \right) \ln x = 0 \end{aligned}$$

agrupando las series se tiene:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \right. \\ \left. + \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} \right) \ln x + \right. \\ \left. + \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x}{(n!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} \right) = 0 \right. \end{aligned}$$

poniendo las x en una misma potencia.

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)b_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) + \\ & + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} \right) \ln x \\ & + \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n x^n}{(n!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)b_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)b_{n+1} + b_n)x^n \right) + \\ & + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n+1}x^n}{((n+1)!)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \right) x^n \right) \ln x + \\ & + \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \right) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n!)^2} x^n \right) = 0 \end{aligned}$$

poniendo los inicios iguales tenemos

$$\begin{aligned} & (b_1 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)^2 b_{n+1} + b_n)x^n) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \right) x^n \cdot \ln x \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} + \frac{(n+1)(-1)^n}{(n!)^2} \right) x^n = 0 \end{aligned}$$

$$b_1 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n+1)^2 b_{n+1} + b_n + \frac{n^2 + 2n}{(n+1)(n!)^2} (-1)^n \right] x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(-1)^n}{(n+1)(n!)^2} x^n \ln x = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} b_1 + b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = -b_0 \\ (n+1)^2 b_{n+1} + b_n + \frac{n^2 + 2n}{(n+1)(n!)^2} (-1)^n = 0 \end{cases} \text{ para } b_0 = 1 \Rightarrow b_1 = -1$$

$$b_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2} \left[ b_n + \frac{n^2 + 2n}{(n+1)(n!)^2} (-1)^n \right] \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{para } n=1, \quad b_2 = -\frac{1}{2^2} \left[ b_1 - \frac{3}{2} \right] = \frac{5}{8}$$

$$n=2, \quad b_3 = -\frac{1}{9} \left[ b_2 + \frac{8}{12} \right] = -\frac{1}{9} \left[ \frac{5}{8} + \frac{2}{3} \right] = -\frac{31}{216}$$

$$n=3, \quad b_4 = -\frac{1}{16} \left[ b_3 - \frac{15}{24} \right] = -\frac{1}{16} \left[ -\frac{31}{216} - \frac{15}{24} \right] = \frac{83}{1728}$$

$$Y_2(x) = (1-x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{31}{216}x^3 + \frac{83}{1728}x^4 + \dots) + Y_1(x) \ln x$$

Luego la solución general es  $Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$

**Ejemplo:** Aplicando Frobenius, hallar la solución general de la ecuación diferencial.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x^2 - 2x) \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

### Solución

como  $x_0 = 0$  es un punto singular regular, la primera solución es  $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ ,

cuyas derivadas son:  $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}$  y  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$

reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + (x^2 - 2x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r) c_n x^{n+r} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-3) + 2] c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r+1} = 0$$

poniendo las  $x$  en una misma potencia.

$$\sum_{n=0}^x [(n+r)(n+r-3)+2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^x (n+r-1)c_{n-1} x^{n+r} = 0$$

poniendo los inicios iguales se tiene.

$$[r(r-3)+2]c_0 x^r + \sum_{n=1}^x [(n+r)(n+r-3)+2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^x (n+r-1)c_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$[r(r-3)+2]c_0 x^r + x^r \sum_{n=1}^x [(n+r)(n+r-3)+2]c_n + (n+r-1)c_{n-1} x^n = 0$$

$$[r^2 - 3r + 2]c_0 x^r + x^r \sum_{n=1}^x [(n+r-1)(n+r-2)c_n + (n+r-1)c_{n-1}] x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1 \\ (n+r-1)(n+r-2)c_n + (n+r-1)c_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n+r-2} \quad \forall n \geq 1$$

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n}$$

Para  $n = 1$ ,  $c_1 = -\frac{c_0}{1}$

$n = 2$ ,  $c_2 = -\frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{1.2}$

$n = 3$ ,  $c_3 = -\frac{c_2}{3} = -\frac{c_0}{1.2.3}$

$$n = 4, \quad c_4 = -\frac{c_3}{4} = \frac{c_0}{1.2.3.4}$$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1.2.3.4 \dots n} = \frac{(-1)^n c_0}{n!}$$

como  $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = c_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+2}$

$$y_1(x) = c_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0 x^{n+2}}{n!} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!}$$

para  $c_0 = 1 \neq 0$ ,  $y_1(-1) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = x^2 e^{-x}$

ahora calculamos la segunda solución  $y_2(x)$

pero como  $r_1 - r_2 = 2 - 1 = 1$  es un entero, entonces la solución es

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} + c_0 y_1(x) \ln x, \quad \text{donde } b_0 = 1$$

para calcular  $b_n$  y  $c_0$  utilizaremos un método alternativo en lugar de usar el método de derivar y reemplazar en la ecuación diferencial.

El método alternativo consiste en lo siguiente:

Sea  $Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r} [(r - r_2)t(r_1 x)]|_{r=r_2}$ , donde los coeficientes de  $Y(r_1 x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$  se

mantiene en función de  $r$ , de acuerdo a la fórmula de recurrencia.  $c_n = -\frac{c_{n-1}}{r+n-2} \quad \forall n \geq 1$

$$n = 1, \quad c_1 = -\frac{1}{r-1} c_0$$



$$n=2, \quad c_2 = -\frac{c_1}{r} = \frac{(-1)^2}{r(r-1)}$$

$$n=3, \quad c_3 = -\frac{c_2}{r+1} = \frac{(-1)^3 c_0}{r(r-1)(r+1)}$$

$$n=4, \quad c_4 = -\frac{c_3}{r+2} = \frac{(-1)^4 c_0}{r(r-1)(r+1)(r+2)}$$

$$Y(\eta_1 x) = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + c_2 x^{r+2} + c_3 x^{r+3} + c_4 x^{r+4} + \dots$$

$$Y(\eta_1 x) = c_0 x^r + \frac{(-1)^1}{r-1} c_0 x^{r+1} + \frac{(-1)^2}{r(r-1)} c_0 x^{r+2} + \frac{(-1)^3}{r(r-1)(r+1)} c_0 x^{r+3} + \dots$$

$$(r-r_2)y(\eta_1 x) = (r-1)y(\eta_1 x) = c_0 [(r-1)x^r + (-1)^1 x^{r+1} + \frac{(-1)^2}{r} x^{r+2} + \frac{(-1)^3 x^{r+3}}{r(r+1)} + \dots]$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r-1)y(\eta_1 x) = c_0 [x^r + (r-1)x^r \ln x + (-1)^1 x^{r+1} \ln x - \frac{1}{r^2} x^{r+2}$$

$$+ \frac{1}{r} x^{r+2} \ln x + \frac{2r+1}{(r^2+r)^2} x^{r+3} - \frac{1}{r^2+r} x^{r+3} \ln x + \dots]$$

$$Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r} [(r-1)y(\eta_1 x)] \Big|_{r=1} = c_0 [x - x^2 \ln x - x^3 + x^3 \ln x + \frac{3}{4} x^4 - \frac{x^4}{2} \ln x + \dots]$$

$$Y_2(x) = c_0 (x - x^3 + \frac{3}{4} x^4 + \dots) + c_0 (-x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} + \dots) \ln x$$

$$Y_2(x) = c_0 x(1 - x^2 + \frac{3}{4} x^3 + \dots) + c_0 x^2 (-1 + x - \frac{x^2}{2} + \dots) \ln x$$

para  $c_0 = 1 \neq 0$  se tiene.

$$Y_2(x) = x(1 - x^2 + \frac{3}{4} x^3 + \dots) - \underbrace{x^2(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots)}_{Y_1(x)} = x(1 - x^2 + \frac{3}{4} x^3 + \dots) - Y_1(x) \ln x$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es:  $Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x)$ .

**Ejemplo:** Resolver la ecuación diferencial  $(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 2y = x + \frac{3}{x^2}$ ,  
alrededor del punto singular regular  $x_0 = 0$ .

### Solución

En primer lugar hallaremos la solución en series de potencias de la ecuación diferencial homogénea  $Y_g(x)$  y después hallaremos una solución particular  $Y_p(x)$  de la ecuación diferencial no homogénea.

Entonces calcularemos la solución en series de potencia de la ecuación diferencial  $(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 2y = 0$  la solución 1° en series de potencias es  $Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$  donde sus derivadas son:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \quad y \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} (x^2 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r) c_n x^{n+r-1} & \\ - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+r} &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) - 2] c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} [3(n+r) - (n+r)(n+r-1)] c_n x^{n+r-1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) - 2] c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-4) c_n x^{n+r-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(n+r-2)-2]c_{n-1}x^{n+r-1} - (r-4)c_0x^{r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-4)c_nx^{n+r-1} = 0$$

$$r(r-4)c_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-3)c_{n-1}x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-4)c_nx^{n+r-1} = 0$$

$$r(r-4)c_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-3)c_{n-1} - (n+r)(n+r-4)c_n]x^{n+r-1} = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} r(r-4) = 0 \Rightarrow r_2 = 0, r_1 = 4 \\ (n+r)(n+r-3)c_{n-1} - (n+r)(n+r-4)c_n = 0 \end{cases}$$

$$c_n = \frac{(n+r-3)c_{n-1}}{n+r-4} \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{para } r = r_1 = 4, \quad c_n = \frac{n+1}{n}c_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{para } n=1, \quad c_1 = \frac{2}{1}c_0 = 2c_0$$

$$n=2, \quad c_2 = \frac{3}{2}c_1 = 3c_0$$

$$n=3, \quad c_3 = \frac{4}{3}c_2 = 4c_0$$

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_0 x^n \quad \text{para } c_0 = 1$$

$$Y_1(x) = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$\text{Se conoce que } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\therefore Y_1(x) = x^4 \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^4}{(1-x)^2}$$

ahora calculamos la segunda solución  $Y_2(x)$  como  $r_1 - r_2 = 4$  entero, entonces la

segunda solución es:  $Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r} [(r-0)y(rx)] \Big|_{r=0}$ , donde  $Y(rx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$  de la

fórmula de recurrencia se tiene:  $c_n = \frac{c+r-3}{n+r-4} c_{n-1} \quad \forall n \geq 1$

$$\text{para } n=1, \quad c_1 = \frac{r-2}{r-3} c_0$$

$$n=2, \quad c_2 = \frac{r-1}{r-2} c_1 = \frac{r-1}{r-3} c_0$$

$$n=3, \quad c_3 = \frac{r}{r-1} c_2 = \frac{r}{r-3} c_0$$

$$n=4, \quad c_4 = \frac{r+1}{r} c_3 = \frac{r+1}{r-3} c_0$$

$$n=5, \quad c_5 = \frac{r+2}{r+1} c_4 = \frac{r+2}{r-3} c_0$$

$$Y(rx) = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots)$$

$$= x^r \left( c_0 + \frac{r-2}{r-3} c_0 x + \frac{r-1}{r-3} c_0 x^2 + \frac{r}{r-3} c_0 x^3 + \frac{r+1}{r-3} c_0 x^4 + \frac{r+2}{r-3} c_0 x^5 + \dots \right)$$

$$rY(rx) = c_0 (rx^r + \frac{r(r-2)}{r-3} x^{r+1} + \frac{r(r-1)}{r-3} x^{r+2} + \frac{r^2}{r-3} x^{r+3} + \frac{r(r+1)}{r-3} x^{r+4} + \frac{r(r+2)}{r-3} x^{r+5} + \dots)$$

$$Y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r} [rY(rx)] \Big|_{r=0} = c_0 \left( 1 + \frac{2}{3} x + \frac{x^2}{3} \right) \quad \text{para } c_0 = 1$$

$$Y_2(x) = 1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3}; \text{ Luego la solución general de la ecuación homogénea.}$$

$Y_2(x) = c_1 \frac{x^4}{(1-x)^2} + c_2 \left(1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3}\right)$ ; ahora calculamos una solución particular

$Y_p(x)$  de la ecuación  $(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 2y = x + \frac{3}{x^2}$

La solución particular  $Y_p(x)$  se puede calcular por cualquiera de los métodos anteriores, variación de parámetros ó reducción de orden, en particular lo calcularemos por series, para esto aplicaremos el método de superposición.

Sea  $Y_{p_1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$  una solución de la ecuación diferencial

$(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 2y = x$  calculando sus derivadas se tiene:

$$\frac{dY_{p_1}(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 Y_{p_1}(x)}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

reemplazando en la ecuación diferencial (Ver la parte de la primera solución)

$$-r(r-4)c_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-4)c_n - (n+r)(n+r-3)c_{n-1}] x^{n+r-1} = x$$

La igualdad se cumple sí y sólo sí.  $r-1=1$  y  $n+r-1=1$ , de donde  $r=2$ ,  $n=0$  se observa que  $n$  no admite más valores entonces:

$$-r(r-4)c_0 = 1 \Rightarrow 4c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{4} \quad \text{como} \quad Y_{p_1}(x) = c_0 x^r = \frac{x^2}{4}$$

en la misma forma calculamos  $Y_{p_2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$

la solución  $(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 2y = \frac{3}{x^2}$ ; haciendo todos los cálculos anterior se tiene:



$$-r(r-4)c_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-4)c_n - (n+r)(n+r-3)c_{n-1}]x^{n+r-1} = 3x^{-2}$$

la igualdad se cumple si y sólo si  $r-1 = -2$  y  $n+r-1 = -2$  de donde  $r = -1$  y  $n = 0$

$$\text{además } -r(r-4)c_0 = 3 \text{ para } r = -1 \Rightarrow -5c_0 = 3 \Rightarrow c_0 = -\frac{3}{5}$$

$$Yp_2(x) = c_0x^r = -\frac{3x^{-1}}{5}$$

$$\text{La solución particular es } Y_p(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x^{-1}}{5}$$

La solución general es  $Y(x) = Y_g(x) + Y_p(x)$

$$Y(x) = \frac{c_1x^4}{(1-x)^2} + c_2\left(1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^{-1}}{5}$$

### 9.3. DOS ECUACIONES DIFERENCIALES ESPECIALES.-

#### 9.3.1 ECUACIÓN DE BESSEL Y FUNCIÓN DE BESSEL DEL PRIMER TIPO.-

La ecuación diferencial  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$  se llama ecuación de Bessel de orden  $P$  con  $P \geq 0$ , la ecuación de Bessel es una ecuación diferencial de segundo orden.

La ecuación de Bessel surgió en el estudio de la radiación de energía y aparecen frecuentemente en estudios avanzados de matemática aplicada, física e ingeniería y particularmente en aquellos en que el modelo matemático se expresa naturalmente en coordenadas cilíndricas; ahora buscaremos las soluciones en serie de potencias alrededor

del punto  $x_0 = 0$  el cual es un punto singular regular; sea  $Yp_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$  la primera solución. calculando las derivadas se tiene:

$$\frac{dy_1}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} \quad y \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial dada.

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} + (x^2 - p^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 c_n x^{n+r} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} ((n+r)^2 - p^2)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} &= 0 \end{aligned}$$

poniendo las  $x$  en una misma potencia. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)^2 - p^2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} = 0,$$

poniendo los inicios iguales.

$$\begin{aligned} (r^2 - p^2)c_0 x^r + ((1+r)^2 - p^2)c_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+r)^2 - p^2]c_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} &= 0 \\ (r^2 - p^2)c_0 x^r + [(1+r)^2 - p^2]c_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [((n+r)^2 - p^2)c_n + c_{n-2}]x^{n+r} &= 0 \end{aligned}$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases} (r^2 - p^2)c_0 = 0 \\ ((1+r)^2 - p^2)c_1 = 0 \\ [((n+r)^2 - p^2)c_n + c_{n-2}] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = p, \quad r_2 = -p \\ (r^2 + 2r + 1 - p^2)c_1 = 0 \end{cases}$$

de donde: 
$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(n+r)^2 - p^2}, \quad \forall n \geq 2$$

para  $r_1 = p \Rightarrow (p^2 + 2p + 1 - p^2)c_1 = 0 \Rightarrow (2p + 1)c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

como 
$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(2p+n)} \quad \forall n \geq 2$$

para  $n = 2$ , 
$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2p+2)}$$

$n = 3$ , 
$$c_3 = -\frac{c_1}{3(2p+3)} = 0$$

$n = 4$ , 
$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2p+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)}$$

$n = 5$ , 
$$c_5 = -\frac{c_3}{5(2p+5)} = 0$$

$n = 6$ , 
$$c_6 = -\frac{c_4}{6(2p+6)} = -\frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}$$

$n = 7$ , 
$$c_7 = -\frac{c_5}{7(2p+7)} = 0$$

$n = 8$ , 
$$c_8 = -\frac{c_6}{8(2p+8)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8(2p+2)(2p+4)(2p+6)(2p+8)}$$

$n = 9$ , 
$$c_9 = -\frac{c_7}{9(2p+9)} = 0$$

Luego la solución  $Y_1(x)$  queda expresado así:

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0 x^{2n+p}}{2^{2n} \cdot n! (p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+n)}$$

donde  $c_0$  es una constante arbitraria. En particular tomamos  $c_0 = \frac{1}{2^{\Gamma} \Gamma(\rho+1)}$ , la solución anterior se transforma en la siguiente solución particular.

$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+p} \cdot n!(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+n)\Gamma(p+1)} x^{2n+p}$$

En forma simplificada queda en la forma: 
$$Y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

La cual se denomina "Función de Bessel de orden P de primer tipo, y denotaremos por

$J_p(x)$ , es decir: 
$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

**Observación:** Como casos particulares

① Si  $r = p = 0$  se tiene  $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$

② Si  $r = m =$  entero no negativo, nos queda: 
$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \dots (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

ahora calculamos la segunda solución  $Y_2(x)$ , en este caso debemos tener cuidado en la solución  $Y_2(x)$ , para dar la solución general de la ecuación de BESSEL.

**1º caso.** Si  $r_1 - r_2 = 2p \neq$  de un entero y  $P > 0$  entonces estamos en la parte a) del teorema anterior por lo tanto una segunda solución se obtiene sustituyendo P por

-P es decir: 
$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Luego la solución general de la ecuación de BESSEL de orden P es:

$$Y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

**2º caso.** Si  $r_1 = r_2 = p = 0$  se observa que  $J_p(x)$  y  $J_{-p}(x)$  son iguales.

**3º caso.** Cuando  $r_1 - r_2 = 2p$  es un entero y P es un entero. La segunda solución es

$$J_2(x) = J_{-p}(x), \text{ donde } Y_p(x) = \frac{\cos P\pi J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin P\pi}, \text{ y la solución general}$$

$$\text{es: } Y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

**Nota:** A la función  $Y_p(x) = \frac{\cos P\pi J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin P\pi}$  se denomina funciones de Bessel de segundo tipo.

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \quad \text{en } 0 < x < \infty.$$

### Solución

Identificamos que  $P^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow P = \frac{1}{2}, P = -\frac{1}{2}$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es:  $Y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la ecuación  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 9)y = 0$

### Solución

identificamos que  $P^2 = 9$  de donde  $P = 3$ ; la solución general es:

$$Y(x) = c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)$$

**Ejemplo:** Resolver la ecuación diferencial  $4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (x-4)y = 0$

### Solución

Lo transformamos a una ecuación de Bessel mediante la sustitución  $u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2$  mediante la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{2u} \cdot \left(\frac{dy}{du}\right), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{1}{2u} \left(\frac{dy}{du}\right)\right) \cdot \frac{1}{2u} = \left(-\frac{1}{2u^2} \left(\frac{dy}{du}\right) + \frac{1}{2u} \left(\frac{d^2 y}{du^2}\right)\right) \frac{1}{2u}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4u^3} \cdot \frac{dy}{du} + \frac{1}{4u^2} \frac{d^2 y}{du^2}$$



ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$4u^4 \left( \frac{1}{4u^2} \left( \frac{d^2 y}{du^2} \right) - \frac{1}{4u^3} \left( \frac{dy}{du} \right) \right) + 4u^2 \cdot \frac{1}{2u} \left( \frac{dy}{du} \right) + (u^2 - 4)y = 0$$

$$u^2 \frac{d^2 y}{du^2} - u \frac{dy}{du} + 2u \frac{dy}{du} + (u^2 - 4)y = 0$$

$$u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + u \frac{dy}{du} + (u^2 - 4)y = 0 \text{ es la ecuación de Bessel de orden 2.}$$

Ahora identificando  $P^2 = 4$  de donde  $P = 2$

Luego la solución general de la ecuación es:  $Y(u) = c_1 J_2(u) + c_2 Y_2(u)$

$$\therefore Y(x) = c_1 J_2(\sqrt{x}) + c_2 Y_2(\sqrt{x})$$

### 9.3.2 ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE BESSEL.-

La ecuación diferencial de la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0$$

se denomina "Ecuación paramétrica de Bessel" y la solución general es dado por:

$$Y(x) = c_1 J_p(\lambda x) + c_2 Y_p(\lambda x)$$

**Ejemplo:** Resolver la ecuación diferencial.  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (9x^2 - 4)y = 0$

Solución

Identificamos que  $\lambda^2 = 9$  y  $P^2 = 4$  de donde  $\lambda = 3$ ,  $P = 2$ .

Luego la solución general es:  $Y(x) = c_1 J_2(3x) + c_2 Y_2(3x)$

**Ejemplo:** Resolver la ecuación diferencial  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (4x^2 - \frac{1}{9})y = 0$

Solución

Identificamos que  $\lambda^2 = 4$  y  $P^2 = \frac{1}{9}$  de donde  $\lambda = 2$ ,  $P = \frac{1}{3}$ .

Luego la solución general es:  $Y(x) = c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x) + c_2 Y_{\frac{1}{3}}(2x)$

### 9.3.3 ECUACIÓN DE LEGENDRE.-

A la ecuación diferencial de la forma:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

se denomina Ecuación de Legendre de orden n.

#### 9.3.3.1 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LEGENDRE.-

Como  $x_0 = 0$ , es un punto ordinario de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

entonces admite una solución en serie de potencia  $Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ , de donde sus

derivadas son  $\frac{dy}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$  y  $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$ ,

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial

$$(1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)c_k x^k = 0$$

poniendo las x en un mismo exponente.

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(k-1)c_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)c_k x^k = 0$$

poniendo los inicios iguales se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} + n(n+1)c_k]x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k = 0$$

$$2c_2 + n(n+1)c_0 + (6c_3 + n(n+1)c_1)x - 2c_1x +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} + n(n+1)c_k]x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} 2kc_k x^k = 0$$

$$2c_2 + n(n+1)c_0 + (6c_3 + [n(n+1) - 2]c_1)x +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} ((k+1)(k+2)c_{k+2} + [n(n+1) - k(k+1)]c_k)x^k = 0$$

ahora aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} 2c_2 + n(n+1)c_0 = 0 \\ 6c_3 + (n(n+1) - 2)c_1 = 0 \\ (k+1)(k+2)c_{k+2} + (n(n+1) - k(k+1))c_k = 0 \end{cases}$$

de donde se tiene que:  $c_2 = -\frac{n(n+1)}{2}c_0 = -\frac{n(n+1)}{2!}c_0,$

$$c_3 = -\frac{n(n+1) - 2}{6}c_1 = -\frac{(n+2)(n-1)}{3!}c_1$$

$$c_{k+2} = -\frac{n(n+1) - k(k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k$$

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}c_k \quad \forall k \geq 2$$

es la fórmula de recurrencia.

Para  $k=2$ ,  $c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3 \cdot 4}c_2 = -\frac{(n-2)(n+1)n(n+3)}{4!}c_0$

$$k = 3, \quad c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} c_1$$

$$k = 4, \quad c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{5 \cdot 6} c_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!} c_0$$

$$k = 5, \quad c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{6 \cdot 7} c_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} c_1$$

etc., así, por lo menos para  $|x| < 1$  se obtiene dos soluciones en series de potencia linealmente independiente.

$$Y_1(x) = c_0 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 c_0 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 c_0 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!} x^6 c_0 + \dots$$

$$Y_2(x) = c_1 x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 c_1 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 c_1 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} x^7 c_1 + \dots$$

$$Y_1(x) = c_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+3)(n+5)}{6!} x^6 + \dots \right]$$

$$Y_2(x) = c_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} x^7 + \dots \right]$$

Luego la solución general de la ecuación de Legendre es:  $Y(x) = a_1 Y_1(x) + a_2 Y_2(x)$

observemos que si  $n$  es un entero par, la primera serie termina, y la segunda  $Y_2(x)$  es una serie infinita en forma similar cuando  $n$  es un entero impar la serie  $Y_2(x)$  termina con  $x^n$ , es decir, que se obtiene una solución polinomial de grado  $n$  de la ecuación de Legendre.

En la solución de la ecuación de Legendre se acostumbra a elegir valores específicos para  $c_0$  y  $c_1$  dependiendo si  $n$  es entero positivo par ó impar respectivamente, para  $n = 0$ ,

elegimos  $c_0 = 1$ , y para  $n = 2, 4, 6, \dots$ ,  $c_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3 \dots (n-1)}{2.4.6 \dots n}$ , en tanto que para

$n = 1$  elegimos  $c_1 = 1$ , y para  $n = 3, 5, 7, \dots$ ,  $c_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3 \dots n}{2.4.6 \dots (n-1)}$  por ejemplo para

$n = 4$  se tiene.

$$Y_1(x) = (-1)^{\frac{4}{2}} \frac{1.3}{2.4} (1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4) = \frac{3}{8} - \frac{30}{8}x^2 + \frac{35}{8}x^4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

### 9.3.3.2 POLINOMIOS DE LEGENDRE.

A las soluciones polinomiales específicas de grado  $n$  de la ecuación de Legendre se denominan "Polinomios de Legendre" y denotaremos  $P_n(x)$  con las series obtenidas para  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$  y los valores dados para  $c_0$  y  $c_1$ , encontramos que, los primeros polinomios de Legendre son:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

**Observemos** que  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots$  son a su vez soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales.

$$n = 0, \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$n = 1, \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$



$$n = 2, \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$n = 3, \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

El polinomio general de Legendre se expresa en forma general por:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

donde  $[\frac{n}{2}]$  es el mayor entero menor ó igual a  $\frac{n}{2}$

### EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Resuelva cada ecuación diferencial mediante series de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

①  $\frac{dy}{dx} - x^2 y = 0$

②  $(1-x) \frac{dy}{dx} - y = 0$

③  $(1+x) \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

④  $(2x-1) \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

⑤  $\frac{dy}{dx} + x^3 y = 0$

⑥  $(1+x) \frac{dy}{dx} - ny = 0$

⑦  $(x-2) \frac{dy}{dx} + y = 0$

⑧  $2(x-1) \frac{dy}{dx} = 3y$

⑨  $x \frac{dy}{dx} + y = 0$

⑩  $x^3 \frac{dy}{dx} = 2y$

II. Resolver cada ecuación diferencial por medio de las series de potencias.

①  $(2x-1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 0$

②  $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$$\textcircled{3} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - (x+1)y = 0$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

$$\textcircled{4} \quad 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad (1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0$$

$$\textcircled{10} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - x^2 \frac{dy}{dx} - 3xy = 0$$

III. Encuentre en cada ecuación diferencial dos soluciones en series de potencias entorno al punto ordinario  $x = 0$  que sean linealmente independiente.

$$\textcircled{1} \quad (x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$\textcircled{2} \quad (x^2 - 3)y'' + 2xy' = 0$$

$$\textcircled{3} \quad (x^2 + 1)y'' + 6xy' + 4y = 0$$

$$\textcircled{4} \quad (x^2 - 1)y'' + 8xy' + 12y = 0$$

$$\textcircled{5} \quad (x^2 - 1)y'' - 6xy' + 12y = 0$$

$$\textcircled{6} \quad (x^2 + 3)y'' - 7xy' + 16y = 0$$

$$\textcircled{7} \quad (2 - x^2)y'' - xy' + 16y = 0$$

$$\textcircled{8} \quad y'' - x^2 y' - 3xy = 0$$

$$\textcircled{9} \quad y'' + xy' + 2y = 0$$

$$\textcircled{10} \quad (x^2 - 4)y'' + 3xy' + y = 0$$

$$\textcircled{11} \quad y'' + 2xy' + 4y = 0$$

$$\textcircled{12} \quad (x^2 + 2)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$\textcircled{13} \quad y'' + xy' + y = 0$$

$$\textcircled{14} \quad 3y'' + xy' - 4y = 0$$

$$\textcircled{15} \quad 5y'' - 2xy' + 10y = 0$$

$$\textcircled{16} \quad y'' = xy$$

$$\textcircled{17} \quad y'' - xy' + 2y = 0$$

$$\textcircled{18} \quad y'' + x^2 y' + xy = 0$$

$$\textcircled{19} \quad (x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$$

$$\textcircled{20} \quad (x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$$

$$\textcircled{21} \quad (x^2 + 1)y'' - 6y = 0$$

$$\textcircled{22} \quad y'' - (x+1)y' - y = 0$$

$$\textcircled{23} \quad y'' - xy' - (x+2)y = 0$$

$$\textcircled{24} \quad (x+2)y'' + xy' - y = 0$$

$$\textcircled{25} \quad y'' + (1+x+x^2)y = 0$$

$$\textcircled{26} \quad (1-x)y'' + (2+x)y' - 2y = 0$$

$$\textcircled{27} \quad (1+x)y'' + 2y' - y = 0$$

$$\textcircled{38} \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$\textcircled{29} \quad xy'' + y' + xy = 0$$

$$\textcircled{30} \quad (1+x^2)y'' + xy' - y = 0$$

$$\textcircled{31} \quad (2x^2 - 3x + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

$$\textcircled{32} \quad y'' - (1+x)y = 0$$

$$\textcircled{33} \quad (x^2 + 1)^2 y'' - 4x(x^2 + 1)y' + (6x^2 - 2)y = 0$$

$$\textcircled{34} \quad (2x-1)y'' - 3xy' = 0$$

$$\textcircled{35} \quad y'' + 2xy' + 2y = 0$$

$$\textcircled{36} \quad (x-1)y'' + y' = 0$$

IV. Mediante series de potencias resuelva los problemas con condiciones iniciales.

$$\textcircled{1} \quad (1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\textcircled{2} \quad (x+1)y'' - (2-x)y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

$$\textcircled{3} \quad y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$\textcircled{4} \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\textcircled{5} \quad y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

$$\textcircled{6} \quad y'' + xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\textcircled{7} \quad (x^2 + 6x)y'' + (3x+2)y' - 3y = 0, \quad y(-3) = 0, \quad y'(-3) = 2$$

$$\textcircled{8} \quad y'' + (x-1)y' + y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

$$\textcircled{9} \quad y'' - 2xy' + 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

$$\textcircled{10} \quad (x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\textcircled{11} \quad (2x - x^2)y'' - 6(x-1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

$$(12) \quad (x^2 - 6x + 10)y'' - 6(x-1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

$$(13) \quad y'' - xy' + y - 1 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(14) \quad (4x^2 + 16x + 17)y'' = 8y, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = 0$$

V. Resuelva las siguientes ecuaciones mediante series de potencias.

$$(1) \quad y'' + (\sin x)y = 0$$

$$(2) \quad y'' + e^{-x}y = 0$$

$$(3) \quad \cos x \cdot y'' + y = 0$$

$$(4) \quad y'' + e^x y' - y = 0$$

$$(5) \quad y'' - xy = 1$$

$$(6) \quad xy'' + (\sin x)y = 0$$

$$(7) \quad xy'' + \sin x \cdot y' + xy = 0$$

$$(8) \quad y'' - 4xy' - 4y = e^x$$

VI. Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando el método de FROBENIUS.

$$(1) \quad 2xy'' + (1 - 2x^2)y' - 4xy = 0$$

$$(2) \quad xy'' + 2y' + 9xy = 0$$

$$(3) \quad xy'' - y' + 4x^2y = 0$$

$$(4) \quad xy'' + y' + x(1+x)y = 0$$

$$(5) \quad xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$$

$$(6) \quad 9xy'' + 9y' + xy = 0$$

$$(7) \quad xy'' + y' + 4xy = 0$$

$$(8) \quad xy'' + 2y' - 4xy = 0$$

$$(9) \quad 2xy'' - y' + 2y = 0$$

$$(18) \quad 3xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

$$(11) \quad 2x(1-2x)y'' + (4x^2 + 1)y' - (2x+1)y = 0$$

$$(12) \quad x^2 y'' + x(x - \frac{1}{2})y' + \frac{1}{2}y = 0$$

$$(13) \quad x^2 y'' + (1+3x)xy' - (1+6x)y = 0$$

$$(14) \quad xy'' + 2y' + xy = 0$$

$$(15) \quad 2xy'' + 5y' + xy = 0$$

$$(16) \quad x^2 y'' + x(x-1)y' + y = 0$$

$$(17) \quad 4xy'' + 8y' + xy = 0$$

$$(18) \quad 3x^2 y'' + 2xy' + x^2 y = 0$$

- 19  $2xy'' + (x+1)y' + y = 0$ 
 20  $2xy'' + 3y' - y = 0$
- 21  $3xy'' + 2y' + 2y = 0$ 
 22  $2xy'' + (1-2x^2)y' - 4xy = 0$
- 23  $2x^2y'' + xy' - (1+2x^2)y = 0$ 
 24  $2x^2y'' + 7x(1+x)y' - 3y = 0$
- 25  $2x^2y'' + xy' - (3-2x^2)y = 0$ 
 26  $6x^2y'' + 7xy' - (x^2+2)y = 0$
- 27  $2x^2y'' - xy' + (x^2+1)y = 0$ 
 28  $2xy'' - (3+2x)y' + y = 0$
- 29  $2x^2y'' + (-7+2x)xy' + (7-5x)y = 0$ 
 30  $2x^2y'' + 3xy' - (x^2+1)y = 0$
- 31  $2x^2y'' + 3xy' + (2x-1)y = 0$ 
 32  $x(x-2)y'' + y' - 2y = 0$
- 33  $2x^2y'' + x(x+1)y' - (2x+1)y = 0$ 
 34  $x^2y'' + 3xy' + (1+x+x^3)y = 0$
- 35  $x^2y'' + x(1+x)y' - (1-3x+6x^2)y = 0$ 
 36  $4x^2y'' - 4xy' + (3-4x^2)y = 0$
- 37  $x^2y'' + (2x+3x^2)y' - 2y = 0$ 
 38  $x^2y'' - xy' + (x^2+1)y = 0$
- 39  $2x(1-x)y'' + (1-2x)y' + (2+x)y = 0$ 
 40  $x(x-2)^2y'' - 2(x-2)y' + 2y = 0$
- 41  $2xy'' + (1-x)y' - (1+x)y = 0$ 
 42  $x^2y'' + (2x^2-3x)y' + 3y = 0$
- 43  $x^3(x-1)y'' + (x-1)y' + 4xy = 0$ 
 44  $2x^3y'' - x(2-5x)y' + y = 0$
- 45  $(2x^2+5x^3)y'' + (3x-x^2)y' - (1+x)y = 0$ 
 46  $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$
- 47  $x^2y'' - 2xy' + 4(x^4-1)y = 0$ 
 48  $2x^2y'' - x(x-1)y' - y = 0$
- 49  $x^2y'' + (x^2-3x)y' + 4y = 0$ 
 50  $x(1-x)y'' - 3y' + 2y = 0$

VII. Mediante series de potencias encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada, en  $0 < x < \infty$  (Bessel)



- ①  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$       ②  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$   
 ③  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$       ④  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{4}{9})y = 0$   
 ⑤  $xy'' + y' + xy = 0$       ⑥  $\frac{d}{dx}(xy') + (x - \frac{4}{x})y = 0$   
 ⑦  $x^2 y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{9})y = 0$       ⑧  $x^2 y'' + xy' + (36x^2 - \frac{1}{4})y = 0$   
 ⑨  $4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 25)y = 0$       ⑩  $16x^2 y'' + 16xy' + (16x^2 - 1)y = 0$   
 ⑪  $x^2 y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$       ⑫  $xy'' + 3y' + xy = 0$   
 ⑬  $xy'' - y' + 36x^3 y = 0$       ⑭  $x^2 y'' - 5xy' + (8 + x)y = 0$   
 ⑮  $2x^2 y'' + 3xy' - 2(4 - x^5)y = 0$       ⑯  $4x^2 y'' - 12xy' + (15 + 16x)y = 0$   
 ⑰  $x^2 y'' + 3xy' + (1 + x^2)y = 0$       ⑱  $16x^2 y'' + 24xy' + (1 + 44x^3)y = 0$   
 ⑲  $36x^2 y'' + 60xy' + (9x^3 - 5)y = 0$       ⑳  $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$

## VIII.

- ① Comprobar que la ecuación diferencial  $xy'' + (1 - 2n)y' + xy = 0$ ,  $x > 0$ , tiene la solución particular  $y = x^n J_n(x)$   
 ② Comprobar que la ecuación diferencial  $xy'' + (1 + 2n)y' + xy = 0$ ,  $x > 0$ , tiene la solución particular  $y = x^{-n} J_n(x)$   
 ③ Comprobar que la ecuación diferencial  $x^2 y'' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2 + \frac{1}{4})y = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x > 0$ , tiene la solución particular  $y = \sqrt{x} J_\nu(\lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ .

## CAPÍTULO X

### 10. CONCEPTOS BÁSICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

#### 10.1. INTRODUCCIÓN.-

En el cálculo elemental se estudió la derivación e integración los cuales gozan de la operación de linealidad, es decir:

$$\frac{d}{dx} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x)$$

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes reales arbitrarias.

La integral definida de una suma también goza de la operación de linealidad, es decir:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

La operación de linealidad de la derivación e integración transforman esencialmente una función en otra expresión por ejemplo:

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2, \quad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c, \quad \int x^3 dx = 4.$$

nosotros estamos interesados en una integral impropia que transforma una función  $F(t)$  en otra función de parámetro  $s$ , al cual se le llamará Transformada de Laplace, es decir, que la transformada de Laplace es una operación que transforma una función  $F(t)$  en otra función de parámetro  $s$ .

**10.2. DEFINICIÓN.-**

Sea  $F: [0, \infty > \rightarrow \mathbb{R}$ , una función definida para  $t \geq 0$ , entonces a la función  $f$  definida por:

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st} F(t) dt$$

Se llama transformada de Laplace de  $F$ , siempre que el límite exista.

Simbólicamente a la transformada de Laplace de  $F$  se denota por:  $L\{F(t)\}$ , es decir:

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s)$$

**Ejemplo.-** Calcular  $L\{F(t)\}$ , donde  $F(t) = t$

Solución

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \left( -\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} \right) - \left( 0 - \frac{1}{s^2} \right) \right] = 0 - 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$$\therefore L\{t\} = \frac{1}{s^2}, \text{ para } s > 0.$$

**Observación.-** El uso del símbolo de  $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(t) \Big|_0^b$  vamos a reemplazar por la notación  $F(x) \Big|_0^{+\infty}$ , es decir:

$$L\{t\} = \int_0^{+\infty} te^{-st} dt = \left( -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}, \text{ } s > 0$$

Entendiéndose que en el límite superior, cuando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-st} \rightarrow 0$ , para  $s > 0$ .

### 10.3. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE $L\{F(t)\}$ .-

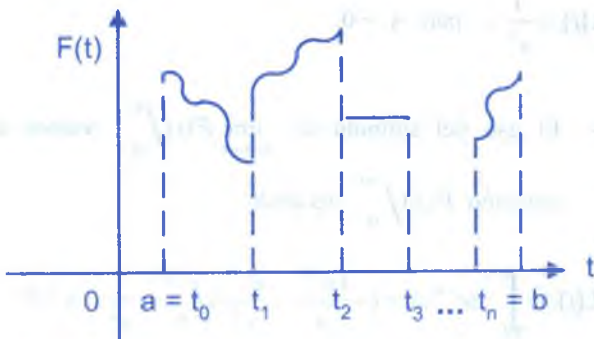
La integral impropia que define la Transformada de Laplace no necesariamente converge, por ejemplo; ni  $L\{\frac{1}{t}\}$  ni  $L\{e^{t^2}\}$  existen.

Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de  $L\{F(t)\}$  son que  $F(t)$  sea continua por tramos o seccionalmente continua para  $t \geq 0$  y además que sea de orden exponencial para  $t > T$ .

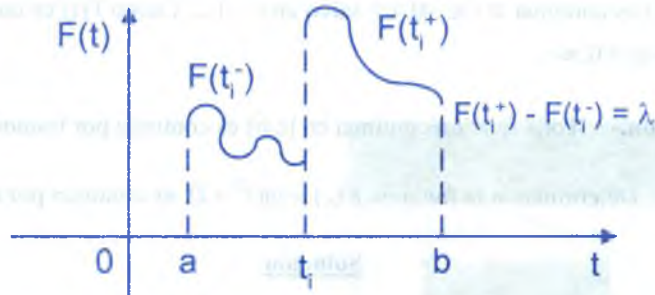
### 10.4. FUNCIONES CONTINUAS POR TRAMOS O SECCIONALMENTE CONTINUAS.-

**Definición.-** La función  $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , es continua por tramos o seccionalmente continua en  $[a,b]$  si:

- i. Existen puntos en  $[a,b]$  tal que:  $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$ , donde  $F$  es continua en cada subintervalo  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , salvo en dichos puntos.
- ii. En cada punto  $t_i \in [a,b]$  existen los límites  $F(t_i^+) = \lim_{h \rightarrow 0} F(t_i + h)$ ,  $F(t_i^-) = \lim_{h \rightarrow 0} F(t_i - h)$ .

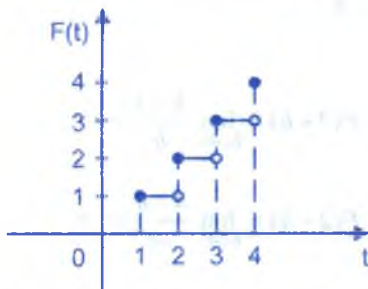


**Observación.-** Consideremos una función  $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente continua.



A la diferencia  $F(t_1^+) - F(t_1^-) = \lambda$  se llama magnitud del salto de la función en el punto  $t_1$ .

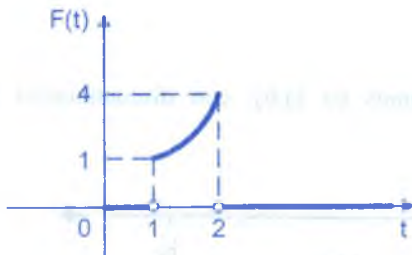
**Ejemplo.-** La función  $F(t) = [ | t | ]$  es continua por tramos en  $[0,4]$ .



Si  $t \in [0, 1[ \Rightarrow F(t) = 0$   
 $t \in [1, 2[ \Rightarrow F(t) = 1$   
 $t \in [2, 3[ \Rightarrow F(t) = 2$   
 $t \in [3, 4[ \Rightarrow F(t) = 3$   
 para  $t = 4 \Rightarrow F(t) = 4$

**Ejemplo.-** La función  $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^2 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$ , ¿Es F continua por tramos?

**Solución**



$$F(1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(1-h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

$$F(1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h)^2 = 1$$

$$F(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(2-h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (2-h)^2 = 4$$

$$F(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0$$



además  $F(t)$  es continua  $\forall t \in \langle 0, \infty \rangle$  salvo en  $t = 1, 2$ . Luego  $F(t)$  es una función continua por tramos en  $\langle 0, \infty \rangle$ .

**Observación.-** Toda función continua en  $[a, b]$  es continua por tramos en  $[a, b]$ .

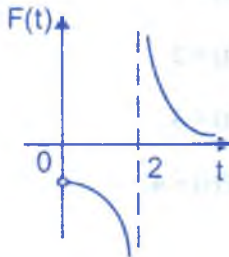
**Ejemplo.-** Determinar si la función  $F(t) = \ln(t^2 + 1)$  es continua por tramos en  $[0, \infty \rangle$ .

Solución

La función  $F(t) = \ln(t^2 + 1)$  es continua  $\forall t \in \mathbb{R}$ , en particular es continua,  $\forall t \geq 0$  entonces  $F(t) = \ln(t^2 + 1)$ , es continua por tramos en  $[0, +\infty \rangle$ .

**Ejemplo.-** Determinar si la función  $F(t) = \frac{t+2}{t-2}$  es continua por tramos.

Solución



$$F(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h+4}{h} = +\infty$$

$$F(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} F(2-h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4-h}{-h} = -\infty$$

como  $\nexists$  los límites, por lo tanto la función  $F(t)$  no es continua por tramos.

**Observación.-**

- ① Si  $F$  es una función continua por tramos en  $[a, b]$ , entonces dicha función es integrable en  $[a, b]$  es decir:  $\exists \int_a^b F(t) dt$

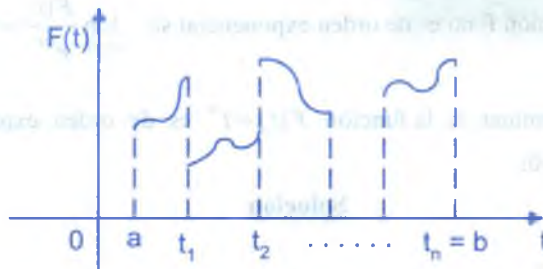
En efecto: como  $F$  es continua por tramos en  $[a, b]$ , con discontinuidad en  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  y posiblemente en  $a, b$ .



Entonces a la integral  $\int_a^b F(t) dt$ , se define como:

$$\int_a^b F(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{a+h}^{a+h} F(t) dt + \int_{a+h}^{a+h} F(t) dt + \dots + \int_{a+h}^{b-h} F(t) dt \right]$$

como este límite siempre existe, entonces  $\exists \int_a^b F(t) dt$



- ② Si F y G son dos funciones continuas por tramos en [a,b], entonces el producto también es continua por tramos en [a,b]. (Probar: queda como ejercicio).

### 10.5. FUNCIONES DE ORDEN EXPONENCIAL.-

**Definición.-** La función  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , es de orden exponencial si existen constantes  $c > 0$  y  $\alpha$  tal que  $|F(t)| \leq c e^{\alpha t}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Ejemplo.-** Toda función constante es de orden exponencial. En efecto: Sea F una función constante  $\exists c > 0$  tal que  $|F(t)| \leq c$ ,  $\forall t \geq 0$  entonces  $|F(t)| \leq c e^{0t}$ .

Es decir que F es de orden exponencial haciendo  $\alpha = 0$ .

**Ejemplo.-** Determinar si la función  $F(t) = e^{at} \cos bt$ , es de orden exponencial.

#### Solución

Como  $|\cos bt| \leq 1$ ,  $\forall t \geq 0$  entonces  $e^{at} |\cos bt| \leq e^{at}$ ,  $\forall t \geq 0$  de donde:

$$|e^{at} \cos bt| \leq e^{at} \Rightarrow |F(t)| \leq e^{at}.$$

Luego  $F(t) = e^{at} \cos bt$  es de orden exponencial tomando  $c = 1$  y  $\alpha = a$ .

**Propiedades.-**

① Si  $F: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función seccionalmente continua en  $[0, +\infty[$ , entonces:

i) La función  $F$  es de orden exponencial siempre que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = 0.$$

ii) La función  $F$  no es de orden exponencial si:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = \infty.$

**Ejemplo.-** Determinar si la función  $F(t) = t^n$  es de orden exponencial para  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Solución**

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}}$ , aplicando la regla de L'Hospital

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{\alpha^n} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\alpha t}} = \frac{n!}{\alpha^n} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\alpha t}} = \frac{n!}{\alpha^n} (0) = 0, \forall \alpha > 0$$

por lo tanto  $F(t) = t^n$  es de orden exponencial  $\forall t \geq 0$

**Ejemplo.-** Determinar si la función  $F(t) = e^{t^2}$  es de orden exponencial.

**Solución**

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2 - \alpha t} = +\infty$ , Luego la función  $F(t)$  no es de orden exponencial

② Si  $F, G: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , son dos funciones de orden exponencial, entonces el producto de  $F$  y  $G$  son de orden exponencial. En efecto:

Como  $F$  y  $G$  son de orden exponencial  $\Rightarrow$  existen  $\alpha_1, \alpha_2, y c_1, c_2 > 0$ , tal que:

$$|F(t)| \leq c_1 e^{\alpha_1 t} \text{ y } |G(t)| \leq c_2 e^{\alpha_2 t}, \forall t \geq 0 \Rightarrow |F(t) \cdot G(t)| = |F(t)| |G(t)| \leq c_1 e^{\alpha_1 t} \cdot c_2 e^{\alpha_2 t}$$

$= c_1 \cdot c_2 e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t} \forall t \geq 0$ , entonces  $|F(t) \cdot G(t)| \leq e^{\alpha t}$ , entonces  $F(t) \cdot G(t)$  es de orden exponencial.

- ③ Si  $F, G: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones de orden exponencial, entonces la suma de  $F$  y  $G$  es de orden exponencial.

(Queda como ejercicio para el lector).

**Ejemplo.-** Demostrar que la función  $f(t) = t^n \operatorname{sen} kt$  es continua por tramos y de orden exponencial en  $[0, +\infty)$ .

### Solución

Sea  $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = t^n \operatorname{sen} kt$ , donde  $f_1(t) = t^n$ ,  $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ , la función  $f_1(t) = t^n$  es continua  $\forall t \in \mathbb{R}$ , en particular  $f_1(t) = t^n$  es continua en  $[0, +\infty)$  por lo tanto  $f_1(t) = t^n$  es continua por tramos (por la propiedad que toda función continua en  $[a, b]$  es continua por tramos en  $[a, b]$ ).

La función  $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ , es continua  $\forall t \in \mathbb{R}$ , en particular es continua en  $[0, +\infty)$ , por lo tanto  $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$  es continua por tramos.

Entonces como  $f_1(t) = t^n$  y  $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$  son continuas por tramos entonces  $f(t) = t^n \operatorname{sen} kt$  es continua por tramos ahora demostraremos que  $f_1(t) = t^n$  es de orden exponencial; para esto demostraremos que:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_1(t)}{e^{\alpha t}} = 0$ , es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n!}{\alpha^n e^{\alpha t}} = 0, \text{ entonces } f_1(t) = t^n \text{ es de orden exponencial.}$$

Ahora demostraremos que  $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$  es de orden exponencial, para esto existen  $c$  y  $\alpha$ , tal que  $|f_2(t)| \leq ce^{\alpha t}$ , pero  $|\operatorname{sen} kt| \leq 1$  de donde  $|f_2(t)| \leq 1 = 1e^{0t}$  tomando  $c = 1$ ,  $\alpha = 0$  se tiene que  $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$  es de orden exponencial por lo tanto como  $f_1(t) = t^n$  y  $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$  son de orden exponencial, entonces:  $f(t) = t^n \cdot \operatorname{sen} kt$  es de orden exponencial.

**10.6. TEOREMA.-**

Si la función  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , es seccionalmente continua y de orden exponencial  $\alpha$  entonces  $\exists f(s) = L\{f(t)\}, \forall s > \alpha$ .

**Demostración**

Por hipótesis se tiene que  $F(t)$  es de orden exponencial  $\alpha \Rightarrow \exists M > 0$ , tal que

$$|F(t)| \leq M e^{\alpha t}, \forall t \geq 0. \quad \text{Además por propiedad} \quad \left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt \quad \text{y}$$

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-st} F(t) dt.$$

$$\text{Luego } |e^{-st} F(t)| = e^{-st} |F(t)| \leq M e^{-st} \cdot e^{\alpha t}, \forall t \geq 0 \text{ puesto que } |F(t)| \leq M e^{\alpha t}, \forall t \geq 0$$

Es decir:  $|e^{-st} F(t)| \leq M e^{-(s-\alpha)t}, \forall t \geq 0$ , a esta desigualdad integramos de 0 hasta a.

$$\int_0^a |e^{-st} F(t)| dt \leq \int_0^a M e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{M}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^a = -\frac{M}{s-\alpha} (e^{-(s-\alpha)a} - 1)$$

Ahora tomamos límite cuando  $a \rightarrow +\infty$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a |e^{-st} F(t)| dt \leq -\frac{M}{s-\alpha} \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-(s-\alpha)a} - 1) = \frac{M}{s-\alpha}, \text{ de donde}$$

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} F(t)| dt \leq \frac{M}{s-\alpha}, \quad s > \alpha$$

por lo tanto  $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt$  es convergente, entonces existe  $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt$  esto quiere decir que:  $\exists L\{F(t)\} = f(s)$

**OBSERVACIÓN.-**

- ① Si  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua por tramos y de orden exponencial, se llama función de clase A.
- ② Si  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase A entonces  $\exists L\{F(t)\}$ .
- ③ Si  $\exists L\{F(t)\} \Rightarrow$  que  $F$  sea una función de clase A.



**10.7. TEOREMA.-**

Sea  $F(t)$  una función continua por partes para  $t \geq 0$  y de orden exponencial para  $t > T$ ; entonces  $\lim_{s \rightarrow \infty} L\{F(t)\} = 0$

**Demostración**

Como  $F(t)$  es continua por partes en  $0 \leq t \leq T$ , es necesariamente acotada en este intervalo:  $|F(t)| \leq M_1 = M_1 e^{0t}$ , además  $|F(t)| \leq M_2 e^{ct}$

para  $t > T$ . Si  $M$  denota el máximo de  $\{M_1, M_2\}$  y  $c$ , el máximo  $\{0, \lambda\}$  entonces

$$|L\{F(t)\}| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |F(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{ct} dt \leq M \frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{s-c} \text{ para } s > c$$

$$|L\{F(t)\}| \leq \frac{M}{s-c} \text{ para } s > c. \text{ Cuando } s \rightarrow \infty \text{ tenemos que:}$$

$$|L\{F(t)\}| \rightarrow 0 \text{ y por lo tanto } \lim_{s \rightarrow \infty} L\{F(t)\} = 0$$

**10.8. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES.-**

Encontrar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones.

①  $F(t) = e^{kt}$

**Solución**

Aplicando la definición de Transformada de Laplace

$$f(s) = L\{F(t)\} = L\{e^{kt}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{kt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-k)t} dt = \left[ -\frac{e^{-(s-k)t}}{s-k} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-k}, s > k$$

por lo tanto  $f(s) = L\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$  para  $s > k$

**OBSERVACIÓN.-** Cuando  $k = 0$  se tiene:  $f(s) = L\{1\} = \frac{1}{s}$  para  $s > 0$ .

②  $F(t) = t^n$

**Solución**

$$f(s) = L\{F(t)\} = L\{t^n\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt, \text{ integrando por partes se tiene:}$$

$$\begin{cases} u = t^n \\ dv = e^{-st} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nt^{n-1} dt \\ v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{cases}$$

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = -\frac{t^n e^{-st}}{s} \Big|_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} dt$$

para  $s > 0$ ,  $n > 0$ ,  $t^n e^{-st} \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ , luego se tiene:

$$f(s) = \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\} \quad \dots (\alpha)$$

siguiendo el mismo proceso se llega a que:

$$L\{t^{n-(n-1)}\} = L\{t\} = \frac{1}{s} L\{t^0\} = \frac{1}{s^2}, \text{ puesto que } L\{1\} = \frac{1}{s}, \text{ que reemplazando en } (\alpha) \text{ se}$$

$$\text{tiene: } f(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \dots \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \therefore f(s) = L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ si } s > 0$$

③  $F(t) = \text{sen } at$

**Solución**

$$f(s) = L\{\text{sen } at\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \text{sen } at dt, \text{ integrando por partes.}$$

$$f(s) = e^{-st} \left( \frac{s \cdot \text{sen } at + a \cos at}{s^2 + a^2} \right) \Big|_0^{+\infty}, \text{ para } s > 0, e^{-st} \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty, \text{ entonces:}$$

$$f(s) = L\{\text{sen } at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \text{ si } s > 0$$

4  $F(t) = \cos at$

**Solución**

En forma similar que la función anterior.

$$f(s) = L\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at \, dt = \frac{s}{s^2 + a^2}, \text{ si } s > 0$$

Es decir:  $f(s) = L\{\cos at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \text{ si } s > 0$

**TABLA DE TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES.**

F(t)	L{F(t)} = f(s)
k	$\frac{k}{s}, s > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, s > a$
sen at	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
senh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s >  a $
cosh at	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s >  a $
$e^{bt} \text{ sen } at$	$\frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$
$e^{bt} \text{ cos } at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$
$e^{bt} \text{ senh } at$	$\frac{a}{(s-b)^2 - a^2}$
$e^{bt} \text{ cosh } at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$

**Ejemplos.-** Calcular  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t)$  es dado:

①  $F(t) = t^4 + \text{sen } 4t + \text{cos } 7t$

**Solución**

$$L\{F(t)\} = L\{t^4 + \text{sen } 4t + \text{cos } 7t\} = \frac{24}{s^5} + \frac{4}{s^2 + 16} + \frac{5}{s^2 + 49}$$

②  $F(t) = \text{sen } 20t$

**Solución**

$$L\{F(t)\} = L\{\text{sen } 20t\} = \frac{20}{s^2 + 400}$$

③  $F(t) = \text{cos}^2 4t$

**Solución**

$$L\{F(t)\} = L\{\text{cos}^2 4t\} = L\left\{\frac{1 + \text{cos } 8t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 64}\right) = \frac{s^2 + 32}{s(s^2 + 64)}$$

④  $F(t) = \text{sen } \pi t \text{ cos } \pi t$

**Solución**

$$L\{F(t)\} = L\{\text{sen } \pi t \text{ cos } \pi t\} = L\left\{\frac{\text{sen } 2\pi t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2}\right) = \frac{\pi}{s^2 + 4\pi^2}$$

⑤  $F(t) = \text{sen}^2 \pi t$

**Solución**

$$L\{F(t)\} = L\{\text{sen}^2 \pi t\} = L\left\{\frac{1 - \text{cos } 2\pi t}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{1 - \text{cos } 2\pi t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4\pi^2}\right)$$

## 10.9. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.-

a) **PROPIEDAD DE LINEALIDAD.-**

Sean  $F, G: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , funciones continuas por tramos y de orden exponencial entonces:

$$L\{\alpha F(t) + \beta G(t)\} = \alpha L\{F(t)\} + \beta L\{G(t)\}$$

**Demostración**

Mediante la definición de Transformada se tiene:

$$\begin{aligned} L\{\alpha F(t) + \beta G(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} (\alpha F(t) + \beta G(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} G(t) dt = \alpha L\{F(t)\} + \beta L\{G(t)\} \end{aligned}$$

$$\therefore L\{\alpha F(t) + \beta G(t)\} = \alpha L\{F(t)\} + \beta L\{G(t)\}$$

**Ejemplo.-** Calcular  $L\{F(t)\}$ , donde  $F(t) = t^2 + \cos 2t + e^{3t}$

**Solución**

$$L\{F(t)\} = L\{t^2 + \cos 2t + e^{3t}\} = L\{t^2\} + L\{\cos 2t\} + L\{e^{3t}\} = \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{s - 3}$$

**b) PRIMERA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN.-**

Si  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función continua por tramos y de orden exponencial y si

$L\{F(t)\} = f(s)$  entonces para  $a \neq 0$  se tiene:  $L\{e^{at} F(t)\} = f(s - a)$ ,  $s > a$

**Demostración**

Mediante la definición de Transformada se tiene:

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s) \text{ entonces}$$

$$L\{e^{at} F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at} F(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt = f(s - a)$$

$$\therefore L\{e^{at} F(t)\} = f(s - a)$$

**Ejemplo.-** Si  $F(t) = t^3 e^{4t}$ . Hallar  $L\{F(t)\}$ .

**Solución**



$$L\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4} = f(s), \text{ entonces: } L\{t^3 e^{4t}\} = f(s-4) = \frac{6}{(s-4)^4}$$

$$\therefore L\{t^3 e^{4t}\} = \frac{6}{(s-4)^4}$$

**Ejemplo.-** Si  $F(t) = e^{-t} \cos 2t$ . Hallar  $L\{F(t)\}$

### Solución

$$\text{Sea } L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2 + 4} = f(s), \text{ entonces: } L\{e^{-t} \cos 2t\} = f(s+1) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$$

$$\therefore L\{e^{-t} \cos 2t\} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}$$

### c) SEGUNDA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN.-

Si  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función continua por tramos y de orden exponencial y;

$$\text{Si } L\{F(t)\} = f(s) \text{ y } G(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ F(t-a); & t > a \end{cases} \text{ entonces } L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$$

### Demostración

Mediante la definición de transformada de Laplace

$$L\{G(t)\} = \int_0^{-\infty} e^{-st} G(t) dt = \int_0^a e^{-st} G(t) dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} G(t) dt$$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-st} G(t) dt = \int_a^{+\infty} e^{-st} G(t) dt$$

$$\text{Es decir: } Lz\{G(t)\} = \int_a^{+\infty} e^{-st} G(t) dt$$

ahora calculamos la integral, haciendo la sustitución:

$u = t - a \Rightarrow t = u + a \Rightarrow dt = du$ , reemplazando en la integral se tiene:

$$L\{G(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} G(u+a) du = e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-su} F(u) du = e^{-as} f(s)$$

por lo tanto:  $L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$ .

**Ejemplo.-** Hallar  $L\{F(t)\}$  si  $F(t) = \begin{cases} (t-2)^2, & t > 2 \\ 0, & t < 2 \end{cases}$

**Solución**

Sea  $L\{t^3\} = \frac{6}{s^4} = f(s) \Rightarrow L\{F(t)\} = e^{-2s} f(s) = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$   $\therefore L\{F(t)\} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$

**d) PROPIEDAD DEL CAMBIO DE ESCALA.**

Sea  $F: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continua por tramos y de orden exponencial.

Si  $L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$

**Demostración**

Aplicando la definición de Transformada de Laplace.

$L\{F(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(at) dt$ , calculando la integral se tiene:

sea  $u = at \Rightarrow t = \frac{u}{a} \Rightarrow dt = \frac{du}{a}$ , sustituyendo en la integral

$L\{F(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{u}{a}} F(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-s/a} F(u) du = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$

$\therefore L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$

**Ejemplo.-** Hallar  $L\{\text{sen } 7t\}$

**Solución**

$$\text{Sea } L\{\sin 7t\} = \frac{1}{s^2 + 49} = f(s), \text{ entonces } L\{\sin 7t\} = \frac{1}{7} f\left(\frac{s}{7}\right) = \frac{1}{7} \left( \frac{1}{\frac{s^2}{49} + 1} \right) = \frac{7}{s^2 + 49}$$

$$\therefore L\{\sin 7t\} = \frac{7}{s^2 + 49}$$

## 10.10. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA MULTIPLICACIÓN POR POTENCIA DE $t^n$ .-

**Teorema.-** Consideremos la función  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , continua por tramos y de orden exponencial, si  $L\{F(t)\} = f(s)$ , entonces  $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{F(t)\}$ , para  $s > 0$ .  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

### Demostración

$$\text{como } L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt$$

aplicando la regla de Leibnitz para la derivada bajo el signo de integración se tiene:

$$\frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} F(t) dt = - \int_0^{+\infty} t e^{-st} F(t) dt = -L\{t F(t)\}$$

Es decir que:  $L\{t F(t)\} = -\frac{d}{ds} f(s)$ , se cumple para  $n = 1$

ahora generalizamos el teorema usando inducción matemática.

Suponiendo que el teorema es válido para  $n = h$ .

Es decir:  $L\{t^h F(t)\} = (-1)^h \frac{d^h}{ds^h} f(s)$ , lo que es lo mismo.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^h F(t) dt = (-1)^h \frac{d^h}{ds^h} f(s), \text{ derivando por la regla de Leibnitz se tiene:}$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^h F(t) dt = (-1)^h \frac{d^{h+1}}{ds^{h+1}} f(s)$$

Es decir: 
$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{h+1} F(t) dt = (-1)^{h+1} \frac{d^{h+1}}{ds^{h+1}} f(s)$$

Luego como  $n = h$  el teorema es cierto, entonces el teorema es válido  $n = h + 1$  y como también es válido para  $n = 1$ , entonces se cumple para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ , por lo tanto.

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{F(t)\}$$

**Ejemplos.-**

① Demostrar que 
$$L\{t \cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

**Solución**

$$L\{t \cos at\} = -\frac{d}{ds} L\{\cos at\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2 + a^2} \right) = -\left[ \frac{(s^2 + a^2) - s(2s)}{(s^2 + a^2)^2} \right] = -\frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\therefore L\{t \cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

② Hallar  $L\{t(3 \sin 2t - 2 \cos 2t)\}$

**Solución**

$$L\{t(3 \sin 2t - 2 \cos 2t)\} = -\frac{d}{ds} L\{3 \sin 2t - 2 \cos 2t\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{6}{s^2 + 4} - \frac{2s}{s^2 + 4} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} \left( \frac{2s - 6}{s^2 + 4} \right) = \frac{2(s^2 + 4) - (2s - 6)2s}{(s^2 + 4)^2} = \frac{2s^2 + 8 - 4s^2 + 12s}{(s^2 + 4)^2} = \frac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\therefore L\{t(3 \sin 2t - 2 \cos 2t)\} = \frac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2 + 4)^2}$$

**10.11. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DIVISIÓN POR “t”.-**

**Teorema.-** Consideremos una función  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua por tramos y de orden exponencial si  $L\{F(t)\} = f(s)$  entonces 
$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f(u) du$$

**Demostración**

Consideremos  $G(t) = \frac{F(t)}{t}$  de donde  $F(t) = t G(t)$  aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados  $L\{F(t)\} = L\{t G(t)\}$  y por el teorema (1.10) se tiene:

$$L\{F(t)\} = -\frac{d}{ds} L\{G(t)\} \quad \text{de donde} \quad \frac{d}{ds} L\{G(t)\} = -L\{F(t)\} = -f(s), \quad \text{y se tiene}$$

$$L\{G(t)\} = -\int f(s) ds \quad \text{integrando se tiene:} \quad L\{G(t)\} = -\int_x^\infty f(u) du = \int_x^\infty f(u) du$$

$$\text{Luego } L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_x^\infty f(u) du$$

**Observación.-** La constante de integración se escoge de tal forma que  $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$

**Ejemplo.-**

① Demostrar que:  $L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$

**Solución**

$$L\{e^{-at} - e^{-bt}\} = L\{e^{-at}\} - L\{e^{-bt}\} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} = f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} &= \int_s^\infty \left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\right) du = [\ln(u+a) - \ln(u+b)] \Big|_s^\infty \\ &= \ln\left(\frac{u+a}{u+b}\right) \Big|_s^\infty = 0 - \ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right) = \ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$$

② Calcular:  $L\left\{\frac{\cos t - \cosh t}{t}\right\}$

**Solución**



$$L\{\cos t - \cosh t\} = L\{\cos t\} - L\{\cosh t\} = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 - 1} = f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$L\left\{\frac{\cos t - \cosh t}{t}\right\} = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{u^2 + 1} - \frac{u}{u^2 - 1}\right) du = \left[\frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(u^2 - 1)\right] \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2 + 1}{u^2 - 1}\right) \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2 + 1}{s^2 - 1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}\right)$$

$$\therefore L\left\{\frac{\cos t - \cosh t}{t}\right\} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}\right)$$

3

Hallar  $L\left\{\frac{1 - e^t + \text{sen } 2t}{t}\right\}$

**Solución**

$$L\{1 - e^t + \text{sen } 2t\} = L\{1\} - L\{e^t\} + L\{\text{sen } 2t\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^2 + 4} = f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$L\left\{\frac{1 - e^t + \text{sen } 2t}{t}\right\} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{2}{u^2 + 4}\right) du = [\ln u - \ln(u-1) + \text{arctg } \frac{u}{2}] \Big|_0^{\infty}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{u}{u-1}\right) + \text{arctg } \frac{u}{2}\right] \Big|_0^{\infty} = \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \ln\frac{s}{s-1} - \text{arctg } \frac{s}{2} = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{s-1}{s} - \text{arctg } \frac{s}{2}$$

$$\therefore L\left\{\frac{1 - e^t + \text{sen } 2t}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{s-1}{s} - \text{arctg } \frac{s}{2} = \ln\left(\frac{s-1}{s}\right) + \text{arctg}\left(\frac{2}{s}\right)$$

**10.12. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA.-**

Los siguientes teoremas que se van ha estudiar, referentes a la Transformada de Laplace de la derivada se utilizan bastante en la resolución de las ecuaciones diferenciales.

- a) **TEOREMA.-** Consideremos una función continua  $F: [0, \infty > \rightarrow \mathbb{R}$  y que  $F'(t)$  sea continua por tramos y de orden exponencial en  $[0, \infty >$  entonces:

$$L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0^+), \text{ donde } F(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t)$$

### Demostración

Como  $F'(t)$  es continua por tramos y de orden exponencial entonces por el teorema

(1.6) existe  $L\{F'(t)\}$ , es decir:  $L\{F'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F'(t) dt$ , integrando por partes.

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = F'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -s e^{-st} dt \\ v = F(t) \end{cases}$$

$$L\{F'(t)\} = e^{-st} F(t) \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = 0 - F(0^+) + sL\{F(t)\}$$

de donde:  $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0^+)$

**Ejemplo.-** Aplíquese una Transformada de Laplace a la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}, \text{ sujeta a } y(0) = 1.$$

### Solución

Primeramente aplicamos la Transformada a ambos miembros de la ecuación diferencial

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 3L\{y\} = L\{e^{2t}\} \text{ pero } L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sL\{y\} - y(0) \text{ y } L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$$

$$\text{por lo tanto } sL\{y\} - y(0) - 3L\{y\} = \frac{1}{s-2} \Rightarrow (s-3)L\{y\} - 1 = \frac{1}{s-2}$$

de donde  $L\{y\} = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$

**b) TEOREMA.-** Consideremos una función continua  $F': [0, \infty) \rightarrow R$  y que  $F''(t)$  sea una función continua por tramos y de orden exponencial.

Entonces:  $L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0^+) - F'(0^+)$

**Demostración**

Como  $F'(t)$  es continua por tramos y de orden exponencial entonces por el teorema (1.6) existe  $L\{F'(t)\}$ , es decir ahora aplicamos dos veces el teorema anterior (1.12 a.), para esto sea  $G(t) = F'(t) \Rightarrow G'(t) = F''(t)$

$$\begin{aligned} L\{F''(t)\} &= L\{G'(t)\} = s L\{G(t) - G(0^+)\} = s L\{F'(t)\} - F'(0^+) \\ &= s(s L\{F(t)\} - F(0^+)) - F'(0^+) = s^2 L\{F(t)\} - s F(0^+) - F'(0^+) \end{aligned}$$

$$\therefore L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - s F(0^+) - F'(0^+)$$

**Ejemplo.-** Aplíquese una transformada a la ecuación diferencial  $4y''(t) + y(t) = -2$  sujeta  $y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{2}$ .

**Solución**

Primeramente aplicamos la transformada a ambos miembros de la ecuación diferencial.

$$4L\{y''(t)\} + L\{y(t)\} = L\{-2\} \Rightarrow 4s^2 L\{y(t)\} - 4sy(0) - 4y'(0) + L\{y(t)\} = -\frac{2}{s}$$

$$(4s^2 + 1)L\{y(t)\} - 0 - 2 = -\frac{2}{s} \text{ de donde } (4s^2 + 1)L\{y(t)\} = \frac{2s - 2}{s}$$

$$\therefore L\{y(t)\} = \frac{2(s - 1)}{s(4s^2 + 1)}$$

**GENERALIZANDO.-** Si  $F^{(n-1)}: [0, +\infty) \rightarrow R$ , es una función continua y que  $F^{(n)}(t)$  es una función continua por tramos y de orden exponencial. Entonces:

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n L\{F(t)\} - s^{n-1} F(0^+) - s^{n-2} F'(0^+) - \dots - s F^{(n-2)}(0^+) - F^{(n-1)}(0^+)$$

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n L\{F(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} F^{(i)}(0^+)$$

**Ejemplo.-** Calcular  $L\{t^n\}$  mediante la transformada de las derivadas.

**Solución**

$$L\{D_t^n t^n\} = L\{n!\} = \frac{n!}{s}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$\frac{n!}{s} = L\{D_t^n t^n\} = s^n L\{t^n\} - s^{n-1} F(0^+) - s^{n-2} F'(0^+) - \dots - F^{(n-1)}(0^+)$$

$$\frac{n!}{s} = s^n L\{t^n\} - 0 - 0 - \dots - 0, \text{ por lo tanto: } L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ para } s > 0$$

**10.13. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE INTEGRALES.-**

**TEOREMA.-** Consideremos una función  $F: [0, \infty \rightarrow \mathbb{R}$ , continua por tramos y de orden exponencial, entonces:

$$\text{Si } L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\left\{\int_a^{\infty} F(u) du\right\} = \frac{1}{s} L\{F(t)\} - \frac{1}{s} \int_0^a F(t) dt$$

**Demostración**

Primero demostraremos que  $\int_a^{\infty} F(u) du$  es de orden exponencial, es decir, como  $F$  es de orden exponencial  $\Rightarrow \exists \alpha, c > 0$ , tal que:  $|F(t)| \leq c e^{-\alpha t}, \forall t \geq 0$

$$\left| \int_a^{\infty} F(u) du \right| \leq \int_a^{\infty} |F(u)| du \leq c \int_a^{\infty} e^{-\alpha u} du = \frac{c}{\alpha} e^{-\alpha a} = \frac{c}{\alpha} (e^{-\alpha a} - e^{-\alpha \infty}) \leq \frac{c}{\alpha} e^{-\alpha a}$$

entonces  $\int_a^{\infty} F(u) du$  es de orden exponencial. Por lo tanto  $\exists L\left\{\int_a^{\infty} F(u) du\right\}$  es decir:

$$L\left\{\int_a^{\infty} F(u) du\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_a^{\infty} F(u) du\right) dt = \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_0^{t_0} e^{-st} \left(\int_a^{\infty} F(u) du\right) dt$$

integrando por partes.

$$\begin{cases} w = \int_a^{\infty} F(u) du \\ dv = e^{-st} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dw = F(t) dt \\ v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 L\left\{\int_a^x F(u)du\right\} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int_a^t F(u)du \Big|_0^t + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt\right] \\
 &= -\frac{1}{s}(0 - \int_a^0 F(u)du) + \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt \\
 &= \frac{1}{s} \int_a^0 F(u)du + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt - \frac{1}{s} \int_0^a F(t)dt \\
 \therefore L\left\{\int_a^x F(u)du\right\} &= \frac{1}{s} L\{F(t)\} - \frac{1}{s} \int_0^a F(t)dt
 \end{aligned}$$

**OBSERVACION.-** Cuando  $a = 0$  se tiene:  $L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\left\{\int_0^x F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s}$

**GENERALIZANDO.-**

$$\begin{aligned}
 L\left\{\int_0^x \int_0^u \dots \int_0^t F(u)du \dots du\right\} &= \frac{1}{s^n} L\{F(t)\} - \frac{1}{s^n} \int_0^x F(u)du - \\
 &\quad - \frac{1}{s^{n-1}} \int_0^x \int_0^u F(u)du \dots du - \dots - \frac{1}{s} \int_0^x \int_0^u \int_0^t \dots \int_0^t F(u)du \dots du \\
 &\hspace{15em} n-1 \text{ veces}
 \end{aligned}$$

Cuando  $a = 0$  se tiene:  $L\left\{\int_0^x \int_0^u \dots \int_0^t F(u)du \dots du\right\} = \frac{1}{s^n} L\{F(t)\}$

**Ejemplos.-**

① Hallar  $L\left\{\int_0^t e^{at} \operatorname{sen} t dt\right\}$

**Solución**

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow L\{t \operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds} L\{\operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

$$L\{t \operatorname{sen} t\} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} \Rightarrow L\{e^{at} t \operatorname{sen} t\} = \frac{2(s-a)}{[(s-a)^2 + 1]^2} = f(s)$$



$$L\left\{\int_0^t t e^{at} \operatorname{sen} t \, dt\right\} = \frac{f(s)}{s} = \frac{2(s-a)}{s[(s-a)^2+1]^2}$$

$$\therefore L\left\{\int_0^t t e^{at} \operatorname{sen} t \, dt\right\} = \frac{2(s-a)}{s[(s-a)^2+1]^2}$$

②

$$\text{Hallar } L\left\{t^2 \int_0^t t \operatorname{sen} t \, dt\right\}$$

**Solución**

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{t \operatorname{sen} t\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t t \operatorname{sen} t \, dt\right\} = \frac{1}{s} L\{\operatorname{sen} t\} - \frac{1}{s} \int_0^t t \operatorname{sen} t \, dt = \frac{1}{s} \left( \frac{2s}{(s^2+1)^2} \right) - \frac{1}{s} (\cos 1 - \operatorname{sen} 1)$$

$$L\left\{\int_0^t t \operatorname{sen} t \, dt\right\} = \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{\cos 1 - \operatorname{sen} 1}{s}$$

$$L\{t^2 \int_0^t t \operatorname{sen} t \, dt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} L\left\{\int_0^t t \operatorname{sen} t \, dt\right\} = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{\cos 1 - \operatorname{sen} 1}{s} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} \left[ -\frac{8s}{(s^2+1)^3} + \frac{\cos 1 - \operatorname{sen} 1}{s^2} \right] = \frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4} - \frac{2(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)}{s^3}$$

$$\therefore L\{t^2 \int_0^t t \operatorname{sen} t \, dt\} = \frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4} - \frac{2(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)}{s^3}$$

### 10.14. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA EVALUACIÓN DE INTEGRALES.-

Sea  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ; una función continua por tramos y de orden exponencial, entonces.

Si  $L\{F(t)\} = f(s)$  entonces  $\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s)$ , tomando límite cuando  $s \rightarrow 0$ , se

tiene:  $\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} f(s)$  de donde  $\int_0^{\infty} F(t) dt = f(0) \dots (*)$

siempre que la integral sea convergente.

La expresión (\*) es útil en la evaluación de integrales.

**Ejemplo.-**

① Evalúe la integral  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} \operatorname{sen} bt}{t} dt$

**Solución**

Aplicando la división en  $t$  y luego la definición  $L\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2} = f(s)$

$$L\left\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\right\} = \int_0^{+\infty} f(u) du = \int_s^{+\infty} \frac{b}{u^2 + b^2} du = \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \Big|_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{b}$$

$L\left\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{b}$ , ahora aplicamos la definición de transformada

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{b}, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow a \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{s \rightarrow a} \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt = \lim_{s \rightarrow a} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{b} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

② Demostrar que  $\int_0^{+\infty} t e^{-3t} \operatorname{sen} t dt = \frac{3}{50}$

**Solución**

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow L\{t \operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds} L\{\operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

$L\{t \operatorname{sen} t\} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$ , ahora aplicamos la definición de transformada

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t \operatorname{sen} t dt = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 3 \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \int_0^{\infty} e^{-st} t \operatorname{sen} t \, dt = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{2s}{(s^2+1)^2} \quad \text{de donde} \quad \int_0^{\infty} e^{-3t} t \operatorname{sen} t \, dt = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

③ Calcular la integral  $\int_0^{\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt$

### Solución

Calculando la transformada de la función  $\cos 6t - \cos 4t$ , es decir:

$$L\{\cos 6t - \cos 4t\} = \frac{s}{s^2+36} - \frac{s}{s^2+16} = f(s), \quad \text{aplicamos la transformada de la división}$$

$$L\left\{\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \left(\frac{u}{u^2+36} - \frac{u}{u^2+16}\right) du = \left[\frac{1}{2} \ln(u^2+36) - \frac{1}{2} \ln(u^2+16)\right] \Bigg|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2+36}{u^2+16}\right) \Bigg|_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+36}{s^2+16}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+16}{s^2+36}\right)$$

$$L\left\{\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\right\} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+16}{s^2+36}\right), \quad \text{aplicando la definición de transformada}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+16}{s^2+36}\right), \quad \text{tomando límite cuando } s \rightarrow 0, \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \ln\left(\frac{s^2+16}{s^2+36}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{0+16}{0+36}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \ln \frac{2}{3}$$

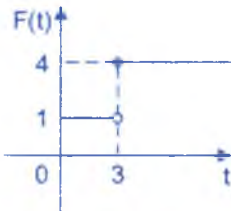
$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

## 10.15. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Determinar cual de las siguientes funciones son continuas por parte.

a)  $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 3 \\ 4, & t \geq 3 \end{cases}$

### Solución

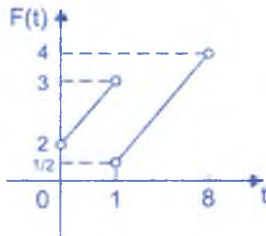


como  $\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 2$

$\lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = 4$

La función es continua por tramos.

b)  $f(t) = \begin{cases} t+2, & 0 < t < 1 \\ \frac{t}{2}, & 1 < t < 8 \end{cases}$



**Solución**

como  $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 3$

$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \frac{1}{2}$

la función es continua por tramos.

c)  $f(t) = e^{t^2}$

**Solución**

$\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = e^{t^2}$  es continua, en particular  $f(t) = e^{t^2}$  es continua en  $[0, \infty)$ , como toda función continua en un intervalo, dicha función es continua por tramos.

2

Determinar cual de las siguientes funciones son de orden exponencial.

a)  $f(t) = \text{sen } 5t$

**Solución**

Como  $-1 \leq \text{sen } 5t \leq 1$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  entonces  $|\text{sen } 5t| \leq 1 \Rightarrow |f(t)| \leq 1 \cdot e^{0t}$  (donde  $c=1$ ,  $\alpha=0$ ) por lo tanto la función  $f(t) = \text{sen } 5t$  es de orden exponencial.

b)  $f(t) = t^5$

**Solución**

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^5}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5!}{\alpha^5 e^{\alpha t}} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

Luego la función  $f(t) = t^5$  es de orden exponencial.

c)  $f(t) = \operatorname{senh} t$

**Solución**

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{senh} t}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t - e^{-t}}{2e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2t} - 1}{2e^{(\alpha+1)t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2e^{2t}}{2(\alpha+1)e^{(\alpha+1)t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1)t}(\alpha+1)} = 0 \quad \text{para } \alpha \geq 1 \end{aligned}$$

por lo tanto  $f(t) = \operatorname{senh} t$  es de orden exponencial

③ Hallar  $L\{\cos^2 \alpha t\}$

**Solución**

Como  $\cos^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha t)$  entonces

$$L\{\cos^2 \alpha t\} = \frac{1}{2} L\{1 + \cos 2\alpha t\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4\alpha^2} \right) = \frac{s^2 + 2\alpha^2}{s(s^2 + 4\alpha^2)}$$

④ Demostrar que  $L\{t \cosh at\} = \frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$

**Solución**

Aplicando la transformada de la multiplicación por  $t$ .

$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \Rightarrow L\{t \cosh at\} = -\frac{d}{ds} L\{\cosh at\} = -\frac{s^2 - a^2 - s(2s)}{(s^2 - a^2)^2} = \frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$$

⑤ Hallar  $L\left\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\right\}$

**Solución**

$$L\{\operatorname{senh} t\} = L\left\{\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} L\{e^t - e^{-t}\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) = f(s)$$

Ahora aplicamos la transformada de la división.



$$L\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu-1} - \frac{1}{\mu+1} \right) d\mu = \frac{1}{2} [\ln(\mu-1) - \ln(\mu+1)] \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right) \Big|_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$$

6 Calcular  $L\{t^n \cos at\}$

**Solución**

Se conoce que,  $\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$ , entonces  $\cos at = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (at)^{2k}}{(2k)!}$

$$t^n \cos at = t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (at)^{2k}}{(2k)!} = t^n \cos at = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k} t^{2k+n}}{(2k)!}$$

tomando Transformada de Laplace se tiene:

$$L\{t^n \cos at\} = L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k} t^{2k+n}}{(2k)!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} L\{t^{2k+n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k+n)!}{s^{2k+n+1}}$$

$$\therefore L\{t^n \cos at\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k+n)!}{s^{2k+n+1}}$$

7 Demostrar que  $L\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$

**Solución**

$$L\{\sin^2 t\} = \frac{1}{2} L\{1 - \cos 2t\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \right) = f(s), \text{ por transformada de la división.}$$

$$L\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4} \right) du = \frac{1}{2} \left[ \ln u - \frac{1}{2} \ln(u^2+4) \right] \Big|_s^{+\infty} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$$

$$\therefore L\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$$

8 Calcular  $L\left\{\frac{e^t - \cos t}{t}\right\}$

**Solución**

$$L\{e^t - \cos t\} = L\{e^t\} - L\{\cos t\} = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} = f(s); \text{ por propiedad de la división}$$

$$L\left\{\frac{e^t - \cos t}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{u}{u^2+1}\right) du = \left[\ln(u-1) - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\right] \Big|_s^{+\infty}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{u-1}{\sqrt{u^2+1}}\right) - \ln\left(\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = 0 - \ln\left(\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}\right)$$

$$\therefore L\left\{\frac{e^t - \cos t}{t}\right\} = \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}\right)$$

9 Demostrar que:  $L\left\{e^{-ax} \int_0^x e^{ax} F(x) dx\right\} = \frac{f(s)}{s+a}$

**Solución**

Sea  $L\{F(x)\} = f(s)$  aplicando la propiedad de traslación se tiene:

$L\{e^{ax} F(x)\} = f(s-a)$ , aplicando la transformada de la integral se tiene:

$$L\left\{\int_0^x e^{ax} F(x) dx\right\} = \frac{f(s-a)}{s}, \text{ ahora aplicamos la propiedad de traslación, se tiene:}$$

$$L\left\{e^{-ax} \int_0^x e^{ax} F(x) dx\right\} = \frac{f(s)}{s+a}$$

10 Demostrar que:  $L\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$

**Solución**

$$L\{\cos at - \cos bt\} = \frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2} = f(s)$$

Ahora aplicamos la transformada de la división

$$L\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \int_a^{\infty} \left(\frac{u}{u^2+a^2} - \frac{u}{u^2+b^2}\right) du = \left[\frac{1}{2} \ln(u^2+a^2) - \frac{1}{2} \ln(u^2+b^2)\right]_a^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2+a^2}{u^2+b^2}\right) \Big|_a^{\infty} = 0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$$

$$\therefore L\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$$

11 Hallar  $L\left\{\int_0^t e^{2t} \sin t \, dt\right\}$

**Solución**

$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ , aplicando la transformada de la multiplicación por t.

$$L\{t \sin t\} = -\frac{d}{ds} L\{\sin t\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

ahora aplicamos la propiedad de traslación.

$$L\{e^{2t} t \sin t\} = \frac{2(s-2)}{[(s-2)^2+1]^2}$$
, aplicando la transformada de la integral

$$L\left\{\int_0^t e^{2t} \sin t \, dt\right\} = \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]^2}$$

12 Calcular  $L\{t e^{2t} f'(t)\}$

**Solución**

Sea  $L\{f(t)\} = \psi(s) \Rightarrow L\{f'(t)\} = s\psi(s) - f(0)$

aplicando la propiedad de traslación  $L\{e^{2t} f'(t)\} = (s-2)\psi(s-2) - f(0)$

ahora aplicamos la transformada de la multiplicación por t.

$$L\{t e^{2t} f'(t)\} = -\frac{d}{ds} L\{e^{2t} f'(t)\} = -\frac{d}{ds} ((s-2)\psi(s-2) - f(0)) = -\psi(s-2) - (s-2)\psi'(s-2)$$

13) Calcular  $L\left\{\frac{e^t(\cos t - 1)}{t}\right\}$

**Solución**

$$L\{e^t(\cos t - 1)\} = L\{e^t \cos t\} - L\{e^t\} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} - \frac{1}{s-1} = f(s)$$

aplicando la transformada de la división

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{e^t(\cos t - 1)}{t}\right\} &= \int_0^{\infty} \left(\frac{u-1}{(u-1)^2 + 1} - \frac{1}{u-1}\right) du = \left(\frac{1}{2} \ln[(u-1)^2 + 1] - \ln(u-1)\right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \ln \frac{\sqrt{(u-1)^2 + 1}}{u-1} \Big|_0^{\infty} = 0 - \ln \frac{\sqrt{(s-1)^2 + 1}}{s-1} = \ln\left(\frac{s-1}{\sqrt{(s-1)^2 + 1}}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore L\left\{\frac{e^t(\cos t - 1)}{t}\right\} = \ln\left(\frac{s-1}{\sqrt{(s-1)^2 + 1}}\right)$$

14) Hallar la Transformada de Laplace de la función  $F(t) = t^2 \int_0^t x \operatorname{sen} x \, dx + \int_0^t x e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$

**Solución**

$$L\{F(t)\} = L\left\{t^2 \int_0^t x \operatorname{sen} x \, dx + \int_0^t x e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx\right\} = L\{t^2 \int_0^t x \operatorname{sen} x \, dx\} + L\left\{\int_0^t x e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx\right\} \dots (1)$$

Calculando  $L\{t^2 \int_0^t x \operatorname{sen} x \, dx\}$  se tiene:

$$\int_0^t x \operatorname{sen} x \, dx = (-x \cos x + \operatorname{sen} x) \Big|_0^t = \operatorname{sen} t - t \cos t - \operatorname{sen} 0 + \cos 0$$

$$L\left\{t^2 \int_0^t x \operatorname{sen} x \, dx\right\} = L\{t^2(\operatorname{sen} t - t \cos t - \operatorname{sen} 0 + \cos 0)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds} L\{\operatorname{sen} t - t \cos t - \operatorname{sen} 0 + \cos 0\}$$

$$= \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1 - s^2}{(1 + s^2)^2} + \frac{\cos 0 - \operatorname{sen} 0}{s} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} + \frac{2s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^3} - \frac{\cos 0 - \operatorname{sen} 0}{s^2} \right)$$

$$= \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3} + \frac{36s^2 - 6s^4 - 6}{(s^2 + 1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)}{s^3}$$

$$L\{t^2 \int x \operatorname{sen} x \, dx\} = \frac{8(5s^2 - 1)}{(s^2 + 1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)}{s^3} \quad \dots (2)$$

ahora calculamos la transformada de  $L\{ \int x e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx \}$

$$L\{\operatorname{sen} x\} = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow L\{x \operatorname{sen} x\} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}, \text{ por Traslación se tiene:}$$

$$L\{e^{2x} x \operatorname{sen} x\} = \frac{2(s-2)}{[(s-2)^2 + 1]^2}, \text{ aplicando la transformada de la integral}$$

$$L\left\{ \int_0^x x e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx \right\} = \frac{1}{s} L\{x e^{2x} \operatorname{sen} x\} = \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2 + 1]^2} \quad \dots (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\} = L\{t^2 \int x \operatorname{sen} x \, dx\} + L\left\{ \int x e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx \right\} = \frac{8(5s^2 - 1)}{(s^2 + 1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)}{s^3} + \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2 + 1]^2}$$

15) Calcular  $L\left\{ \frac{1}{(1 - e^{-t})^2} \right\}$

**Solución**

Se conoce que  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ , si  $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1} + \dots, \text{ Sí } |x| < 1$$

Luego  $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1} + \dots$  para  $x = -e^{-t}$ , se tiene

$$\frac{1}{(1 + e^{-t})^2} = 1 - 2e^{-t} + 3e^{-2t} - 4e^{-3t} + \dots, \text{ tomando la transformada}$$



$$L\left\{\frac{1}{(1+e^{-t})^2}\right\} = L\{1 - 2e^{-t} + 3e^{-2t} - 4e^{-3t} + \dots\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s+3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{s+n}$$

$$\therefore L\left\{\frac{1}{(1+e^{-t})^2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{s+n}$$

16

Hallar  $L\left\{\int_0^u \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\right\}$ **Solución**Expresando  $\operatorname{sen} u$  en serie de potencia se tiene:

$$\operatorname{sen} u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \dots \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \frac{u^6}{7!} + \dots$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sen} u}{u} du = \int_0^u \left(1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \frac{u^6}{7!} + \dots\right) du = \left(u - \frac{u^3}{3 \cdot 3!} + \frac{u^5}{5 \cdot 5!} - \frac{u^7}{7 \cdot 7!} + \dots\right) \Big|_0^u$$

$$= u - \frac{u^3}{3 \cdot 3!} + \frac{u^5}{5 \cdot 5!} - \frac{u^7}{7 \cdot 7!} + \dots, \text{ tomando la transformada}$$

$$L\left\{\int_0^u \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\right\} = L\left\{u - \frac{u^3}{3 \cdot 3!} + \frac{u^5}{5 \cdot 5!} - \frac{u^7}{7 \cdot 7!} + \dots\right\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3s^4} + \frac{1}{5s^6} - \frac{1}{7s^8} + \dots$$

$$= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^7}{7} + \dots\right) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\therefore L\left\{\int_0^u \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$$

17

Probar que:  $L\left\{\int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{2s}{s^2+3}\right)$ **Solución**

Primeramente aplicamos propiedad de la integral

$$L\left\{\int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\right\} = L\left\{\int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx - \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\right\}, \text{ por la propiedad de linealidad}$$

$$L\left\{\int_0^{at} \frac{\sin x}{x} dx\right\} = L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx\right\} - L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx\right\} \dots (1)$$

mediante el ejercicio (16) se tiene:  $L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right) \dots (2)$

ahora aplicamos la propiedad de cambio de escala.

Si  $L\{F(t)\} = f(s)$  entonces  $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$ , es decir:

Si  $L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{1}{s} \Rightarrow L\left\{\int_0^{3t} \frac{\sin x}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{s}\right) \dots (3)$

Luego reemplazamos (2) y (3) en (1).

$$L\left\{\int_0^{3t} \frac{\sin x}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{3}{s} - \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{s} - \operatorname{arctg} \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{3}{s} - \frac{1}{s}}{1 + \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{s}}\right) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{2s}{s^2 + 3}\right)$$

$$\therefore L\left\{\int_0^{3t} \frac{\sin x}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{2s}{s^2 + 3}\right)$$

18

Calcular  $L\left\{\int_0^t \frac{x^2 \cos x + e^{-x} \sin x}{x} dx\right\}$

**Solución**

$$L\left\{\int_0^t \frac{x^2 \cos x + e^{-x} \sin x}{x} dx\right\} = L\left\{\int_0^t \left(x \cos x + \frac{e^{-x} \sin x}{x}\right) dx\right\}$$

aplicando la propiedad de la integral se tiene:

$$L\left\{\int_0^t \frac{x^2 \cos x + e^{-x} \sin x}{x} dx\right\} = L\left\{\int_0^t x \cos x dx\right\} + L\left\{\int_0^t \frac{e^{-x} \sin x}{x} dx\right\}$$

aplicando la transformada de la integral

$$L\left\{\int_0^t \frac{x^2 \cos x + e^{-x} \sin x}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} L\{x \cos x\} + \frac{1}{s} L\left\{\frac{e^{-x} \sin x}{x}\right\} \dots (1)$$

aplicando la transformada de la multiplicación y la división.

$$L\{x \cos x\} = -\frac{d}{ds} L\{\cos x\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2+1} \right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} L\left\{e^{-x} \frac{\sin x}{x}\right\} &= \int_0^{\infty} L\{e^{-x} \sin x\} = \int_0^{\infty} \frac{du}{(u+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(u+1) \Big|_0^{\infty} \\ &= \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(s+1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(s+1) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

ahora reemplazando (2) y (3) en (1):

$$L\left\{\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x + e^{-x} \sin x}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} \left( \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \right) + \frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s} \operatorname{arctg}(s+1)$$

- 19) Dado una función  $G(t)$  donde  $L\{G(t)\} = g(s)$ , cuando  $s > \alpha$ . Entonces demostrar que para una constante  $T > 0$ :  $L\{G(t+T)\} = e^{sT} [g(s) - \int_0^T e^{-st} G(t) dt]$ ,  $s > \alpha$ ,  $T > 0$ .

### Solución

$$L\{G(t+T)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t+T) dt \quad \text{por definición de transformada.}$$

Sea  $u = t + T$ , para  $t \rightarrow 0$ , entonces  $\mu \rightarrow T$  y para  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $\mu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} L\{G(t+T)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} G(t+T) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(\mu-T)} G(\mu) d\mu \\ &= e^{sT} \int_T^{\infty} e^{-s\mu} G(\mu) d\mu = e^{sT} \left[ \int_0^{\infty} e^{-s\mu} G(\mu) d\mu - \int_0^T e^{-s\mu} G(\mu) d\mu \right] \\ &= e^{sT} \left[ \int_0^{\infty} e^{-st} G(t) dt - \int_0^T e^{-st} G(t) dt \right] = e^{sT} \left[ g(s) - \int_0^T e^{-st} G(t) dt \right] \end{aligned}$$

$$\therefore L\{G(t+T)\} = e^{sT} \left[ g(s) - \int_0^T e^{-st} G(t) dt \right]$$

20) Demostrar que  $L\left\{\int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$

**Demostración**

Primeramente aplicaremos la transformada de la división.

Si  $L\{1 - e^{-u}\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = f(s)$ , entonces por la propiedad de la división

$$L\left\{\frac{1-e^{-u}}{u}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln\left(\frac{u}{u+1}\right) \Big|_s^\infty = 0 - \ln\frac{s}{s+1} = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

ahora aplicamos la transformada de la integral.

Si  $L\left\{\frac{1-e^{-u}}{u}\right\} = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right) \Rightarrow L\left\{\int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u} du\right\} = \frac{1}{s} \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$

21) Calcular  $L\left\{t e^t \int_0^t \frac{d}{dt}(e^{2t} \sin t) dt\right\}$

**Solución**

Sea  $F(t) = \frac{d}{dt}(e^{2t} \sin t) \Rightarrow L\{F(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt}(e^{2t} \sin t)\right\} = s L\{e^{2t} \sin t\} - F(0)$

$$L\{F(t)\} = \frac{s}{(s-2)^2 + 1} - F(0) \Rightarrow L\{t F(t)\} = -\frac{d}{ds} L\{F(t)\}$$

$$L\{t F(t)\} = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{s}{(s-2)^2 + 1} - F(0) \right] = -\frac{5-s^2}{((s-2)^2 + 1)^2}$$

$$L\{t F(t)\} = \frac{s^2 - 5}{[(s-2)^2 + 1]^2} \Rightarrow L\left\{\int_0^t t F(t) dt\right\} = \frac{1}{s} \left( \frac{s^2 - 5}{[(s-2)^2 + 1]^2} \right)$$

$$L\{t F(t)\} = \frac{s^2 - 5}{[(s-2)^2 + 1]^2} \Rightarrow L\left\{\int_0^t t F(t) dt\right\} = \frac{1}{s} L\{t F(t)\} - \frac{1}{s} \int_0^t t F(t) dt$$

$$L\left\{\int_0^t t F(t) dt\right\} = \frac{1}{s} \left( \frac{s^2 - 5}{[(s-2)^2 + 1]^2} \right) = \frac{1}{s} \int_0^t \frac{d}{dt}(e^{2t} \sin t) dt$$

$$= \frac{1}{s} \left( \frac{s^2 - 5}{[(s-2)^2 + 1]^2} \right) - \frac{1}{s} \int_a^\infty (2t e^{2t} \sin t + t e^{2t} \cos t) dt \dots (1)$$

$$\int_0^a 2t e^{2t} \sin t dt = e^{2a} \left[ \frac{4a}{5} \sin a - \frac{6 \sin a}{25} - \frac{2a}{5} \cos a + \frac{8 \cos a}{25} \right] - \frac{8}{25} \dots (2)$$

$$\int_0^a t e^{2t} \cos t dt = e^{2a} \left[ \frac{2a \cos a}{5} - \frac{3 \sin a}{25} + \frac{a \sin a}{5} - \frac{4 \sin a}{25} \right] + \frac{3}{25} \dots (3)$$

sustituyendo (2), (3) en (1).

$$L \left\{ \int_a^\infty t F(t) dt \right\} = \frac{1}{s} \left( \frac{s^2 - 5}{[(s-2)^2 + 1]^2} \right) - \frac{e^{2a}}{s} \left( a \sin a - \frac{2}{5} \sin a + \frac{\cos a}{5} \right) + \frac{1}{5s}$$

$$L \left\{ e^t \int_a^\infty t F(t) dt \right\} = \frac{(s-1)^2 - 5}{(s-1)[(s-3)^2 + 1]^2} - \frac{e^{2a}}{s-1} \left( a \sin a - \frac{2}{5} \sin a + \frac{\cos a}{5} \right) + \frac{1}{5(s-1)}$$

$$\begin{aligned} L \left\{ t e^t \int_a^\infty F(t) dt \right\} &= -\frac{d}{ds} \left[ \frac{(s-1)^2 - 5}{(s-1)[(s-3)^2 + 1]^2} \right] - \frac{e^{2a}}{s-1} \left( a \sin a - \frac{2}{5} \sin a + \frac{\cos a}{5} + \frac{1}{5(s-1)} \right) \\ &= \frac{s^4 - 16s^3 + 120s^2 - 400s + 460}{s[(s-3)^2 + 1]^3} + \frac{e^{2a}}{5(s-1)^2} (2a - 5a \sin a - \cos a) \end{aligned}$$

$$\therefore L \left\{ t e^t \int_a^\infty t F(t) dt \right\} = \frac{s^4 - 16s^3 + 120s^2 - 400s + 460}{s[(s-3)^2 + 1]^3} + \frac{e^{2a} (2a - 5a \sin a - \cos a)}{5(s-1)^2}$$

22

Hallar  $L \left\{ \int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du \right\}$

### Solución

Sea  $u = tv \Rightarrow du = t dv$ , además se tiene cuando  $u = t$ ;  $v = 1$  y cuando  $u \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \infty$  ahora reemplazando se tiene:

$$L \left\{ \int_t^\infty \frac{\sin u}{u} du \right\} = L \left\{ \int_1^\infty \frac{\sin tv}{tv} \cdot t dv \right\} = L \left\{ \int_1^\infty \frac{\sin tv}{v} dv \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[ \int_1^\infty \frac{\sin tv}{v} dv \right] dt$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen} tv}{v} dt dv = \int_1^{\infty} \frac{1}{v} \int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} tv dt dv = \int_1^{\infty} \frac{1}{v} L\{\operatorname{sen} tv\} dv \\
 &= \int_1^{\infty} \frac{1}{v} \cdot \frac{v}{s^2 + v^2} dv = \int_1^{\infty} \frac{dv}{s^2 + v^2} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{s}\right) \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{s} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{s} \right]
 \end{aligned}$$

23 Hallar  $L\left\{\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du\right\}$

**Solución**

Sea  $u = tv \Rightarrow du = t dv$ , además se tiene: cuando  $u = t$ ,  $v = 1$  y cuando  $u \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \infty$ , ahora reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned}
 L\left\{\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du\right\} &= L\left\{\int_1^{\infty} \frac{\cos tv}{tv} t dv\right\} = L\left\{\int_1^{\infty} \frac{\cos tv}{v} dv\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_1^{\infty} \frac{\cos tv}{v} dv \right] dt \\
 &= \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\cos tv}{v} dt dv = \int_1^{\infty} \frac{1}{v} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos tv dt dv = \int_1^{\infty} \frac{1}{v} L\{\cos tv\} dv \\
 &= \int_1^{\infty} \frac{1}{v} \cdot \frac{s}{s^2 + v^2} dv = s \int_1^{\infty} \frac{dv}{v(v^2 + s^2)} = s \int_1^{\infty} \frac{1}{s^2} \left( \frac{1}{v} - \frac{v}{v^2 + s^2} \right) dv \\
 &= \frac{1}{s} \left[ \ln v - \frac{1}{2} \ln(v^2 + s^2) \right] \Big|_1^{\infty} = 0 - \frac{1}{s} \ln \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} = \frac{1}{s} \ln \sqrt{s^2 + 1}
 \end{aligned}$$

24 Hallar  $L\left\{\int_t^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx\right\}$

**Solución**

Sea  $x = tv \Rightarrow dx = t dv$ , además se tiene: cuando  $x = t$ ,  $v = 1$  y cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \infty$ , ahora reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned}
 L\left\{\int_t^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx\right\} &= L\left\{\int_1^{\infty} \frac{e^{-tv}}{tv} t dv\right\} = L\left\{\int_1^{\infty} \frac{e^{-tv}}{v} dv\right\} \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_1^{\infty} \frac{e^{-tv}}{v} dv \right] dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{v} \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-tv} dt dv = \int_1^{\infty} \frac{1}{v} L\{e^{-tv}\} dv = \int_1^{\infty} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{s+v} dv
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s} \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{s+v} \right) dv = \frac{1}{s} \ln \frac{v}{v+s} \Big|_1^{\infty} = 0 - \frac{1}{s} \ln \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} \ln(s+1)$$

25) Demostrar que  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt = \ln 2$

**Solución**

Calculando  $L\left\{\frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\right\}$ , se tiene:  $L\{e^{-3t} - e^{-6t}\} = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+6} = f(s)$

$$L\left\{\frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \left( \frac{1}{u+3} - \frac{1}{u+6} \right) du = [\ln(u+3) - \ln(u+6)] \Big|_s^{\infty} = \ln\left(\frac{u+3}{u+6}\right) \Big|_s^{\infty} = 0 - \ln\left(\frac{s+3}{s+6}\right)$$

$L\left\{\frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\right\} = \ln\left(\frac{s+6}{s+3}\right)$ , por definición se tiene de la transformada:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt = \ln\left(\frac{s+6}{s+3}\right), \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 0, \text{ se tiene}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \ln\left(\frac{s+6}{s+3}\right) = \ln\left(\frac{0+6}{0+3}\right) = \ln 2 \quad \therefore \int_0^{\infty} \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt = \ln 2$$

26) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{4}$

**Solución**

Calculando la Transformada de Laplace:  $L\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\}$ .

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow L\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg} u \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$$

$L\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st} \operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$ , tomando límite cuando  $s \rightarrow 1$ , se tiene:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{4}$$

- (27) Calcular  $\int_0^{\infty} e^{-at} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt$ , siendo a y b constante positivas.

**Solución**

Calculando la Transformada de Laplace de  $L\left\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\right\}$

$$L\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2 + b^2} \Rightarrow L\left\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{b du}{u^2 + b^2} = \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{b}$$

$$L\left\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{b}\right), \text{ aplicando la definición de transformada}$$

$$\int_0^a e^{-st} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{b}\right), \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow a \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{s \rightarrow a} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt = \lim_{s \rightarrow a} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{b}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)$$

- (28) Evaluar la integral  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \operatorname{sen}^2 t}{t} dt$

**Solución**

Calculando la Transformada de Laplace de  $L\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\right\}$

$$L\{\operatorname{sen}^2 t\} = \frac{1}{2} L\{1 - \cos 2t\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right) = f(s)$$

$$L\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{2} \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2 + 4}\right) du = \frac{1}{2} \left[\ln u - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 4)\right] \Big|_s^{\infty} = \frac{1}{4} \ln \frac{u^2}{u^2 + 4} \Big|_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{4} \ln \left|\frac{s^2}{s^2 + 4}\right|$$

$$L\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\right\} = \frac{1}{4} \ln \left|\frac{s^2 + 4}{s^2}\right|, \text{ aplicando la definición de la Transformada}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} dt = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{s^2 + 4}{s^2}\right), \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{1}{4} \lim_{s \rightarrow 1} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right) = \frac{1}{4} \ln 5 \quad \therefore \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin^2 t}{t} dt = \frac{1}{4} \ln 5$$

29

Demostrar que:  $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

**Solución**

Calculando la Transformada de Laplace  $L\left\{\frac{1-\cos t}{t^2}\right\}$

$$L\{1-\cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = f(s)$$

$$L\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right) du = \left[\ln u - \frac{1}{2} \ln(u^2+1)\right] \Big|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2}{u^2+1}\right) \Big|_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)$$

$$L\left\{\frac{1-\cos t}{t^2}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2+1}{u^2}\right) du, \text{ integrando por partes}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ u \ln\left(\frac{u^2+1}{u^2}\right) + 2 \arctg u \right] \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) - 2 \arctg s$$

aplicando la definición de Transformada de Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) - 2 \arctg s, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) - 2 \arctg s \right] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

30

Calcular la integral  $\int_0^{\infty} \frac{\cos u - e^{-u} + \sin u}{u} du$

**Solución**

Calculando la transformada  $L\left\{\frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u}\right\}$

$$L\{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u\} = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s^2 + 1} = f(s)$$

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u}\right\} &= \int_s^\infty \left(\frac{u}{u^2 + 1} - \frac{1}{u - 1} + \frac{1}{u^2 + 1}\right) du = \left[\frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) - \ln(u - 1) + \operatorname{arctg} u\right] / s \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2 + 1}{(u - 1)^2}\right) + \operatorname{arctg} u\right] / s = \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2 + 1}{(s - 1)^2}\right) + \operatorname{arctg} s \end{aligned}$$

$$L\left\{\frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u}\right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2 + 1}{s^2 - 2s + 1}\right) + \operatorname{arctg} s$$

aplicando la definición de Transformada de Laplace

$$= \int_0^\infty e^{-su} \frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u} du = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2 + 1}{s^2 - 2s + 1}\right) + \operatorname{arctg} s$$

tomando límite cuando  $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-su} \frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u} du = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2 + 1}{s^2 - 2s + 1}\right) + \operatorname{arctg} s\right]$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u} du = \frac{\pi}{2} - 0 + 0 = \frac{\pi}{2}$$

31

Demostrar que:  $\int_0^\infty e^{-st} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2 + 1}\right) - 2 \operatorname{arctg} s$

**Solución**

$L\{1 - \cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} = f(s)$ , por la transformada de la división:

$$L\left\{\frac{1 - \cos t}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2 + 1}\right) du = \left[\ln(u) - \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1)\right] / s = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2}{u^2 + 1}\right) / s = 0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2 + 1}\right)$$



$$L\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = g(s)$$

$$L\left\{\frac{1-\cos t}{t^2}\right\} = \frac{1}{2} \int_s^\infty \ln\left(\frac{u^2+1}{u^2}\right) du, \text{ integrando por partes}$$

$$L\left\{\frac{1-\cos t}{t^2}\right\} = \frac{1}{2} \left[ u \ln\left(\frac{u^2+1}{u^2}\right) + 2 \operatorname{arctg} u \right] \Big|_s^\infty$$

$$L\left\{\frac{1-\cos t}{t^2}\right\} = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) - 2 \operatorname{arctg} s, \text{ por definición de la Transformada de Laplace}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) - 2 \operatorname{arctg} s$$

32) Evaluar la integral  $\int_0^\infty t e^{-2t} \operatorname{sen} t dt$

**Solución**

$$L\{t \operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds} L\{\operatorname{sen} t\} = -\frac{1}{ds} \left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}, \text{ por la definición de transformada}$$

$$\int_0^\infty t e^{-st} \operatorname{sen} t dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2}, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 2, \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \int_0^\infty t e^{-st} \operatorname{sen} t dt = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25}$$

$$\therefore \int_0^\infty t e^{-2t} \operatorname{sen} t dt = \frac{4}{25}$$

33) Evaluar la integral  $\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - \cos t}{t} dt$

**Solución**

$$L\{e^{-2t} - \cos t\} = \frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} = f(s) \Rightarrow L\left\{\frac{e^{-2t} - \cos t}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u+2} - \frac{u}{u^2+1}\right) du$$

$$= [\ln(u+2) - \frac{1}{2} \ln(u^2+1)] \Big|_s^\infty = \frac{1}{2} \ln \frac{(u+2)^2}{u^2+1} \Big|_s^\infty = 0 - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(s+2)^2}{s^2+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{s^2+1}{s^2+4s+4} \right), \text{ aplicando la definición de transformada se tiene:}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{(e^{-2t} - \cos t) dt}{t} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{s^2+1}{s^2+4s+4} \right), \text{ tomando limite}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(e^{-2t} - \cos t) dt}{t} = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \ln \left( \frac{s^2+1}{s^2+4s+4} \right) = -\ln 2$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{e^{-2t} - \cos t}{t} dt = -\ln 2$$

34) Evaluar la integral  $\int_0^\infty e^{-2t} t \sinh t dt$

**Solución**

$$L\{t \sinh t\} = -\frac{d}{ds} L\{\sinh t\} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2-1} \right) = \frac{2s}{(s^2-1)^2}; \text{ por la definición de transformada}$$

$$\int_0^\infty te^{-st} \sinh t dt = \frac{2s}{(s^2-1)^2}, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 2$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \int_0^\infty te^{-2t} \sinh t dt = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{2s}{(s^2-1)^2} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \int_0^\infty te^{-2t} \sinh t dt = \frac{4}{9}$$

**10.16. EJERCICIOS PROPUESTOS.-**

I.

1) Demostrase que  $f(t) = t^x$ , es de orden exponencial cuando  $t \rightarrow \infty$ ;  $\forall \in R$ .

2) ¿La función  $f(t) = t^t$  es de orden exponencial en  $[0, +\infty >$ ?

Rpta. No es de orden exponencial

3) ¿Es  $f(t) = t \operatorname{sen} \frac{1}{t}$  continua por tramos en  $[0, +\infty >$ ?

Rpta. Si es continua por tramos en  $[0, +\infty >$

4) ¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas por tramos en  $[0, +\infty >$ ? Razónese la respuesta.

a)  $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$

b)  $f(t) = \frac{t-2}{t^2-t-2}$

c)  $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$

d)  $f(t) = t^2$

Rpta. a) no es continua por tramos en  $[0, +\infty >$ .

b) es continua por tramos en  $[0, +\infty >$ .

c) no es continua por tramos en  $[0, +\infty >$ .

d) es continua por tramos en  $[0, +\infty >$ .

5) Demostrar que para cualquier número real  $\alpha$ ,  $F(t) = e^{\alpha t} f(t)$  es continua por tramos en  $[0, +\infty >$ , siempre que  $f$  lo sea.

6) Demuéstrase que las funciones dadas son continuas por tramos y de orden exponencial en  $[0, +\infty >$

a)  $f(t) = t^n \cos kt$

b)  $f(t) = \frac{1 - \cos kt}{t}$

c)  $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$

d)  $f(t) = \frac{1 - \operatorname{sen} kt}{t}$

e)  $f(t) = \frac{\cos t - \cosh t}{t}$

f)  $f(t) = t^n \cosh t$

7) Demostrar que el producto de dos funciones continuas por tramos en  $[0, +\infty >$  es una función continua por tramos.

8) Hallar la transformada de Laplace  $L\{F(t)\}$  si:

a)  $f(t) = t^2 \cos t$

b)  $f(t) = t^2 e^t \cos t$

c)  $f(t) = (2t-3)e^{\frac{t+2}{3}}$

Rpta. a)  $f(s) = \frac{2s^3 - 6s}{(s^2 + 1)^3}$       b)  $f(s) = \frac{2(s-1)^3 - 6(s-1)}{[(s-1)^2 + 1]^3}$       c)  $f(s) = \frac{-3e^{\frac{2}{3s-1}}}{3s-1}$

9 Demostrar que  $L\{t^2 \operatorname{sen} t\} = \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3}$

10 Demostrar que  $L\{\cos^3 t\} = \frac{s(s^2 + 7)}{(s^2 + 9)(s^2 + 1)}$

11 Halla  $L\{t^3 \cos t\}$       Rpta.  $f(s) = \frac{6s^4 - 36s^2 + 6}{(s^2 + 1)^4}$

12 Halla  $L\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t}{t}\right\}$       Rpta.  $f(s) = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{s^2 + 9}{s^2 + 1}\right)$

13 Halla  $L\{\operatorname{sen}(a + t)\}$       Rpta.  $f(s) = \frac{\cos a + s \cdot \operatorname{sen} a}{s^2 + 1}$

14 Calcula  $L\{\cos^2 bt\}$       Rpta.  $f(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4b^2} \right)$

15 Demostrar que:

a)  $L\{\cosh^2(at)\} = \frac{s^2 - 2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$

b)  $L\{\sinh^2(at)\} = \frac{2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$

c)  $L\{\cos at \cdot \operatorname{sen} at\} = \frac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

d)  $L\{\cos at \cdot \cos at\} = \frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$

e)  $L\{\sinh(at) \cdot \operatorname{sen}(at)\} = \frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$

f)  $L\{\sinh(at) \cdot \cos(at)\} = \frac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

16 Hallar la transformada de Laplace de F(t) si

a)  $F(t) = \begin{cases} t, & t < 2 \\ 2, & t > 2 \end{cases}$

b)  $F(t) = te^t \frac{d}{dt}(\operatorname{sen} 2t)$

$$\text{c) } F(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & t < 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$$

$$\text{d) } F(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{\pi}{2} \\ \cos t, & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & t > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{e) } F(t) = \begin{cases} t, & t < 2 \\ 8-3t, & 2 \leq t \leq 3 \\ t-4, & 3 < t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$

$$\text{f) } F(t) = e^{-3t} \int_0^t t \cos 4t dt$$

$$\text{g) } F(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t e^{-t} \cos 3t dt$$

$$\text{h) } F(t) = te^t \int_0^t \frac{d}{dt} (e^{2t} \operatorname{sen} t) dt$$

17) Si  $f(s) = L\{f(t)\}$ , demostrar que para  $r > 0$ ;  $L\{r^t F(ar)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s - \ln r}{a}\right)$

18) Demostrar que:  $L\{t^2 \operatorname{sen} bt\} = \frac{6bs^2 - 2b^3}{(s^2 + b^2)^3}$

19) Demostrar que:  $L\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$

20) Calcular  $L\{F(t)\}$  si:

a)  $F(t) = e^{-3t} \int_0^t t \operatorname{sen} 2t dt$

Rpta.  $F(s) = \frac{4}{(s^2 + 6s + 13)^2}$

b)  $F(t) = e^{-3t} \frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$

Rpta.  $F(s) = \operatorname{arctg}\left(\frac{s+3}{2}\right)$

21) Calcular  $L\left\{\int_0^t \frac{e^{-3t} \operatorname{sen} 2t}{t} dt\right\}$

Rpta.  $F(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s+3}{2}\right)$

22) Hallar  $L\left\{\frac{\operatorname{sen}^3 t}{t}\right\}$

Rpta.  $f(s) = \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{s}\right)$

23) Halla  $L\left\{\frac{(e^{at} - e^{bt})^2}{t}\right\}$

Rpta.  $f(s) = \ln\left(\frac{(s-a-b)^2}{(s-2a)(s-2b)}\right)$



24) Halla  $L\left\{\frac{\text{sen } t + \text{sen}^3 t}{t} e^t\right\}$

Rpta.  $f(s) = \frac{7}{4} \arctg \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \arctg \left(\frac{3}{s-1}\right)$

25) Evaluar  $L\{\text{sen } kt \cdot \cos kt\}$

Rpta.  $f(s) = \frac{k}{s^2 + 4k^2}, s > 0$

26) Halla  $L\{F(t)\}$  si  $F(t) = e^{-3t} \int_0^t t \cos 4t dt$

Rpta.  $f(s) = \frac{16 - (s-3)^2}{(s-3)[(s-3)^2 + 16]^2}$

27) Hallar  $L\{F(t)\}$  si:

a)  $F(t) = t \int_0^t e^{-3t} \text{sen } 2t dt$

b)  $F(t) = t \int_0^t t e^{-3t} \text{sen } 2t dt$

c)  $F(t) = e^{-3t} \int_0^t \frac{\text{sen } 2t}{t} dt$

d)  $F(t) = \int_0^t \frac{e^t - \cos 2t}{t} dt$

28) Halla  $L\{F(t)\}$  si  $F(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & t < 4\pi \\ \text{sen } t + \cos t, & t > 4\pi \end{cases}$

29) Halla  $L\{F(t)\}$  si  $F(t) = \begin{cases} \cos t, & t < \frac{3\pi}{2} \\ \cos t + \text{sen } t, & t > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

30) Halla  $L\{F(t)\}$ , donde:  $F(t) = \begin{cases} t \cos \omega(t-\alpha), & t > \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases}$ ,  $\omega, \alpha$  constantes

31) Calcular  $L\left\{\int_0^{2t} \frac{\text{sen } u}{u} du\right\}$

32) Calcular  $L\left\{\frac{1}{(1+e^{-t})^2}\right\}$

33) Hallar  $L\{e^{3t} \cos 3t \cdot \cos 4t\}$

34) Calcular  $L\{e^{3t} t^3 \text{sen}^2 t\}$

35) Hallar  $L\{(t+a)^n\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$  es un entero positivo.

Rpta.  $f(s) = n! \left( \frac{a^n}{(n-1)!s} + \frac{a^{n-1}}{(n-2)!s^2} + \dots + \frac{a}{1!s^n} + \frac{1}{s^{n+1}} \right)$

- 36) Calcular  $L\left\{\int_0^{2t} e^{2\alpha} \int_0^{t\alpha} e^{\mu-\alpha} \frac{\sin 2\mu}{\mu} d\mu d\alpha\right\}$
- 37) Calcular  $L\{\|t\| - \sqrt{|t|}\}$
- 38) Hallar  $L\{\sin at \cdot \cos bt\}$
- 39) Hallar  $L\{e^{at} \sin^2 bt\}$
- 40) Hallar  $L\left\{\frac{d^2}{dt^2} \int_0^t e^{-t} \cos 3tdt\right\}$
- 41) Calcular  $L\{\sqrt{t} \cos t^{\frac{3}{2}}\}$  **Rpta.**  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(3n + \frac{3}{2})}{(2n)! s^{3n + \frac{3}{2}}}$
- 42) Demostrar que:  $L\{\sin t^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (4n-2)!}{(2n-1)! s^{4n}}$
- 43) Demostrar que:  $L\left\{\int_a^t \int_0^t f(t) dt dt\right\} = \frac{1}{s^2} L\{f(t)\} + \frac{1}{s^2} \int_0^a f(t) dt + \frac{1}{s} \int_0^a f(t) dt$
- 44) Demostrar que:  $L\{F'''(t)\} = s^3 L\{F(t)\} - s^2 F(0) - sF'(0) - F''(0)$
- 45) Demostrar que:  $L\{t^n \ln t\} = \frac{\Gamma'(n+1) - \ln s \cdot \Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ ,  $n > -1$
- 46) Calcular:  $L\left\{\int_0^{2t} \left(\int_0^x \left(\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz\right) dy\right) dx\right\}$
- 47) Demostrar que:  $L\left\{\frac{\sin b}{1+e^{-at}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b}{(s+an)^2 + b^2}$
- 48) Calcular  $L\left\{\frac{1}{a} \int_0^t e^{bt} F\left(\frac{t}{a}\right) dt\right\}$ ,  $a \neq 0$ . **Rpta.**  $f(s) = \frac{1}{s} \phi(sa-b)$
- 49) Demostrar que:  $L\left\{\int_0^t \int_0^x \int_0^y \frac{\sin z}{z} dz dy dx\right\} = \frac{1}{s^2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{s}\right)$
- 50) Demostrar que:  $L\left\{\int_0^{at} \frac{\sin y}{y} dy\right\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{(a-1)s}{s^2 + a^2}\right)$  donde "a" es una constante positiva.

- 51) Si  $L\{F''(t)\} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$ ,  $F(0) = 2$ ,  $F'(0) = -1$ . Hallar  $L\{F(t)\}$
- 52) Calcular  $L\left\{\int_0^{at} \int_0^{cx} \left(\frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\right) du dx\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{a}{s^2} \ln\left(\frac{2(s+a)}{s+2a}\right)$
- 53) Hallar  $L\left\{\frac{\operatorname{sen}^3 t}{t^2}\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = -\frac{3}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2u}{3u^2}\right) du$
- 54) Calcular  $\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$  **Rpta.**  $f(s) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$
- 55) Calcular la Transformada de Laplace de:  $L\left\{t e^t \int_0^z z \frac{d}{dz} (e^{2z} \operatorname{sen} z) dz\right\}$
- 56) Demostrar que:  $L\left\{\int_0^{at} \int_0^{cx} u e^{-u} F(u) du dx\right\} = -\frac{a}{s^2} H'\left(\frac{s}{a^2} + 1\right)$
- 57) Hallar  $L\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t e^t}\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(s+1)^2 + b^2}{(s+1)^2 + a^2}\right)$
- 58) Calcular  $L\left\{\int_0^{2t} t e^{u-2t} \left(\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right) du\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{\operatorname{arctg}(2/s)}{(s+2)^2} - \frac{s^2}{(s^2+4)(s+2)}$
- 59) Demostrar que:  $L\left\{\int_0^{2t} \int_0^y \left(\int_0^z \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz\right) dy dx\right\} = \frac{4}{s^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{s}\right)$
- 60) Calcular  $L\left\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{s}\right)$
- 61) Calcular  $L\left\{\int_0^t \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du du\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{1}{s^2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{s}\right)$
- 62) Demostrar que:  $L\left\{\int_0^{bt} \int_0^{cx} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du dy dx\right\} = \frac{ab^2}{s^3} \ln\left(\frac{s}{ab} + 1\right)$
- 63) Demostrar que:  $L\left\{\int_0^t \int_0^t \int_0^t \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right) dz dy dx\right\} = -\frac{1}{s^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$

- 64) Demostrar que:  $L\left\{\int_0^{-x}\int_0^{-y}\int_0^{-z}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)dz dy dx\right\} = \frac{1}{s^2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{s}\right)$
- 65) Calcular  $L\left\{\int_0^{2t}\frac{\cos 3z - \cos 2z}{z} dz\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{1}{2s} \ln\left(\frac{s^2+16}{s^2+36}\right)$
- 66) Calcular  $L\left\{\int_0^t e^z \frac{d}{dz}(e^{2z} \operatorname{sen} z) dz\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{1}{(s-1)} \left[ \frac{(s-1)^2 - 5}{((s-3)^2 + 1)^2} \right]$
- 67) Demostrar que:  $L\{\operatorname{sen}^6 t\} = \frac{6!}{s(s^2+1)(s^2+16)(s^2+36)}$
- 68) Demostrar que:  $L\{\operatorname{sen}^5 t\} = \frac{120}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+25)}$
- 69) Si  $L\{tF(t)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$ . Hallar  $L\{e^{-t}F(2t)\}$  **Rpta.**  $f(s) = \ln\left(\frac{(s^2+2s+8)^{1/4}}{(s+2)^{1/2}}\right)$
- 70) Si existe, calcular  $L\left\{-\int_t^\infty e^{-4t+u} \frac{\operatorname{sen}^3 u}{u^2} du\right\}$
- 71) Sin derivar y usando solo las propiedades de Transformada; calcular  $L\left\{t \frac{d}{dt} \int_t^{4t} \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2} du\right\}$
- 72) Calcular  $L\{t^n \operatorname{sen} at\}$ , si  $n \in \mathbb{Z}_0^+$  y  $n \in \mathbb{R}, n > -1$
- 73) Calcular  $L\left\{\frac{e^{-4t} \cos t}{(1-e^{-6t})^4}\right\}$
- 74) Calcular  $L\left\{\frac{1-\cos nt}{t^2}\right\}$
- 75) Calcular  $L\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\right\}$
- 76) Calcular  $L\left\{\frac{e^{-at} \operatorname{sen}^2 t}{t}\right\}$
- 77) Calcular  $L\left\{t^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-bt} \operatorname{sen}^2 t}{t^3}\right)\right\}$  sin derivar.
- 78) Si  $L\{F(t)\} = H(s)$ , calcular  $L\left\{\int_0^v dv \int_0^v F(u) du\right\}$

- 79 Solo usando propiedades sin derivar calcular  $L\{e^t \int_a^t \frac{d}{dt}(e^{2t} \operatorname{sen} t) dt\}$
- 80 Calcular  $L\left\{\int_0^t \frac{d}{dt}(te^{-t}) dt\right\}$ , sin derivar solo usando propiedades.
- 81 Sea  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase A. Si  $L\{F(t)\} = \varphi(s)$ , calcular  $L\left\{\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} F\left(\frac{t}{a}\right)\right\}$ ,  $a > 0$ .
- 82 Demostrar que  $L\left\{e^t \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s-1}\right)$
- 83 Hallar  $L\{2 + |t-2|\}$
- 84 Demostrar que  $L\left\{\int_0^x \int_0^y \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz dy\right\} = \frac{1}{s^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{s}\right)$
- 85 Evaluar si existe  $L\left\{t \int_{2t}^{4t} e^{-2t} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}\right) du\right\}$
- 86 Sean  $a, b, u, v$  y  $A$  constantes, probar que:  
 $L\{at^{-u} + bt^{-v}\} = A(as^{-u} + bs^{-v}) \Leftrightarrow u+v=1$  y  $A = \pm\sqrt{\pi \operatorname{csc} \pi u}$
- 87 Hallar una fórmula para:  $L\{t^n \operatorname{sen} at\}$ ,  $a > 0$ .
- 88 Calcular  $L\left\{\int_0^x \int_0^y u^{1/2} \cos u^{3/2} du dy\right\}$
- 89 Hallar la transformada de Laplace  $L\left\{x^2 \int_0^x u \operatorname{sen} u du + \int_0^x u e^{2u} \operatorname{sen} u du\right\}$
- 90 Hallar  $L\left\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\right\}$ , donde  $n$  es un entero positivo. **Rpta.**  $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(s+k)^n}$
- 91 Determinar la transformada  $L\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{1+e^{-t}}\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(s+n)^2 + 1}$
- 92 Calcular  $L\left\{\frac{e^t \operatorname{sen} t}{(1+e^{-t})^2}\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(s+n-2)^2 + 1}$



93) Calcular  $L\left\{\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{1 + e^{-3t} - e^{-t} - e^{-2t}}\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(s+2n)^2}$

94) Calcular  $L\left\{\frac{t^2}{e^t + e^{2t}}\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{(s+2n+3)^2}$

95) Hallar  $L\{t^3 \operatorname{tgh}(t)\}$  **Rpta.**  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 6}{(s+2n)^4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 6}{(s+2n+2)^4}$

96) Calcular  $L\left\{\frac{e^{4t} \operatorname{sen} t}{(1 - e^{-3t})^2}\right\}$

97) Calcular  $L\{t^{-1/2} F(t)\}$  si  $F(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1/2}}{(2n+1)n!}$

98) Usando propiedades calcular la transformada  $L\left\{t \frac{d}{dt} \int_0^{3t} \frac{d}{dt} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^3}\right) dt\right\}$

99) Usando propiedades, calcular la transformada  $L\{e^{3t} \int_0^{2t} |\cos \omega u| du\}$

100) Solo usando propiedades, calcular la transformada  $L\left\{\int_0^t \frac{d}{dt} (t^n \operatorname{sen} at) dt\right\}$

101) Hallar  $L\{e^{-2t} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{\operatorname{arctg}(s+2)}{s+2}$

102) Sea  $F(x)$  una función real, definida  $F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \in [0, 1) \\ \int_0^x \left(\frac{e^t - e^{2t} + \operatorname{sen} xt^2}{t}\right) dt & , \text{ si } x \in [1, 2] \\ 0 & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$

Hallar  $L\{F(x)\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{\pi}{8} + \ln 2\right) (e^{-s} - e^{-2s})$

103) Hallar  $L\left\{\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{\pi e^{-\frac{1}{4s}}}{\sqrt{s}}$

- 104 Si  $\begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ t^n, & t > a \end{cases}$ , calcular  $L\{t \int_0^{t+a} e^{-4t+v} F(v) dv\}$
- 105 Calcular la transformada de Laplace de la función  $F(t) = \begin{cases} t - [t] & \text{si } [t] \text{ es par} \\ t - [t+1] & \text{si } [t] \text{ es impar} \end{cases}$
- 106 Calcular  $L\{\pi(t+a)^{-1/2}\}$  sug. Es un el binomio de Newton.
- 107 Si  $H(t) = \begin{cases} t - [t] & \text{si } [t] \text{ es par o cero} \\ t - [t+1] & \text{si } [t] \text{ es impar} \end{cases}$  Calcular  $L\{t e^{-4t} \int_0^{6t} a' H(u) du\}$ ,  $a > 0$
- 108 Si  $G(t) = \begin{cases} (t - [t])^2 & \text{si } [t] \text{ es par o cero} \\ 1 - (t - [t])^2 & \text{si } [t] \text{ es impar} \end{cases}$ . Calcular  $L\{t^2 e^{-4t} \frac{d}{dt} (\int_0^t G(u) du)\}$
- 109 Calcular  $L\{\frac{\cos at - \cos bt}{t e^t}\}$  Rpta.  $f(s) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(s-1)^2 + b^2}{(s-1)^2 + a^2}\right)$
- 110 Calcular  $L\{t \int_0^t e^u \frac{\sin u}{u} du\}$  Rpta.  $f(s) = \frac{1}{s^2} \arctg\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{s(1+(s-1)^2)}$
- 111 Calcular  $L\{\int_0^{3t} \int_0^{2x} \frac{1-e^{-y}}{y} dy dx\}$
- 112 Calcular  $L\{\int_0^t \frac{d}{dt}(t e^{-t'}) dt\}$
- 113 Calcular  $L\{t^{-1/2} \cos at^{1/2}\}$  Rpta.  $f(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\frac{\pi^2}{4s}}$ ,  $s > 0$
- 114 Calcular  $L\{\frac{e^{at} - \cos bt}{t}\}$ ,  $a, b \neq 0$
- 115 Calcular  $L\{\int_0^t \frac{\sin^2 x}{x} dx\}$
- 116 Calcular  $L\{t e^{-s} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t e^{-t} \cos 4t dt\}$
- 117 Calcular  $L\{t e^t \int_a^t \frac{d}{dt}(e^{2t} \sin t) dt\}$
- 118 Calcular  $L\{t e^{6t} \sinh \sqrt{t}\}$
- 119 Hallar la Transformada de Laplace  $L\{t \int_0^{e^{-2t}} \frac{\sin 2t}{t} dt\}$

120 Hallar la Transformada de Laplace  $L\{t e^{-2t} \cos 3t\}$

121 Calcular  $L\{t \int_0^t \sin x dx\}$

122 Calcular  $L\{e^{-t}(2 \sinh 2t - 5 \cosh 2t)\}$

123 Calcular  $L\{t \int_0^t e^{-2t} \frac{\sin 2t}{t} dt\}$

124 Calcular  $L\{t \int_0^t e^{-3t} \frac{\sin 3t}{t} dt\}$

II.-

1 Evaluar la integral  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt$  **Rpta.**  $\ln 3$

2 Calcular la integral  $\int_0^{\infty} \frac{\sin at - \cos bt}{t} dt$  **Rpta.**  $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

3 Evaluar la integral  $\int_0^{\infty} t e^{-2t} \cos t dt$  **Rpta.**  $\frac{3}{25}$

4 Demostrar que:  $\int_0^{\infty} e^{\sqrt{2}t} \frac{\sinh t \cdot \sin t}{t} dt = \frac{\pi}{8}$

5 Demostrar que:  $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{2}t} \frac{\sin 6t \cdot \sin t}{t} dt = \frac{\pi}{8}$

6 Demostrar que:  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

7 Demostrar que:  $\int_0^{\infty} t e^{-3t} \int_0^t t e^{-2t} \sin t dt dt = \frac{1}{6}$

8 Calcular la integral  $\int_0^{\infty} e^{-3u} \int_0^u t \cos 4t dt du$  **Rpta.**  $\ln 2$

9 Calcular  $\int_0^{\infty} e^{4t} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt$  **Rpta.**  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{16+b^2}{16+a^2}\right)$

10 Calcular la integral  $\int_0^{\infty} e^{-t} \int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du dt$

11) Demostrar que:  $\int_{s=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} \frac{\text{sen } u}{u} du dt = \frac{\pi}{4}$

12) Evaluar  $\int_0^{\infty} \frac{\cosh 2t - \cos 4t}{t} dt$  Rpta.  $\frac{1}{2} \ln 4$

13) Evaluar  $\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t} \text{sen } t dt$  Rpta.  $\frac{22}{125}$

14) Evaluar  $\int_0^{\infty} t e^{-2t} \text{senh } t dt$  Rpta.  $\frac{4}{9}$

15) Evaluar  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - \cos t}{t} dt$  Rpta.  $-\ln 2$

16) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1 - \cos nt}{t^2} dt = \frac{n\pi}{2} + \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2 + n^2}\right) - n \cdot \text{arctg}\left(\frac{s}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$  y

calcular  $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos nt}{t^2} dt$  Rpta.  $\frac{n\pi}{2}$

17) Usando Transformada de Laplace calcular  $\int_0^{\infty} J_0(u^4) du$

18) Calcular  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$ , usando Transformada de Laplace si  $a, b > 0$ .

19) Usando Transformada de Laplace, calcular  $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x + \cos x}{x^p} dx, \quad 0 < p < 1$

Rpta.  $\frac{\pi}{2\Gamma(p)} \left( \frac{1}{\text{sen} \frac{p\pi}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{p\pi}{2}} \right), \quad 0 < p < 1$

20) Calcular  $\int_0^{\infty} e^{-at^2-t} dt$  Rpta.  $\frac{e^{4a} \sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} f_{\text{erc}}\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)$

21) Evaluar la integral  $\int_0^{\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt$  Rpta.  $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

22) Evaluar la integral  $\int_0^{\pi} \frac{\sin 4t - \sin 2t}{t} dt$  **Rpta.** 0

23) Calcular el valor de  $\int_0^{\pi} t e^{-2t} \cos t dt$  **Rpta.**  $\frac{3}{25}$

24) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} e^{-st} \left( \frac{1 - \cos nt}{t^2} \right) dt = \frac{n\pi}{2} + \frac{s}{2} \ln \left| \frac{s^2}{s^2 + n^2} \right| - n \cdot \arctg\left(\frac{s}{n}\right)$  y  $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos nt}{t^2} dt = \frac{n\pi}{2}$

25) Calcular  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{\sin^2 u}{u^2} du dt$

26) Calcular  $\int_0^{\pi} \frac{\sin t \cdot \sin at}{t} dt$

27) Calcular  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx$

28) Calcular  $\int_0^{\pi} t^3 e^{-t} \sin t dt$

29) Evaluar  $\int_0^{\pi} \frac{\sin tx}{x} dx$

30) Calcular  $\int_0^1 \frac{x^3}{(8-x)^{7/3}} dx$

31) Calcular  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

32) Calcular  $\int_0^2 (4-x^2)^{3/2} dx$

33) Calcular  $\int_0^2 (4-x^2)^{3/2} dx$



# CAPÍTULO XI

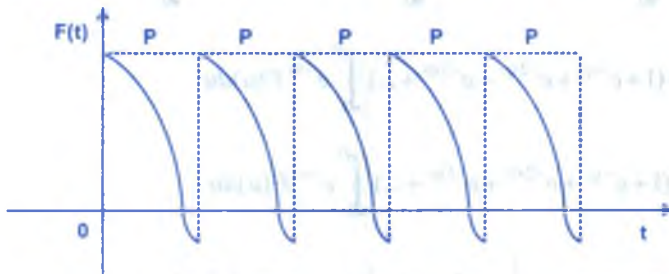
## 11. FUNCIONES ESPECIALES.-

### 11.1. FUNCION PERIÓDICA.-

La función  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que es una función periódica si  $\exists p > 0$ , tal que:

$$F(t + p) = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y al menor número  $p > 0$ , que satisface la condición de periodicidad se denomina período de la función



Si  $F(t)$  es una función seccionalmente continua a lo largo de un intervalo de longitud  $P$  y de orden exponencial, entonces su Transformada de Laplace existe y es la integral de cero al infinito.

### 11.2. TEOREMA.-

Si  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función continua por tramos, de orden exponencial y periódica con período  $P$ . Entonces:

$$L\{F(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-ps}}$$

**Demostración**

Como  $F(t)$  es continua por tramos y de orden exponencial entonces  $\exists L\{F(t)\}$

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^P e^{-st} F(t) dt + \int_P^{2P} e^{-st} F(t) dt + \int_{2P}^{3P} e^{-st} F(t) dt + \dots$$

Como  $F(t)$  es una función periódica con período  $P \neq 0$ , entonces a partir de la segunda integral se tiene:  $t = u + p$ ,  $t = u + 2p$ ,  $t = u + 3p$ , ..., entonces

$$L\{F(t)\} = \int_0^P e^{-su} F(u) du + \int_P^{2P} e^{-s(u+p)} F(u+p) du + \int_{2P}^{3P} e^{-s(u+2p)} F(u+2p) du + \int_{3P}^{4P} e^{-s(u+3p)} F(u+3p) du + \dots$$

$$= \int_0^P e^{-su} F(u) du + e^{-sp} \int_0^P e^{-su} F(u) du + e^{-2sp} \int_0^P e^{-su} F(u) du + \dots$$

$$= (1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + e^{-3sp} + \dots) \int_0^P e^{-su} F(u) du$$

$$L\{F(t)\} = (1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + e^{-3sp} + \dots) \int_0^P e^{-su} F(u) du \quad \dots (1)$$

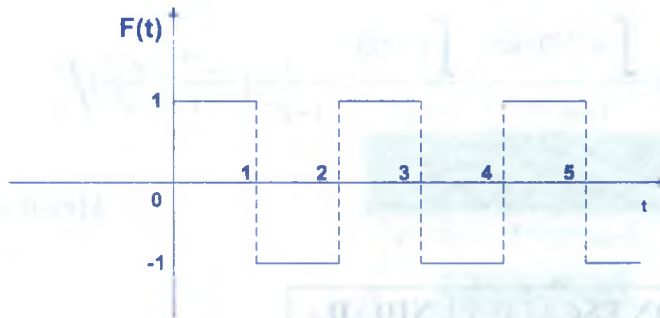
pero se conoce que:  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ , para  $|x| < 1$

$$\text{Luego } 1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \quad \dots (2)$$

por lo tanto al reemplazar (2) en (1) se tiene:  $L\{F(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^P e^{-su} F(u) du$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-ps}}$$

**Ejemplo.-** Hallar la transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



**Solución**

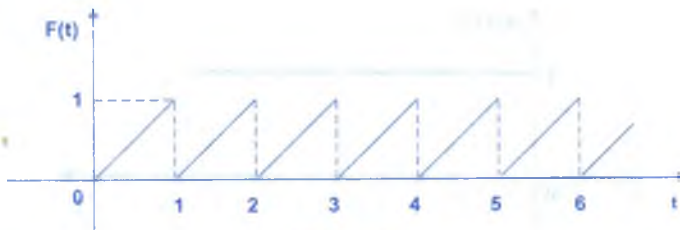
La función  $F(t)$  del gráfico es periódica de período  $P = 2$  es decir:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ -1 & \text{si } -1 < t < 2 \end{cases}, F(t + 2) = F(t), \forall t$$

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \frac{\int_0^1 e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^2 e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} F(t) dt + \int_1^2 e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} dt + \int_1^2 e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} \\ &= \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})} = \frac{e^s - 1}{s(e^s + 1)} = \frac{1}{s} \operatorname{tgh}\left(\frac{s}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{1}{s} \operatorname{tgh}\left(\frac{s}{2}\right)$$

**Ejemplo.-** Hallar  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t)$  es la función periódica que se muestra en la figura.



**Solución**

La función  $F(t)$  es periódica, de período  $P = 1$ , donde  $F(t) = t$ , para  $0 < t < 1$  y  $F(t) = F(t + 1)$ ,  $\forall t$  su Transformada de Laplace es dado por:

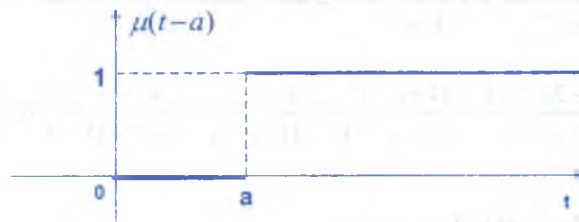
$$\begin{aligned}
 L\{F(t)\} &= \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-ps}} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} t dt}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left[ -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right] \Bigg|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-s}} \left( -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right) \quad \therefore L\{F(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}
 \end{aligned}$$

### 11.3. FUNCIÓN ESCALÓN UNIDAD.-

A la función “Escalaón Unidad” llamada también función unitario de HEAVISIDE es denotada por  $\mu(t-a) = \mu_a(t)$  y es definida como:

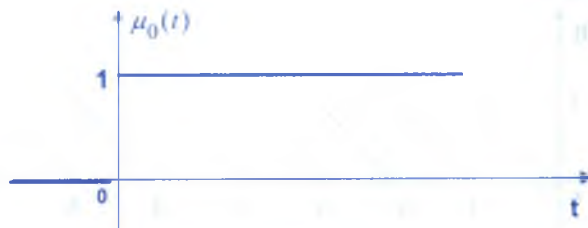
$$\mu(t-a) = \mu_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

su gráfico es:



cuando  $a = 0$ , se tiene:  $\mu_0(t) = \mu(t-0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

su gráfico es:

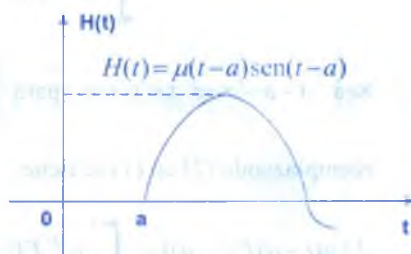
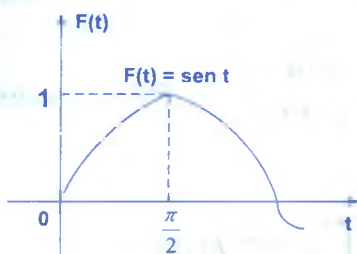


La función  $\mu_a(t)$  es continua en  $\langle 0, +\infty \rangle$ , a pesar que  $\mu_a(t)$  tiene un punto de discontinuidad en  $x = a$ , la Transformada de Laplace de  $\mu(t-a) = \mu_t(a)$  es:

$$\begin{aligned}
 L\{\mu_a(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \mu(t-a) dt = \int_0^a e^{-st} \mu(t-a) dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} \mu(t-a) dt \\
 &= 0 + \int_a^{+\infty} e^{-st} \mu(t-a) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)} dt = \frac{e^{-sa}}{s} \Big|_0^{+\infty} \text{ para } s > 0 \\
 &= -\frac{1}{s} [0 - e^{-as}] = \frac{e^{-as}}{s} \qquad \therefore L\{\mu(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}
 \end{aligned}$$

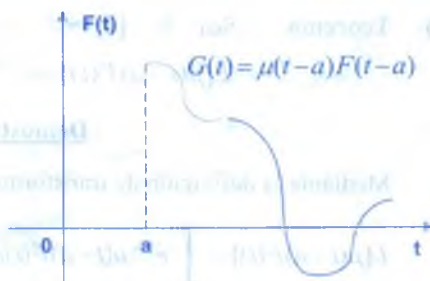
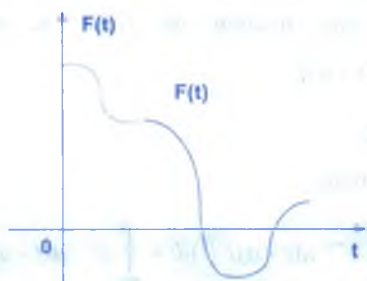
**OBSERVACIÓN.** Toda función F puede ser trasladada “a” unidades a la derecha del punto a.

**Ejemplo.** La función  $F(t) = \text{sen } t$



$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \text{sen}(t-a) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

En general dada una función  $F: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , se puede trasladar a la derecha, de tal manera que la función valga cero en  $[0, a>$  y se define la función  $G(t) = \mu(t-a) F(t-a)$ .



**Observación.** Si  $L\{F(t)\}$  existe para  $s > a \geq 0$ , entonces podemos calcular  $L\{\mu(t-a) F(t-a)\}$  en función de  $L\{F(t)\}$ .



- i) **Teorema.** Sea  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , una función de clase A entonces  

$$L\{\mu(t-a)F(t-a)\} = e^{-as} L\{F(t)\}$$

**Demostración**

Mediante la definición de transformada.

$$\begin{aligned} L\{\mu(t-a)F(t-a)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \mu(t-a)F(t-a) dt \\ &= \int_0^a e^{-st} \mu(t-a)F(t-a) dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} \mu(t-a)F(t-a) dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st} F(t-a) dt \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Sea  $t-a = z \Rightarrow t = a+z$  para  $\begin{cases} t = a & ; & z = 0 \\ t \rightarrow \infty & ; & z \rightarrow \infty \end{cases} \quad \dots (2)$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} L\{\mu(t-a)F(t-a)\} &= \int_a^{+\infty} e^{-st} F(t-a) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(a+z)} F(z) dz \\ &= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-sz} F(z) dz = e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = e^{-as} L\{F(t)\} \\ \therefore L\{\mu(t-a)F(t-a)\} &= e^{-as} L\{F(t)\} \end{aligned}$$

- ii) **Teorema.** Sea  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , una función de clase A, entonces  

$$L\{\mu(t-a)F(t)\} = e^{-as} L\{F(t+a)\}$$

**Demostración**

Mediante la definición de transformada se tiene:

$$\begin{aligned} L\{\mu(t-a)F(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \mu(t-a)F(t) dt = \int_0^a e^{-st} \mu(t-a)F(t) dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} \mu(t-a)F(t) dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Sea  $t = z + a$ , cuando  $\begin{cases} t \rightarrow 0^+ ; z \rightarrow 0 \\ t \rightarrow +\infty ; z \rightarrow +\infty \end{cases}$  ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} L\{\mu(t-a)F(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(a+z)} F(a+z) dz \\ &= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-sz} F(z+a) dz = e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t+a) dt = e^{-as} L\{F(t+a)\} \\ \therefore L\{\mu(t-a)F(t)\} &= e^{-as} L\{F(t+a)\} \end{aligned}$$

**OBSERVACIÓN.-**

Sea  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , una función de clase A, tal que:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) & ; 0 < t < a \\ F_2(t) & ; t > a \end{cases}$$

Luego la función  $F(t)$  se puede escribir en términos de la función escalón unidad.

$$F(t) = F_1(t) + (F_2(t) - F_1(t))\mu(t-a)$$

Generalizando; Si  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función de clase A, tal que:

a la función  $F(t)$  se expresa en la forma siguiente:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) , & \text{si } 0 < t < a_1 \\ F_2(t) , & \text{si } a_1 < t < a_2 \\ F_3(t) , & \text{si } a_2 < t < a_3 \\ \vdots \\ F_n(t) , & \text{si } t > a_{n-1} \end{cases}$$

Luego a la función  $F(t)$  se puede expresar en términos de la función escalón unidad.

$$\begin{aligned} F(t) &= F_1(t) + (F_2(t) - F_1(t))\mu(t-a_1) + (F_3(t) - F_2(t))\mu(t-a_2) \\ &\quad + \dots + (F_n(t) - F_{n-1}(t))\mu(t-a_{n-1}) \end{aligned}$$

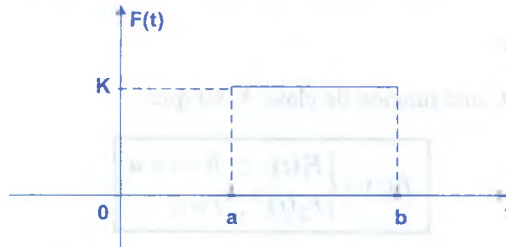
**Ejemplo.-** Escribir en términos de la función escalón unidad, la función.

$$F(t) = \begin{cases} t^2, & \text{si } 0 < t < 2 \\ 4t, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

**Solución**

$$F(t) = t^2 + (4t - t^2)\mu(t-2)$$

**Ejemplo.-** Encontrar la Transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



**Solución**

Escribiendo la función en términos de la función escalón unidad se tiene:

$F(t) = k[\mu(t-a) - \mu(t-b)]$  y su Transformada de Laplace es :

$$L\{F(t)\} = k L\{\mu(t-a)\} - k L\{\mu(t-b)\} = \frac{k e^{-as}}{s} - \frac{k e^{-bs}}{s}$$

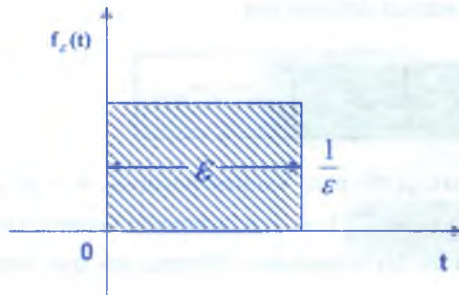
$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

## 11.4. FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO Ó FUNCIÓN DELTA DE DIRAC.-

Consideremos la función  $f_\varepsilon(t)$ , definido por:

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } t > \varepsilon \end{cases}$$

donde  $\varepsilon > 0$ , y que es muy pequeño. Su gráfica es:



A la función  $f_\varepsilon(t)$ , así definida se le denomina función impulso, y cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la altura de la región rectangular sombreada crece indefinidamente y la base decrece, de tal manera que el área siempre es igual a 1, es decir:

$$A = \int_0^{\infty} f_\varepsilon(t) dt = 1$$

a la función  $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$  se denomina función impulso unitario o función Delta de Dirac, otra forma de definir la función  $\delta(t)$  que frecuentemente es empleada en electrónica es:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\mu(t) - \mu(t - \varepsilon))$$

Ahora calcularemos su Transformada de Laplace

$$\begin{aligned} L\{f_\varepsilon(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_\varepsilon(t) dt = \int_0^{\varepsilon} e^{-st} f_\varepsilon(t) dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f_\varepsilon(t) dt \\ &= \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-st}}{\varepsilon} dt = -\frac{e^{-st}}{\varepsilon s} \Big|_0^{\varepsilon} = -\frac{e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} + \frac{1}{\varepsilon s} \end{aligned} \quad \therefore L\{f_\varepsilon(t)\} = \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}$$

como  $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) \Rightarrow L\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L\{f_\varepsilon(t)\}$

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-s\varepsilon}}{s} = 1$$

$\therefore L\{\delta(t)\} = 1$ , además  $L\{\delta(t - a)\} = e^{-as}$

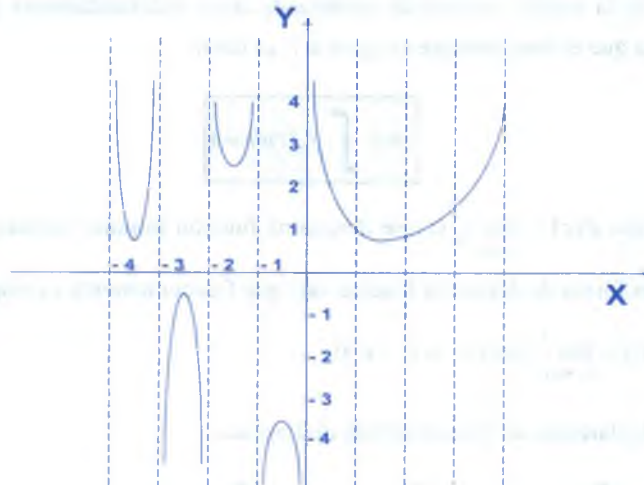
### 11.5. LA FUNCIÓN GAMMA.-

Es una integral paramétrica definida por:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu \quad \dots(1)$$

Esta integral es convergente para valores positivos  $n > 0$ , y para valores negativos  $n$  exceptuando los valores  $-1, -2, -3, -4, \dots$ , a la función Gamma también se denomina función factorial y se aplica en las ecuaciones diferenciales que admiten soluciones por series infinitas.

Su representación gráfica es:



En la siguientes tabla se indica algunos valores de  $\Gamma(n)$  donde  $0 < n \leq 1$ , calculados según (1) mediante series infinitas.

N	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\Gamma(n)$	9.5	4.59	2.99	2.22	$\sqrt{\pi}$	1.49	1.30	1.16	1.07

La integral  $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu$ , no define ningún valor  $n = 0$ , pero define los valores de  $\Gamma(n)$  para todos los números reales de la siguiente forma:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$



**11.6. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN GAMMA.-**

①  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \forall n > -1$

**Demostración**

Por definición de función Gamma se tiene:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-\mu} \mu^{(n+1)-1} d\mu = \int_0^{\infty} \mu^n e^{-\mu} d\mu = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p \mu^n e^{-\mu} d\mu$$

integrando por partes: 
$$\begin{cases} \omega = \mu^n \\ dv = e^{-\mu} d\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\omega = n\mu^{n-1} d\mu \\ v = -e^{-\mu} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ -\mu^n e^{-\mu} \Big|_0^p + n \int_0^p \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} -p^n e^{-p} + \lim_{p \rightarrow +\infty} n \int_0^p \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu = 0 + n \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu = n\Gamma(n) \end{aligned}$$

$\therefore \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

②  $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

**Demostración**

Aplicando repetidas veces la propiedad (1)

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-(n-1))\Gamma(1) \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots, 3, 2, 1\Gamma(1) = n\Gamma(1) = n! \quad \therefore \Gamma(n+1) = n! \end{aligned}$$

**Observación.**  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \mu^{1-1} e^{-\mu} d\mu = \int_0^{\infty} e^{-\mu} d\mu = 1 \quad \therefore \Gamma(1) = 1$

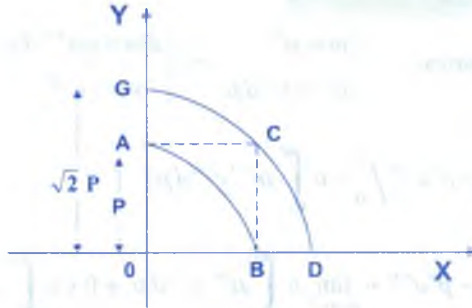
**11.7. TEOREMA.-** Demostrar que:  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**Demostración**

Consideremos :  $I_p = \int_0^p e^{-x^2} dx = \int_0^p e^{-y^2} dy$  y sea  $I = \lim_{p \rightarrow \infty} I_p$ , el valor de la integral.

$$\text{Luego } I^2_p = \left( \int_0^p e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^p e^{-y^2} dy \right) = \int_0^p \int_0^p e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$I^2_p = \iint_{R_p} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ donde } R_p \text{ es el cuadrado o ABC, de lado } P$$



Sea  $R_1$  la región en el primer cuadrante, comprendida por la circunferencia de radio  $P$ . es decir :  $\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$  y sea  $R_2$  la región en el primer cuadrante, comprendida por la

circunferencia de radio  $\sqrt{2}P$  es decir:  $\iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ .

$$\text{Luego : } \iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I^2_p \leq \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

por medio de coordenadas polares  $(r, \theta)$  se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^p e^{-r^2} r dr \right) d\theta \leq I^2_p \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\sqrt{2}p} e^{-r^2} r dr \right) d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-p^2}}{2} d\theta \leq I^2_p \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-2p^2}}{2} d\theta$$

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-p^2}) \leq I^2_p \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2p^2}); \text{ tomando limite cuando } p \rightarrow +\infty, \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-p^2}) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} I^2_p \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2p^2})$$

$$\frac{\pi}{4} \leq I^2 \leq \frac{\pi}{4} \text{ de donde se tiene } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \therefore \int_0^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**EJEMPLO DE APLICACIÓN.**

Demostrar que:  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

**Solución**

Por definición de la función Gamma se tiene:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu, \text{ de donde: } \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \mu^{\frac{1}{2}-1} e^{-\mu} d\mu = \int_0^{+\infty} \mu^{-\frac{1}{2}} e^{-\mu} d\mu$$

Sea  $\mu = x^2 \Rightarrow d\mu = 2x dx$ ; cuando  $x = 0, \mu = 0$  y cuando  $x \rightarrow +\infty; \mu \rightarrow +\infty$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \mu^{-\frac{1}{2}} e^{-\mu} d\mu = \int_0^{+\infty} x^{-1} e^{-x^2} \cdot 2x dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \sqrt{\pi}$$

$$\therefore \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

**11.8. LA FUNCIÓN BETA.-**

A la función  $B: R^+ \times R^+ \rightarrow R$ , definida por la integral

$$B(m, n) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu$$

donde  $m > 0, n > 0$ , se denomina función Beta.

**11.9. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN BETA.-**

①  $B(m, n) = B(n, m)$

**Demostración**

Por la definición de función Beta se tiene:  $B(m, n) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu$

sea  $z = 1 - \mu \Rightarrow dz = -d\mu$ , además cuando  $\mu = 0, z = 1$   
 $\mu = 1, z = 0$

$$B(m, n) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu = - \int_1^0 z^{m-1} (1-z)^{n-1} dz = \int_0^1 z^{n-1} (1-z)^{m-1} dz = B(n, m)$$

$$\therefore B(m, n) = B(n, m)$$

②

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

### Demostración

Por definición de la función Beta se tiene:  $B(m, n) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu$

sea  $g(t) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu$ , calculando su Transformada de Laplace se tiene: por el teorema de convolución.

$$L\{g(t)\} = \Gamma(m)\Gamma(n) \frac{1}{S^m S^n} = \Gamma(m)\Gamma(n) \frac{1}{S^{m+n}}$$

$$g(t) = \Gamma(m)\Gamma(n) L^{-1}\left\{\frac{1}{S^{m+n}}\right\} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1}$$

$$g(t) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1}, \text{ entonces tenemos:}$$

$$g(1) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad \therefore B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

③

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

### Demostración

De la propiedad (2) se tiene:  $B(m, n) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

sea  $z = \cos^2 \theta \Rightarrow dz = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{dz}{2}$

cuando  $\theta = 0, z = 1; \theta = \frac{\pi}{2}, z = 0$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cdot \cos^{2n-1} \theta d\theta = \int_1^0 \sin^{2m-2} \theta \cdot \cos^{2n-2} \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^1 (1 - \cos^2 \theta)^{m-1} (\cos^2 \theta)^{n-1} \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^0 (1 - z)^{m-1} z^{n-1} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - z)^{m-1} z^{n-1} dz = \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cdot \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

**11.10. LA FUNCIÓN DE BESSEL.-**

La ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - p^2) y(t) = 0 \quad \dots(1)$$

se llama ecuación diferencial de Bessel de orden p, con  $p \geq 0$ ,

Ahora buscaremos las soluciones en serie de potencias al rededor del punto  $t = 0$ , el cual es un punto singular regular.

Sea  $y(t) = t^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+p}$ ,  $p \geq 0$ ; calculando las derivadas se tiene:

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+p) a_k t^{k+p-1}, \quad y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+p)(k+p-1) a_k t^{k+p-2}$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada



$$t^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+p)(k+p-1)a_k t^{k+p-2} + t \sum_{K=0}^{\infty} (k+p)a_k t^{k+p-1} + (t^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+p} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+p)(k+p-1)a_k t^{k+p} + \sum_{K=0}^{\infty} (k+p)a_k t^{k+p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+p+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^2 t^{k+p} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+p)^2 - p^2] a_k t^{k+p} + \sum_{K=0}^{\infty} a_k t^{k+p+2} = 0 ; \text{ poniendo en una misma potencia a } t$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+p)^2 - p^2] a_k t^{k+p} + \sum_{K=2}^{\infty} a_{k-2} t^{k+p} = 0 ; \text{ poniendo los inicios iguales}$$

$$(p^2 - p^2)a_0 t^p + (2p+1)a_1 t^{1+p} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+p)^2 - p^2] a_k t^{k+p} + \sum_{K=2}^{\infty} a_{k-2} t^{k+p} = 0$$

$$(2p+1)a_1 t^{1+p} + \sum_{k=2}^{\infty} [(k^2 + 2pk)a_k + a_{k-2}] t^{k+p} = 0$$

$$\begin{cases} (2p+1)a_1 = 0 \\ (k^2 + 2pk)a_k + a_{k-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2 + 2pk}, \forall k \geq 2 \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2(2p+2)}$$

$$k=3 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3(2p+3)} = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$k=4 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4(2p+4)} = (-1)^2 \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2p+2)(2p+4)}$$

$$k=5 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5(2p+5)} = 0 \Rightarrow a_5 = 0$$

$$k=6 \Rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6(2p+6)} = (-1)^3 \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6)}$$

$$a_{2k-1} = 0, \forall k \geq 1$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2.4.6.8 \dots (2k)(2p+2)(2p+4) \dots (2p+2k)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2.4.6.8 \dots (2k) 2^k (p+1)(p+2)(p+3) \dots (p+k)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2.3.4.5 \dots k \cdot 2^{2k} (p+1)(p+2)(p+3) \dots (p+k)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{k! 2^{2k} (p+1)(p+2)(p+3) \dots (p+k)}, \forall k \geq 1$$

como  $y(t) = t^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = t^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{k! 2^{2k} (p+1)(p+2) \dots (p+k)} t^{2k}$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{k! 2^{2k} (p+1)(p+2) \dots (p+k)} t^{2k+p}$$

consideremos  $a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$  se tiene:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^p 2^{2k} \Gamma(p+1)(p+1)(p+2) \dots (p+k)} t^{2k+p}$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+1)(p+1)(p+2) \dots (p+k)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}$$

Esta función es una de las soluciones linealmente independiente de la ecuación diferencial de Bessel y es llamado "Función de Bessel de orden p y de primera clase" y denotaremos en la forma siguiente:

$$J_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+1)(p+1)(p+2) \dots (p+k)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}$$

- a) **DEFINICIÓN.-** A la función de Bessel de primera clase y de orden  $n$ , denotaremos por  $J_n(t)$  y es definido por la serie.

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}, \quad k \geq 0$$

si  $n=0$ , se obtiene 
$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

Llamada función de Bessel de orden cero.

- OBSERVACIÓN.-** Se ha obtenido una solución linealmente independiente.

$$J_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)\dots(p+k)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}$$

se sabe que:  $(p+1)\Gamma(p+1) = \Gamma(p+2)$

$$(p+2)\Gamma(p+2) = \Gamma(p+3)$$

$$(p+3)\Gamma(p+3) = \Gamma(p+4)$$

⋮  
⋮  
⋮

$$(p+k)\Gamma(p+k) = \Gamma(p+k+1)$$

de donde: 
$$J_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p} \quad \text{ó} \quad J_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}$$

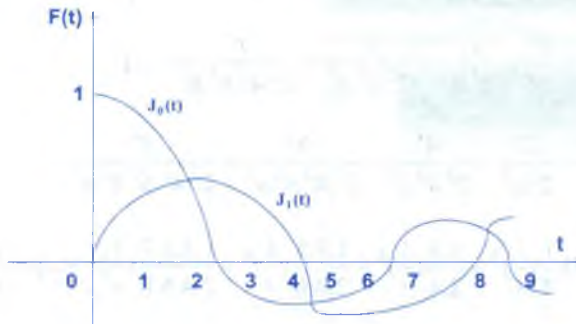
La segunda solución linealmente independiente de la ecuación diferencial de Bessel es:

$$J_{-p}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-p} \quad \text{ó} \quad J_{-p}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-p}$$

- OBSERVACIÓN.** Las funciones de Bessel de mayor utilidad son los de orden cero  $J_0(t)$  y las de orden uno,  $J_1(t)$  y son expresados así:

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \quad \text{y} \quad J_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1}$$

el gráfico de estas funciones es:



**b) PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN BESSEL.-**

- |  |   |
|--|---|
| ① $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ , si $n \in \mathbb{Z}^+$  | ② $J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$                           |
| ③ $\frac{d}{dt} \{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$   | ④ $n = 0, J'_0(t) = -J_1(t)$  |
| ⑤ $\frac{d}{dt} \{t^{-n} J_n(t)\} = -t^{-n} J_{n+1}(t)$  | ⑥ $J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) = 2J'_n(t)$                                      |
| ⑦ $J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sen} t$                                 | ⑧ $J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$                     |
| ⑨ $J_{\frac{3}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} - \cos t\right)$ | ⑩ $e^{\frac{t}{2}} u^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) u^n$ |

Se conoce con el nombre de función generadora para las funciones de Bessel

**Ejemplo.** Hallar  $L\{J_0(t)\}$ , donde  $J_0(t)$  es la función de Bessel de orden cero.

**Solución**

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left( 1 - \frac{t^2}{2-(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)} - \frac{t^6}{2.4.6.(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \right)$$

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{t^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots$$

$$L\{J_0(t)\} = L\left\{1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{t^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2!}{2^2 \cdot s^3} + \frac{4!}{2^2 \cdot 4^2 \cdot s^5} - \frac{6!}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot s^7} + \frac{8!}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot s^9} - \dots$$

$$= \frac{1}{s} \left[ -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{1}{s}\right)^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{1}{s}\right)^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \left(\frac{1}{s}\right)^8 - \dots \right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{s^2}}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

$$\therefore L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

**Ejemplo.** Calcular  $L\left\{\frac{1-J_0(t)}{t}\right\}$

**Solución**

$$L\{1 - J_0(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} = f(s), \text{ por la Transformada de la División}$$

$$L\left\{\frac{1 - J_0(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}\right) d\mu = \left[\ln \mu - \ln \left|\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}\right|\right] \Big|_s^\infty$$

$$= \ln\left(\frac{\mu}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}}\right) \Big|_s^\infty = 0 - \ln\left(\frac{s}{s + \sqrt{s^2 + 1}}\right) = \ln\left(\frac{s\sqrt{s^2 + 1}}{s}\right)$$

$$\therefore L\left\{\frac{1 - J_0(t)}{t}\right\} = \ln \frac{s\sqrt{s^2 + 1}}{s}$$

**Ejemplo.** Demostrar que:  $\int_0^\infty t^2 J_0(t) dt = -1$

**Solución**



Se sabe que  $L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ , entonces

$$L\{t^2 J_0(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \right) = \frac{3s^2}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}} \text{ por definición se tiene:}$$

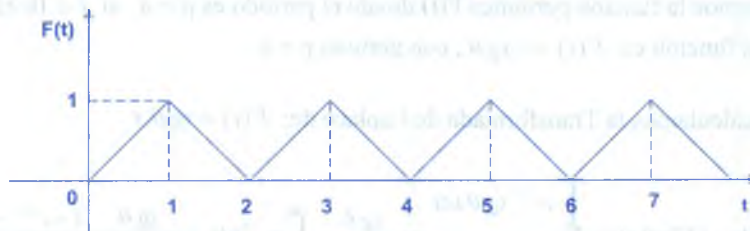
$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^2 J_0(t) dt = \frac{3s^2}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^2 J_0(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{3s^2}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 - 1 = -1$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} t^2 J_0(t) dt = -1$$

### 11.11. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

- ① Muestre que la función  $F(t)$  cuya gráfica es la onda triangular que se muestra en la figura, tiene como transformada de Laplace  $L\{F(t)\} = \frac{1}{s^2} \operatorname{tgh}\left(\frac{s}{2}\right)$ .



#### Solución

Si  $t \in <0,1> \Rightarrow m_1 = 1 \Rightarrow F(t) = t$  de donde  $F(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \in <0,1> \\ 2-t, & \text{si } t \in <1,2> \end{cases}$   
 Si  $t \in <1,2> \Rightarrow m_2 = -1 \Rightarrow F(t) = 2-t$

donde  $F(t)$  es periódica de período  $p=2$

$$\text{como } L\{F(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-ps}} = \frac{\int_0^2 e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[ \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} (2-t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[ \left( -\frac{t}{s} - \frac{1}{s^2} \right) e^{-st} \Big|_0^1 + \left( \frac{t}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} \right) e^{-st} \Big|_1^2 \right]$$

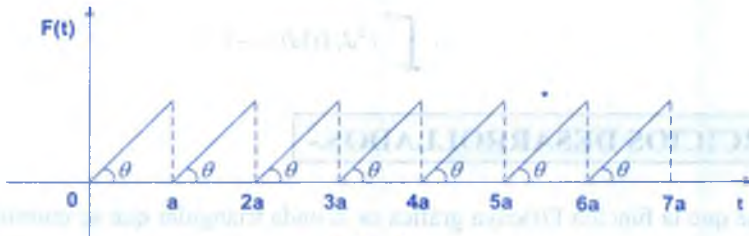
$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left( \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s^2} \right) = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})} = \frac{1}{s^2} \operatorname{tgh} \left( \frac{s}{2} \right)$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{1}{s^2} \operatorname{tgh} \left( \frac{s}{2} \right)$$

**Nota.**  $\operatorname{tgh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$

②

Hallar la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura.



### Solución

Definiremos la función periódica  $F(t)$  donde el período es  $p = a$ , si  $t \in [0, a] \Rightarrow m = \operatorname{tg} \theta$ , luego la función es:  $F(t) = t \operatorname{tg} \theta$ , con período  $p = a$ .

Ahora calculamos la Transformada de Laplace de:  $F(t) = \operatorname{tg} \theta \cdot t$

$$L\{F(t)\} = L\{\operatorname{Tg} \theta \cdot t\} = \frac{\int_0^a e^{-st} \operatorname{tg} \theta \cdot t \, dt}{1 - e^{-as}} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 - e^{-as}} \int_0^a e^{-st} t \, dt = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 - e^{-as}} \left( \frac{1 - e^{-as}}{s^2} - as e^{-as} \right)$$

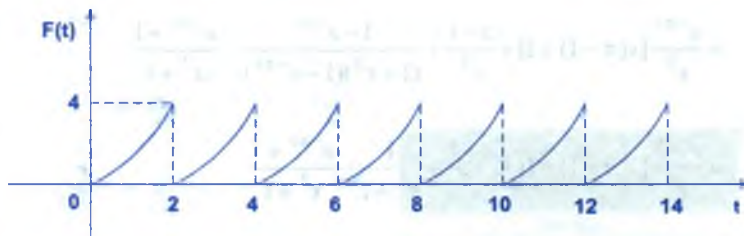
$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{\operatorname{tg} \theta (1 - e^{-as} - as e^{-as})}{s^2 (1 - e^{-as})}$$

③

Si  $F(t) = t^2$ ,  $0 < t < 2$  y  $F(t+2) = F(t)$  hallar  $L\{F(t)\}$

### Solución

Grificando la función periódica de  $F(t)$  se tiene:

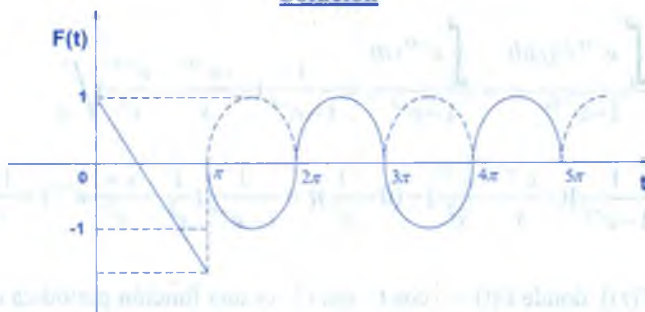


$$\begin{aligned}
 L\{F(t)\} &= \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-ps}} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} t^2 dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left( -\frac{t^2}{s} - \frac{2t}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right) e^{-2s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[ \left( -\frac{4}{s} - \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right) e^{-2s} - \left( 0 - 0 - \frac{2}{s^3} \right) \right] \\
 \therefore L\{F(t)\} &= \frac{2 - 2e^{-2s} - 4s e^{-2s} - 4s^2 e^{-2s}}{s^2 (1 - e^{-2s})}
 \end{aligned}$$

4) Determinar la transformada de Laplace de la función  $F(t)$  definida por:

$$F(t) = \begin{cases} 1-t, & t < \pi \\ |\text{sen } t|, & t > \pi \end{cases}$$

**Solución**



La función  $F(t) = |\text{sen } t|$ , es periódica de periodo  $p = \pi$

$$\begin{aligned}
 L\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{\pi} e^{-st} F(t) dt + \int_{\pi}^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{\pi} (1-t) e^{-st} dt + \int_{\pi}^{\infty} e^{-st} |\text{sen } t| dt \\
 &= \int_0^{\pi} (1-t) e^{-st} dt + \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \text{sen } t dt - \int_0^{\pi} e^{-st} \text{sen } t dt
 \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{s^2} [s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} + \frac{1-e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})} - \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$$

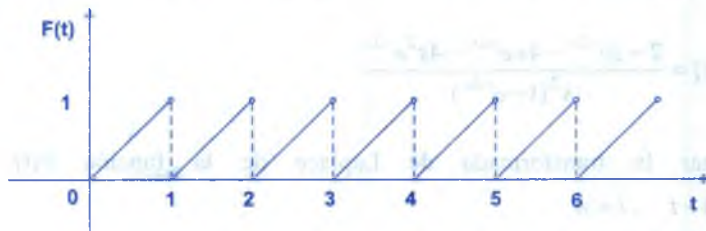
$$= \frac{e^{-\pi s}}{s^2} [s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2} [s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

5 Hallar  $L\{t - [t]\}$

### Solución

Graficando la función  $F(t) = t - [t]$



La función  $F(t) = t - [t]$  es periódica de periodo  $T = 1$ .

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-Ts}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} t dt}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left( -\frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{1 - e^{-s}} \left[ \left( -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} \right) - \left( 0 - \frac{1}{s^2} \right) \right] = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2} e^{-s} \right) = \frac{1 - (s+1)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})} \end{aligned}$$

6 Hallar  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t) = |\cos t - \sin t|$ , es una función periódica de periodo  $T = \pi$ .

### Solución

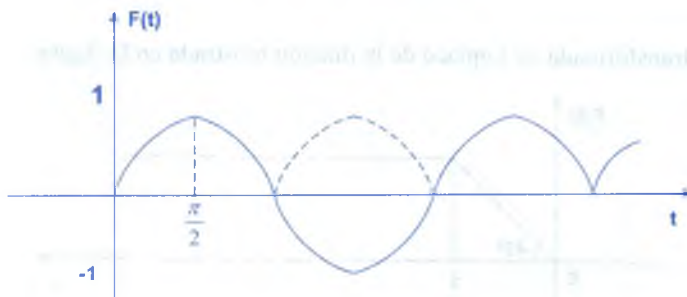
$$F(t) = |\cos t - \sin t| = \begin{cases} \cos t - \sin t, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin t - \cos t, & \text{si } \frac{\pi}{4} < t \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 L\{F(t)\} &= \frac{\int_0^{\pi} e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-\pi s}} = \frac{\int_0^{\pi} e^{-st} |\cos t - \operatorname{sen} t| dt}{1 - e^{-\pi s}} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos t - \operatorname{sen} t| e^{-st} dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\cos t - \operatorname{sen} t| e^{-st} dt \right] \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-st} (\cos t - \operatorname{sen} t) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-st} (\operatorname{sen} t - \cos t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \left[ \frac{e^{-st}}{1 + s^2} (\operatorname{sen} t - s \cdot \cos t + s \cdot \operatorname{sen} t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-st}}{1 + s^2} (s \cdot \cos t - \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t - \cos t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(1 + s^2)} (2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}s} + (s-1)(1 - e^{-\pi s})) \\
 \therefore L\{F(t)\} &= \frac{2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}s} + (s-1)(1 - e^{-\pi s})}{(1 - e^{-\pi s})(1 + s^2)}
 \end{aligned}$$

7 Hallar  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t) = |\operatorname{sen} t|$ .

**Solución**

Graficando la función  $F(t) = |\operatorname{sen} t|$ .





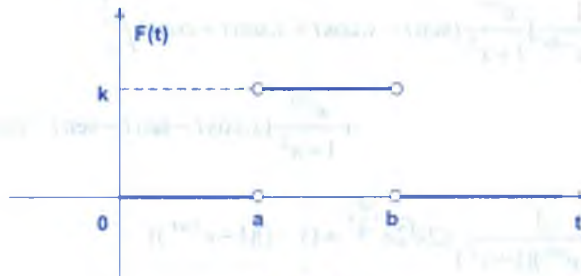
La función  $F(t)$  es periódica de periodo  $P = \pi$ , ahora aplicamos el teorema para calcular la transformada.

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t \, dt = \frac{1 + e^{-\pi s}}{(1 - e^{-\pi s})(1 + s^2)}$$

$$\therefore L\{\sin t\} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{(1 - e^{-\pi s})(1 + s^2)}$$

8

Encontrar la Transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



### Solución

A la función  $F(t)$  expresaremos en términos de la función escalón unidad.

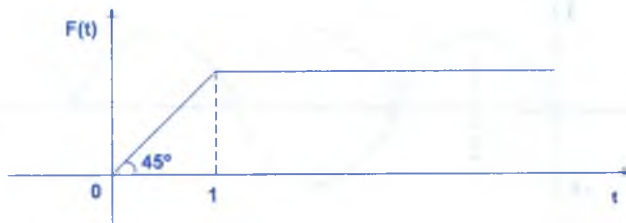
$F(t) = k(\mu_a(t) - \mu_b(t))$  son transformada de Laplace es:

$$L\{F(t)\} = k L\{\mu_a(t)\} - k L\{\mu_b(t)\} = \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

9

Hallar la transformada de Laplace de la función mostrada en la figura.



**Solución**

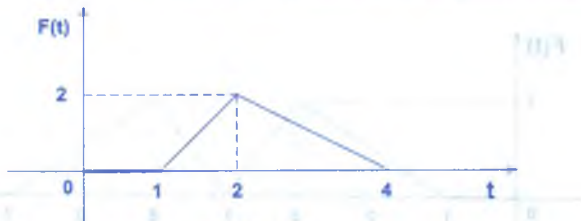
Definiendo la función  $F(t)$  se tiene:  $F(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 < t \leq 1 \\ 1, & \text{para } t > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^1 t e^{-st} dt + \int_1^{+\infty} e^{-st} dt = \left(-\frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right) \Big|_0^1 - \frac{e^{-st}}{s} \Big|_1^{+\infty} \\ &= \left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}\right) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right) - \left(0 - \frac{e^{-s}}{s}\right) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \\ \therefore L\{F(t)\} &= \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

También la Transformada de Laplace de  $F(t)$  se calcula expresado a  $F(t)$  en términos de la función escalón unidad, es decir:  $F(t) = t - (1 - t) \mu(t - 1)$

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= L\{t + (1 - t)\mu(t - 1)\} = L\{t\} + L\{\mu(t - 1)\} - L\{t \mu(t - 1)\} \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{d}{ds} L\{\mu(t - 1)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} \\ \therefore L\{F(t)\} &= \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

10 Hallar la transformada de la figura



**Solución**

Definiremos la función  $F(t)$

$$\text{Si } t \in [0, 1[ \Rightarrow F(t) = 0$$

$$\text{Si } t \in [1, 2[ \Rightarrow F(t) = 2t - 2$$

$$\text{Si } t \in [2, 4[ \Rightarrow F(t) = 4 - t$$

$$\text{Si } t \geq 4 \Rightarrow F(t) = 0$$

luego:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t \in [0, 1[ \\ 2t - 2 & , \text{ si } t \in [1, 2[ \\ 4 - t & , \text{ si } t \in [2, 4[ \\ 0 & , \text{ si } t \geq 4 \end{cases}$$

a la función  $F(t)$  expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$$F(t) = 0 + (2t - 2 - 0) \mu(t - 1) + (4 - t - 2t + 2) \mu(t - 2) + (0 - 4 + t) \mu(t - 4)$$

$$F(t) = (2t - 2) \mu(t - 1) + (6 - 3t) \mu(t - 2) + (t - 4) \mu(t - 4)$$

$$F(t) = 2t \mu(t - 1) - 2 \mu(t - 1) + 6 \mu(t - 2) - 3t \mu(t - 2) + t \mu(t - 4) - 4 \mu(t - 4)$$

$$L\{F(t)\} = -2 \frac{d}{ds} L\{\mu(t - 1)\} - 2L\{\mu(t - 1)\} + 6L\{\mu(t - 2)\} + 3 \frac{d}{ds} L\{\mu(t - 2)\} -$$

$$- \frac{d}{ds} L\{\mu(t - 4)\} - 4L\{\mu(t - 4)\}$$

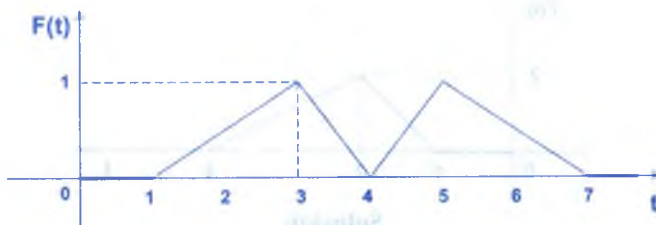
$$= -2 \frac{d}{ds} \left( \frac{e^{-s}}{s} \right) - \frac{2e^{-s}}{s} + 6 \frac{e^{-2s}}{s} + 3 \frac{d}{ds} \left( \frac{e^{-2s}}{s} \right) - \frac{d}{ds} \left( \frac{e^{-4s}}{s} \right) - 4 \frac{e^{-4s}}{s}$$

$$= \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{3e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{e^{-4s} - 3e^{-2s} + 2e^{-s}}{s^2}$$

11

Hallar la Transformada de la Laplace de la figura



**Solución**

Definiremos la función de acuerdo al gráfico

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{t-1}{2} & , \text{ si } 1 \leq t < 3 \\ 4-t & , \text{ si } 3 \leq t < 4 \\ t-5 & , \text{ si } 4 \leq t < 5 \\ \frac{7-t}{2} & , \text{ si } 5 < t < 7 \\ 0 & , \text{ si } t \geq 7 \end{cases}$$

Ahora expresaremos a la función  $F(t)$  en términos de la función escalar unidad, que es la forma mas simplificada.

$$F(t) = 0 + \left(\frac{t-1}{2} - 0\right) \mu(t-1) + \left(4-t - \frac{t-1}{2}\right) \mu(t-3) + (t-5 - 4 - t) \mu(t-4) \\ + \left(\frac{7-t}{2} - t + 5\right) \mu(t-5) + \left(0 - \frac{7-t}{2}\right) \mu(t-7)$$

$$F(t) = \frac{t}{2} \mu(t-1) - \frac{\mu(t-1)}{2} + \frac{9}{2} \mu(t-3) - \frac{5}{2} t \mu(t-3) + 2t \mu(t-4) - 9 \mu(t-4) \\ + \frac{17}{2} \mu(t-5) - \frac{3}{2} t \mu(t-5) - \frac{7}{2} \mu(t-7) + \frac{t}{2} \mu(t-7)$$

$$L\{F(t)\} = -\frac{d}{ds} L\{\mu(t-1)\} - \frac{e^{-s}}{2s} + \frac{9e^{-3s}}{2s} + \frac{5}{2} \frac{d}{ds} L\{\mu(t-3)\} - 2 \frac{d}{ds} L\{\mu(t-4)\} \\ - \frac{9e^{-4s}}{s} + \frac{17e^{-5s}}{2s} + \frac{3}{2} \frac{d}{ds} L\{\mu(t-5)\} - \frac{7}{2} \frac{e^{-7s}}{s} - \frac{d}{ds} L\{\mu(t-7)\} \\ = -\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-s}}{s}\right) + \frac{9e^{-3s} - e^{-s} + 17e^{-5s} - 7e^{7s}}{2s} + \frac{5}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-3s}}{s}\right) + 2 \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-4s}}{s}\right) \\ - \frac{3}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-5s}}{s}\right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-7s}}{s}\right) \\ = \frac{e^{-s}}{2s^2} - \frac{3e^{-3s}}{2s^2} + \frac{2e^{-4s}}{s^2} - \frac{3e^{-5s}}{s^2} + \frac{e^{-7s}}{s^2}$$

$$\therefore L\{F(t)\} = \frac{e^{-s} - 3e^{-3s} + 4e^{-4s} - 6e^{-5s} + 2e^{-7s}}{2s^2}$$

12) Calcular  $L\{|t - |t - 2||\}$

**Solución**

Definiendo el valor absoluto en la función  $F(t) = |t - |t - 2||$

$$F(t) = \begin{cases} 2 - t & , \text{ si } t < 1 \\ 2t - 2 & , \text{ si } 1 \leq t < 2 \\ 2 & , \text{ si } t \geq 2 \end{cases}$$

expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$$F(t) = 2 - 2t + (4t + 4) \mu(t - 1) + (4 - 2t) \mu(t - 2)$$

$$L\{F(t)\} = L\{2 - 2t + (4t + 4) \mu(t - 1) - 2(t - 2) \mu(t - 2)\}$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + 4e^{-s} L\{t\} - 2e^{-2s} L\{t\} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2}$$

$$\therefore L\{|t - |t - 2||\} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2}$$

13) Calcular  $L\{3^t \mu_2^2(t)\}$

**Solución**

$$L\{3^t\} = L\{e^{t \ln 3}\} = \frac{1}{s - \ln 3}$$

$$\text{también } \mu_{2(t)} = \mu_{(t-2)} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } t > 2 \\ 0 & , \text{ si } t \leq 2 \end{cases} ; \mu_2^2(t) = \mu^2(t-2) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t \leq 2 \\ 1 & , \text{ si } t > 2 \end{cases}$$

$$L\{3^t \mu_2^2(t)\} = \frac{e^{-2(s - \ln 3)}}{s - \ln 3}$$

14) Calcular  $L\{t e^{-t} \sin 4t \cdot \mu(e^t - 3)\}$

**Solución**

Analizando la función escalón se tiene:



$$\mu(e^t - 3) = \begin{cases} 0, & \text{si } e^t - 3 < 0 \\ 1, & \text{si } e^t - 3 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \ln 3 \\ 1, & \text{si } t \geq \ln 3 \end{cases}$$

$$\mu(e^t - 3) = \begin{cases} 0, & \text{si } t - \ln 3 < 0 \\ 1, & \text{si } t - \ln 3 \geq 0 \end{cases} \quad \dots (1)$$

$$\mu(t - \ln 3) = \begin{cases} 0, & \text{si } t - \ln 3 < 0 \\ 1, & \text{si } t - \ln 3 \geq 0 \end{cases} \quad \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene  $\mu(e^t - 3) = \mu(t - \ln 3)$

Si  $F(t) = t e^{-t} \operatorname{sen} 4t$ ,  $\mu(e^t - 3) = t e^{-t} \operatorname{sen} 4t$ ,  $\mu(t - \ln 3)$ , entonces

$$L\{t e^{-t} \operatorname{sen} 4t \cdot \mu(e^t - 3)\} = L\{t e^{-t} \operatorname{sen} 4t \cdot \mu(t - \ln 3)\}$$

ahora mediante la propiedad de Transformada se tiene:

$$L\{\operatorname{sen} 4t \cdot \mu(t - \ln 3)\} = e^{-s \ln 3} L\{\operatorname{sen}(4t + 4 \ln 3)\}$$

$$= e^{-s \ln 3} L\{\operatorname{sen} 4t \cdot \cos 4 \ln 3 + \cos 4t \cdot \operatorname{sen} 4 \ln 3\} = e^{-s \ln 3} \left[ \frac{4 \cos 4 \ln 3}{s^2 + 16} + \frac{\operatorname{sen}(4 \ln 3) \cdot s}{s^2 + 16} \right]$$

$$L\{t \operatorname{sen} 4t \cdot \mu(t - \ln 3)\} = -\frac{d}{ds} L\{\operatorname{sen} 4t \cdot \mu(t - \ln 3)\} = -\frac{d}{ds} \left[ e^{-s \ln 3} \left( \frac{4 \cos 4 \ln 3 + \operatorname{sen}(4 \ln 3) s}{s^2 + 16} \right) \right]$$

$$= \frac{\ln 3 \cdot \operatorname{sen}(4 \ln 3) s + (4 \ln 3 \cdot \cos 4 \ln 3 + \operatorname{sen} 4 \ln 3) s^2}{s^2 + 16} +$$

$$+ \frac{(8 \cos 4 \ln 3 - 16 \operatorname{sen} 4 \ln 3) s + 16(4 \ln 3 \cdot \cos 4 \ln 3 - \operatorname{sen} 4 \ln 3)}{(s^2 + 16)^2}$$

15 Calcular  $L\{t^2 e^{-t} \mu(|t^2 - 7| - 2)\}$

**Solución**

Analizando la función escalón se tiene:  $\mu(|t^2 - 7| - 2) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t^2 - 7| - 2 < 0 \\ 1 & \text{si } |t^2 - 7| - 2 \geq 0 \end{cases}$

$$\text{si } |t^2 - 7| < 2 \Rightarrow -2 < t^2 - 7 < 2 \Rightarrow 5 < t^2 < 9$$

$$5 < t^2 < 9 \Leftrightarrow 5 < t^2 \wedge t^2 < 9 \Leftrightarrow (t < -\sqrt{5} \vee t > \sqrt{5}) \wedge -3 < t < 3$$

$$(1) \dots \Leftrightarrow -3 < t < -\sqrt{5} \vee \sqrt{5} < t < 3$$

$$\text{si } |t^2 - 7| \geq 2 \Leftrightarrow t^2 - 7 \geq 2 \vee t^2 - 7 \leq -2 \Leftrightarrow t^2 \geq 9 \vee t^2 \leq 5$$

$$(2) \dots \Leftrightarrow t \geq 3 \vee t \leq -3 \vee -\sqrt{5} \leq t \leq \sqrt{5}$$

Luego la Transformada de Laplace de  $\mu(|t^2 - 7| - 2)$  existe en  $0 \leq t \leq \sqrt{5}$ ,  $\sqrt{5} < t < 3$

$$\text{y } t \geq 3 \text{ entonces: } \mu(|t^2 - 7| - 2) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{5} \\ 0, & \text{si } \sqrt{5} < t < 3 \\ 1, & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

$$L\{\mu(|t^2 - 7| - 2)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \mu(|t^2 - 7| - 2) dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} e^{-st} \mu(|t^2 - 7| - 2) dt + \int_{\sqrt{5}}^3 e^{-st} \mu(|t^2 - 7| - 2) dt + \int_3^{\infty} e^{-st} \mu(|t^2 - 7| - 2) dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} e^{-st} dt + 0 + \int_3^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-\sqrt{5}s}}{s} + \frac{1}{s}$$

$$L\{t^2 \mu(|t^2 - 7| - 2)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-\sqrt{5}s}}{s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{(\sqrt{5}s + 1)e^{-\sqrt{5}s} - (3s + 1)e^{-3s} + 1}{s^2} \right)$$

$$= \frac{9s^2 e^{-3s} + ((6 - 2\sqrt{5})s - 5s^2)e^{-\sqrt{5}s} - 2}{s^3}$$

$$L\{t^2 e^{-t} \mu(|t^2 - 7| - 2)\} = \frac{9(s+1)^2 e^{-3(s+1)} + (6 - 2\sqrt{5})(s+1) - 5(s+1)^2 e^{-\sqrt{5}(s+1)} - 2}{(s+1)^3}$$

16

Calcular  $L\{t\pi^{-2t} \cos t \cdot \text{sen } t \cdot \mu(t-4)\}$

**Solución**

$$\text{Sea } F(t) = t\pi^{-2t} \cos t \cdot \text{sen } t \cdot \mu(t-4) = \frac{t\pi^{-2t}}{2} \text{sen } 2t \cdot \mu(t-4) = \frac{t e^{-2 \ln \pi \cdot t} \text{sen } 2t \cdot \mu(t-4)}{2}$$

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{2} L\{t e^{-2 \ln \pi \cdot t} \text{sen } 2t \cdot \mu(t-4)\} = \frac{e^{-4s}}{2} L\{(t+4) e^{-2 \ln \pi (t+4)} \text{sen } 2(t+4)\} \quad \dots (1)$$

$$L\{(t+4) \text{sen } 2(t+4)\} = L\{(t+4)(\text{sen } 2t \cdot \cos 8 + \text{sen } 8 \cdot \cos 2t)\} \\ = L\{4(\text{sen } 2t \cdot \cos 8 + \text{sen } 8 \cdot \cos 2t)\} + L\{t(\text{sen } 2t \cdot \cos 8 + \text{sen } 8 \cdot \cos 2t)\}$$

$$= \frac{8 \cos 8 + 4s \cdot \text{sen } 8}{s^2 + 4} - \frac{d}{ds} L\{\cos 8 \cdot \text{sen } 2t + \text{sen } 8 \cdot \cos 2t\}$$

$$= \frac{8 \cos 8 + 4s \cdot \text{sen } 8}{s^2 + 4} + \frac{4 \cos 8 \cdot s + \text{sen } 8 \cdot s^2 - 4 \text{sen } 8}{(s^2 + 4)^2} \quad \dots (2)$$

$$L\{e^{-2 \ln \pi \cdot t} (t+4) \text{sen } 2(t+4)\} = \frac{8 \cos 8 + 4 \text{sen } 8 (s + 2 \ln \pi)}{(s + 2 \ln \pi)^2 + 4} + \\ + \frac{4 \cos 8 (s + 2 \ln \pi) + \text{sen } 8 (s + 2 \ln \pi)^2 - 4 \text{sen } 8}{(s + 2 \ln \pi)^2 + 4)^2} \quad \dots (3)$$

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\} = \frac{e^{-4s - 8 \ln \pi}}{2} \left[ \frac{8 \cos 8 + 4 \text{sen } 8 (s + 2 \ln \pi)}{(s + 2 \ln \pi)^2 + 4} + \frac{4 \cos 8 (s + 2 \ln \pi) + \text{sen } 8 (s + 2 \ln \pi)^2 - 4 \text{sen } 8}{((s + 2 \ln \pi)^2 + 4)^2} \right]$$

17

Evaluar:  $L\left\{ \int_{\mu}^{2\mu} \frac{\cosh 4\mu}{\pi\mu} \text{sen}\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \right\}$

**Solución**

Sea  $f(s) = L\left\{ \int_{\mu}^{2\mu} \frac{\cosh 4\mu}{\pi\mu} \text{sen}\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \right\} \quad \dots (1)$

$$\frac{\cosh 4\mu}{\pi\mu} = e^{-\mu \ln \pi} \left( \frac{e^{4\mu} + e^{-4\mu}}{2} \right) = \frac{e^{(4-\ln \pi)\mu} + e^{-(4+\ln \pi)\mu}}{2} \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2} L \left\{ \int_{\mu}^{2\mu} \left( \frac{e^{(4-\ln \pi)\mu} + e^{-(4+\ln \pi)\mu}}{2} \right) \operatorname{sen} 2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left[ L \left\{ \int_{\mu}^{2\mu} (e^{(4-\ln \pi)\mu} + e^{-(4+\ln \pi)\mu}) \operatorname{sen} 2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \right\} - \right. \\ &\quad \left. - L \left\{ \int_0^{\mu} (e^{(4-\ln \pi)\mu} + e^{-(4+\ln \pi)\mu}) \operatorname{sen} 2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \right\} \right] \quad \dots (3) \end{aligned}$$

$$L \left\{ \operatorname{sen} \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \right\} = e^{-\frac{\pi}{4}s} L \left\{ \operatorname{sen} \mu \cdot \cos \mu \right\} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{2} L \left\{ \operatorname{sen} 2\mu \right\} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} L \left\{ (e^{(4-\ln \pi)\mu} + e^{-(4+\ln \pi)\mu}) \operatorname{sen} \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \right\} &= \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln \pi)}}{(s-4+\ln \pi)^2 + 4} + \\ &+ \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s+4+\ln \pi)}}{(s+4+\ln \pi)^2 + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L \left\{ \int_0^{\mu} (e^{(4-\ln \pi)\mu} + e^{-(4+\ln \pi)\mu}) \operatorname{sen} 2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \right\} &= \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln \pi)}}{(s-4+\ln \pi)^2 + 4} + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s+4+\ln \pi)}}{(s+4+\ln \pi)^2 + 4} \right] = g(s) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L \left\{ \int_0^{2\mu} (e^{(4-\ln \pi)\mu} + e^{-(4+\ln \pi)\mu}) \operatorname{sen} 2\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) \mu \left(\mu - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \right\} &= \frac{1}{2} g\left(\frac{s}{2}\right) \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\left(\frac{s}{2}-4+\ln \pi\right)}}{\left(\frac{s}{2}-4+\ln \pi\right)^2 + 4} + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}\left(\frac{s}{2}+4+\ln \pi\right)}}{\left(\frac{s}{2}+4+\ln \pi\right)^2 + 4} \right] \quad \dots (5) \end{aligned}$$

ahora reemplazamos (5), (4) en (3)

$$f(s) = \frac{1}{2s} \left[ \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}-4+\ln \pi)}}{(\frac{s}{2}-4+\ln \pi)^2+4} + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}+4+\ln \pi)}}{(\frac{s}{2}+4+\ln \pi)^2+4} - \left( \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln \pi)}}{(s-4+\ln \pi)^2} + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}+4+\ln \pi)}}{(s+4+\ln \pi)^2+4} \right) \right]$$

18 Hallar  $L\{\cos t \cdot \ln t \cdot \delta(t - \pi)\}$

**Solución**

Aplicando la propiedad de la función Delta de Dirac para cualquier función continua G(t),

se tiene:  $\int_0^{\infty} \delta(t - a) \cdot G(t) dt = G(a)$

$$L\{\cos t \cdot \ln t \cdot \delta(t - \pi)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos t \cdot \ln t \cdot \delta(t - \pi) dt = e^{-\pi s} \cos \pi \ln \pi = -e^{-\pi s} \ln \pi$$

19 Calcular  $L\left\{ \int_0^{2t} \left( \int_0^{y-v} \frac{e^{-y} \operatorname{sen}^2(v-4)}{v-4} \mu(v^2-16) dy \right) dx \right\}$

**Solución**

Sea  $F(y) = \int_0^y \frac{e^{-v} \operatorname{sen}^2(v-4)}{(v-4)^2} \mu(v^2-16) dv$ , aplicando la transformada

$$L\{F(y)\} = L\left\{ \int_0^y \frac{e^{-v} \operatorname{sen}^2(v-4) \mu(v^2-16) dv}{(v-4)^2} \right\} = \frac{1}{s} L\left\{ \frac{e^{-v} \operatorname{sen}^2(v-4) \mu(v-4)}{(v-4)^2} \right\} \dots (1)$$

$$L\left\{ \frac{\operatorname{sen}^2(v-4) \mu(v-4)}{(v-4)^2} \right\} = e^{-4s} L\left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2} \right\} = e^{-4s} \left( \frac{s}{4} \ln \left( \frac{s^2}{s^2+4} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{s} \right) \right)$$

$$L\left\{ \frac{e^{-v} \operatorname{sen}^2(v-4) \mu(v-4)}{(v-4)^2} \right\} = e^{-4(s+1)} \left[ \frac{s+1}{4} \ln \left( \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4} \right) + \operatorname{arctg} \frac{2}{s+1} \right] \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L\{F(y)\} = \frac{e^{-4(s+1)}}{s} \left[ \frac{s+1}{4} \ln \left( \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4} \right) + \operatorname{arctg} \frac{2}{s+1} \right] = H(s) \dots (\alpha)$$



$$\text{como } L\{F(2y)\} = \frac{1}{2}H\left(\frac{s}{2}\right) \Rightarrow L\left\{\int_0^{\infty} F(2y)dy\right\} = \frac{1}{s}L\{F(2y)\} = \frac{1}{2s}H\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$L\left\{\int_0^{2x}\left(\int_0^x F(2y)dy\right)dx\right\} = -L\left\{\int_0^{-2x}\left(\int_0^x F(2y)dy\right)dx\right\} \quad \dots (3)$$

$$L\left\{\int_0^x\left(\int_0^x F(2y)dy\right)dx\right\} = \frac{1}{2s^2}H\left(\frac{s}{2}\right) \Rightarrow L\left\{\int_0^{2x}\left(\int_0^x F(2y)dy\right)dx\right\} = \frac{2}{s^2}H\left(\frac{s}{4}\right) \quad \dots (4)$$

$$\text{de (4) se tiene: } H(s) = \frac{e^{-4(s+1)}}{s} \left[ \frac{s+1}{4} \ln\left(\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4}\right) + \operatorname{arctg} \frac{2}{s+1} \right]$$

$$H\left(\frac{s}{4}\right) = 4 \frac{e^{-(s+4)}}{s} \left[ \frac{s+4}{16} \ln\left(\frac{(s+4)^2}{(s+4)^2+64}\right) + \operatorname{arctg} \frac{8}{s+4} \right] \quad \dots (5)$$

reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$L\left\{\int_0^{2x}\left(\int_0^x F(2y)dy\right)dx\right\} = \frac{8}{s^3} e^{-(s+4)} \left[ \frac{s+4}{16} \ln\left(\frac{(s+4)^2}{(s+4)^2+64}\right) + \operatorname{arctg} \frac{8}{s+4} \right]$$

$$\text{donde } F(2y) = \int_0^{2y} \frac{e^{-v^2} \operatorname{sen}^2(v-4)U(v^2-16)}{(v-4)^2} dv$$

(20) Probar que:  $\int_0^{\infty} x^p e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right), p > -1$

### Solución

$$\text{Sea } z = x^2 \Rightarrow dz = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x} = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$$

Si  $x=0, z=0$  y si  $x \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} z^{\frac{p}{2}} e^{-z} \cdot \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} x^p e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

21 Probar que:  $L\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$

**Solución**

Se conoce que  $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu$ , derivando con respecto a n

$$\Gamma'(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} \ln \mu d\mu, \quad \text{para } n = 1$$

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-\mu} \ln \mu d\mu, \quad \text{haciendo } \mu = st$$

$$\Gamma'(1) = s \int_0^{\infty} e^{-st} (\ln s + \ln t) dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} \ln s dt + s \int_0^{\infty} e^{-st} \ln t dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ln t dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \int_0^{\infty} e^{-st} \ln s dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \left( \frac{e^{-st} \ln s}{s} \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\Gamma'(1)}{s} + (0 - \frac{\ln s}{s}) = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\ln s}{s} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$$

$$\therefore L\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$$

22 Calcular  $\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx$ ,  $m, n, a > 0$

**Solución**

Hacemos  $\mu = ax^n \Rightarrow x^n = \frac{\mu}{a} \Rightarrow x = \left(\frac{\mu}{a}\right)^{1/n} \Rightarrow dx = \frac{1}{n} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{1/n-1} \frac{1}{a} d\mu$

si  $x = 0$ ;  $\mu = 0$ ; si  $x \rightarrow \infty$ ,  $\Rightarrow \mu \rightarrow \infty$ , sustituyendo en la integral

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{m/n} e^{-\mu} \frac{1}{an} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{1/n-1} d\mu = \left(\frac{1}{a}\right)^{m/n} \frac{1}{na} \left(\frac{1}{a}\right)^{1/n-1} \int_0^{\infty} \mu^{m/n} \mu^{1/n-1} e^{-\mu} d\mu$$

$$= \frac{1}{na^{m/n+1/n-1}} \int_0^{\infty} \mu^{m/n+1/n-1} e^{-\mu} d\mu = \frac{1}{na^{m/n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

23) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} x^m (\ln x)^n dx = -\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $m > -1$ .

**Solución**

Sea  $\ln x = -\mu \Rightarrow x = e^{-\mu} \Rightarrow dx = -e^{-\mu} d\mu$

Si  $x \rightarrow 0$ ,  $\Rightarrow \mu \rightarrow \infty$ ; si  $x \rightarrow 1$ ,  $\Rightarrow \mu \rightarrow 0$

$$\int_0^{\infty} x^m (\ln x)^n dx = \int_0^{\infty} e^{-m\mu} (-\mu)^n e^{-\mu} (-d\mu) = \int_0^{\infty} (-1)^n \mu^n e^{-(m+1)\mu} d\mu$$

Sea  $(m+1)\mu = z \Rightarrow d\mu = \frac{dz}{m+1}$ , además  $\mu = 0, z = 0, \mu \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^m (\ln x)^n dx &= \int_0^{\infty} (-1)^n \mu^n e^{-(m+1)\mu} d\mu = (-1)^n \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{m+1}\right)^n e^{-z} \frac{dz}{m+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{(n+1)-1} dz \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, m > -1 \end{aligned}$$

24) Demostrar que:  $L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ ,  $n > -1, s > 0$

**Solución**

$$L\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt, \text{ por definición de Transformada de Laplace}$$

Sea  $x = st, s > 0 \Rightarrow t = \frac{x}{s}$

$$L\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^n d\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

$$\therefore L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

25)

Demostrar que:  $L\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

**Solución**

Se conoce que:  $L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \Rightarrow L\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

$$\therefore L\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

26)

Si  $s > 0, n > 1$ , Demostrar que:  $L\left\{\frac{t^{n+1}}{1-e^{-t}}\right\} = \Gamma(n)\left(\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \frac{1}{(s+2)^n} + \dots\right)$

**Solución**

Se sabe que:  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ , para  $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = 1 + e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + \dots$$

$$\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}} = t^{n-1} + t^{n-1}e^{-t} + t^{n-1}e^{-2t} + t^{n-1}e^{-3t} + \dots$$

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\right\} = L\{t^{n-1} + t^{n-1}e^{-t} + t^{n-1}e^{-2t} + t^{n-1}e^{-3t} + \dots\}$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{s^n} + \frac{\Gamma(n)}{(s+1)^n} + \frac{\Gamma(n)}{(s+2)^n} + \dots = \Gamma(n)\left(\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \dots\right)$$

27)

Hallar  $L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$

**Solución**

Por medio de  $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0^+)$ , donde:

$$F(t) = \text{sen } \sqrt{t} \Rightarrow F'(t) = \frac{\cos \sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad F(0^+) = 0$$

$$L\left\{\frac{\cos \sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\right\} = s L\{\text{sen } \sqrt{t}\} - 0, \quad \text{donde} \quad L\{\text{sen } \sqrt{t}\} = \frac{\pi e^{-1/4s}}{2s^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-1/4s}$$

28 Calcular  $\int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{1-x^q}}$ ,  $q > 0$ ,  $\frac{p}{q} > 0$  y deducir el valor de  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

**Solución**

Sea  $1-x^q = z \Rightarrow x^q = 1-z \Rightarrow x = (1-z)^{1/q}$

$$dx = -\frac{1}{q}(1-z)^{\frac{1}{q}-1} dz, \quad \text{además} \quad x^{p-1} = (1-z)^{\frac{p-1}{q}}$$

Si  $x=0$ ,  $z=1$  y si  $x=1$ ,  $z=0$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^q}} &= -\frac{1}{q} \int_1^0 (1-z)^{\frac{p-1}{q}} \cdot (1-z)^{\frac{1}{q}-1} \frac{dz}{z^{1/2}} = \frac{1}{q} \int_0^1 z^{-1/2} (1-z)^{\frac{p-1}{q}} dz \\ &= \frac{1}{q} \int_0^1 z^{\frac{1}{2}-1} (1-z)^{\frac{p-1}{q}} dz = \frac{1}{q} B\left(\frac{1}{2}, \frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{p}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{p}{q})} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \left( \frac{\Gamma(\frac{p}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{p}{q})} \right) \end{aligned}$$

para el caso  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ , se tiene  $p=1$ ,  $q=4$ .

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{x^{1-1}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})} \right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})}{4\Gamma(\frac{3}{4})}$$

29 Evaluar  $I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$

**Solución**

Sea  $\mu = 1-t^2 \Rightarrow -2t dt = d\mu$ ;  $\mu = 1-t^2 \Rightarrow t = \sqrt{1-\mu} \Rightarrow dt = -\frac{d\mu}{2\sqrt{1-\mu}}$



Si  $t = 0$ ,  $\mu = 1$  y si  $t = 1$ ,  $\mu = 0$ .

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 2 \int_0^1 \mu^n \left( -\frac{d\mu}{2\sqrt{1-\mu}} \right) = \int_0^1 \mu^n (1-\mu)^{-1/2} d\mu$$

$$= \int_0^1 \mu^{(n+1)-1} (1-\mu)^{\frac{1}{2}-1} d\mu = B\left(n+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi} n!}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\dots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{n!}{\frac{(2n+1)}{2} \frac{(2n-1)}{2} \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1}$$

30 Si  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ , Demostrar que:

a)  $B(p, q) = \int_0^1 x^{-(p+q)} (x-1)^{q-1} dx$       b)  $B(p, q) = \int_0^{\infty} x^{p-1} (1+x)^{-(p+q)} dx$

Solución

a) Sea  $x = \frac{1}{z}$ , cuando  $x \rightarrow 0$ ;  $z \rightarrow \infty$ ; cuando  $x \rightarrow 1$ ;  $z \rightarrow 1$

como  $x = \frac{1}{z} \Rightarrow dx = -\frac{dz}{z^2}$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_{\infty}^1 \frac{1}{z^{p-1}} \left(1-\frac{1}{z}\right)^{q-1} \left(-\frac{dz}{z^2}\right) = \int_1^{\infty} z^{-(p+q)} (z-1)^{q-1} dz$$

$$= \int_1^{\infty} x^{-(p+q)} (z-1)^{q-1} dz \quad \therefore B(p, q) = \int_0^{\infty} x^{-(p+q)} (x-1)^{q-1} dx$$

b) Sea  $z = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{z}{z+1} \Rightarrow dx = \frac{dz}{(z+1)^2}$

cuando  $x \rightarrow 0$ ;  $z \rightarrow 0$  y cuando  $x \rightarrow 1$ ,  $z \rightarrow \infty$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^{p-1} \left(1-\frac{z}{z+1}\right)^{q-1} \frac{dz}{(z+1)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} z^{p-1} (1+z)^{-(p+q)} dz = \int_0^{\infty} x^{p-1} (x+1)^{-(p+q)} dx$$

$$\therefore B(p, q) = \int_0^{\infty} x^{p-1} (1+x)^{-(p+q)} dx$$

31) Demostrar que  $\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3} d\mu = \frac{16\sqrt{3}}{27} \pi$

**Solución**

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3} d\mu = 2 \int_0^2 \mu \left(1 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^3\right)^{1/3} d\mu$$

Sea  $x = \left(\frac{\mu}{2}\right)^3 \Rightarrow x^{1/3} = \frac{\mu}{2} \Rightarrow d\mu = \frac{2}{3} x^{-2/3} dx$ , para  $\mu = 0$ ;  $x = 0$ ,  $\mu = 2$ ,  $x = 1$ .

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3} d\mu = 2 \int_0^1 2x^{1/3} (1-x)^{1/3} \frac{2}{3} x^{-2/3} dx = \frac{8}{3} \int_0^1 x^{-1/3} (1-x)^{1/3} dx$$

como  $B(m, n) = \int_0^1 \mu^{m-1} (1-\mu)^{n-1} d\mu$  entonces  $\begin{cases} m-1 = -\frac{1}{3} \\ n-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3} d\mu = \frac{8}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)} \right) = \frac{8}{3} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} \right) = \frac{8}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{9} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9} \left( -\frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}} \right) = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$$

$$\therefore \int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3} d\mu = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$$

32) Demostrar que:  $\int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt = (b-a)^{p+q+1} B(p+1, q+1)$ , donde  $p > -1, q > -1, b > a$ .

**Solución**

Sea  $t = \mu + a \Rightarrow -t = -\mu - a \Rightarrow b - t = b - \mu - a$

si  $t = a, \mu = 0$  ;  $t = b, \mu = b - a$ .

$$\int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt = \int_a^{b-a} \mu^p (b-a-\mu)^q d\mu \quad \dots (1)$$

Sea  $x = \frac{\mu}{b-a} \Rightarrow \mu = (b-a)x \Rightarrow d\mu = (b-a)dx$

Si  $\mu = 0, x = 0$ , si  $\mu = b - a, x = 1$

$$\begin{aligned} \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt &= \int_0^{b-a} \mu^p (b-a-\mu)^q d\mu = \int_0^1 (b-a)^p x^p [(b-a)-(b-a)x]^q (b-a)dx \\ &= \int_0^1 (b-a)^{p+1} x^p (b-a)^q (1-x)^q dx = (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 x^p (1-x)^q dx \\ &= (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 x^{(p+1)-1} (1-x)^{(q+1)-1} dx = (b-a)^{p+q+1} B(p+1, q+1) \end{aligned}$$

33

Dado  $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\text{sen } p\pi}$ , Demostrar que  $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\text{sen } p\pi}$

**Solución**

Hacemos  $\frac{x}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow dx = \frac{dy}{(1-y)^2}$

Si  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ , y si  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\text{sen } p\pi} &= \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^{p-1}}{1+\frac{y}{1-y}} \frac{dy}{(1-y)^2} = \int_0^1 \frac{y^{p-1}(1-y)dy}{(1-y)^{p-1}(1-y)^2} = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p} dy \\ &= \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{(1-p)-1} dy = B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(p+1-p)} = \Gamma(p)\Gamma(1-p) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

34) Mostrar que:  $\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right) = \frac{\pi}{\cos p\pi}$

**Solución**

Del ejercicio anterior  $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}+p\right)\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}+p\right)\pi} = \frac{\pi}{\cos p\pi}$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right) = \frac{\pi}{\cos p\pi}$$

35) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, 0 < p < 1$

**Solución**

Expresaremos  $\frac{1}{x^p} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}} = \frac{(p-1)!}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}}$

$$\frac{1}{x^p} = \frac{(p-1)!}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}} = \frac{1}{\Gamma(p)} L\{t^{p-1}\} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{p-1} dt$$

$$\frac{\cos x}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{p-1} \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^p} &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{p-1} \cos x dt \right) dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} \left( \int_0^{\infty} e^{-tx} \cos x dx \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} L\{\cos x\} dt = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} \frac{t}{t^2+1} dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{t^p}{1+t^2} dt$$

Haciendo  $z = t^2 \Rightarrow t = z^{1/2} \Rightarrow dt = \frac{z^{-1/2}}{2} dz$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{z^{p/2}}{1+z} \cdot \frac{z^{-1/2}}{2} dz = \frac{1}{2\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{p+1}{2}-1}}{z+1} dz$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(p)} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{p+1}{2} \pi} = \frac{\pi}{2\Gamma(p) \cos \frac{p\pi}{2}}$$

por lo tanto  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p) \cos \frac{p\pi}{2}}$

36 Calcular  $\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^{15} \sqrt[5]{t^{14}(1-t)}}$

**Solución**

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^{15} \sqrt[5]{t^{14}(1-t)}} = \int_0^1 \frac{t^{-14/5} (1-t)^{-1/5}}{t+1} dt$$

Sea  $u = \frac{1}{1+t} \Rightarrow t = \frac{1-u}{u} \Rightarrow dt = -\frac{du}{u^2}$ ; cuando  $t \rightarrow 0$ ;  $u \rightarrow 1$ ;  $t \rightarrow 1$ ;  $u \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^{15} \sqrt[5]{t^{14}(1-t)}} = \int_{1/2}^1 \frac{\frac{1-u}{u}^{-14/5} (1-\frac{1-u}{u})^{-1/5}}{\frac{1-u}{u} + 1} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_{1/2}^1 (1-u)^{-14/5} (2u-1)^{-1/5} du$$

Sea  $w = 2u - 1 \Rightarrow u = \frac{w+1}{2} \Rightarrow du = \frac{dw}{2}$

cuando  $u \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $w \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow 1$ ,  $w \rightarrow 1$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^{15} \sqrt[5]{t^{14}(1-t)}} = \int_{0/2}^1 (1-u)^{-14/5} (2u-1)^{-1/5} du = \int_0^1 \frac{(1-w)^{-14/5} w^{-1/5} dw}{2^{-14/5} \cdot 2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^{1/15}} \int_0^1 (1-w)^{\frac{1}{15}-1} w^{\frac{14}{15}-1} dw = \frac{1}{2^{1/15}} B\left(\frac{1}{15}, \frac{14}{15}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)\Gamma\left(\frac{14}{15}\right)}{2^{1/15}\Gamma\left(\frac{1}{15} + \frac{14}{15}\right)} \\
 &= \frac{1}{2^{1/15}} \Gamma\left(\frac{1}{15}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{15}\right) = \frac{\pi}{2^{1/15} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^{1/5} \sqrt[5]{t^{14}(1-t)}} = \frac{\pi}{2^{1/15} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)}$$

37) Calcular  $\int_0^\infty \frac{t^{a-1} dt}{1+t^b}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

**Solución**

Hacemos  $u = \frac{t^b}{1+t^b} \Rightarrow t^b = \frac{u}{1-u} \Rightarrow t = \left(\frac{u}{1-u}\right)^{1/b} \Rightarrow dt = \frac{1}{b} \left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{1}{b}-1} \frac{du}{(1-u)^2}$

$t^b = \frac{u}{1-u} \Rightarrow 1+t^b = 1 - \frac{u}{1-u} = \frac{1}{1-u}$ , cuando  $t \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow 0$  y si  $t \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 1$

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \int_0^1 \frac{\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{a-1}{b}}}{\frac{1}{1-u}} \cdot \frac{1}{b} \left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{1}{b}-1} \frac{du}{(1-u)^2} = \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{u^{\frac{a-1}{b}} \cdot u^{\frac{1}{b}-1} du}{(1-u)^{\frac{a-1}{b} + \frac{1}{b} + 1}}$$

$$= \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{u^{\frac{a}{b}-1} du}{(1-u)^{\frac{a}{b}}} = \frac{1}{b} \int_0^1 u^{\frac{a}{b}-1} \cdot (1-u)^{\left(1-\frac{a}{b}\right)-1} du = \frac{1}{b} B\left(\frac{a}{b}, 1 - \frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{b} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)\Gamma\left(1 - \frac{a}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b} + 1 - \frac{a}{b}\right)} = \frac{1}{b} \Gamma\left(\frac{a}{b}\right)\Gamma\left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{b \operatorname{sen}\left(\frac{a\pi}{b}\right)}$$

38)

Demostrar que  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n+2}{2n}\right)}$

**Solución**

Por definición  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx$

Sea  $1-x^n = u \Rightarrow x^n = 1-u \Rightarrow x = (1-u)^{1/n}$ , de donde  $dx = -\frac{1}{n}(1-u)^{\frac{1}{n}-1} du$

Si  $x = 0, u = 1$  y si  $x = 1, u = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} &= \int_1^0 \frac{-\frac{1}{n}(1-u)^{\frac{1}{n}-1} du}{u^{1/2}} = \frac{1}{n} \int_0^1 u^{-1/2} (1-u)^{\frac{1}{n}-1} du \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 u^{-1/2-1} (1-u)^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{n})}{n \Gamma(\frac{n+2}{2n})} \end{aligned}$$

39

Verificar que  $\int_0^\infty \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p)$ ,  $|p| < 1$

**Solución**

Sea  $u = t - 1 \Rightarrow$  si  $t \rightarrow 1, u \rightarrow 0$  y si  $t \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty$ , entonces

$$\int_0^\infty \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \int_0^\infty \frac{u^p du}{(u+1)^2} \quad \dots (1)$$

Sea  $v = \frac{1}{1+u} \Rightarrow 1+u = \frac{1}{v} \Rightarrow du = -\frac{dv}{v^2}$   
 si  $u \rightarrow 0, v = 1$  y si  $u \rightarrow \infty, v = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(t-1)^p}{t^2} dt &= \int_1^0 \frac{u^p du}{(u+1)^2} = \int_1^0 \left(\frac{1-v}{v}\right)^p v^2 \left(-\frac{dv}{v^2}\right) = \int_0^1 (1-v)^p v^{-p} dv \\ &= \int_0^1 v^{(1-p)-1} (1-v)^{(1+p)-1} dv = B(1-p, 1+p) = \frac{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(1-p+1+p)} = \frac{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(2)} \end{aligned}$$

$$= \Gamma(1-p)\Gamma(1+p) \text{ donde } \Gamma(2) = 1$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p) \quad , \quad |p| < 1$$

40) Calcular  $\int_0^{\infty} t^a (1+t)^b dt$

**Solución**

$$\text{Sea } t = \operatorname{tg}^2 \theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \sqrt{t} \Rightarrow d\theta = \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1+t}}$$

$$dt = 2\sqrt{t}(1+t)d\theta = 2\operatorname{tg} \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta; \quad \text{Si } t \rightarrow 0, \Rightarrow \theta \rightarrow 0; \quad \text{si } t \rightarrow \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} t^a (1+t)^b dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2a} \theta \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^b \cdot 2\operatorname{tg} \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2a+1} \theta \cdot \sec^{2b+2} \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} \theta)^{2a+1} d\theta}{(\cos \theta)^{2a+1} (\cos \theta)^{2b+2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2a+1} \theta \cdot \cos^{-2a-2b-3} \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} \theta)^{2(a+1)-1} \cdot (\cos \theta)^{2(-a-b-1)-1} d\theta = 2B(a+1, -a-b-1)$$

$$= \frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(a+1-a-b-1)} = \frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-b)}$$

41) Calcular  $L\{J_0(\sqrt{t})\}$

**Solución**

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{t^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots$$

$$J_0(\sqrt{t}) = 1 - \frac{t}{2^2} + \frac{t^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{t^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots$$

$$L\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{4s}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{4s}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{4s}\right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{4s}\right)^n}{n!} = \frac{e^{-s/4}}{s}, \quad s > 0$$

$$\therefore L\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{e^{-s/4}}{s}, \quad s > 0$$

42) Demostrar que:  $L\{e^{-at} J_0(bt)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2as + a^2 + b^2}}$

**Solución**

$$J_0(bt) = 1 - \frac{b^2 t^2}{2^2} + \frac{b^4 t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{b^6 t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{b^8 t^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots$$

$$L\{J_0(bt)\} = \frac{1}{s} - \frac{b^2}{2s^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot b^4}{2 \cdot 4 \cdot s^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot b^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot s^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot b^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot s^9} - \dots$$

$$= \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{s}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{b}{s}\right)^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{b}{s}\right)^6 + \dots \right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{s^2}}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + b^2}}$$

$$\therefore L\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + b^2}}; \text{ ahora aplicamos la propiedad de traslación}$$

$$L\{e^{-at} J_0(bt)\} = \frac{1}{\sqrt{(s+a)^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2as + a^2 + b^2}}$$

43) Demostrar que:  $L\{J_0(a\sqrt{t^2 - b^2})\} = \frac{e^{-b\sqrt{s^2 + a^2}}}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \quad t > b$

**Solución**

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \text{ por definición}$$

$$J_0(a\sqrt{t^2 - b^2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{a\sqrt{t^2 - b^2}}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} (t^2 - b^2)^k \left(\frac{a}{2}\right)^{2k}$$

$$\begin{aligned}
 (t^2 - b^2)^k &= t^{2k} - k(t^2)^{k-1}b^2 + \frac{k(k-1)}{2!}(t^2)^{k-2}b^4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}(t^2)^{k-3}b^6 + \dots \\
 L\{J_0(a\sqrt{t^2 - b^2})\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \left[ \frac{(2k)!}{s^{2k+1}} - \frac{k(2k-2)!}{2^{2k-1}} b^2 + \frac{k(k-1)(2k-4)b^4}{2!s^{2k-3}} - \dots + \frac{b^{2n}}{s} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \left[ \frac{(k+1)(k+2)\dots(2k)}{s^{2k+1}} - \frac{k(k+1)\dots(2k)b^2}{2k(2k-1)s^{2k-1}} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k(k-1)(k+1)(k+2)\dots(2k)b^4}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)2!s^{2k-3}} - \dots + \frac{b^{2n}}{s} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (b\sqrt{s^2 + a^2})^k \cdot \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^k (\sqrt{s^2 + a^2})^k}{k!} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} e^{-b\sqrt{s^2 + a^2}} \quad \therefore L\{J_0(a\sqrt{t^2 - b^2})\} = \frac{e^{-b\sqrt{s^2 + a^2}}}{\sqrt{s^2 + a^2}}
 \end{aligned}$$

44) Calcular  $L\left\{t \int_0^t J_0(a\sqrt{\mu}) d\mu\right\}$

**Solución**

Sabemos que:  $L\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{e^{-1/4s}}{s}$ ,  $s > 0$

$$L\left\{\int_0^t J_0(a\sqrt{u}) du\right\} = \frac{1}{s} L\{J_0(a\sqrt{u})\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s^2}$$

$$L\left\{t \int_0^t J_0(a\sqrt{u}) du\right\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s^2} \right) = \frac{(8s - a^2)e^{-\frac{a^2}{4s}}}{4s^4}$$

$$\therefore L\left\{t \int_0^t J_0(a\sqrt{u}) du\right\} = \frac{(8s - a^2)e^{-\frac{a^2}{4s}}}{4s^4}$$

45) Si  $L\{F(u)\} = f(s)$ , calcular  $L\left\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u) du\right\}$



**Solución**

Como  $J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$

$$J_0(2\sqrt{u(t-u)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (u(t-u))^k}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^k (t-u)^k}{(k!)^2}$$

$$J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} u^k (t-u)^k F(u)$$

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \int_0^t u^k (t-u)^k F(u)du$$

$$L\left\{ \int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} L\left\{ \int_0^t u^k (t-u)^k F(u)du \right\} \text{ por convolución}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} L\{t^k * t^k F(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left[ \frac{k!}{s^{k+1}} (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} (f(s)) \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{k!}{s^{k+1}} \right) f^{(k)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k!)^2} \cdot \frac{f^{(k)}(s)}{s^{k+1}}$$

$$\therefore L\left\{ \int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(s)}{k!s^{k+1}}$$

46

Demostrar que  $\int_0^{\infty} e^{-t} J_0(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Solución**

Se conoce que:  $L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} J_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 1, \text{ tenemos}$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \int_0^{\infty} e^{-st} J_0(t) dt = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \int_0^{\infty} e^{-t} J_0(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(47) Probar que:  $\int_0^{\infty} J_n(t) dt = 1$

**Solución**

Se conoce que:  $L\{J_n(t)\} = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$ , ahora aplicamos la definición  $L\{J_n(t)\}$

$$L\{J_n(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} J_n(t) dt = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} J_n(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}} = 1 \quad \therefore \int_0^{\infty} J_n(t) dt = 1$$

(48) Calcular  $\int_0^{\infty} t e^{-3t} J_0(4t) dt$

**Solución**

$$L\{J_0(4t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+16}} \Rightarrow L\{t J_0(4t)\} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{s^2+16}} \right)$$

de donde  $L\{t J_0(4t)\} = \frac{s}{(s^2+16)^{3/2}}$ , aplicamos la definición de transformada

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t J_0(4t) dt = \frac{s}{(s^2+16)^{3/2}}, \text{ tomando límite cuando } s \rightarrow 3$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \int_0^{\infty} e^{-st} t J_0(4t) dt = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s}{(s^2+16)^{3/2}} = \frac{3}{125} \quad \therefore \int_0^{\infty} e^{-3t} t J_0(4t) dt = \frac{3}{125}$$

(49) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \cos \mu d\mu = \text{sent}$

**Solución**

Sea  $F(t) = \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \cos \mu d\mu$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= L\left\{ \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \cos \mu d\mu \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \cos \mu d\mu \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \cos \mu \left( \int_0^{\infty} e^{-st} J_0(2\sqrt{t\mu}) dt \right) d\mu = \int_0^{\infty} \cos \mu L\{J_0(2\sqrt{t\mu})\} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} \cos \mu \cdot \frac{e^{-\mu/s}}{s} d\mu = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-u/s} \cos u du = \frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right), \text{ donde} \end{aligned}$$

$$f(s) = L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \left( \frac{s}{s^2 + 1} \right) = \frac{1}{s^2 + 1} = L\{\sin t\}$$

Luego  $L\{F(t)\} = L\{\sin t\}$  entonces  $f(t) = \sin t$

$$\therefore \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \cos \mu d\mu = \sin t$$

50 Demostrar que:  $\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \sin \mu d\mu = \cos t$

**Solución**

Sea  $F(t) = \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \sin \mu d\mu$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \sin \mu d\mu \right) dt = \int_0^{\infty} \sin \mu \left( \int_0^{\infty} e^{-st} J_0(2\sqrt{t\mu}) dt \right) d\mu \\ &= \int_0^{\infty} \sin \mu L\{J_0(2\sqrt{t\mu})\} d\mu = \int_0^{\infty} \sin \mu \cdot \frac{e^{-\mu/s}}{s} d\mu = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-\mu/s} \sin \mu d\mu = \frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right) \dots (1) \end{aligned}$$

de donde  $f(s) = L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{s^2}{s^2 + 1}$

$$\text{como } L\{F(t)\} = \frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \left( \frac{s^2}{s^2+1} \right) = \frac{s}{s^2+1} = L\{\cos t\}$$

Luego  $L\{F(t)\} = L\{\cos t\}$  entonces  $f(t) = \cos t$

$$\therefore \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) \sin \mu \, d\mu = \cos t$$

51

Demostrar que:  $\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) J_0(\mu) \, d\mu = J_0(t)$

**Solución**

$$\text{Se conoce que: } L\{J_0(a\sqrt{t})\} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s}$$

$$L\{J_0(2\sqrt{t\mu})\} = L\{J_0(2\sqrt{\mu}\sqrt{t})\} = \frac{e^{-\mu/s}}{s} \quad \text{donde } a = 2\sqrt{\mu}$$

$$L\left\{ \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) J_0(\mu) \, d\mu \right\} = \int_0^{\infty} e^{-\mu/s} \left( \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) J_0(\mu) \, d\mu \right) dt$$

$$= \int_0^{\infty} J_0(\mu) \left( \int_0^{\infty} e^{-st} J_0(2\sqrt{t\mu}) \, dt \right) d\mu = \int_0^{\infty} J_0(\mu) \frac{e^{-\mu/s}}{s} \, d\mu$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-\mu/s} J_0(\mu) \, d\mu = \frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right), \quad \text{donde } f(s) = L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$L\left\{ \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) J_0(\mu) \, d\mu \right\} = \frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s^2}+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = L\{J_0(t)\}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\mu}) J_0(\mu) \, d\mu = J_0(t)$$

52

Calcular  $\int_0^{\infty} J_0(x^6) \, dx$ , reduciendo el resultado a su mínima expresión.

**Solución**

Sea  $F(t) = \int_0^{\infty} J_0(x^6 t) dx$ , entonces su transformada es:

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^{\infty} J_0(x^6 t) dt \right) dx = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-st} J_0(x^6 t) dt \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} L\{J_0(x^6 t)\} dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{s^2 + x^{12}}} \end{aligned}$$

hacemos  $x^6 = s \cdot \operatorname{tg} \theta \Rightarrow 6x^5 dx = s \cdot \sec^2 \theta d\theta \Rightarrow dx = \frac{s \cdot \sec^2 \theta d\theta}{6x^5}$

$$x = (s \cdot \operatorname{tg} \theta)^{1/6} \Rightarrow x^5 = (s \cdot \operatorname{tg} \theta)^{5/6} \Rightarrow dx = \frac{s \cdot \sec^2 \theta d\theta}{6(s \cdot \operatorname{tg} \theta)^{5/6}}$$

cuando  $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$  y cuando  $x \rightarrow +\infty, \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

ahora reemplazando en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^{12} + s^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{s^2 \operatorname{tg}^2 \theta + s^2}} \cdot \frac{s \cdot \sec^2 \theta d\theta}{6 \cdot s^{5/6} \operatorname{tg}^{5/6} \theta} \\ &= \frac{1}{6s^{5/6}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sec \theta d\theta}{\operatorname{tg}^{5/6} \theta} = \frac{1}{6s^{5/6}} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{-5/6} \theta \cdot \cos^{\frac{5}{6}-1} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{6s^{5/6}} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{\frac{1}{6}-1} \theta \cdot \cos^{\frac{5}{6}-1} \theta d\theta = \frac{1}{6s^{5/6}} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}\right) \\ &= \frac{1}{6s^{5/6}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{12} + \frac{5}{12}\right)} = \frac{1}{12s^{5/6}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)}{12\sqrt{\pi} s^{5/6}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(x^6 t) dt = F(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)}{12\sqrt{\pi}} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/6}}\right\} \quad \dots (2)$$



como  $L\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ ,  $a > -1 \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{a+1}}\right\} = \frac{t^a}{\Gamma(a+1)}$

como  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/6}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{(-1/6)+1}}\right\} = \frac{t^{-1/6}}{\Gamma(-1/6+1)} = \frac{1}{\Gamma(5/6)t^{1/6}} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/6}}\right\} = \frac{1}{\Gamma(5/6)t^{1/6}} \dots (3)$

ahora reemplazando (3) en (2) se tiene:

$$\int_0^{\infty} J_0(x^6 t) dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{6})t^{1/6}}, \text{ tomando límite cuando } t \rightarrow 1, \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^{\infty} J_0(x^6 t) dx = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{5}{6})t^{1/6}} \Rightarrow \int_0^{\infty} J_0(x^6) dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{5}{6})} \dots (4)$$

además tenemos  $2^{2x-1} \Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$ , entonces

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1} \Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}, \text{ por lo tanto se tiene:}$$

$$\Gamma(\frac{5}{6}) = \Gamma(2(\frac{5}{6})) = \frac{2^{\frac{5}{6}-1} \Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}} = \frac{2^{-1/6} \Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \Gamma(\frac{5}{6}) = \frac{2^{-1/6} \Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}} \dots (5)$$

reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$\int_0^{\infty} J_0(x^6) dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi} 2^{-1/6} \Gamma(\frac{5}{6})\Gamma(\frac{11}{12})} = \frac{2^{1/6} \Gamma(\frac{1}{12})}{12\Gamma(\frac{11}{12})} = \frac{2^{1/6} [\Gamma(\frac{1}{12})]^2}{12\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{11}{12})} \dots (6)$$

pero  $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\text{sen } p\pi}$ , entonces  $\Gamma(\frac{11}{12})\Gamma(\frac{1}{12}) = \Gamma(\frac{11}{12})\Gamma(1 - \frac{11}{12}) = \frac{\pi}{\text{sen } \frac{11\pi}{12}} \dots (7)$

reemplazando (7) en (6) se tiene: 
$$\int_0^x J_0(x^6) dx = \frac{2^{1/6} (\Gamma(\frac{1}{12}))^2}{12 \operatorname{sen} \frac{11\pi}{12}} = \frac{\sqrt[6]{2} (\Gamma(\frac{11}{12}))^2}{12\pi \operatorname{sen} \frac{11\pi}{12}}$$

53) Demostrar que:  $J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sen} t$

**Solución**

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left( 1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} \dots \right)$$

$$J_{1/2}(t) = \frac{t^{1/2}}{2^{1/2} \Gamma(\frac{1}{2}+1)} \left( 1 - \frac{t^2}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots \right) = \frac{t^{1/2}}{2^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} \left( 1 - \frac{t^2}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2} t}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}} \left( 1 - \frac{t^2}{2 \cdot 3} + \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left( t - \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^5}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} \dots \right)$$

$$\therefore J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sen} t$$

54) Demostrar que:  $\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$

**Solución**

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \text{ por definición}$$

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(-1)^{k+1}}{((k+1)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = -J_1(x)$$

$$\therefore \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

55) Demostrar que:  $\frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$

**Solución**

Se conoce que:  $\Gamma(k+p+1) = (k+p)\Gamma(k+p)$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}, \text{ multiplicando por } x^p$$

$$x^p J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x^{2k+2p}}{2^{2k+p}}\right)$$

$$\frac{d(x^p J_p(x))}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+p)x^{2k+2p-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)2^{2k+p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2(k+p+1)x^{2k+2p+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+2)2^{2k+p+2}}$$

$$= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+p+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+2)2^{2k+p+1}}$$

$$= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p+1} = x^p J_{p-1}(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$$

**11.12. EJERCICIOS PROPUESTOS.-**

1) Sea  $F(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 2 \\ 6, & 2 < t < 4 \end{cases}$ , donde F(t) tiene periodo 4.

a) Hacer la gráfica de F(t)

b) Hallar  $L\{F(t)\}$

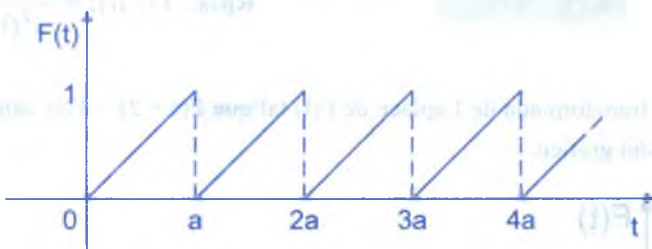
Rpta.  $L\{F(t)\} = \frac{3 - 3e^{-2s} - 6se^{-4s}}{s^2(1 - e^{-4s})}$

- ② Hallar  $L\{F(t)\}$ , donde  $F(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$  y  $F(t+2) = F(t)$ , para  $t > 0$ .

**Rpta.**  $L\{F(t)\} = \frac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2(1 - e^{-2s})}$

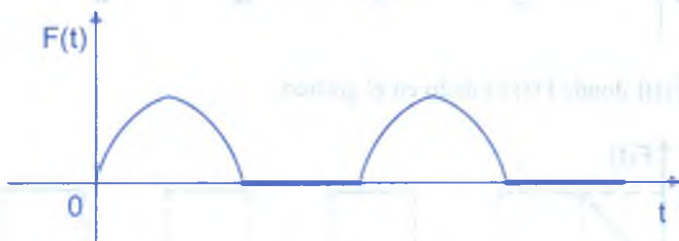
- ③ Demostrar que la transformada de Laplace de la función  $F(t)$  que se muestra en la figura diente de sierra es:

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$$

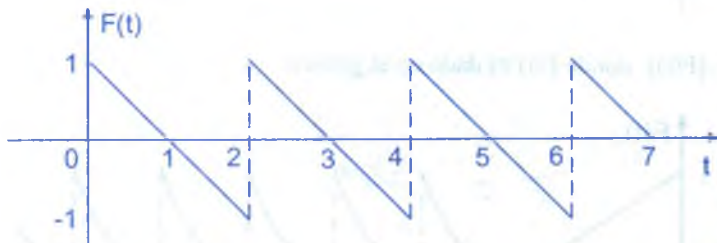


- ④ Suponga que  $F(t)$  es la rectificación de semionda sen  $kt$ , que se muestra en la figura. Demostrar que:

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{(s^2 + k^2)(1 - e^{-\frac{\pi s}{k}})}$$

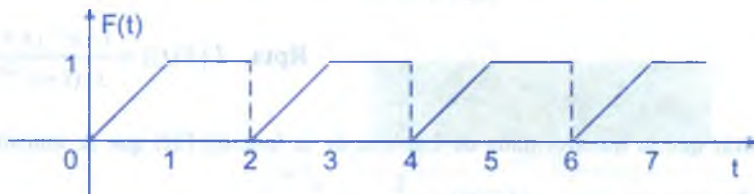


- ⑤ Hallar  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t)$  se muestra en la figura.



**Rpta.**  $L\{F(t)\} = \frac{(s+1)e^{-2s} + s - 1}{s^2(1 - e^{-2s})}$

- 6 Hallar  $L\{F(t)\}$ , donde  $F(t)$  se muestra en la figura.



Rpta.  $L\{F(t)\} = \frac{1 - e^{-s} - se^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})}$

- 7 Calcular la transformada de Laplace de  $F(t)$  tal que  $F(t+2) = F(t)$ , donde  $F(t)$  es el pulso parabólico del gráfico.



- 8 Hallar  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t)$  es dado en el gráfico.

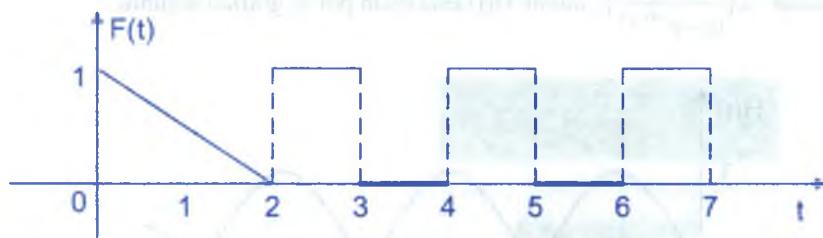


- 9 Hallar  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t)$  es dado en el gráfico.

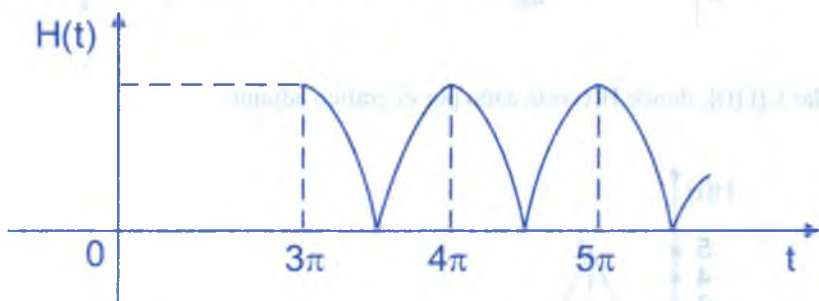




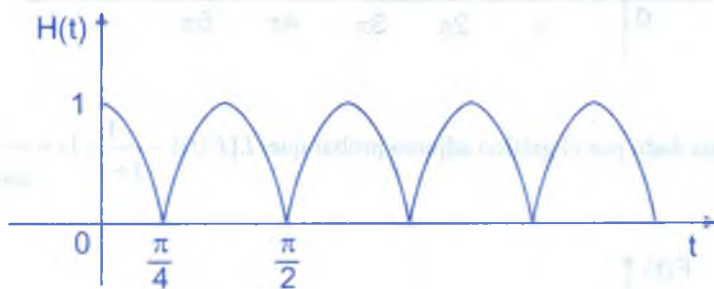
- 10 Hallar  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t)$  es dado en el gráfico.



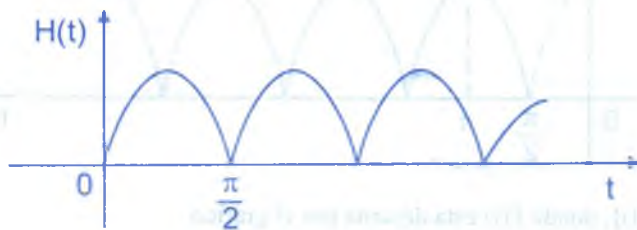
- 11 Si  $H(t)$  esta dado por el gráfico, calcular  $L\{H(t)\}$ .



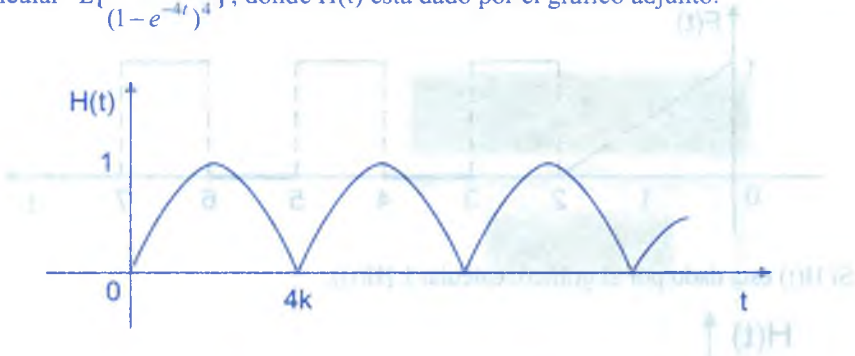
- 12 Evaluar  $L\left\{\frac{H(t)}{(1-e^{-4t})^4}\right\}$ , donde  $H(t)$  es la función que esta dado por el gráfico adjunto.



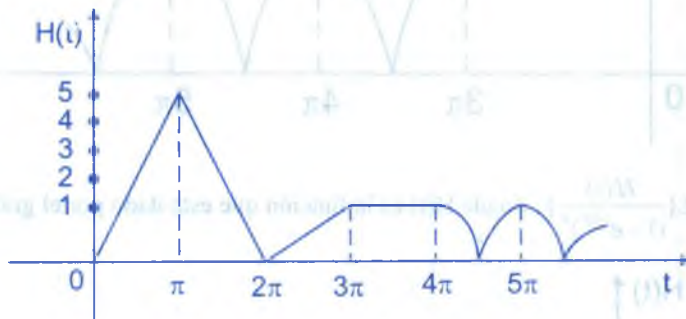
- 13  $H(t)$  esta dado por el gráfico adjunto, calcular  $L\{2 \cosh 4t \cdot H(t)\}$ .



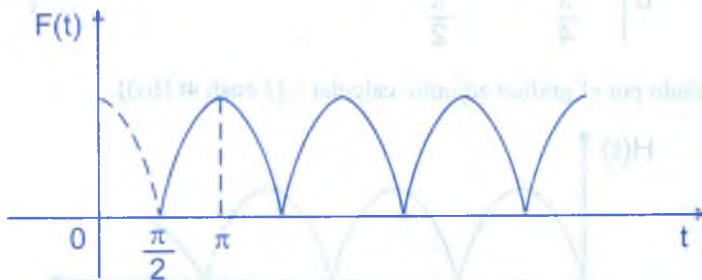
- 14) Calcular  $L\left\{\frac{e^{6t}H(t)}{(1-e^{-4t})^4}\right\}$ , donde  $H(t)$  esta dado por el gráfico adjunto.



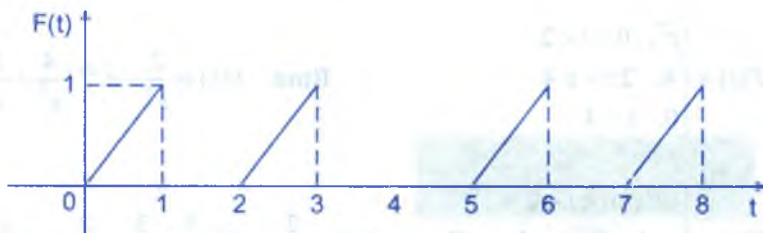
- 15) Hallar  $L\{F(t)\}$ , donde  $H(t)$  esta dado por el gráfico adjunto.



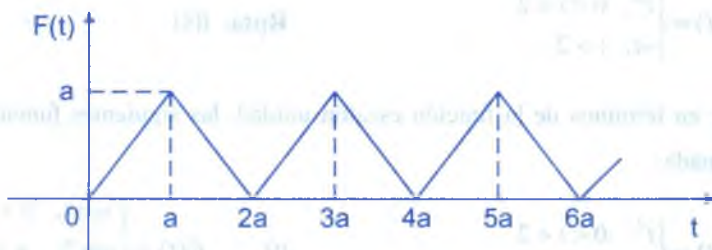
- 16) Si  $F(t)$  esta dado por el gráfico adjunto probar que  $L\{F(t)\} = \frac{1}{1+s^2} \left[ s + \frac{1}{\sinh(\frac{\pi s}{2})} \right]$



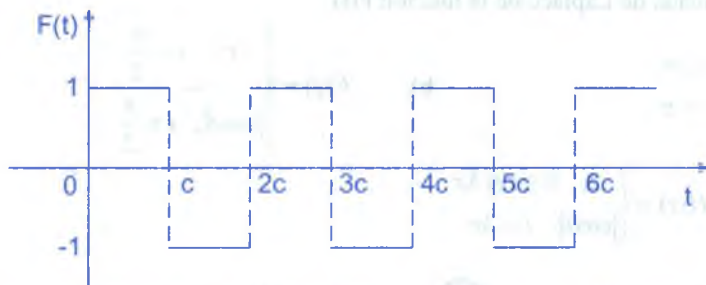
- 17) Hallar  $L\{F(t)\}$ , donde  $F(t)$  esta descrita por el gráfico.



- 18) Hallar  $L\{F(t)\}$  donde  $F(t)$  se muestra en la figura.



- 19) Encontrar la transformada de Laplace de la función onda cuadrada, mostrada en la figura.



Rpta.  $L\{F(t)\} = \frac{1}{s} \operatorname{tgh}\left(\frac{cs}{2}\right)$

- 20) Considera la función  $F$  definida por  $F(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$ ,  $F(t+2) = F(t)$  graficar  $F(t)$  y calcular  $L\{F(t)\}$ .

- 21) Expresar  $F(t)$  en términos de la función escalón unidad y obtener  $L\{F(t)\}$ .

a)  $F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1 \\ 4, & t > 1 \end{cases}$

Rpta.  $f(s) = \frac{2}{s^3} + e^{-s} \left( \frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right)$

$$b) \quad F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ 4, & 2 \leq t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$

$$\text{Rpta. } f(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-2s} \left( \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) - \frac{4e^{-4s}}{s}$$

$$c) \quad F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ t-1, & 2 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

$$\text{Rpta. } f(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-2s} \left( \frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) + e^{-3s} \left( \frac{5}{s} + \frac{1}{s^2} \right)$$

$$d) \quad F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ 4t, & t > 2 \end{cases}$$

$$\text{Rpta. } f(s)$$

- 22) Expresar en términos de la función escalón unidad, las siguientes funciones y hallar su transformada.

$$a) \quad F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ 4t, & t > 2 \end{cases}$$

$$b) \quad F(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & 0 < t < \pi \\ \text{sen } 2t, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ \text{sen } 3t, & t > 2\pi \end{cases}$$

- 23) Determinar la transformada de Laplace de la función  $F(t)$ .

$$a) \quad F(t) = \begin{cases} 1-t, & t \leq \pi \\ |\text{sen } t|, & t > \pi \end{cases}$$

$$b) \quad F(t) = \begin{cases} t^2, & t < \frac{\pi}{2} \\ |\cos t|, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- 24) Hallar  $L\{H(t)\}$  donde  $H(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 3\pi \\ |\cos t|, & t > 3\pi \end{cases}$

- 25) Calcular  $L\{t 2^{-t} \text{sen } 3t \cdot \mu(t-2)\}$ .

- 26) Evaluar  $L\{t \pi^{-t} \text{sen } t \cdot \cos t \cdot \mu(t-4)\}$

- 27) Calcular  $L\left\{\frac{e^t - e^{-t}}{2^t} \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \mu\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

- 28) Evaluar  $L\left\{\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{3^t} \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \mu\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$

- 29) Hallar  $L\{|t - |t - 1||\}$

- 30) Hallar  $L\{F(t)\}$  si  $F(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 3\pi \\ |\text{sen } 2t|, & t > 3\pi \end{cases}$

- 31) Calcular  $L\{U(t^3 - 6t^2 + 11t + 6)\}$  y graficar la función.
- 32) Calcular  $L\{\text{sen}(t - \pi)\}$
- 33) Calcular  $L\{|t^3 - 2t^2 - t|\}$
- 34) Calcular  $L\{t e^{-5t} \int_0^{4t} e^{x+5t} \mu(|x-1|-1) dx\}$
- 35) Calcular  $L\{\text{sen} [|t-9|] \mu(e^t - 1)\}$
- 36) Calcular  $L\{\int_{-10t}^0 e^{-4t+u} \mu(u^2 - 1) du\}$
- 37) Calcular  $L\{\frac{e^{-5t}}{4^t} \mu(|t-1|-1)\}$
- 38) Calcular  $L\{\int_{-10t}^0 e^{-3t+u} \mu(|t-3|-2) dt\}$
- 39) Calcular  $L\{\mu(\text{sen } t)\}$
- 40) Calcular  $L\{\int_1^0 t e^{-10t+u} \mu(u^3 - 1) du\}$
- 41) Calcular  $L\{t^n \mu(t-2)\}$
- 42) Calcular  $L\{\frac{e^{4t} + e^{3t}}{5^t} \text{sen } t \cdot \cos(t - \pi) \mu(t - \frac{\pi}{2})\}$
- 43) Calcular  $L\{\int_0^{4t} \frac{e^{-5t} \text{sen}^2(u-2) \mu(u^2 - 4)}{(u-2)^2} du\}$
- 44) Calcular  $L\{\frac{\text{sen}(t-2\pi)}{t-2\pi} \mu(t-2\pi)\}$  **Rpta.**  $f(s) = e^{-2\pi s} \arctg \frac{1}{s}$
- 45) Calcular  $L\{t^2 e^{at} \mu(t-a)\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{e^{a(2a-s)}}{(s+2)^3} (s^2 + 4as + 4a^2 - 2)$
- 46) Calcular  $L\{\int_0^{-a} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \mu(t-a) dx\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{e^{-as}}{s} \ln \left| \frac{s+1}{s-1} \right|, s > 1$
- 47) Calcular la transformada de Laplace.  $L\{7^t \cos t \cdot (t - \pi) \cdot \mu(t - 2\pi) \cdot \mu(t - 7\pi)\}$   
**Rpta.**  $f(s) = -e^{-7\pi s} \cdot 7^{7\pi} \left( \frac{s - \ln 7}{(s - \ln 7)^2 + 1} \right)$
- 48) Calcular  $L\{\frac{t \cos t}{3^{2t}} \mu(t)\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{(s + \ln 9)^2 - 1}{((s + \ln 9)^2 + 1)^2}$



- (49) Calcular  $L\{\cos|\pi-t|\}$  **Rpta.**  $f(s) = -\frac{s}{s^2+1}$
- (50) Calcular  $L\{\sen|\pi-t|\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{1-2e^{-\pi s}}{s^2+1}$
- (51) Hallar  $L\{a-t\mu(t-a)\}$  donde "a" es una constante positiva. **Rpta.**  $f(s) = \frac{a}{s} + \frac{e^{-as}}{s^2} - \frac{ae^{-as}}{s}$
- (52) Hallar  $L\{t-t-a\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{a}{s} - \frac{2e^{-as}}{s^2}$
- (53) Calcular  $L\{t^2-4t\mu(t-2)\}$  **Rpta.**  $f(s) = \frac{2}{s^3}(1-2e^{-2s}+2e^{-4s})$
- (54) Calcular la transformada de Laplace:  $L\{t.e^{-bt} \int_0^t e^{u+3t} \mu(|x-1|-1)dx\}$   
**Rpta.**  $f(s) = \frac{2e^{b-1}}{(s+3)^3}(se^{\frac{7b-5}{3}} + 9e^{-s} + 4e^{-s-2s})$
- (55) Calcular  $L\{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{4} \sen(t-\frac{\pi}{4}) \cos(t-\frac{\pi}{4}) \mu(t-\frac{\pi}{4})\}$
- (56) Calcular  $L\{t^2 2^{-t} \sen t \cdot \cos t \cdot \mu(t-\frac{\pi}{3})\}$
- (57) Calcular  $L\{|4-t^2-1|\}$  (58) Calcular  $L\{\sen t \cdot \mu(e^{5t}-4)\}$
- (59) Calcular  $L\{\frac{e^{-4(t-\pi)} \cos(t-\pi)}{(1-e^{-6(t-\pi)})^4} \mu(t^2-\pi^2)\}$
- (60) Evaluar si existe  $L\{\frac{d}{dt}(\int_0^t t e^{4t} |v^2-1| dv)\}$  sin derivar.
- (61) Evaluar si existe  $L\{\int_{-12t}^0 e^{-5t-v} \cos v \cdot \mu(v^2-1) dv\}$

- 62) Evaluar  $L\left\{\int_0^t t e^{4t} |u^2 - 1| du\right\}$
- 63) Calcular  $L\{|t^2 - 1|\}$
- 64) Evaluar  $L\{t^2 \int_0^t (v-4)^n \ln|v-4| \mu(v-4) dv\}$
- 65) Evaluar  $L\left\{\int_0^t dv \int_0^v F(u) du\right\}$  si  $F(t) = H(s)$
- 66) Evaluar  $L\{t^n \ln|t|\}$
- 67) Evaluar  $L\{\mu(t^3 - 2t^2 + t)\}$
- 68) Evaluar  $L\{e^{2t} t^n \ln|t|\}$
- 69) Calcular la transformada de las funciones.
- a)  $F(t) = 1 + [|t - 1|]$       b)  $G(t) = (-1)^{|t|}$
- 70) Evaluar  $L\{\pi' e^{-t} \int \cos^3(v-1) \mu(v^3 - 1) dv\}$ , donde  $\mu$  es la función escalón unitario.
- 71) Sea  $n > -1$ ,  $n$  real, calcular  $L\{t e^{-2t} \int u^n \ln|u| du\}$
- 72) Si  $L\{F(t)\} = f(s)$ , calcular  $L\left\{\frac{F(t)}{t^2}\right\}$
- 73) Calcular  $L\{t^2 e^{-5t} \mu(t^2 - 1)\}$
- 74) Calcular  $L\{t e^{-5t} \int_0^{4t} e^{x+5t} \mu(|x-1| - 1) dx\}$
- 75) Calcular  $L\{\sqrt{t} \cos t^{3/2}\}$
- 76) Evaluar la integral  $L\{\text{sen}^6(t-1) \mu(t^2 - 1)\}$
- 77) Calcular  $L\left\{\frac{1}{a} \int_0^{at} e^{at} F(t/a) dt\right\}$ ,  $a > 0$
- 78) Evaluar  $L\{t^2 e^{-4t} |4 - |t^2 - ||\}$
- 79) Calcular  $L\{t \text{tgh}(t) \mu(t-1)\}$
- 80) Si  $F(t) = (t-1)^n \mu(t-1)$ , calcular  $L\{F(t)\}$  **Rpta.**  $f(s) = \begin{cases} \frac{e^{-s} \Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, & n > -1, s > 0 \\ \frac{e^{-s} n!}{s^{n+1}}, & n \in \mathbb{Z}_0^+, s > 0 \end{cases}$

- (81) Demostrar que:  $L\{t^k \operatorname{tgh} t\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{\Gamma(k+1)}{(s+2n)^{k+1}} - \frac{\Gamma(k+1)}{(s+2n+2)^{k+1}} \right]$
- (82) Calcular  $L\left\{\frac{e^{-5t} t^k}{(1+e^{-6t})^2}\right\}$ ,  $\forall k$ . Rpta.  $f(s) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+n) \frac{\Gamma(k+1)}{(6n+5+s)^{k+1}}, & \text{si } k > -1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+n) \frac{k!}{(6n+5+s)^{k+1}}, & \text{si } k \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$
- (83) Calcular  $L\{t e^{6t} \operatorname{senh} \sqrt{t}\}$  Rpta.  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{2})}{(s-6)^{n+\frac{5}{2}}}$
- (84) Demostrar que:  $L\{t^n\} = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, & \text{si } n > -1, n \in \mathbb{R} \\ \frac{n!}{s^{n+1}}, & \text{si } n \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$
- (85) Calcular  $L\{t^{n/2} J_n(a\sqrt{t})\}$  Rpta.  $\left(\frac{a}{2}\right)^n \frac{e^{-a^2/4s}}{s^{n+1}}, s > 0$
- (86) Demostrar que:  $L\{J_0(t) \operatorname{sen} t\} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{s^2+4}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{s}\right)\right)$
- (87) Demostrar que:  $L\{J_0(t) \operatorname{cos} t\} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{s^2+4}} \operatorname{cos}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{s}\right)\right)$
- (88) Calcular.  $L\{e^{-20t} J_0(t-4) \operatorname{sen}(t-4) U(t-4)\}$  (89) Evaluar  $L\{J_0(t) \operatorname{cos} t \cdot \operatorname{cosh} t\}$
- (90) Sea  $L\{F(t)\} = H(s)$ , probar que:  $L\{t^{n/2} \int_0^{\sqrt{t}} u^{-n/2} J_n(2\sqrt{ut}) F(u) du\} = \frac{H(1/s)}{s^{n+1}}$
- (91) Calcular  $L\{t e^{-t} \int_0^{2t} J_0(u) \operatorname{sen} u \cdot du\}$
- (92) Si  $H(t) = e^{3t} J_0(4t)$ . Calcular  $L\{H^{(4)}(t)\}$

- 93 Hallar  $L\{t J_0(\lambda t)\}$ . Rpta.  $\frac{s}{(s^2 + \lambda^2)^{3/2}}$
- 94 Demostrar que:  $L\{J_0(a\sqrt{t(t+2c)})\} = \frac{e^{c(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{(s^2 + a^2)^{1/2}}$
- 95 Evaluar  $L\left\{\int_0^t t 6^t J_0(5(t-4))\mu(t-4)dt\right\}$  96 Evaluar  $L\{t e^{-10t} J_0(t) \cos t\}$
- 97 Evaluar  $L\left\{\int_0^t \int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du dv\right\}$  si  $L\{F(t)\} = H(s)$
- 98 Calcular  $L\{J_1(t)\}$ ,  $L\{J_2(t)\}$ ,  $L\{J_n(t)\}$
- 99 Calcular  $L\left\{\int_{-t}^0 e^{-20t} J_0(u) \sin u du\right\}$ , si existe.
- 100 Demostrar que:  $L\{I_e(t)\} = L\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right\} = \frac{\ln(s+1)}{2}$
- 101 Demostrar que:  $L\{I_c(t)\} = L\left\{\int_0^\infty \frac{\cos u}{u} du\right\} = \frac{\ln(s^2+1)}{2s}$
- 102 Demostrar que:  $\int_0^\infty e^{-t}(1-J_0(t))dt = \ln(1+\sqrt{2})$
- 103 Demostrar que: a)  $\int_0^\infty J_0(t)dt = 1$       b)  $\int_0^\infty e^{-t} J_0(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 104 Calcular  $\int_0^\infty t e^{-3t} J_0(4t)dt$  Rpta.  $\frac{3}{125}$
- 105 Probar que  $\int_0^\infty J_0(at) \cos bt dt = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$ , cuando  $0 < b < a$ , y tiene valor cero cuando  $b > a$ .
- 106 Demostrar que:  $\int_0^\infty J_0(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}$

- 107) Calcular a)  $\int_0^{\infty} t J_0(\lambda t) dt$  b)  $\int_0^{\infty} t J_1(\lambda t) dt$
- Rpta. a) 0 b)  $\frac{1}{\lambda^2}$
- 108) Calcular  $\int_0^{\infty} J_0(u) J_1(t-u) du$  Rpta.  $J_0(t) - \cos t$
- 109) Calcular  $\int_0^{\infty} u e^{u^2} J_0(au) du$  Rpta.  $\frac{e^{-a^2/4}}{2}$
- 110) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$
- 111) Calcular las integrales siguientes. a)  $\int_0^{\infty} \sin t^3 dt$  b)  $\int_0^{\infty} \cos t^3 dt$
- Rpta. a)  $\frac{\Gamma(1/3)}{6}$
- 112) Demostrar que:  $\Gamma(n) = 2 \int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} dx$
- 113) Probar que:  $\int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sen} u}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-ar}$
- 114) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ ,  $n \in z^+$ ,  $m > -1$
- 115) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} J_0(x^2) dx = \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{4\pi}$
- 116) Calcular  $\int_0^{\infty} \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)} du$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $u > -1$  si  $L\{F(u)\} = H(s)$
- 117) Calcular la transformada de Laplace  $L\{t e^{-t} \int_0^{2t} J_0(u-4) \operatorname{sen}(u-4) U(u^2-16) du\}$



- 118) Calcular la integral  $\int_0^{\infty} t^m e^{-at^n} dt$ ,  $m, n > 0$ ,  $a > 0$ . **Rpta.**  $\frac{\Gamma(\frac{m+1}{n})}{n a^{\frac{m+1}{n}}}$
- 119) Calcular  $\int_0^{\infty} t^n (\ln t)^n dt$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $m > -1$ . **Rpta.**  $\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$
- 120) Calcular  $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3 - \cos t}}$ . **Rpta.**  $\frac{1}{2\sqrt{2}} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$
- 121) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
- 122) Calcular  $\int_0^1 [(7-t)(t-3)]^{1/10} dt$ . **Rpta.**  $\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/4)}{4a\Gamma(3/4)}$
- 123) Calcular  $\int_0^a (a^4 - x^4)^{-1/6} dx$ . **Rpta.**  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
- 124) Calcular  $\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t^2(1-t))^{1/3}}$ . **Rpta.**  $\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$
- 125) Calcular  $\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^3 \sqrt[3]{t^2(1-t)}}$ . **Rpta.**  $\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$
- 126) Expresar  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ , mediante la función gamma.
- 127) Calcular las siguientes integrales.
- a)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}}$ ,  $a > 0$
- b)  $\int_0^a x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ,  $a > 0$
- c)  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2n-1} x dx$ ,  $0 < n < 1$
- d)  $\int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx$ ,  $n, m > 0$
- 128) Mostrar que:
- a)  $\int_0^{\infty} y^3 e^{-2y^2} dy = \frac{3}{8}$
- b)  $\int_0^{\infty} y^2 e^{-2y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}$

$$c) \int_0^{\infty} e^{-3x} x^{3/2} dx = \frac{\sqrt{3\pi}}{36}$$

129 Calcular las siguientes integrales

$$a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)}, \quad 0 < a < 1$$

$$b) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$$

Rpta. a)  $\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$

b)  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

130 Demostrar que si  $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ,  $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$  entonces  $I_1 I_2 = \frac{\pi}{4}$

131 Calcular los integrales siguientes

$$a) \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$b) \int_0^{\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$$

$$c) \int_0^{\infty} (x+1)^2 e^{-x^2} dx$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{x^c}{e^x} dx \text{ sug. } c^x = e^{x \ln c}$$

Rpta. a)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

b) 2

c)  $\frac{1}{3} + \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) + \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$

d)  $\frac{\Gamma(c+1)}{(\ln c)^{c+1}}$

132 Si  $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ,  $t > 0$ ,  $G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & 0 < t < 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$ . Demostrar que:

$$F(t) * G(t) = \pi - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{t-1}) \mu(t-1)$$

133 Calcular  $\int_0^{\infty} \frac{tdt}{1+t^6}$

Rpta.  $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

134 Demostrar que:  $\int_0^{\infty} x \cos x^3 dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$

135) Calcular  $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$  Rpta.  $\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$

136) Calcular  $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin \theta)^{2m-1} (\cos \theta)^{2n-1} d\theta}{(a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)^{m+n}}$   $m, n > 0$  Rpta.  $\frac{\beta(n, m)}{2a^n b^m}$

137) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} \frac{t^{m-1} + t^{n-1}}{(1+t)^{m+n}} dt = 2\beta(m, n), m, n > 0$

138) Calcular  $\int_0^1 \frac{\mu^{n-1} (1-\mu)^{m-1}}{(\mu+r)^{m+n}} d\mu, si m, n > 0$  Rpta.  $\frac{\beta(n, m)}{r^m (1+r)^n}$

139) Calcular  $\int_0^1 \frac{\mu^{n-1} (1-\mu)^{m-1}}{(a+c\mu)^{m+n}} d\mu, si m, n > 0$  Rpta.  $\frac{\beta(n, m)}{a^m c^n (1+\frac{a}{c})^{m+n}}$

140) Probar que  $\int_0^{\infty} \frac{\ln t dt}{1+t^4} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}$

141) Demostrar que  $\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\text{sen}(n\pi)}, 0 < n < 1$  sin usar la propiedad

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\text{sen } p\pi}, 0 < p < 1$$

142) Demostrar que:  $\Gamma(-m - \frac{1}{2}) = \frac{2^{2m+1} (-1)^{m+1} \sqrt{\pi} n!}{(2n+1)!}, m \in \mathbb{Z}^+$

143) Pruebe que  $\frac{|\Gamma(\frac{1}{3})|^2}{\Gamma(\frac{1}{6})} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

144) ¿Es cierto la identidad siguiente?  $\Gamma(\mu) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\mu}{2})}{2^{1-\mu} \cos \frac{\pi \mu}{2} \cdot \Gamma(\frac{1-\mu}{2})}$  si es afirmativo demuéstrelo

- 145) Verifique que  $\int_0^1 \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p)$ ,  $|p| < 1$
- 146) Calcular  $\int_0^1 \frac{\mu^{n-1}(1-\mu)^{m-1} d\mu}{(a+\mu(b-a))^{m+n}}$  Rpta.  $\frac{\beta(m,n)}{a^m b^n}$
- 147) Si  $m > 1$ , demostrar que  $\int_0^\infty \frac{t^m dt}{r^2 + t^{2m}} = \pi \sec\left(\frac{\pi}{2m}\right) \cdot \frac{r^{-m}}{2m}$
- 148) Si  $|p| < 1$ , calcular  $\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^p \cdot \frac{dt}{(a+t)}$ ,  $a > 0$  Rpta.  $\frac{a^{p-1} p \pi}{(a+1)^{p+1} \sin p \pi}$
- 149) Calcular  $\int_0^\infty t^a (1+t)^b dt$  Rpta.  $\frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-b-a-1)}{\Gamma(-b)}$
- 150) Calcular  $\int_0^\infty \frac{\cosh(2a\theta) d\theta}{(\cosh \theta)^b}$  Rpta.  $\frac{2^{b-1} \Gamma(a+\frac{b}{2}) \Gamma(\frac{b}{2}-a)}{\Gamma(b)}$
- 151) Verifique que.  $2^{2p-1} \Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Gamma(2p)$
- 152) Si  $\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \dots \sin\left(\frac{m-1}{m}\pi\right) = \frac{m}{2^{m-1}}$ ,  $m = 2, 3, \dots$  Calcular  $\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \dots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)$  Rpta.  $\frac{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}}{\sqrt{m}}$
- 153) Probar que  $\int_0^1 \ln(\Gamma(t)) dt = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$
- 154) Si  $-1 < p < 2$ , evaluar  $\int_0^1 \frac{t^{1-p}(1-t)^p}{(1+t)^3} dt$  Rpta.  $2^{p-3} \beta(2-p, p+1)$
- 155) Mostrar que:  $\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^m \sqrt{\pi}}{(2m-1)!!}$

156) Mostrar que:  $\Gamma(m + \frac{1}{2})\Gamma(-m + \frac{1}{2}) = (-1)^m \pi$ ,  $m = 1, 2, \dots$

157) Verifica que  $[\Gamma(\frac{1}{4})]^2 = \frac{4.6.8.10.12.14\dots}{5.5.9.9.13.13.17.17\dots} 8\sqrt{\pi}$

158) Calcular  $\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} \ln t}{1+t} dt$  **Rpta.**  $-\pi \operatorname{cosec}(p\pi) \cdot c \operatorname{tg}(p\pi)$

159) Verificar que:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4\sqrt{\pi}}$

160) Calcular  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\operatorname{sen} t| dt$  **Rpta.**  $-\frac{\pi}{2} \ln 2$

161) Demostrar que:  $\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi} p(\frac{p}{e})^p$ ,  $p \in \mathbb{Z}^+$ ,  $p \rightarrow \infty$

162) Probar que:  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

163) Demostrar que para  $\mu > 0$ ,  $\int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{sen} t \mu}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-\mu}$

164) Demostrar que:  $\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \left(\frac{t^{n-1}}{e^t - 1}\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ ,  $n > 1$

165) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^n dx = \frac{1}{2n} \left( \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2n}) \Gamma(n - \frac{1}{2n})}{\Gamma(n - \frac{1}{n})} \right)$

166) Demostrar que:  $\int_0^{\infty} \cos x^n dx = \frac{1}{2n} \left( \frac{\Gamma(\frac{1}{2n}) \Gamma(2n - \frac{1}{2n})}{\Gamma(n - \frac{1}{n})} \right)$

167) Calcular  $\int_0^{\infty} J_0(t - \mu) \frac{J_1(\mu)}{\mu} d\mu$  **Rpta.**  $J_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1}$



168) Calcular  $\int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu^n} J_0(r - \mu^2) d\mu$  para todo  $n \in \mathbb{R} - \{0\}$  **Rpta.**  $\frac{e^{-\frac{r^2}{4}}}{n}$

169) Demostrar que:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) J_0\left(\frac{t}{2}\right)$

170) Evaluar la integral  $\int_0^{\infty} J_0(\mu^2) d\mu$

171) Evaluar la integral  $\int_0^{\infty} J_0(\mu^4) d\mu$

172) Si  $|p| > 1$ , calcular  $\int_0^{\infty} \sin x^p dx$  usando transformada de Laplace

173) Verificar que:  $\int_0^{+1} \ln(\Gamma(\mu)) d\mu = t \ln t - t + \frac{1}{2} \ln(2\pi)$

174) Verificar que:

$$\int_0^{+n} \ln(\Gamma(\mu)) d\mu = \ln[t! \cdot (t+1)^{t+1} \cdot (t+2)^{t+2} \cdots (t+n-1)^{t+n-1} e^{-n}] - e^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n}{2}\right) \ln(2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

175) Probar que:  $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

176) Probar que:  $J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - t \sin \phi) d\phi - \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-n\phi - \sin \phi} d\phi$

177) Demostrar que:  $\int_0^1 \int_0^1 F(x, y) (1-x)^{m-1} y^m (1-y)^{n-1} dx dy = B(m, n) \int_0^1 F(u) (1-u)^{m+n-1} du$

178) Si  $x, y \in \mathbb{R}^+$ , calcular  $\iint_D x^{2m-1} y^{2n-1} dx dy$ , tal que  $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 / x^2 + y^2 \leq c^2\}$

**Rpta.**  $\frac{C^{2m+2n} \Gamma(m) \Gamma(n)}{4 \Gamma(m+n+1)}$

179) Demostrar que:  $J_{\frac{3}{2}}(t) \sin t - J_{\frac{1}{2}}(t) \cos t = \frac{2}{\sqrt{\pi t^3}}$

180) Demostrar que:  $J_0''(t) = \frac{1}{2}[J_{-1}(t) - J_{1}(t)]$

181) Hallar  $\frac{d(x^2 J_3(2x))}{dx}$  **Rpta.**  $xJ_3(2x) + 2x^2 J_2(2x)$

182) Demostrar que:  $d(x^2 J_{p-1}(x) J_{p+1}(x)) = 2x^2 J_p(x) \frac{dJ_p(x)}{dx}$

183) Demostrar que:  $J_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x)$

184) Demostrar que:  $J_p'(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$

185) Demostrar que:  $\frac{d[xJ_p(x)J_{p+1}(x)]}{dx} = x[J_p^2(x) - J_{p+1}^2(x)]$

186) Demostrar que:  $J_3(x) = (\frac{8}{x^2} - 1)J_1(x) - \frac{4}{x}J_0(x)$

187) Demostrar que:  $J_2(t) = (1 - \frac{4}{t^2})J_1(t) + \frac{2}{t}J_0(x)$

188) Demostrar que:  $\frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = x^{-p} J_{p-1}(x)$

189) Demostrar que:  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \forall n \in \mathbb{Z}$

190) Expresar  $J_4(ax)$  en función de  $J_0(ax)$  y  $J_1(ax)$

**Rpta.**  $J_4(ax) = (\frac{48}{a^3 x^3} - \frac{8}{ax})J_1(ax) - (\frac{24}{a^2 x^2} - 1)J_0(ax)$

191) Demostrar que:

$$\text{a) } L\{f_{er}(t)\} = \frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s} f_{er}\left(\frac{s}{2}\right), s > 0$$

$$\text{b) } L\{f_{er}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}, s > 0$$

$$\text{c) } L\{f_{er}(at)\} = \frac{e^{\frac{s^2}{4a^2}}}{s} f_{er}\left(\frac{s}{2a}\right), s > 0$$

$$\text{d) } L\left\{f_{er}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{1 - e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}, s > 0$$

$$\text{e) } L\left\{f_{er}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{e^{-\alpha s}}{s}, s > 0$$

$$\text{f) } L\{f_{er}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s+1}(\sqrt{s+1}+1)}$$

$$\text{(192) } \text{Calcular } \int_0^{\pi} (\sin h\theta)^b (\cos h\theta)^a d\theta$$

$$\text{(193) } \text{Calcular } \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^6} dt$$

$$\text{(194) } \text{Probar que: } \int_0^{\pi+2} \ln(\Gamma(\mu)) d\mu = t \ln t + (t+1) \ln(1+t) - 2t + \ln(2\pi) - 1$$

$$\text{(195) } \text{Demostrar que } \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}(1-J_0(t))}{t} dt = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$\text{(196) } \text{Calcular } \text{a) } \int_{-x}^x \frac{e^{2x} dx}{ae^{3x} + b}, \forall a > 0, \forall b > 0 \quad \text{b) } \int_{-x}^x \frac{e^{2x} dx}{(e^{3x} + 1)^2}$$

## CAPÍTULO XII

### 12. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.-

Mediante la definición de transformada de Laplace se tiene: Si  $F: [0, +\infty) \rightarrow R$ , es una función seccionalmente continua y de orden exponencial, entonces  $\exists L\{F(t)\} = f(s)$ , ahora invertiremos el problema, es decir: dada la función  $f(s)$  queremos encontrar la función  $F(t)$  que corresponde a esta transformada y a esta función  $F(t)$  se llama la transformada inversa de  $f(s)$  y se simboliza por  $L^{-1}\{f(s)\}$ , es decir  $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$ .

**Ejemplo.-** Hallar  $F(t)$  si  $f(s) = \frac{2}{s+3}$

**Solución**

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}\right\} = 2e^{-3t} \quad \text{de donde} \quad F(t) = 2e^{-3t}$$

**Ejemplo.-** Hallar  $F(t)$  si  $f(s) = \frac{1}{s^2+4}$

**Solución**

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t; \quad \text{de donde} \quad F(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$$

### 12.1. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.-

#### 1er. PROPIEDAD DE LINEALIDAD

Si  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarios y  $f(s)$ ,  $g(s)$  son las transformada de  $F(t)$  y  $G(t)$  respectivamente entonces:

$$L^{-1}\{a f(s) + b g(s)\} = aL^{-1}\{f(s)\} + bL^{-1}\{g(s)\} = a F(t) + b G(t)$$

### Demostración

Mediante la propiedad de linealidad de la transformada se tiene:

$$L\{a F(t) + b G(t)\} = aL\{F(t)\} + bL\{G(t)\} = a F(s) + b G(s)$$

Es decir que:  $a f(s) + b g(s) = L\{a F(t) + b G(t)\}$ , tomando la transformada inversa se tiene:  $L^{-1}\{a f(s) + b g(s)\} = a F(t) + b G(t) = a L^{-1}\{f(s)\} + b L^{-1}\{g(s)\}$

**Ejemplo.-** Si  $f(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 9} - \frac{3}{s-2}$ . Hallar F(t)

### Solución

$$\begin{aligned} F(t) = \{f(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 9} - \frac{3}{s-2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 9}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= t + \frac{1}{3}\sin 3t - 3e^{2t} \end{aligned}$$

## 2da. PRIMERA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN

Si  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ , entonces  $L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$

### Demostración

Se conoce que: Si  $L\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$  de donde  $e^{at} F(t) = L^{-1}\{f(s-a)\}$  otra forma es:

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \Rightarrow f(s-a) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at} F(t) dt = L\{e^{at} F(t)\}$$

por lo tanto  $f(s-a) = L\{e^{at} F(t)\}$  de donde:  $L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$

**Ejemplo.-** Hallar F(t) si:  $f(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9}$



**Solución**

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right\} = e^{2t} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = e^{2t} \cos 3t$$

**3era. SEGUNDA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN.**

$$\text{Si } L^{-1}\{f(s)\} = F(t), \text{ entonces } L^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t-a), & t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

**Demostración**

$$\text{Como } f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, \text{ entonces multiplicamos por } e^{-as}$$

$$e^{-as} f(s) = \int_0^{\infty} e^{-as} \cdot e^{-st} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(t+a)} F(t) dt$$

Sea  $t+a = u \Rightarrow dt = du$ ; Cuando  $t=0$ ;  $u=a$  y cuando  $t \rightarrow +\infty$ ;  $u \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^{-as} f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s(t+a)} F(t) dt = \int_a^{\infty} e^{-su} F(u-a) du = \int_a^{\infty} \underbrace{e^{-su}}_0 F(u-a) du = \int_a^{\infty} \underbrace{e^{-su}}_0 F(u-a) du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t-a) dt = L\{F(t-a)\} \end{aligned}$$

**4ta. PROPIEDAD DE CAMBIO DE ESCALA.-**

$$\text{Si } L^{-1}\{f(s)\} = F(t), \text{ entonces } L^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right)$$

**Demostración**

$$\text{como } f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \Rightarrow f(ks) = \int_0^{\infty} e^{-kst} F(t) dt$$

$$\text{sea } u = kt \Rightarrow dt = \frac{du}{k} \text{ donde } t = \frac{u}{k}$$

$$f(ks) = \int_0^{\infty} e^{-ks \frac{u}{k}} F\left(\frac{u}{k}\right) \frac{du}{k} = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-su} F\left(\frac{u}{k}\right) du = \frac{1}{k} L\left\{F\left(\frac{t}{k}\right)\right\}$$

entonces :  $L^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right)$

**Ejemplo.-** Hallar  $F(t)$  si  $f(s) = \frac{1}{9s^2 + 1}$

**Solución**

Sea  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \text{sen } t \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(3s)^2+1}\right\} = \frac{1}{3} \text{sen } \frac{t}{3}$

**12.2. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LA DERIVADA.-**

**Teorema.-** Si  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  entonces  $L^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$

**Demostración**

como  $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{F(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$

tomando la inversa a ambos miembros.  $L^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$

**Ejemplo.-** Hallar  $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\}$

**Solución**

como  $L\{t F(t)\} = -f'(s) \Rightarrow L^{-1}\{f'(s)\} = -t F(t) \Rightarrow L^{-1}\{f'(s)\} = -t L^{-1}\{f(s)\}$

Luego  $L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\{f'(s)\}$ , aplicando este resultado al ejercicio dado.

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\} = L^{-1}\{\ln(s+2) - \ln(s+1)\} = -\frac{1}{t}(e^{-2t} - e^{-t}) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

**12.3. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LAS INTEGRALES.-**

**TEOREMA.-** Si  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  entonces  $L^{-1}\left\{\int_t^{\infty} f(u)du\right\} = \frac{F(t)}{t}$

**Demostración**

$$\text{como } L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_0^{\infty} f(u) du$$

$$\text{de donde al tomar la transformada inversa se tiene. } L^{-1}\left\{\int_0^{\infty} f(u) du\right\} = \frac{F(t)}{t}$$

$$\text{Ejemplo.- Calcular la transformada inversa de } L^{-1}\left\{\int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2 + a^2}\right\}$$

**Solución**

$$\text{Si } L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_0^{\infty} f(s) ds, \text{ de donde } L^{-1}\left\{\int_0^{\infty} f(s) ds\right\} = \frac{F(t)}{t}$$

$$\text{Luego si } L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L^{-1}\left\{\int_0^{\infty} f(s) ds\right\} = \frac{F(t)}{t} \text{ aplicando el resultado al ejercicio.}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \frac{\text{sen } at}{a} \Rightarrow L^{-1}\left\{\int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2 + a^2}\right\} = \frac{\text{sen } at}{at}$$

**12.4. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LA MULTIPLICACIÓN POR S.-**

$$\text{TEOREMA.- Si } L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \text{ y } F(0) = 0 \text{ entonces } L^{-1}\{s f(s)\} = F'(t)$$

**Demostración**

$$\text{como } L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L\{F(t)\} = f(s), \text{ de donde}$$

$$L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) = sL\{F(t)\} \text{ es decir: } L\{F'(t)\} = s f(s) \text{ entonces } L^{-1}\{s f(s)\} = F'(t)$$

$$\text{Ejemplo.- Hallar } L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^5}\right\}$$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^5}\right\} = e^{-t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{t^4 e^{-t}}{24} \text{ de donde } L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^5}\right\} = \frac{t^3 e^{-t}}{6} - \frac{t^4 e^{-t}}{24} = \frac{e^{-t}}{24} (4t^3 - t^4)$$

## 12.5. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE LA DIVISIÓN POR S.-

**TEOREMA.-** Si  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  entonces  $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)du$

### Demostración

como  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L\{F(t)\} = f(s)$  de donde

$$L\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)du$$

**Ejemplo.-** Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$

### Solución

$$L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\} = L^{-1}\{\ln(s^2+1) - \ln s^2\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1} - \frac{2}{s}\right\} = -\frac{1}{t}(2\cos t - 2) = \frac{2(1-\cos t)}{t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\} = \int_0^t \frac{2(1-\cos u)}{u} du$$

## 12.6. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE POR EL MÉTODO DE LAS FRACCIONES PARCIALES.-

Las funciones racionales  $\frac{P(s)}{Q(s)}$ , donde P(s) y Q(s) son polinomios en las cuales el grado de P(s) es menor que el grado de Q(s), pueden expresarse como una suma de funciones racionales simples, aplicando el criterio de descomposición estudiado en el caso de las integrales de funciones racionales.

**Ejemplo.-** Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{11s^2 - 2s + 5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$

### Solución

$$\frac{11s^2 - 2s + 5}{(s-2)(2s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{2s-1} + \frac{C}{s+1} = \frac{A(2s-1)(s+1) + B(s-2)(s+1) + C(s-2)(2s-1)}{(s-2)(2s-1)(s+1)}$$

$$11s^2 - 2s + 5 = A(2s - 1)(s + 1) + B(s - 2)(s + 1) + C(s - 2)(2s - 1)$$

$$11s^2 - 2s + 5 = A(2s^2 + s - 1) + B(s^2 - s - 2) + C(2s^2 - 5s + 2)$$

$$11s^2 - 2s + 5 = (2A + B + 2C)s^2 + (A - B - 5C)s - A - 2B + 2C$$

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 11 & A = 5 \\ A - B - 5C = -2 & \Rightarrow B = -3 \\ -A - 2B + 2C = 5 & C = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{11s^2 - 2s + 5}{(s - 2)(2s - 1)(s + 1)}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{5}{s - 2} - \frac{3}{2s - 1} + \frac{2}{s + 1}\right\} \\ &= 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 2}\right\} - \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s - \frac{1}{2}}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} = 5e^{2t} - \frac{3}{2}e^{\frac{t}{2}} + 2e^{-t} \end{aligned}$$

**12.7. TEOREMA (FÓRMULA DEL DESARROLLO DE HEAVISIDE).-**

Sean P(s) y Q(s) polinomios en los cuales P(s) es de grado menor que el grado de Q(s). Si Q(s) tiene n raíces diferentes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ; entonces

$$L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

**Demostración**

Si el polinomio Q(s) tiene n raíces diferentes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ; por lo tanto de acuerdo al método de la descomposición de las funciones racionales se puede expresar así:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{A_k}{s - \alpha_k} + \dots + \frac{A_n}{s - \alpha_n} \quad \dots (1)$$

a la ecuación (1) multiplicamos por  $s - \alpha_k$ , es decir:

$$\frac{P(s)}{Q(s)}(s - \alpha_k) = \left(\frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{A_k}{s - \alpha_k} + \dots + \frac{A_n}{s - \alpha_n}\right)(s - \alpha_k) \quad \dots (2)$$



ahora tomando límite cuando  $s \rightarrow \alpha_k$  y aplicando la regla de L'Hospital, se tiene:

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)} (s - \alpha_k) = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} P(s) \cdot \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \alpha_k} P(s) \cdot \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} P(s) \cdot \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{1}{Q'(s)} = P(\alpha_k) \cdot \frac{1}{Q'(\alpha_k)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \\ \therefore A_k &= \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{s - \alpha_1} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} \cdot \frac{1}{s - \alpha_n}; \text{ tomando la inversa}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{s - \alpha_1} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} \cdot \frac{1}{s - \alpha_n}\right\} \\ &= \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)} e^{\alpha_2 t} + \dots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)} e^{\alpha_n t} \end{aligned}$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

**Ejemplo.-** Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$

**Solución**

$$Q(s) = (s-2)(s+1)(s+3) = s^3 + 2s^2 - 5s - 6$$

$$Q'(s) = 3s^2 + 4s - 5 \Rightarrow Q'(2) = 15, Q'(1) = -6, Q'(-3) = 10$$

$$P(s) = 19s + 37 \Rightarrow P(2) = 75, P(1) = 18, P(-3) = -20$$

$$L^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\} = \frac{P(2)}{Q'(2)} e^{2t} + \frac{P(1)}{Q'(1)} e^{-t} + \frac{P(-3)}{Q'(-3)} e^{-3t} = 5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$$

**OBSERVACIÓN.-** Supongamos que  $f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  son polinomios en donde el grado  $P(s)$  es menor que el grado de  $Q(s)$ , pero en este caso  $Q(s) = 0$  tiene una raíz "a" de multiplicidad  $m$ , mientras que las otras raíces  $b_1, b_2, \dots, b_n$  son todas distintas entre sí. Entonces se tiene:

$$i) \quad f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s-a)^m} + \frac{A_2}{(s-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{s-a} + \frac{B_1}{s-b_1} + \dots + \frac{B_n}{s-b_n}$$

$$ii) \quad A_k = \lim_{s \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^k}{ds^k} (s-a)^n f(s) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Entonces la transformada inversa es:

$$L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = e^{at} \left( \frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_m \right) + B_1 e^{b_1 t} + B_2 e^{b_2 t} + \dots + B_n e^{b_n t}$$

### 12.8. LA CONVOLUCIÓN.-

a) **Definición.-** Sea  $F$  y  $G$  dos funciones continuas por tramos en cada intervalo finito y cerrado  $0 \leq t \leq b$  y de orden exponencial. La función que denotaremos por  $F * G$  y que viene definidas por:

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(u)G(t-u)du$$

recibe el nombre de convolución de las funciones  $F$  y  $G$ .

**Ejemplo.-** La convolución de  $F(t) = e^t$  y  $G(t) = \text{sen } t$  es:

$$\begin{aligned} e^t * \text{sen } t &= \int_0^t e^u \text{sen}(t-u)du = \int_0^t e^u (\text{sen } t \cos u - \text{sen } u \cos t)du \\ &= \int_0^t e^u \text{sen } t \cos u \, du - \int_0^t e^u \text{sen } u \cos t \, du \\ &= \left[ \frac{\text{sen } t}{2} (e^u \cos u + e^u \text{sen } u) - \frac{\cos t}{2} (e^u \text{sen } u - e^u \cos u) \right] \Big|_0^t \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [\operatorname{sen} t e^t \cos t + \operatorname{sen}^2 t e^t - \cos t e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos^2 t] - \frac{1}{2} |\operatorname{sen} t + \cos t|$$

$$= \frac{1}{2} |e^t - \operatorname{sen} t - \cos t| \quad \therefore e^t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2} (e^t - \operatorname{sen} t - \cos t)$$

## 12.9. TEOREMA DE LA CONVOLUCIÓN.-

Sean  $F(t)$  y  $G(t)$  funciones continuas por tramos  $\forall t \geq 0$  y de orden exponencial, entonces:

$$L\{F(t)*G(t)\} = L\{F(t)\} \cdot L\{G(t)\} = f(s) \cdot g(s)$$

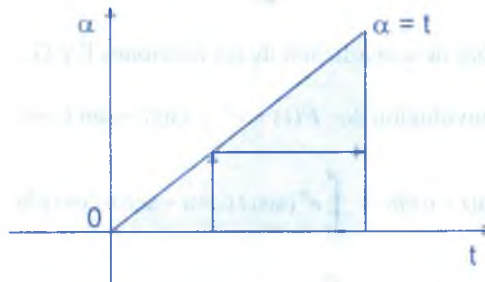
### Demostración

$$\text{Sea } f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\alpha} F(\alpha) d\alpha \quad ; \quad g(s) = L\{G(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\beta} G(\beta) d\beta$$

$$\begin{aligned} f(s) \cdot g(s) &= \left( \int_0^{\infty} e^{-s\alpha} F(\alpha) d\alpha \right) \left( \int_0^{\infty} e^{-s\beta} G(\beta) d\beta \right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(\alpha+\beta)} F(\alpha) G(\beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_0^{\infty} F(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} e^{-s(\alpha+\beta)} G(\beta) d\beta \end{aligned}$$

dejando  $\alpha$  fijo, hacemos  $t = \alpha + \beta$ ,  $dt = d\beta$ , de modo que:

$$f(s) \cdot g(s) = \int_0^{\infty} F(\alpha) d\alpha \int_{\alpha}^{\infty} e^{-st} G(t-\alpha) dt$$



En el plano  $t\alpha$  estamos integrando sobre la región sombreada, como  $F$  y  $G$  son continuas por partes  $\forall t \geq 0$  y de orden exponencial se puede demostrar que es posible intercambiar el orden de integración:

$$f(s).g(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^{\infty} F(\alpha)G(t-\alpha)d\alpha = \int_0^{\infty} e^{-st} \left\{ \int_0^{\infty} F(\alpha)G(t-\alpha)d\alpha \right\} dt = L\{F * G\}$$

$$\therefore L\{F(t)*G(t)\} = L\{F(t)\}.L\{G(t)\} = f(s).g(s)$$

**Ejemplo.-** Calcular  $L\left\{ \int_0^t e^u \sin(t-u)du \right\}$

**Solución**

Sean  $F(t) = e^t$  y  $G(t) = \sin t$ , entonces por el teorema

$$L\left\{ \int_0^t e^u \sin(t-u)du \right\} = L\{e^t\}.L\{\sin t\} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

**Nota:**  $e^t * \sin t = \int_0^t e^u \sin(t-u)du$

**12.10. TEOREMA DE CONVOLUCIÓN PARA LA TRANSFORMADA INVERSA.-**

Suponiendo que  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  y  $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ .

Entonces  $L^{-1}\{f(s).g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G$  donde  $F * G$  es la convolución de  $F$  y  $G$ .

**Demostración**

Si se prueba que  $L\left\{ \int_0^t F(u)G(t-u)du \right\} = f(s).g(s)$  ... (1)

entonces el teorema quedara demostrado donde  $L\{F(t)\} = f(s)$  y  $L\{G(t)\} = g(s)$

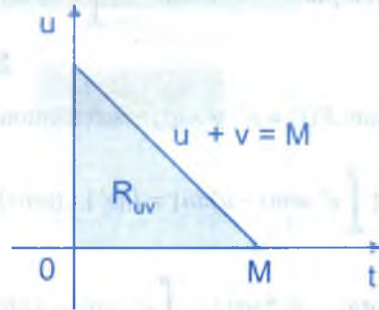
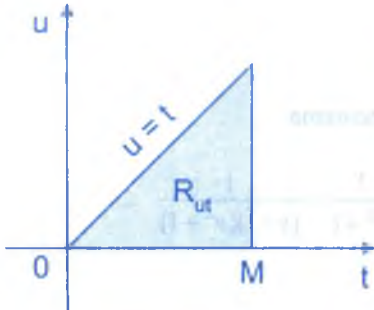
$$\begin{aligned} L\left\{ \int_0^t F(u)G(t-u)du \right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^t F(u)G(t-u)du \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-st} F(u)G(t-u)du dt = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M, \text{ donde} \end{aligned}$$

$$S_M = \int_0^M \int_0^t e^{-st} F(u)G(t-u)du dt \quad \dots (2)$$

Consideremos la región  $R_{tu}$  sobre el cual se calcula la integral doble.

Haciendo  $t = u = v \Rightarrow t = u + v$

ahora a la región  $R_{tu}$  la transformamos en al región  $R_{uv}$ .

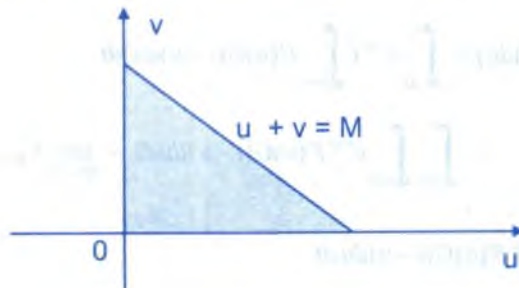


$$S_M = \iint_{R_{tu}} e^{-st} F(u)G(t-u) du dt = \iint_{R_{uv}} e^{-s(u+v)} F(u)G(u) \left| \frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} \right| du dv \quad \dots (3)$$

donde el jacobiano de la transformación es.  $J(u,v) = \frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

por lo tanto:  $S_M = \iint_{R_{uv}} e^{-s(u+v)} F(u)G(u) du dv$ ; ahora definiremos la función siguiente.

$$k(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)} F(u)G(v) & , \text{ si } u+v \leq M \\ 0 & , \text{ si } u+v > M \end{cases}$$





$$S_M = \int_{v=0}^M \int_{u=0}^M k(u,v) du dv, \text{ entonces}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = \int_0^\infty \int_0^\infty k(u,v) du dv = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} F(u)G(v) du dv = \left( \int_0^\infty e^{-su} F(u) du \right) \left( \int_0^\infty e^{-sv} G(v) dv \right)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = L\{F(u)\} \cdot L\{G(v)\} = f(s) \cdot g(s) \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{como } L\left\{ \int_0^t F(u)G(t-u) du \right\} = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M \quad \dots (\beta)$$

$$\text{por lo tanto de } (\alpha) \text{ y } (\beta) \text{ se tiene: } f(s) \cdot g(s) = L\left\{ \int_0^t F(u)G(t-u) du \right\}$$

$$\therefore L^{-1}\{f(s) \cdot g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du = F * G$$

**OBSERVACIÓN.-** La convolución de F y G es conmutativa, es decir  $F * G = G * F$

**Ejemplo.-** Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\}$

**Solución**

Sea  $f(s) = \frac{1}{s-1}$  y  $g(s) = \frac{1}{s+4}$  de donde  $L^{-1}\{f(s)\} = e^t = F(t)$  y

$L^{-1}\{g(s)\} = e^{-4t} = G(t)$ , por lo tanto por el teorema de convolución se tiene:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\right\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du = \int_0^t e^u \cdot e^{-4(t-u)} du = e^{-4t} \int_0^t e^{5u} du = \frac{e^t}{5} - \frac{e^{-4t}}{5}$$

**Ejemplo.-** Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4} \cdot \frac{s}{s^2+4}\right\}, \text{ de donde } f(s) = \frac{s}{s^2+4} \text{ y } g(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

por lo tanto  $L^{-1}\{f(s)\} = \cos 2t = F(t)$  y  $L^{-1}\{g(s)\} = \cos 2t = G(t)$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} &= \int_0^t F(u)G(t-u)du = \int_0^t \cos 2u \cdot \cos(2t-2u)du \\ &= \int_0^t \cos 2u (\cos 2t \cos 2u + \sin 2t \sin 2u)du \\ &= \cos 2t \int_0^t \cos^2 2u du + \sin 2t \int_0^t \sin 2u \cdot \cos 2u du \\ &= \cos 2t \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8}\right) + \sin 2t \left(\frac{\sin^2 2t}{4}\right) = \frac{t \cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \\ \therefore L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} &= \frac{t \cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \end{aligned}$$

## 12.11. LA FUNCIÓN ERROR.-

A la función error denotaremos por  $f_{er}$  y es definido por:

$$f_{er}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$$

al evaluar transformada inversa de ciertas funciones simples de  $s$  se encuentra la función error por ejemplo: se conoce que  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$  entonces por la propiedad de traslación.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right\} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

ahora aplicamos el teorema de convolución a la transformada inversa de  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\}$ , es

decir:  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 = F(t)$  y  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right\} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} = G(t)$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \int_0^1 \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} du = \int_0^1 \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} du \quad \dots (I)$$

Sea  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx = 2\sqrt{u} dx$ ; para  $u = 0$ ;  $x = 0$  y para  $u = t$ ,  $x = \sqrt{t}$

Luego reemplazando en (1) se tiene:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} du = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}} \cdot 2x dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx = f_{er}(\sqrt{t})$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = f_{er}(\sqrt{t})$$

**12.12. LA FUNCIÓN COMPLEMENTARIA DE ERROR.-**

A la función complementaria de error definiremos por:

$$f_u(t) = 1 - f_{er}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

**12.13. LAS INTEGRALES DEL SENO Y COSENO.-**

A las integrales del seno y coseno se definen de la siguiente manera.

$$I_s(t) = \int_0^t \frac{\text{sen } u}{u} du \quad ; \quad I_c(t) = \int_0^t \frac{\text{cos } u}{u} du$$

**12.14. LA INTEGRAL EXPONENCIAL.-**

A la integral exponencial se define de la siguiente manera:  $I_e(t) = \int_0^t \frac{e^{-u}}{u} du$

**OBSERVACIÓN.-** Se ha estudiado la función escalón unidad y su respectiva transformada de Laplace. Ahora expresaremos la transformada inversa en términos de la función escalón unidad y los expresaremos mediante el teorema siguiente.

**12.15. TEOREMA.-**

Si  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  y  $c \geq 0$ , y si a  $F(t)$  se le asigna valores (no importa cuales) para  $-c < t < 0$ . Entonces:

$$L^{-1}\{e^{-cs} f(s)\} = F(t-c)\mu(t-c)$$

**Ejemplo.-** Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\} = e^{-2t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = 2t^2 e^{-2t} = F(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\right\} = F(t-4)\mu(t-4) = 2(t-4)^2 e^{-2(t-4)}\mu(t-4)$$

## 12.16. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Hallar la transformada de Laplace inversa de:

a)  $L^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2+8}\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2+8}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+8}\right\} - \frac{6}{\sqrt{2}}L^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{s^2+8}\right\} = 3\cos 2\sqrt{2}t - 3\sqrt{2}\sin 2\sqrt{2}t$$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{2s-5}\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{2s-5}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{5}{2}}\right\} = \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}t}$$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2\pi s+2\pi^2}\right\}$

**Solución**

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2\pi s+2\pi^2}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{s-\pi+\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\right\} \\ &= e^{\pi t} \cos \pi t + e^{\pi t} \sin \pi t \end{aligned}$$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2+4} - \frac{4s-24}{s^2-16}\right\}$

**Solución**

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2+4} - \frac{4s-24}{s^2-16}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2+4}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4s-24}{s^2-16}\right\} \\ &= 3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-16}\right\} + 6L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2-16}\right\} \\ &= 3 \cos 2t - 4 \operatorname{sen} 2t - 4 \cosh 4t + 6 \operatorname{senh} 4t \end{aligned}$$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^5}\right\}$

**Solución**

Mediante la propiedad de traslación se tiene

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^5}\right\} = e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^5}\right\} = e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4} - \frac{1}{s^5}\right\} = e^{-t}\left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24}\right) = \frac{e^{-t}}{24}(4t^3 - t^4)$$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\right\} = \frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{s+2/3}{s^2+3s+9/4}\right\} = \frac{3}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3/2}\right\} = \frac{3}{4}e^{-3t/2}$$

2) Hallar la transformada inversa de Laplace.

a)  $L^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^3-s}\right\}$

**Solución**

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{2s-6}{s^3-s} = \frac{2s-6}{s(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} = \frac{A(s+1)(s-1) + Bs(s-1) + Cs(s+1)}{s(s+1)(s-1)}$$

$$2s-6 = A(s^2-1) + B(s^2-s) + C(s^2+s) \Rightarrow 2s-6 = (A+B+C)s^2 + (-B+C)s - A$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 & A=6 \\ -B+C=2 & \Rightarrow B=-4 \\ -A=-6 & C=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2s-6}{s^3-s} = \frac{6}{s} - \frac{4}{s+1} - \frac{2}{s-1}$$



$$L^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^3-s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{6}{s} - \frac{4}{s+1} - \frac{2}{s-1}\right\} = 6 - 4e^{-t} - 2e^t$$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$

### Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} = \frac{A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s+3)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

$$s^2-2s+2 = A(s^2+2s+2) + B(s^2+3s) + C(s+3)$$

$$s^2-2s+2 = (A+B)s^2 + (2A+3B+C)s + 2A+3C$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B+C=-2 \\ 2A+3C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{17}{5} \\ B=-\frac{12}{5} \\ C=-\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)} = \frac{17}{5(s+3)} - \frac{1}{5} \left( \frac{12s+8}{s^2+2s+2} \right)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{17}{5(s+3)} - \frac{1}{5} \left( \frac{12s+8}{s^2+2s+2} \right)\right\}$$

$$= \frac{17}{5} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\} - \frac{12}{5} L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\} + \frac{4}{5} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$= \frac{17}{5} e^{-3t} - \frac{12}{5} e^{-t} \cos t + \frac{4}{5} e^{-t} \sin t$$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$

**Solución**

$$\frac{s^2 - 2s + 3}{(s+1)^2(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} = \frac{A(s-1)^2 + B(s+1)(s-1) + C(s+1)}{(s+1)(s-1)^2}$$

$$s^2 - 2s + 3 = A(s^2 - 2s + 1) + B(s^2 - 1) + C(s+1) = (A+B)s^2 + (-2A+C)s + A - B + C$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+C=-2 \\ A-B+C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2 - 2s + 3}{(s-1)^2(s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{5}{4(s+1)} - \frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{5}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = \frac{5}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^t + \frac{te^t}{2}$$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 + a^3}\right\}$

**Solución**

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{1}{s^3 + a^3} = \frac{1}{(s+a)(s^2 - as + a^2)} = \frac{A}{s+a} + \frac{Bs+C}{s^2 - as + a^2} = \frac{A(s^2 - as + a^2) + (Bs+C)(s+a)}{(s+a)(s^2 - as + a^2)}$$

$$1 = A(s^2 - as + a^2) + B(s^2 + as) + C(s+a)$$

$$1 = (A+B)s^2 + (-aA + aB + C)s + a^2A + aC$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -aA+aB+C=0 \\ a^2A+aC=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3a^2} \\ B=-\frac{1}{3a^2} \\ C=\frac{2}{3a} \end{cases}$$

$$\frac{1}{s^3 + a^3} = \frac{1}{3a^2(s+a)} - \frac{1}{3a^2} \left( \frac{s+a}{s^2 - as + a^2} \right)$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3 + a^3} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{3a^2(s+a)} - \frac{1}{3a^2} \left( \frac{s+a}{s^2 - as + a^2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3a^2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} - \frac{1}{3a^2} L^{-1} \left\{ \frac{s-2a}{\left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}} \right\}$$

$$= \frac{1}{3a^2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} - \frac{1}{3a^2} \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{s - \frac{a}{2}}{\left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}} \right\} - \sqrt{3} L^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3} \frac{a}{2}}{\left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}} \right\} \right\}$$

$$= \frac{1}{3a^2} e^{-at} - \frac{1}{3a^2} e^{\frac{a}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3a^2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}a}{2}t$$

e)  $L^{-1} \left\{ \frac{1-2\sqrt{3}s}{4s^2+1} \right\}$

### Solución

$$L^{-1} \left\{ \frac{1-2\sqrt{3}s}{4s^2+1} \right\} = \frac{1}{4} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \frac{1}{4}} \right\} - \frac{2\sqrt{3}}{4} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \frac{1}{4}} \right\} - \frac{\sqrt{3}}{2} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{t}{2}$$

③ Hallar  $L^{-1} \left\{ \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2 + 9)} \right\}$

### Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.  $\frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+9} \right)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)} &= \frac{1}{9} \left[ \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2} - \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2+9} \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ 2s+10+\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2} - \left( 2s+10-\frac{10s+50}{s^2+9} \right) \right] = \frac{1}{9} \left[ \frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} + \frac{10s}{s^2+9} + \frac{50}{s^2+9} \right] \\ L^{-1} \left\{ \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)} \right\} &= \frac{1}{9} L^{-1} \left\{ \frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} + \frac{10s}{s^2+9} + \frac{50}{s^2+9} \right\} = \frac{1}{9} (8+40t+10\cos 3t + \frac{50}{3} \sin 3t) \\ \therefore L^{-1} \left\{ \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)} \right\} &= \frac{1}{27} (24+120t+30\cos 3t+50\sin 3t) \end{aligned}$$

4) Calcular  $L^{-1} \left\{ \frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)} \right\}$

**Solución**

Descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3} = \frac{A(s-1)(s+3)+B(s+3)+C(s-1)^2}{(s-1)^2(s+3)}$$

$$2s^2-9s+19 = A(s^2+2s-3)+B(s+3)+C(s^2-2s+1) = (A+C)s^2+(2A+B-2C)s$$

$$\begin{cases} A+C=2 \\ -2A+3B+C=19 \\ -3A+3B+C=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \\ C=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)} = -\frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{4}{s+3}$$

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)} \right\} &= L^{-1} \left\{ -\frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{4}{s+3} \right\} \\ &= -2L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} + 3L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\} + 4L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+3} \right\} = -2e^t + 3te^t + 4e^{-3t} \end{aligned}$$

5) Hallar  $L^{-1} \left\{ \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} \right\}$

**Solución**

Descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\frac{2s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{As + B}{s^2 + 2s + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 5} = \frac{(As + B)(s^2 + 2s + 5) + (Cs + D)(s^2 + 2s + 2)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$s^2 + 2s + 3 = A(s^3 + 2s^2 + 5s) + B(s^2 + 2s + 5) + C(s^3 + 2s^2 + 2s) + D(s^2 + 2s + 2)$$

$$= (A + C)s^3 + (2A + B + 2C + D)s^2 + (5A + 2B + 2C + 2D)s + 5B + 2D$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + 2C + D = 1 \\ 5A + 2B + 2C + 2D = 2 \\ 5B + 2D = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \\ C = 0 \\ D = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 2s + 2} + \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + 2s + 5}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 2s + 2} + \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + 2s + 5}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} \sin t + \frac{1}{3}e^{-t} \sin 2t$$

6 Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5 + 4s^4 + 13s^3 + 62s^2 + 149s + 130}\right\}$

### Solución

factorizando el denominador se tiene:

$$s^5 + 4s^4 + 14s^3 + 62s^2 + 149s + 130 = (s + 2)(s^2 - 2s + 13)(s^2 + 4s + 5)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5 + 4s^4 + 13s^3 + 62s^2 + 149s + 130}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s + 2} + \frac{Bs + C}{s^2 - 2s + 13} + \frac{Ds + E}{s^2 + 4s + 5}\right\}$$

$$= \frac{1}{4578}L^{-1}\left\{\frac{218}{s + 2} - \frac{8s + 81}{(s - 1)^2 + 12} + \frac{226s + 515}{(s + 2)^2 + 1}\right\}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4578} (218e^{-2t} - e^t L^{-1} \left\{ \frac{8s+89}{s^2+12} \right\}) + e^{-2t} L^{-1} \left\{ \frac{226s+63}{s^2+1} \right\} \\
 &= \frac{1}{4518} (218e^{-2t} - 8e^t \cos \sqrt{2}t - \frac{89}{\sqrt{12}} \operatorname{sen} \sqrt{12}t + 226e^{-2t} \cos t + 63e^{-2t} \operatorname{sen} t)
 \end{aligned}$$

7 Hallar  $L^{-1} \left\{ \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \right\}$

**Solución**

aplicando la fórmula de HEAVISIDE.  $P(s) = 2s^2 - 4$  y  $Q(s) = (s+1)(s-2)(s-3)$

para  $Q(s) = 0$ , se tiene  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 3$

$$Q(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6 \Rightarrow Q'(s) = 3s^2 - 8s - 1$$

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \left\{ \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \right\} &= \frac{P(-1)}{Q'(-1)} e^{-t} + \frac{P(2)}{Q'(2)} e^{2t} + \frac{P(3)}{Q'(3)} e^{3t} \\
 &= -\frac{2}{12} e^{-t} + \frac{4}{-3} e^{2t} + \frac{14}{4} e^{3t} = -\frac{e^{-t}}{6} - \frac{4}{3} e^{2t} + \frac{7}{2} e^{3t}
 \end{aligned}$$

8 Calcular  $L^{-1} \left\{ \frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)} \right\}$

**Solución**

aplicando la fórmula de HEAVISIDE.  $P(s) = 19s + 37$  y  $Q(s) = (s-2)(s+1)(s+3)$

como  $Q(s) = 0$ , entonces  $\alpha_1 = -3$ ,  $\alpha_2 = -1$ ,  $\alpha_3 = 2$

$$Q(s) = s^3 + 2s^2 - 5s - 6 \Rightarrow Q'(s) = 3s^2 + 4s - 5$$

$$Q'(-3) = -10, \quad Q'(-1) = -6, \quad Q'(2) = 15; \quad P(-3) = -20, \quad P(-1) = 18, \quad P(2) = 75$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{P(-3)}{Q'(-3)(s+3)} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)(s+1)} + \frac{P(2)}{Q'(2)(s-2)} \right\} = 2e^{-3t} - 3e^{-t} + 5e^{2t}$$

9

$$\text{Calcular } L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$$

**Solución**

Aplicando el teorema de convolución se tiene:

$$L^{-1}\{f(s).g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G, \text{ donde } f(s) = L\{F(t)\} \text{ y } g(s) = L\{G(t)\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}, \text{ donde}$$

$$\begin{cases} f(s) = \frac{1}{s+1} \\ g(s) = \frac{1}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t} \\ G(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \text{sen } t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} &= \int_0^t F(u)G(t-u)du = \int_0^t e^{-u} \cdot \text{sen}(t-u)du \\ &= \int_0^t e^{-u}(\text{sen } t \cos u - \text{cost} \text{sen } u)du = \text{sen } t \int_0^t e^{-u} \cos u \, du - \text{cost} \int_0^t e^{-u} \text{sen } u \, du \\ &= \text{sen } t \left( \frac{-e^{-u} \cos u + e^{-u} \text{sen } u}{2} \right) \Bigg|_0^t - \text{cost} \left( \frac{-e^{-u} \text{sen } u - e^{-u} \cos u}{2} \right) \Bigg|_0^t \\ &= \frac{e^{-t} \text{sen } t}{2} (\text{sen } t - \text{cost}) + \frac{\text{sen } t}{2} - \frac{e^{-t} \text{cost}}{2} (\text{sen } t + \text{cost}) - \frac{\text{cost}}{2} = \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\text{sen } t - \text{cost}}{2} \\ \therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} &= \frac{e^{-t} + \text{sen } t - \text{cost}}{2} \end{aligned}$$

10

$$\text{Calcular } L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

**Solución**

Aplicando el teorema de convolución,  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right\}$ , de donde

$$\begin{cases} g(s) = \frac{s}{s^2+1} \\ f(s) = \frac{1}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G(t) = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t \\ F(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} &= \int_0^t F(u)G(t-u)du = \int_0^t \sin u \cdot \cos(t-u)du \\ &= \int_0^t \sin u \cdot (\cos t \cos u + \sin t \sin u)du = \cos t \int_0^t \sin u \cos u du + \sin t \int_0^t \sin^2 u du \\ &= \cos t \left(\frac{\sin^2 u}{2}\right) \Big|_0^t + \sin t \left(\frac{u}{2} - \frac{\sin u \cos u}{2}\right) \Big|_0^t \\ &= \frac{\cos t \sin^2 t}{2} + \frac{t \sin t}{2} - \frac{\sin^2 t \cos t}{2} = \frac{t \sin t}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{t \sin t}{2}$$

- ⑪ Dado  $a > 0$  y  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ , probar que:  $L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right)$

**Solución**

Sea  $k = \frac{1}{a} \Rightarrow L\{F(kt)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{s}{k}\right)$

$$L\left\{F\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = a f(as) \Rightarrow F\left(\frac{t}{a}\right) = a L^{-1}\{f(as)\} \quad \therefore L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right)$$

- ⑫ Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^3}\right\}$

**Solución**

Aplicando la propiedad siguiente: Si  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L^{-1}\{f'(s)\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\{f(s)\}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{-4s}{(s^2+a^2)^3}\right\}, \text{ de donde}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^3}\right\} = \frac{t}{4} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} \quad \dots (1)$$

aplicando el teorema de convolución

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s^2+a^2}\right\}, \text{ de donde } L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\text{sen } at}{a} = F(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\text{sen } at}{a} = G(t)$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} &= \int_0^t F(u)G(t-u)du = \int_0^t \frac{\text{sen } au}{a} \cdot \frac{\text{sen } a(t-u)}{a} du \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^t \text{sen } au (\text{sen } at \cos au - \cos at \text{sen } au) du \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \text{sen } at \int_0^t \text{sen } au \cos au du - \cos at \int_0^t \text{sen}^2 au du \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \text{sen } at \cdot \frac{\text{sen}^2 au}{2a} - \cos at \cdot \left( \frac{u}{2} - \frac{\text{sen } 2au}{4a} \right) \right] \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\text{sen}^3 at}{2a} - \frac{t \cos at}{2} + \frac{\cos^2 at \cdot \text{sen } at}{2a} \right] = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\text{sen } at}{2a} - \frac{t \cos at}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2a^3} (\text{sen } at - at \cos at) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^3}\right\} = \frac{t}{8a^3} (\text{sen } at - at \cos at)$

13 Hallar  $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+3)}\right)\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+3)}\right)\right\} = L^{-1}\{\ln(s^2+1) - \ln s - \ln(s+3)\}; \text{ aplicando la propiedad siguiente.}$$

$$L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{f'(s)\} \text{ de donde}$$

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+3)}\right)\right\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{-\frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right\} = -\frac{1}{t}(2\cos t - 1 - e^{-3t}) = \frac{1+e^{-3t}-2\cos t}{t}$$

14

Calcular  $L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{k^2}{s^2}\right)\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{k^2}{s^2}\right)\right\} = L^{-1}\{\ln(s^2+k^2) - \ln s^2\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+k^2} - \frac{2}{s}\right\} = -\frac{1}{t}[2\cos kt - 2] = \frac{2-2\cos kt}{t}$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{k^2}{s^2}\right)\right\} = \frac{2-2\cos kt}{t}$$

15

Calcular  $L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^3}\right)\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^3}\right)\right\} = L^{-1}\{\ln(s^3+1)\} - 3L^{-1}\{\ln s\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{3s^2}{s^3+1}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{2s-1}{s^2-s+1} - \frac{3}{s}\right\} = -\frac{1}{t}(e^{-t} + 2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - 3)$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^3}\right)\right\} = \frac{3-2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - e^{-t}}{t}$$

16

Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\} = L^{-1}\{\ln(s^2+a^2) - \ln(s^2+b^2)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+a^2} - \frac{2s}{s^2+b^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}(2\cos at - 2\cos bt) = \frac{2\cos bt - 2\cos at}{t}$$



$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\} = \int_b^a \frac{2(\cos bu - \cos au)}{u} du$$

17) Calcular  $L^{-1}\left\{\ln\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2}\right\}$

**Solución**

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\ln\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2}\right\} &= L^{-1}\{\ln(s+a) + \ln(s^2+c^2) - \ln(s+b) - 2\ln(s-c)\} \\ &= -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+a} + \frac{2s}{s^2+c^2} - \frac{1}{s+b} - \frac{2}{s-c}\right\} \\ &= -\frac{1}{t}(e^{-at} + 2\cos ct - e^{-bt} - 2e^{ct}) = \frac{e^{-bt} + 2e^{ct} - e^{-at} - 2\cos ct}{t} \end{aligned}$$

18) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\right\}$

**Solución**

Utilizando la propiedad siguiente:

$$\text{Si } L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t) \text{ donde } G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{para } t > a \\ 0 & \text{para } t < a \end{cases}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = e^{-2t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t e^{-2t} = F(t) \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\right\} = \begin{cases} F(t-4), & t > 4 \\ 0, & t < 4 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\right\} = F(t-4) \cdot \mu(t-4) = (t-4)e^{-2(t-4)} \mu(t-4)$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\right\} = (t-4)e^{-2(t-4)} \mu(t-4)$$

19) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\right\}$

**Solución**

Como  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ , para  $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-e^{-2s}} = 1 + e^{-2s} + e^{-4s} + \dots + e^{-2ns} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2ns}, \text{ entonces}$$

$$\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2ns}}{s^3}, \text{ aplicando la inversa}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\right\} = L^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2ns}}{s^3}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}\left\{\frac{e^{-2ns}}{s^3}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} F(t-2n)\mu(t-2n), \text{ donde}$$

$$F(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2} \Rightarrow F(t-2n) = \frac{(t-2n)^2}{2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-2n)^2}{2} \mu(t-2n)$$

20 Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\}$

**Solución**

como  $L^{-1}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ , derivando  $L\left\{\frac{d}{da} J_0(at)\right\} = -\frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$

$L\{t J_0'(at)\} = -\frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$ , tomando la inversa

$t J_0'(at) = -a L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\}$  de donde  $L\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t J_0'(at)}{a} = \frac{t J_1(at)}{a}$

$\therefore L\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = \frac{t J_1(at)}{a}$

21 Calcular  $F(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 \cosh(2s)}\right\}$  y  $F(12)$

Solución

$$\cosh 2s = \frac{e^{2s} + e^{-2s}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cosh 2s} = \frac{2}{e^{2s} + e^{-2s}} = \frac{2e^{-2s}}{1 + e^{-4s}}$$

$$\frac{1}{s^3 \cosh 2s} = \frac{2e^{-2s}}{s^3(1 + e^{-4s})} = \frac{2e^{-2s}}{s^3} (1 - e^{-4s} + e^{-8s} - e^{-12s} + \dots) = \frac{2e^{-2s}}{s^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-4ns}$$

$$= \frac{2}{s^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(4n+2)s} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-(4n+2)s}}{s^3}$$

$$F(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3 \cosh 2s} \right\} = 2L^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-(4n+2)s}}{s^3} \right\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^{-1} \left\{ \frac{e^{-(4n+2)s}}{s^3} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t - 4n - 2)^2 \mu(t - 4n - 2) \text{ de donde}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4n + 2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t - 4n - 2)^2 & \text{si } t > 4n + 2 \end{cases}$$

ahora  $F(12) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (12 - 4n - 2)^2 = 10^2 - 6^2 + 2^2 = 68$

puesto que  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (12 - 4n - 2)^2$ ,  $12 > 4n + 2$

22

Calcular  $L^{-1} \left\{ \frac{\exp\left(\frac{a}{s}\right)}{s^{n+1}} \right\}$

Solución

$$\exp(ax) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m x^m}{m!} = e^{ax} \Rightarrow e^{\frac{a}{s}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m! s^m} \Rightarrow \frac{\exp\left(\frac{a}{s}\right)}{s^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m! s^{m+n+1}}, \text{ se tiene:}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{\exp\left(\frac{a}{s}\right)}{s^{n+1}}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{m+n+1}}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m t^{m+n}}{m!(m+n)!} = \left(\frac{t}{a}\right)^{n/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{at})^{2m+n}}{m!(m+n)!} = \left(\frac{t}{a}\right)^{n/2} I_n(2\sqrt{at})$$

donde  $I_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n}$  función de Bessel modificada.

23) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}} \sinh\left(3+\frac{s}{2}\right)}{(s+6)^{9/2}}\right\}$

**Solución**

$$2e^{3-\frac{3s}{2}} \sinh\left(3+\frac{s}{2}\right) = 2e^{3-\frac{3s}{2}} \left(\frac{e^{3+\frac{s}{2}} - e^{-3-\frac{s}{2}}}{2}\right) = e^{6-s} - e^{-2s}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}} \sinh\left(3+\frac{s}{2}\right)}{(s+6)^{9/2}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{e^{6-s} - e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\right\} = e^6 L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+6)^{9/2}}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\right\} \dots (1)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\right\} = e^{-6t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{9/2}}\right\} = e^{-6t} \cdot \frac{t^{7/2}}{\Gamma(9/2)} = \frac{16e^{-6t} t^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} \dots (2)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}} \sinh\left(3+\frac{s}{2}\right)}{(s+6)^{9/2}}\right\} = e^{-6} \frac{16e^{-6(t-1)} (t-1)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} \mu(t-1) - \frac{16e^{-6(t-2)} (t-2)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} \mu(t-2)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}} \sinh\left(3+\frac{s}{2}\right)}{(s+6)^{9/2}}\right\} = [e^{12-6t} (t-1)^{7/2} \mu(t-1) - e^{12-6t} (t-2)^{7/2} \mu(t-2)] \frac{16}{105\sqrt{\pi}}$$

24) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\right\}$

**Solución**

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \Rightarrow e^{-\frac{1}{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! s^n} \Rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! s^{n+\frac{1}{2}}} \text{ entonces se tiene:}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n-\frac{1}{2}}}{n! \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n-\frac{1}{2}}}{n! \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} t^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\sqrt{t})^{2n}}{\sqrt{\pi t}(2n)!} = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$$

(25) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}J_0\left(\frac{2}{\sqrt{s}}\right)\right\}$

**Solución**

Por definición de la función  $J_0(t)$  se tiene:  $J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$

$$J_0\left(\frac{2}{\sqrt{s}}\right) = 1 - \frac{2^2}{2^2 \cdot s} + \frac{2^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot s^2} - \frac{2^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot s^3} + \dots$$

$$\frac{1}{s}J_0\left(\frac{2}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2^2 \cdot s^5} - \frac{1}{6^2 \cdot s^4} + \frac{1}{24^2 \cdot s^5} + \dots = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(2!)^2 s^3} - \frac{1}{(3!)^2 s^4} + \frac{1}{(4!)^2 s^5} - \dots$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}J_0\left(\frac{2}{\sqrt{s}}\right)\right\} = 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^3} - \frac{t^3}{(3!)^3} + \frac{t^4}{(4!)^4} + \dots + \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^3}$$

(26) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-9s})}\right\}$

**Solución**

$$\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bx+C}{s^2+4s+5} = \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{3s+25}{s^2+4s+5}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{3(s+2)+19}{(s+2)^2+1}\right)$$

$$L^{-1}\left\{-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{3(s+2)+19}{(s+2)^2+1}\right)\right\} = -\frac{3}{2} e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-2t} \cos t - \frac{19}{2} e^{-2t} \operatorname{sent} t$$



$$= -\frac{1}{2}(3e^{-t} + 3e^{-2t} \cos t + e^{-2t} \operatorname{sen} t)$$

$$\frac{1}{1-e^{-3s}} = 1 + e^{-3s} + e^{-6s} + \dots + e^{-3ns} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-3ns}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-9s})}\right\} = L^{-1}\left\{\left(-\frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{3s+25}{s^2+4s+5}\right)\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-3ns}\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{3}{2} L^{-1}\left\{\frac{e^{-3ns}}{s+1}\right\} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}\left\{\frac{(3s+25)e^{-3ns}}{s^2+4s+5}\right\}$$

$$= -\frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} L^{-1}\left\{\frac{e^{-3ns+3n}}{s}\right\} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2t} L^{-1}\left\{\frac{(3s+19)e^{-3ns+6n}}{s^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t+3n} L^{-1}\left\{\frac{e^{-3ns}}{s}\right\} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(t-3n)} L^{-1}\left\{\frac{3s+19}{s^2+1} e^{-3ns}\right\}$$

$$= -\frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(t-3n)} \mu(t-3n) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(t-3n)} [3 \cos t + 19 \operatorname{sen} t] \mu(t-3n)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [3e^{-(t-3n)} \cdot e^{-2(t-3n)} (3 \cos t + 19 \operatorname{sen} t)] \mu(t-3n)$$

27) Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-6s}}{s} \operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\right\}$

**Solución**

Sea  $f(s) = \operatorname{arctg}(s^2+4s+4) \Rightarrow f'(s) = \frac{2s+4}{(s+2)^4+1}$

$$L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\{f'(s)\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s+2)^4+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{t} e^{-2t} L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^4+1}\right\} = -\frac{e^{-2t}}{t} L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+\sqrt{2}s+1)(s^2-\sqrt{2}s+1)}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^{-2t}}{t} L^{-1} \left\{ \frac{As+B}{s^2+\sqrt{2}s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+\sqrt{2}s+1} \right\} \\
&= -\frac{e^{-2t}}{t} L^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{(s-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{1}{(s+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} \right] \right\} \\
&= -\frac{e^{-2t}}{2t} \left[ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \right] \\
&= -\frac{e^{-2t}}{2t} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \left[ \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}}{2} \right] = -\frac{e^{-2t}}{t} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{senh} \frac{\sqrt{2}}{2} t \\
L^{-1} \{ \operatorname{arctg}(s^2+4s+4) \} &= \frac{e^{-2t} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{senh} \frac{\sqrt{2}}{2} t}{t}
\end{aligned}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-6s}}{s} \operatorname{arctg}(s^2+4s+4) \right\} = \int_0^{\infty} \frac{-e^{-2(u-6)} \operatorname{sen}\left(\frac{u-6}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{senh} \frac{\sqrt{2}}{2} (u-6)}{u-6} \mu(u-6) du$$

28) Calcular  $L^{-1} \left\{ \frac{4-e^{-bs}}{s^4(4+2e^{-bs})} \right\}$  y halle el dominio de existencia de  $F(t)$ .

### Solución

$$\begin{aligned}
\frac{4-e^{-bs}}{s^4(4+2e^{-bs})} &= \frac{4-e^{-bs}}{4s^4(1+\frac{e^{-bs}}{2})} = \frac{4-e^{-bs}}{4s^4} \left( 1 - \frac{e^{-bs}}{2} + \frac{e^{-2bs}}{4} - \frac{e^{-3bs}}{8} + \dots \right) \\
&= \frac{4-e^{-bs}}{4s^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nbs}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4-e^{-bs}}{4s^4} (-1)^n \frac{e^{-nbs}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left( \frac{e^{-nbs}}{s^4} - \frac{e^{-(n+1)s}}{4s^4} \right) \\
L^{-1} \left\{ \frac{4-e^{-bs}}{s^4(4+2e^{-bs})} \right\} &= L^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left( \frac{e^{-nbs}}{s^4} - \frac{e^{-(n+1)s}}{4s^4} \right) \right\} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} L^{-1} \left\{ \frac{4e^{-nbs}}{s^4} - \frac{e^{-(n+1)s}}{4s^4} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left[ \frac{4(t-nb)^3}{6} \mu(t-nb) - \frac{(t-(n+1)b)^3}{6} \mu(t-(n+1)b) \right]$$

$$= \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} [4(t-nb)^3 \mu(t-nb) - (t-(n+1)b)^3 \mu(t-(n+1)b)]$$

y  $F(t)$  en  $nb < t < (n+1)b$

29

Demostrar que:  $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{i\pi w} (1-w^2)^{-\frac{1}{2}} dw$

**Solución**

$L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{s+i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s-i}}$ ; aplicando el teorema de convolución se tiene:

$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+i}}\right\} = \frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}}{\sqrt{\pi}}$  ;  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-i}}\right\} = \frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{it}}{\sqrt{\pi}}$

$J_0(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s-i}}\right\} = \int_0^t \frac{u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(t-u)^{-\frac{1}{2}}e^{i(t-u)}}{\sqrt{\pi}} du$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^t e^{i(t-2u)} u^{-\frac{1}{2}}(t-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

Sea  $u = tv \Rightarrow du = t dv$ , cuando  $u \rightarrow 0$  ;  $v \rightarrow 0$  ,  $u \rightarrow t$  ;  $v \rightarrow 1$

$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{i(t-2tv)} u^{-\frac{1}{2}}(t-u)^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{i(t-2tv)} v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{1}{2}} dv$

$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{i(t-2tv)} v^{-\frac{1}{2}}(1-v)^{-\frac{1}{2}} dv$ , ahora hacemos  $w = 1 - 2v \Rightarrow dv = -\frac{dw}{2}$

cundo  $v \rightarrow 0$ ,  $w \rightarrow 1$  y cuando  $v \rightarrow 1$ ,  $w \rightarrow -1$

$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_1^{-1} e^{i\pi w} \left(\frac{1-w}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1+w}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{dw}{2}\right) \Rightarrow J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{i\pi w} (1-w^2)^{-\frac{1}{2}} dw$

30) Demostrar que:  $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta$

Solución

Sea  $w = \cos \theta \Rightarrow$  cuando  $\begin{cases} \theta = 0, & w = 1 \\ \theta = \pi, & w = -1 \end{cases}$ . Utilizando el ejercicio 28) se tiene:

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{itw} (1-w^2)^{-\frac{1}{2}} dw = \frac{1}{\pi} \int_\pi^0 e^{it \cos \theta} (1-\cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} (-\sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-it \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(t \cos \theta) + i \sin(t \cos \theta)] d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \sin(t \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

igualando la parte real y la parte imaginaria se tiene:  $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta$

31) Probar que  $L^{-1}\{t^{-\frac{1}{2}} f_{er}(\sqrt{t})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

Solución

Se conoce que:  $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ , sea  $x = u^2$

$$e^{-u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{n!}, \text{ integrando de } 0 \text{ a } t.$$

$$\int_0^t e^{-u^2} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^t u^{2n} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Big|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$f_{er}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$f_{er}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{\frac{n+1}{2}}}{n!(2n+1)}, \text{ multiplicando por } t^{-\frac{1}{2}}$$

$$t^{-\frac{1}{2}} f_{er}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)n!}, \text{ tomando la transformada}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\{t^{-\frac{1}{2}} f_{er}(\sqrt{t})\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} L^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)n!}\right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} L\{t^n\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{n+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}s} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \\ \therefore L\{t^{-1/2} f_{er}(\sqrt{t})\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}s} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \end{aligned}$$

32) Calcular  $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1} dx$

**Solución**

Sea  $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1} dx$ , tomando Transformada de Laplace

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} tx}{x^2+1} dx \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \left( \int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} xt dt \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} L\{\operatorname{sen} xt\} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+x^2)} = \frac{1}{s^2-1} \int_0^{\infty} \left( \frac{s^2}{x^2+s^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{s^2-1} [s \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{s} - \operatorname{arctg} x] \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2-1} \left[ \frac{s\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{s+1} \right) \end{aligned}$$

Luego  $L\{F(t)\} = L\left\{\int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{sen} xt}{x^2+1} dx\right\} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{s+1} \right)$  tomando la transformada inversa

$$F(t) = L^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{s+1} \right)\right\} = \frac{\pi}{2} e^{-t} \quad \therefore \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1} dx = \frac{\pi e^{-t}}{2}$$

33) Calcular  $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$



Solución

Sea  $F(t) = \int_0^{\infty} \cos tx^2 dx$ , tomando transformada

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^{\infty} \cos tx^2 dx \right) dt = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-st} \cos tx^2 dt \right) dx = \int_0^{\infty} L\{\cos tx^2\} dx = \int_0^{\infty} \frac{s}{s^2 + x^4} dx$$

sea  $x^2 = s \operatorname{tg} \theta \Rightarrow 2x dx = s \cdot \sec^2 \theta d\theta$

cuando  $x \rightarrow 0$ ;  $\theta \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} \frac{s dx}{s^2 + x^4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s^2 \cdot \sec^2 \theta d\theta}{(s^2 + s^2 \operatorname{tg}^2 \theta) 2\sqrt{s} \operatorname{tg} \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{s} \operatorname{tg} \theta} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1/2} \theta \cdot \operatorname{sen}^{-1/2} \theta d\theta = \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(\frac{3}{4})-1} \theta \operatorname{sen}^{2(\frac{1}{4})-1} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{2\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{1}{4})} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{2} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \frac{\pi}{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{s}} \end{aligned}$$

$$F(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} L^{-1}\{s^{-1/2}\} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} t^{-1/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2t}} \quad \therefore F(t) = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

34

Calcular  $\int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2 + 1} dx$

Solución

Sea  $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos nxt}{x^2 + 1} dx$ , tomando transformada

$$\begin{aligned} L\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^{\infty} \frac{\cos nxt}{x^2 + 1} dx \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \left( \int_0^{\infty} e^{-st} \cos nxt dt \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} L\{\cos nxt\} dx = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + n^2 x^2} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{s \, dx}{(x^2+1)(s^2+n^2x^2)} = \int_0^{\infty} \left( \frac{s}{x^2+1} - \frac{sn^2}{s^2+n^2x^2} \right) \frac{dx}{s^2-n^2}$$

$$= \frac{s}{s^2-n^2} \left[ \arctg x - \frac{n}{s} \arctg \frac{nx}{2} \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2-n^2} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2s} \right] = \frac{\pi s}{2(s^2-n^2)} \left( 1 - \frac{n}{s} \right)$$

$$L\{F(t)\} = \frac{\pi(s-n)}{2(s+n)(s-n)} = \frac{\pi}{2(s+n)}$$

$$F(t) = L^{-1}\left\{ \frac{\pi}{2(s+n)} \right\} = \frac{\pi}{2} e^{-nt} \quad \therefore F(1) = \int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2+1} dx = \frac{\pi e^{-n}}{2}$$

35) Calcular  $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-\sqrt{s}} \right\}$

**Solución**

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-\sqrt{s}} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{s+\sqrt{s}}{s^2-s} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-1} + \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)} \right\} = e^t + e^t L^{-1}\left\{ \frac{1}{s\sqrt{s+1}} \right\}$$

$$= e^t + e^t [L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{s+1}} \right\}] = e^t + e^t [L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} * L^{-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{s+1}} \right\}] = e^t + e^t [1 * \frac{e^t}{\sqrt{\pi t}}]$$

$$= e^t + e^t \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} du, \quad v = \sqrt{u} \Rightarrow u = v^2 \Rightarrow du = 2v dv$$

$$u=0, v=0, u \rightarrow t \Rightarrow v = \sqrt{t}$$

$$= e^t + e^t \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv \right] = e^t + e^t f_{er}(\sqrt{t}) = e^t (1 + f_{er}(t))$$

**12.17. EJERCICIOS PROPUESTOS.-**

1) Hallar la Transformada Inversa de:

a)  $L^{-1}\left\{ \frac{2s-\pi}{s(s-\pi)} \right\}$

b)  $L^{-1}\left\{ \frac{s-a}{s(s+a)} \right\}$

c)  $L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2-5} + \frac{1}{s^{5/2}} \right\}$

d)  $L^{-1}\left\{ \frac{2s+3}{s^2+9} \right\}$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^4}\right\}$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{2s^2+5s+4}{s^3+s^2-2s}\right\}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{6s}{s^2+2s-6}\right\}$

h)  $L^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2-1}\right\}$

i)  $L^{-1}\left\{\frac{5s-2}{3s^2+4s+2}\right\}$

j)  $L^{-1}\left\{\frac{s+12}{s^2+4s}\right\}$

Rpta. a)  $F(t) = 2e^{\pi t} - 2e^{\frac{\pi}{2}t} \sinh \frac{\pi}{2}t$

b)  $F(t) = e^{-at} - 2e^{-\frac{a}{2}t} \sinh \frac{at}{2}$

c)  $F(t) = \frac{\sinh(\sqrt{5}t)}{\sqrt{5}} + \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$

d)  $F(t) = 2 \cos 3t + \sin 3t$

e)  $F(t) = e^{-2t} \frac{t^3}{6}$

f)  $F(t) = 2 + e^t - e^{-2t}$

g)  $F(t) = 6e^{-t} \cosh \sqrt{7}t - \frac{6}{\sqrt{7}}e^{-t} \sinh \sqrt{7}t$

h)  $F(t) = 2 \cosh t - 6 \sinh t$

i)  $F(t) = \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}t} \cosh \frac{\sqrt{2}}{3}t - \frac{16}{3\sqrt{2}}e^{-\frac{2}{3}t} \sinh \frac{\sqrt{2}}{3}t$

j)  $F(t) = e^{-2t} \cosh 2t + 10e^{-2t} \sinh 2t$

②

Mediante fracciones parciales, hallar la transformada inversa de Laplace.

a)  $L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}\right\}$

Rpta.  $F(t) = \frac{1}{2}(3e^t - e^{-t})$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}$

Rpta.  $F(t) = t - 1 + e^{-t}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{9s^2+6s+5}\right\}$

Rpta.  $F(t) = \frac{1}{9}e^{-t/3} \left(\frac{\cos 2t}{3} + \frac{\sin 2t}{3}\right)$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{2s^2+1}{s(s+1)^2}\right\}$

Rpta.  $F(t) = 1 + e^{-t} - 3te^{-t}$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{5s-2}{s(s+2)(s-1)}\right\}$

Rpta.  $F(t) = 1 - 2e^{-2t} + e^t$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$

Rpta.  $F(t) = 5e^{3t} - 2e^{-2t}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^3-s}\right\}$

Rpta.  $F(t) = 1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$

h)  $L^{-1}\left\{\frac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\right\}$

Rpta.  $F(t) = \frac{\cos 2t}{3} - \sin 2t + \frac{2}{3}\cos 4t + \frac{\sin 4t}{2}$

i)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s-2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$

Rpta.  $F(t) = -\frac{1}{13}e^{2t} + \frac{3}{10}e^{3t} - \frac{29}{30}e^{-t}\cos 2t + \frac{151}{390}e^{-t}\sin 2t$

j)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

Rpta.  $F(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$

3) Mediante la formula de Hoaviside calcular la transformada inversa de Laplace.

a)  $L^{-1}\left\{\frac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$

Rpta.  $F(t) = 3e^{-2t} - e^{3t}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$

Rpta.  $F(t) = 5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$

Rpta.  $F(t) = \frac{e^t}{2} - e^{2t} + \frac{5}{2}e^{3t}$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

Rpta.  $F(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin t - \cos t)$

$$e) \quad L^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$$

$$\text{Rpta. } F(t) = 5e^{3t} - 2e^{-2t}$$

$$f) \quad L^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$$

$$\text{Rpta. } F(t) = \frac{e^{-t/2}}{2} - \frac{1}{3}e^{-2t}$$

$$g) \quad L^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$$

$$\text{Rpta. } F(t) = 3e^{-4t} - 3\cos 3t$$

$$h) \quad L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$$

$$\text{Rpta. } F(t) = -\frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{-t}(4\cos t - 3\sin t)$$

$$i) \quad L^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$$

$$\text{Rpta. } F(t) = \frac{3e^{3t}}{50} - \frac{e^{-2t}}{25} - \frac{e^{-t}\cos 2t}{50} + \frac{9e^{-t}\sin 2t}{25}$$

$$j) \quad L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$$

$$\text{Rpta. } F(t) = \frac{1}{2}\sinh t \cdot \sin t$$

4) Encontrar la transformada inversa de Laplace.

$$a) \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}, \quad a^2 \neq b^2, \quad ab \neq 0$$

$$b) \quad L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}, \quad a^2 \neq b^2, \quad ab \neq 0$$

$$c) \quad L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}, \quad a^2 \neq b^2, \quad ab \neq 0$$

$$d) \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^3+1)}\right\}$$

$$e) \quad L^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\}$$

5) Hallar la transformada de Laplace, mediante el teorema de convolución.



a)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s-1)}\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s-b)}\right\}, a \neq b$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^3}\right\}$

h)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$

6 Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s+5}\right\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-6s+13}\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{s-5}{s^2-6s+13}\right\}$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2+4s+29}\right\}$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s+1)^4}\right\}$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s+2)^3}\right\}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$

h)  $L^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2+4} - \frac{4s-24}{s^2-16}\right\}$

i)  $L^{-1}\left\{\frac{2s-\pi}{s^3(s-\pi)}\right\}$

j)  $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$

k)  $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^4-16s^2+100}\right\}$

l)  $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)(s^2+4)}\right\}$

ll)  $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+1)(s^2+4s+13)}\right\}$

m)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)^3}\right\}$

7 Hallar las siguientes Transformadas inversas.

a)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2 - s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}\right\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^4 - 2s^2 + 1}\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2(s^2+1)}\right\}$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)(s^2+4)}\right\}$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+3)}\right\}$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^n}\right\}, n > 0$

h)  $L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$

i)  $L^{-1}\left\{\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$

j)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+1}\right\}$

8 Si  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ ,  $n > -1$ , calcular:

a)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^{5/2}}\right\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^{7/2}}\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{3(s^2-1)^2}{s^5} + \frac{4s-18}{9-s^2} + \frac{(s+1)(2-s^{1/2})}{s^{5/2}}\right\}$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^{4/3}}\right\}$

e)  $L^{-1}\left\{\left(\frac{\sqrt{s-1}}{s}\right)^2\right\}$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^{5/2}} - \frac{7}{3s+2}\right\}$

9 Hallar la transformada inversa de Laplace.

a)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2-6s+7}{(s^2-4s+5)^2}\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{s^3+8s^2+22(s+1)}{(s^2+6s+10)^2}\right\}$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2-s-3}{(s^2+2s+5)^2}\right\}$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{2(s^3+2s^2-s-47)}{(s^2+4s+13)^2}\right\}$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{s^2 - 10s - 25}{s^3 - 25s}\right\}$

h)  $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2 + 7s + 2}\right\}$

10 Hallar la Transformada inversa de Laplace de:

a)  $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)\right\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)\right\}$

d)  $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+1)}\right)\right\}$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2-1}{s^2}\right)\right\}$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+1}{(s-1)^2}\right)\right\}$

h)  $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+3)}\right)\right\}$

i)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+2}{s+1}\right)\right\}$

j)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\}$

k)  $L^{-1}\{s \ln\left(\frac{s+1}{s+1}\right) + 2\}$

l)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{10}} \ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\}$

ll)  $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2}\right)\right\}$

11 Hallar la transformada inversa de Laplace de

a)  $L^{-1}\{\operatorname{arctg}(s+1)\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cos\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$

d)  $L^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{s}\right)\right\}$

e)  $L^{-1}\{\operatorname{arctg}(s+1)\}$

f)  $L^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{s+2}\right)\right\}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s^2}\operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\right\}$

h)  $L^{-1}\left\{s^2\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{s}\right)\right\}$

12 Calcular la Transformada inversa de Laplace de:

a)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^3}\right)^{-1/2}\right\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$

d)  $L^{-1}\{e^{-3s-2\sqrt{s}}\}$

e)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-1}}\right\}$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)\sqrt{s}}\right\}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{s+1}}\right\}$

h)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+4s+13}}\right\}$

i)  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{se^s+1}\right\}$

j)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-a+b}}\right\}$

k)  $L^{-1}\{e^{1/s}-1\}$

l)  $L^{-1}\{e^{-1/s}-1\}$

m)  $L^{-1}\left\{\frac{(s+3)e^{-s}}{4s^2+4s+9}\right\}$

13 Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a)  $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+1)(1-e^{-2s})}\right\}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)^2(1-e^{-2s})}\right\}$

c)  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)(e^{-s}+1)}\right\}$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-3s})}\right\}$

14 Para  $a > 0$ . Demuéstrese que: de  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$  se sigue que

$$L^{-1}\{f(as+b)\} = \frac{1}{a}e^{-\frac{bt}{a}}F\left(\frac{t}{a}\right)$$

15 Dado  $F(t) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s^3 \sinh(3s)}\right\}$ , calcular  $F(10)$

Rpta.  $F(10) = 344$

16 Verificar  $L^{-1}\left\{\frac{1}{1+\sqrt{s}}\right\} = e^t\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-t} + f_{er}(\sqrt{t})-1\right)$

17) Verificar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s\sqrt{x}}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$

18) Demuestre que:  $L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s+1}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+1}+\sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{-t/2}J_1(t/2)}{t}$

19) Demuestre que para  $n \in \mathbb{Z}^+$ , se tiene:  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\right\} = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$

20) Demuéstrese que para  $m > -1$ :  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^{m+1}}\right\} = \frac{t^m e^{-at}}{\Gamma(m+1)}$

21) Halle la formula para determinar:  $F_n(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n(s^2+1)}\right\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$

22) Hallar  $F(t) = L^{-1}\left\{\frac{(s^3 - 3s^2 + 6s - 4)e^{-\pi(s-1)}}{(s^2 - 2s + 2)^2}\right\}$

Rpta.  $F(t) = -e^{-t}[\cos t + (t - \pi) \operatorname{sen} t] \mu_{\pi}(t)$

23) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\right\}$  Rpta.  $F(t) = \frac{1}{2}(t-4)^2 e^{-2(t-4)} \mu(t-4)$

24) Si F(t) es continua para  $t > 0$  y  $F(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+1)^3}\right\}$  evaluar F(2), F(5), F(7)

Rpta.  $F(2) = 0$ ,  $F(5) = 2e^{-2}$ ,  $F(7) = 8e^{-4}$

25) Si F(t) es continua para  $t > 0$  y  $F(t) = L^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-2s})(1-3e^{-2s})}{s^2}\right\}$  evaluar F(1), F(3), F(5)

Rpta.  $F(1) = 1$ ,  $F(3) = -1$ ,  $F(5) = -4$

26) Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)\sqrt{s^2+b}}\right\}$  Rpta.  $F(t) = e^{-at} \int_0^t e^{at} J_0(bt) dt$

27) Si  $H(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)$  calcular  $F(t) = L^{-1}\{H(s)\}$



- (28) Mostrar que para cualquier entero  $n > 1$ ,  $a \neq 0$ .

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{2n} \int_0^t L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^n}\right\} dt$$

- (29) Utilizando el resultado del ejercicio 27), para demostrar que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t t \sin t dt, n \text{ veces.}$$

- (30) Dado  $c > 0$ ,  $s > 0$  y  $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$ . Pruebe que

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{\cosh(cs)}\right\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F(t - 2nc - c) U(t - 2nc - c)$$

- (31) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{(s^2 + 2s + 16)^3}}\right\}$  Rpta.  $F(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{15}} \int_0^t \sin \sqrt{15(t-u)} J_0(\sqrt{15u}) du$

- (32) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s} J_0\left(\frac{2}{\sqrt{s}}\right)\right\}$  Rpta.  $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$

- (33) Calcular la transformada de Laplace:  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(as+1)(as+2)\dots(as+n)}\right\}$

$$\text{Rpta. } F(t) = \frac{t}{n!} (1 - e^{-\frac{1}{a}t})^n$$

- (34) Hallar  $F(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s e^s - 1}\right\}$  Rpta.  $F(t) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(t-n)^{n-4} \mu(t-4)}{(n-4)!}$

- (35) Demostrar que :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{1+\sqrt{1+s}} + \frac{1}{1+\sqrt{s}} + \frac{1}{s\sqrt{s+a}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} (1+e^{-t}) - (1+e^t) f_{er}(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{a}} f_{er}(at)$$

- (36) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-\sqrt{s}}\right\}$  (37) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-a+b}}\right\}$

- 38) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{2s^4 + 14s^2 + 16}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)(s^2 + 7)} + \frac{s^3}{s^4 + 4a^4}\right\}$
- 39) Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{s^6 + s^5 + 10s^4 + 6s^3 + 25s^2 + 9s}{s^8 + 16s^6 + 94s^4 + 240s^2 + 225}\right\}$
- 40) Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{2(s^3 - 7s^2 + 14s - 9)}{(s-1)^2(s-2)^3}\right\}$
- 41) Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{4s^3 + 18s^2 + 30s + 17}{(s+2)^4}\right\}$
- 42) Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{s^3 - 2s^2 + s}{(s^2 - 4s + 5)(s^2 - 2s + 5)}\right\}$
- 43) Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\}$
- 44) Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{3s^2 - 2s - 1}{(s-3)(s^2 + 1)}\right\}$
- 45) Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{2s^3 + 5s^2 + 6s + 1}{s(s+1)^3}\right\}$
- 46) Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{9 - 6s + 5s^2 - s^3}{s^2(s-3)^2}\right\}$
- 47) Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{5 - 7s + 4s^2 - s^3}{(s+1)^3(s-2)^2}\right\}$
- 48) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{2(s^3 + 2s^2 - s - 47)}{(s^2 + 4s + 13)^2}\right\}$
- 49) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{s^3 - 6s^2 + 27s - 38}{(s^2 - 4s + 13)^2}\right\}$
- 50) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{s^2 - 6s + 7}{(s^2 + 4s + 5)^2}\right\}$
- 51) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{as+b}}\right\}$ ,  $a, b > 0$
- 52) Calcular a)  $L^{-1}\left\{sL\left\{\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt\right\}\right\}$  b)  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$
- 53) Hallar la transformada inversa de Laplace  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)^n}\right\}$
- 54) Hallar la transformada inversa de  $L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2}\left(\frac{s-2}{s^2+4}\right)\right\}$
- 55) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2+2bs+c}\right\}$ ,  $\forall A, B, b$  y  $c$  reales

- (56) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 + 4a^4}\right\}$
- (57) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{2e^{3(1-\frac{s}{2})} \sinh(3 + \frac{s}{2})}{(s+6)^{5/6}}\right\}$
- (58) Calcular  $F(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^6(1-e^{4s})}\right\}$  y  $F(12)$
- (59) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\right\}$
- (60) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}\right\}$ ,  $a \neq b$
- (61) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{10}{s^{21} \sinh(cs)}\right\}$
- (62) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^6 \cosh(cs)}\right\}$
- (63) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{\sqrt{s}}\right\}$
- (64) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{e^s}{s^{n+1}}\right\}$
- (65) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s^4 - 1}\right\}$
- (66) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-6s}}{s e^{4s} + 1}\right\}$
- (67) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+6)^{n+1}}\right\}$
- (68) Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{20}{s^6 \sinh(4s)}\right\}$
- (69) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{4s^3 + 6s^2 + 14s + 11}{(s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + 2)(1 - e^{-2s})^2}\right\}$
- (70) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{4 - e^{-as}}{s(4 + 2e^{-as})}\right\}$
- (71) Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{1/s}}{\sqrt{s^3}}\right\}$
- (72) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{s^4 - 6s^3 + 5s^2 + 3s - 1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)(s^2 + 9)(s^2 + 36)}\right\}$
- (73) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^2}{\sqrt{s^2 + a^2}}\right\}$
- (74) Hallar  $L^{-1}\left\{\frac{\cosh(-4s)}{s^4 + 4a^4}\right\}$
- (75) Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^4 - a^4}}\right\}$
- (76) Encontrar  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-4s} \sinh(6s)}{(1 - e^{-4s})^2}\right\}$

77) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-20s}}{s^5 + 5s^4 + 14s^3 + 62s^2 + 149s + 130}\right\}$

78) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{2e^{\frac{s-5}{2}} \cosh(5 + \frac{s}{2})}{(s+24)^{13/2}}\right\}$

79) Evaluar  $L^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 9s + 19}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$

80) Calcular  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$  Rpta.  $F(t)=[1 - \cos(t-1)]\mu(t-1) - [1 - \cos(t-2)]\mu(t-2)$

81) Demostrar que:

a)  $L^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\} = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$

b)  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = f_{er}\left(\frac{a}{\sqrt{4t}}\right)$

c)  $L^{-1}\{s e^{-a\sqrt{s}}\} = \frac{1}{4}(a^2 - 2t) \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t^5}}$

d)  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$

e)  $L^{-1}\{e^{-4s-2\sqrt{s}}\} = \frac{1}{\sqrt{11(t-4)^3}} e^{-\frac{1}{t-4}} \mu(t-4)$

f)  $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{(s^2 - a^2)^3}}\right\} = \frac{t I_1(t)}{a}$

g)  $L^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s + b\sqrt{s}}\right\} = e^{ab+b^2t} f_{er}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$

82) Dado  $c > 0, s > 0$  y  $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ , probar que:

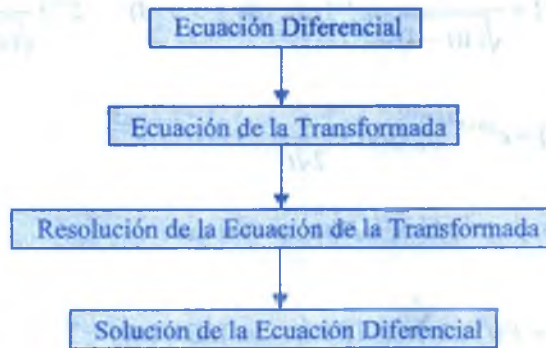
$$L^{-1}\{f(s) \operatorname{tgh}(cs)\} = F(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F(t - 2nc) \mu(t - 2nc)$$

## CAPÍTULO XIII

### 13. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Las técnicas de transformada de Laplace son muy útil para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas, es decir: A medida que avancemos en su estudio observamos que dicho método transforma un problema de Ecuaciones Diferenciales ordinarias en un problema algebraico de fácil análisis, el que una vez resuelta es llevado al problema original a través de la transformada inversa de Laplace.

Este proceso observaremos en el siguiente esquema.



Como  $L\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\}$ ,  $n > 1$ , depende  $y(t)$  y sus  $n - 1$  derivadas calculadas en  $t = 0$ , la Transformada de Laplace es especialmente adecuada para resolver problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales. Este caso de ecuaciones diferenciales puede reducirse a una ecuación algebraica en la función transformada  $L\{y(t)\} = y(s)$ , para ver esto, consideremos el problema de valor inicial.



$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

$y(0) = y_0$  ,  $y'(0) = y'_0$  , ... ,  $y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$  , en donde

$a_i$  ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , y  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  son constantes, por la linealidad de la Transformada de Laplace podemos escribir.

$$a_n L\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1} L\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\} + \dots + a_1 L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\}$$
 , por propiedades

$$a_n [s^n L\{y\} - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} L\{y\} - s^{n-2} y(0) - \dots - s^{n-3} y'(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\}$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) L\{y\} = a_n [s^{n-1} y(0) + s^{n-2} y'(0) + \dots + y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} (s^{n-1} + s^{n-2} y(0) + \dots + y^{(n-2)}(0)) + \dots + L\{g(t)\}$$

de donde  $L\{y\} = Y(s)$ , calculando  $y(t)$  mediante la transformada inversa de Laplace.

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

En forma similar para las ecuaciones lineales de coeficientes variables no homogéneas.

**Ejemplo.-** Resolver las siguientes diferenciales

①  $y''(t) + 4y(t) = 9t$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 7$

**Solución**

Tomando Transformada de Laplace en la ecuación diferencial

$$L\{y''(t) + 4y(t)\} = L\{9t\} \Rightarrow L\{y''(t)\} + 4L\{y(t)\} = L\{9t\}$$

$$s^2 L\{y(t)\} - s y(0) - y'(0) + 4L\{y(t)\} = \frac{9}{s^2}$$

$$(s^2 + 4)L\{y(t)\} = \frac{9}{s^2} + 7 = \frac{9 + 7s^2}{s^2} \Rightarrow L\{y(t)\} = \frac{7s^2 + 9}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{9}{4} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} \right) + \frac{7}{s^2 + 4}$$

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{9}{4} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} \right) + \frac{7}{s^2 + 4} \right\}$$

$$y(t) = \frac{9}{4} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} \right\} + 7 L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 4} \right\} = \frac{9}{4} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + \frac{7}{2} \sin 2t$$

$$\therefore y(t) = \frac{9t}{4} + \frac{19}{8} \sin 2t$$

②  $(D^2 - 4D + 4)y = 2e^{2t} + \cos t$ ,  $y(0) = \frac{3}{25}$ ,  $y'(0) = -\frac{4}{25}$

### Solución

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + 4y = 2e^{2t} + \cos t, \text{ tomando Transformada de Laplace en la ecuación}$$

$$L\left\{ \frac{d^2 y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + 4y \right\} = L\{2e^{2t} + \cos t\}, \text{ por propiedades}$$

$$s^2 L\{y(t)\} - s y(0) - y'(0) - 4s L\{y(t)\} + 4y(0) + 4L\{y(t)\} = L\{2e^{2t} + \cos t\}$$

$$(s^2 - 4s + 4)L\{y(t)\} - \frac{3s}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{2}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s-2)^2 L\{y(t)\} = \frac{2}{s-2} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{3s-16}{25}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{2}{(s-2)^3} + \frac{s}{(s^2+1)(s-2)^2} + \frac{3s-16}{25(s-2)^2}$$

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{2}{(s-2)^3} + \frac{s}{(s^2+1)(s-2)^2} + \frac{3s-16}{25(s-2)^2} \right\} = t^2 e^{2t} + \frac{3}{5} t e^{2t} + \frac{3}{25} e^{2t} - \frac{\sin t}{4}$$

③  $t y''(t) + y'(t) + t y(t) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

**Solución**

Tomando Transformada de Laplace se tiene

$$L\{t y''(t) + y'(t) + t y(t)\} = 0, \text{ de donde } L\{t y''(t)\} + L\{y'(t)\} + L\{t y(t)\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2 L\{y(t)\} - s y(0) - y'(0) + s L\{y(t)\} - y(0)) - \frac{d}{ds} L\{y(t)\} = 0$$

$$-2s L\{y(t)\} - s^2 \frac{d}{ds} L\{y(t)\} + s L\{y(t)\} - \frac{d}{ds} L\{y(t)\} = 0$$

$$(s^2 + 1) \frac{d}{ds} L\{y(t)\} = -s L\{y(t)\} \Rightarrow \frac{dL\{y(t)\}}{L\{y(t)\}} = -\frac{s ds}{s^2 + 1}, \text{ integrando}$$

$$\ln(L\{y(t)\}) = -\ln \sqrt{s^2 + 1} + \ln k \Rightarrow \ln(L\{y(t)\}) = \ln \frac{k}{\sqrt{s^2 + 1}}, \text{ levantando el logaritmo}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{k}{\sqrt{s^2 + 1}}, \text{ tomando la inversa } y(t) = k L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}\right\} = k J_0(t), \text{ como } y(0)=1 \text{ y}$$

$$J_0(0) = 1 \text{ entonces } y(0) = c J_0(0) \Rightarrow 1 = c \quad \therefore y(t) = J_0(t)$$

**13.1. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.-**

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + g(t) \end{cases} \quad \dots (1)$$

con condiciones iniciales  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , donde  $x, y$  son las funciones incógnitas,  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  son constantes y  $f(t), g(t)$  son funciones conocidas tomando la Transformada de Laplace a ambas ecuaciones diferenciales del sistema (1)

$$\begin{cases} L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = L\{a_{11}x + a_{12}y + f(t)\} \\ L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = L\{a_{21}x + a_{22}y + g(t)\} \end{cases}, \text{ mediante las propiedades de la transformada se tiene:}$$

$$\begin{cases} sL\{x\} - x(0) = a_{11}L\{x\} + a_{12}L\{y\} + L\{f(t)\} \\ sL\{y\} - y(0) = a_{21}L\{x\} + a_{22}L\{y\} + L\{g(t)\} \end{cases}, \text{ agrupando términos se tiene:}$$

$$\begin{cases} (s - a_{11})L\{x\} - a_{12}L\{y\} = x_0 + L\{f(t)\} \\ -a_{21}L\{x\} + (s - a_{22})L\{y\} = y_0 + L\{g(t)\} \end{cases} \dots (2)$$

Si  $x_0 + L\{f(t)\}$  y  $y_0 + L\{g(t)\}$  no son ambos cero, entonces se puede resolver el sistema (2), mediante la regla de CRAMER, es decir:

$$L\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 + L\{f(t)\} & -a_{12} \\ y_0 + L\{g(t)\} & s - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{(x_0 + L\{f(t)\})(s - a_{22}) + a_{12}(y_0 + L\{g(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$

$$x = L^{-1}\left\{\frac{(x_0 + L\{f(t)\})(s - a_{22}) + a_{12}(y_0 + L\{g(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}\right\}$$

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} s - a_{11} & x_0 + L\{f(t)\} \\ -a_{21} & y_0 + L\{g(t)\} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{(s - a_{11})(y_0 + L\{g(t)\}) + a_{21}(x_0 + L\{f(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{(s - a_{11})(y_0 + L\{g(t)\}) + a_{21}(x_0 + L\{f(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}\right\}$$

por lo tanto es evidente que la Transformada de Laplace, nos permite convertir un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas en un sistema de ecuaciones simultáneas. Este método puede generalizarse a sistemas de "n" ecuaciones diferenciales de primer orden de coeficientes, dado entonces un sistema correspondiente a "n" ecuaciones lineales simultáneas.

**Ejemplo.-** Resolver el problemas con valor inicial.  $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + e^t \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) + e^{-t} \end{cases}$   
 como  $x(0) = 1, y(0) = 0$ .

**Solución**

Tomando Transformada de Laplace, a cada ecuación diferencial

$$\begin{cases} L\{x'(t)\} = L\{x(t) - y(t) + e^t\} \\ L\{y'(t)\} = L\{2x(t) + 3y(t) + e^{-t}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sL\{x(t)\} - x(0) = L\{x(t)\} - L\{y(t)\} + L\{e^t\} \\ sL\{y(t)\} - y(0) = 2L\{x(t)\} + 3L\{y(t)\} + L\{e^{-t}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-1)L\{x(t)\} + L\{y(t)\} = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1} \\ -2L\{x(t)\} + (s-3)L\{y(t)\} = \frac{1}{s+1} \end{cases}, \text{ por la regla de CRAMER}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s}{s-1} & 1 \\ \frac{1}{s+1} & s-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-3 \end{vmatrix}} = -\frac{11}{10(s+1)} + \frac{19s-45}{10(s^2-4s+5)}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{-\frac{11}{10(s+1)} + \frac{19(s-2)-7}{10[(s-2)^2+1]}\right\} = -\frac{11}{10}e^{-t} + \frac{19}{10}e^{2t} \cos t - \frac{7}{10}e^{2t} \sin t$$

$$\therefore x(t) = -\frac{11}{10}e^{-t} + \frac{e^{2t}}{10}(19 \cos t - \sin t)$$

$$L\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s-1 & \frac{s}{s-1} \\ -2 & \frac{1}{s+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-3 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s-1}{s+1} + \frac{2s}{s-1}}{(s-1)(s-3)+2} = \frac{3s^2+1}{(s^2-1)(s^2-4s+5)}$$



$$= -\frac{2}{5(s+1)} + \frac{2}{s-1} - \frac{8}{5} \left( \frac{s-2}{(s-2)^2+1} \right) - \frac{7}{s} \left( \frac{1}{(s-2)^2+1} \right)$$

$$y(t) = L^{-1} \left\{ -\frac{2}{5(s+1)} + \frac{2}{s-1} - \frac{8}{5} \left( \frac{s-2}{(s-2)^2+1} \right) - \frac{7}{s} \left( \frac{1}{(s-2)^2+1} \right) \right\}$$

$$y(t) = -\frac{2}{5} e^{-t} + 2e^t - \frac{8}{5} e^{2t} \cos t - \frac{7}{5} e^{2t} \sin t$$

### 13.2. UNA ECUACIÓN INTEGRAL.-

El teorema de la convolución es útil para resolver otros tipos de ecuaciones en las que aparece una función incógnita bajo un signo de integral. En el ejemplo siguiente obtener  $f(t)$  resolviendo una "Ecuación Integral" de la forma.

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\mu)h(t-\mu)d\mu$$

donde las funciones  $g(t)$  y  $h(t)$  son conocidas.

**Ejemplo.-** Obtener  $f(t)$  si  $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\mu)e^{t-\mu}d\mu$

#### Solución

Tomando Transformada de Laplace.  $L\{f(t)\} = L\{3t^2\} - L\{e^{-t}\} - L\left\{ \int_0^t f(\mu)e^{t-\mu}d\mu \right\}$

$$L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - L\{f(t)\}L\{e^t\} \Rightarrow L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} L\{f(t)\}$$

$$\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow \frac{s}{s-1} L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$L\{F(t)\} = \frac{6(s-1)}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)} = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} \right\} = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}$$

**13.3. UNA ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL.-**

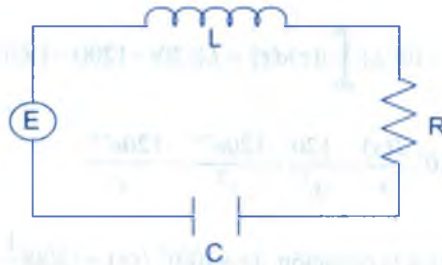
La segunda Ley de Kirchoff establece que en un circuito simple conectado en serie, la suma de las caídas de potencial a través de un inductor, de un resistor y de un capacitor es igual a la tensión  $E(t)$  suministrada, es decir que: caída de potencial a través del

inductor  $= L \frac{di}{dt}$  caída de potencial a través del resistor  $= Ri(t)$  y caída de potencial a

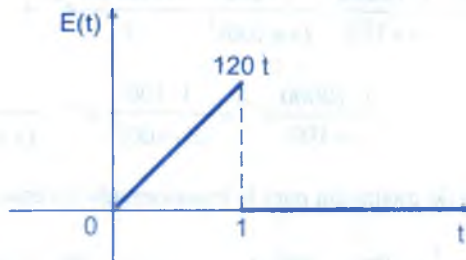
través del capacitor  $= \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau$  en donde  $i(t)$  es la corriente y  $L, R$  y  $C$  son constante,

se deduce que la corriente en un circuito como el que se muestra en la figura esta regida por la ecuación Integro-diferencial.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t)$$



**Ejemplo.-** Determinar la corriente  $i(t)$  en un circuito simple L-R -C si  $L = 0.1$  H,  $R = 20 \Omega$ ,  $C = 10^{-3} F$ ,  $i(0) = 0$  y si la tensión aplicada  $E(t)$  es como se muestra en la figura



**Solución**

como el voltaje se anula para  $t \geq 1$ , entonces podemos escribir así:

$$E(t) = \begin{cases} 120t & , 0 \leq t < 1 \\ 0 & , t \geq 1 \end{cases}; \text{ expresado en términos de la función escalón unidad.}$$

$E(t) = 120t - 120t \mu(t-1)$ , por medio de la segunda propiedad de traslación se puede escribir así:  $E(t) = 120t - 120(t-1)\mu(t-1) - 120\mu(t-1)$

ahora reemplazando los datos en la ecuación  $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t)$

$$0.1 \frac{di}{dt} + 20i + 10^3 \int_0^t i(\tau) d\tau = 120t - 120(t-1)\mu(t-1) - 120\mu(t-1)$$

$$\text{Si } L\{i(t)\} = I(s) \Rightarrow L\left\{\int_0^t i(\tau) d\tau\right\} = \frac{I(s)}{s}$$

$$L\left\{0.1 \frac{di}{dt}\right\} + 20L\{i(t)\} + 10^3 L\left\{\int_0^t i(\tau) d\tau\right\} = L\{120t - 120(t-1)U(t-1) - 120U(t-1)\}$$

$$0.1s I(s) + 20I(s) + 10^3 \frac{I(s)}{s} = \frac{120}{s} - \frac{120e^{-s}}{s^2} - \frac{120e^{-s}}{s}$$

multiplicando por  $10s$  a la ecuación  $(s+100)^2 I(s) = 1200\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - e^{-s}\right)$

$$I(s) = 1200\left[\frac{1}{s(s+100)^2} - \frac{1}{s(s+100)^2} e^{-s} - \frac{1}{(s+100)^2} e^{-s}\right]$$

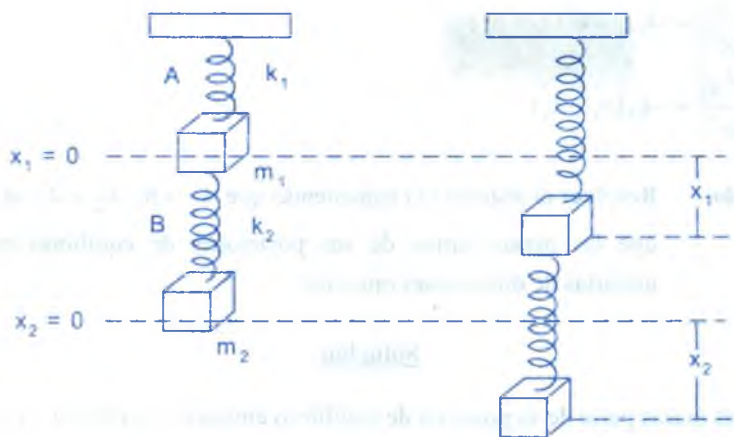
$$I(s) = 1200\left[\frac{1/10000}{s} - \frac{1/10000}{s+100} - \frac{1/100}{(s+100)^2} - \frac{1/10000}{s} e^{-s} + \frac{1/10000}{s+100} e^{-s} + \frac{1/100}{(s+100)^2} e^{-s} - \frac{1}{(s+100)^2} e^{-s}\right]$$

aplicando el teorema de traslación para la transformada inversa.

$$i(t) = \frac{3}{25}[1 - \mu(t-1)] - \frac{3}{25}[e^{-100t} - e^{-100(t-1)}\mu(t-1)] - 12te^{-100t} - 1188(t-1)e^{-100(t-1)}\mu(t-1)$$

### 13.4. RESORTES ACOPLADOS.-

Supongamos que dos masas  $m_1$  y  $m_2$  están sujetas a dos resortes A y B, de masa insignificantes, cuyas constantes son  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente. A su vez, los dos resortes están conectados como se muestra en la figura.



Sean  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  los desplazamientos verticales de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrio cuando el sistema se encuentra en movimiento, el resorte B está sujeto tanto a un alargamiento como a un acortamiento; por consiguiente, su alargamiento neto es  $x_2 - x_1$ . De este modo, por la ley Hooke resulta que los resortes A y B ejercen sobre  $m_1$ , respectivamente las fuerzas

$$-k_1 x_1 \text{ y } k_2 (x_2 - x_1)$$

Si no se aplica ninguna fuerza externa al sistema y no hay fuerza de amortiguación, entonces la fuerza neta sobre  $m_1$  es  $-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$  por la segunda ley de Newton

escribimos así:  $m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$

De igual modo la fuerza neta ejercida sobre la masa  $m_2$  se debe solamente al alargamiento neto de B, es decir:  $-k_2 (x_2 - x_1)$ , de esta manera resulta que:

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1)$$

En otras palabras, el movimiento del sistema acoplado queda descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden simultáneas.

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1) \end{cases} \quad \dots (1)$$

**Ejemplo.-** Resolver el sistema (1) suponiendo que  $k_1 = 6$ ,  $k_2 = 4$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$  y que las masas partan de sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias de direcciones opuestas.

### Solución

como las masas parte de su posición de equilibrio entonces  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$  y como sus velocidades son unitarias y opuestas entonces  $x_1'(0) = 1$ ,  $x_2'(0) = -1$ , ahora reemplazando en el sistema (1)

$$\begin{cases} x_1''(t) + 10x_1'(t) - 4x_2(t) = 0 \\ -4x_1(t) + x_2''(t) + 4x_2(t) = 0 \end{cases} \quad \dots (a)$$

tomando transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x_1''(t) + 10x_1'(t) - 4x_2(t)\} = 0 \\ L\{-4x_1(t) + x_2''(t) + 4x_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 L\{x_1(t)\} - s x_1(0) - x_1'(0) + 10s L\{x_1(t)\} - 10x_1(0) - 4L\{x_2(t)\} = 0 \\ s^2 L\{x_2(t)\} - s x_2(0) - x_2'(0) - 4L\{x_1(t)\} + 4L\{x_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 + 10s)L\{x_1(t)\} - 4L\{x_2(t)\} = 1 \\ -4L\{x_1(t)\} + (s^2 + 4)L\{x_2(t)\} = -1 \end{cases} ; \text{ aplicando la regla de CRAMER se tiene:}$$



$$L\{x_1(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & s^2 + 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 10s & -4 \\ -4 & s^2 + 4 \end{vmatrix}} = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)}; \text{ usando fracciones parciales se tiene:}$$

$$\frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = \frac{As + B}{s^2 + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 12}$$

$$s^2 = (As + B)(s^2 + 12) + (Cs + D)(s^2 + 2)$$

$$s^2 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (12A + 2C)s + 12B + 2D$$

comparando los coeficientes de s en cada miembro de la igualdad se tiene:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 1 \\ 12A + 2C = 0 \\ 12B + 2D = 0 \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \\ B = -\frac{1}{5} \\ D = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = -\frac{1}{5(s^2 + 2)} + \frac{6}{5(s^2 + 12)}$$

$$L\{x_1(t)\} = -\frac{1}{5(s^2 + 2)} + \frac{6}{5(s^2 + 12)} \Rightarrow x_1(t) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{5(s^2 + 2)} + \frac{6}{5(s^2 + 12)}\right\}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{5\sqrt{2}} L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}} L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\} \Rightarrow x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10} \text{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5} \text{sen}2\sqrt{2}t$$

$$L\{x_2(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s^2 + 10s & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 10s & -4 \\ -4 & s^2 + 4 \end{vmatrix}} = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)}$$

siguiendo el proceso anterior, mediante fracciones parciales obtenemos.

$$L\{x_2(t)\} = -\frac{\frac{2}{5}}{s^2 + 2} - \frac{\frac{3}{5}}{s^2 + 12}$$

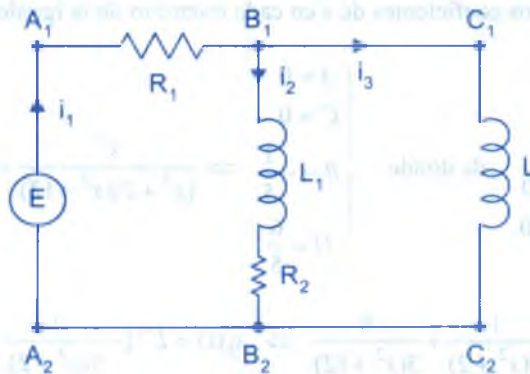
$$x_2(t) = -\frac{2}{5\sqrt{2}} L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} - \frac{3}{5\sqrt{12}} L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\} = -\frac{\sqrt{2}}{5} \operatorname{sen} \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10} \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t$$

Luego la solución del sistema ( $\alpha$ ) es:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10} \operatorname{sen} \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t \\ x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5} \operatorname{sen} \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10} \operatorname{sen} 2\sqrt{3}t \end{cases}$$

### 13.5. REDES ELÉCTRICAS.-

Un sistema eléctrico (red) con más de un circuito simple (o lazo) también da origen a ecuaciones diferenciales simultáneas tal como se muestra en la figura.



La corriente  $i_1(t)$  se divide según las direcciones indicadas en el punto  $B_1$ , llamando punto de ramificación de la red por la primera ley de KIRCHOFF podemos escribir.

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \quad \dots (1)$$

además, también se puede aplicar la segunda ley de KIRCHOFF a cada circuito, para el caso del circuito  $A_1B_1B_2A_2A_1$ , sumando las caídas de voltaje a través de cada parte del circuito resulta.

$$E(t) = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 \quad \dots (2)$$

en forma similar, para el circuito  $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$ , obtenemos

$$E(t) = i_1 R_1 + L_2 \frac{di_3}{dt} \quad \dots (3)$$

ahora reemplazamos (1) en (2) y (3) se obtiene dos ecuaciones de primer orden para las corrientes  $i_2(t)$  e  $i_3(t)$ .

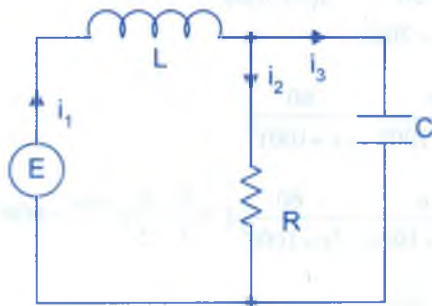
$$\begin{cases} L_1 \frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 = E(t) \\ L_2 \frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + R_1 i_3 = E(t) \end{cases} \quad \dots (4)$$

con las condiciones naturales  $i_2(0) = 0$ ,  $i_3(0) = 0$ , el sistema (4) se puede resolver mediante la Transformada de Laplace.

**13.6. PROBLEMA DE ENTRENAMIENTO PARA EL ALUMNO.-**

Demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  en la red de la figura que contiene un resistor, un inductor y un capacitor es:

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t) \\ RC \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{cases} \quad \dots (*)$$



**Ejemplo.-** Resolver el sistema (\*) con las condiciones  $E = 60V$ ,  $L = 1H$ ,  $R = 50\Omega$ ,  $C = 10^{-4} F$ , y donde  $i_1$  e  $i_2$  son inicialmente igual a cero.

**Solución**

al reemplazar los datos en el sistema (\*) se tiene.

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60 \\ 50(10^{-4}) \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{cases}, \text{ sujeto a } i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$$

ahora aplicamos transformada de Laplace a cada ecuación del sistema.

$$\begin{cases} L\left\{\frac{di_1(t)}{dt} + 50i_2(t)\right\} = L\{60\} \\ L\left\{50(10^{-4}) \frac{di_2(t)}{dt} + i_2 - i_1\right\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sL\{i_1(t)\} - i_1(0) + 50L\{i_2(t)\} = \frac{60}{s} \\ 50(10^{-4})sL\{i_2(t)\} - 50(10^{-4})i_2(0) + L\{i_2(t)\} - L\{i_1(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sL\{i_1(t)\} + 50L\{i_2(t)\} = \frac{60}{s} \\ -200L\{i_1(t)\} + (s + 200)L\{i_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$L\{i_1(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{60}{s} & 50 \\ 0 & s + 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 50 \\ -200 & s + 200 \end{vmatrix}} = \frac{60s}{s(s+100)^2}; \text{ mediante fracciones parciales se tiene}$$

$$L\{i_1(t)\} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

$$i_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}\right\} = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$L\{i_2(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s & \frac{60}{s} \\ -200 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 50 \\ -200 & s + 200 \end{vmatrix}} = \frac{12000}{s(s+100)^2}; \text{ mediante fracciones parciales se tiene:}$$

$$L\{i_2(t)\} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{120}{(s+100)^2}$$

$$i_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{120}{(s+100)^2}\right\} = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}$$

mediante fracciones parciales se tiene

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t} ; \quad i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}$$

### 13.7. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

- ① Demostrar que la ecuación subsidiaria de la ecuación diferencial  $y''+ay'+by = g(t)$ , tiene

$$\text{la Solución } y(s) = \frac{(s+a)y(0) + y'(0)}{s^2 + as + b} + \frac{R(s)}{s^2 + as + b}$$

#### Solución

Tomando la Transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$L\{y''(t) + ay'(t) + by(t)\} = L\{g(t)\} \Rightarrow s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) + a s y(s) + b y(s) = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)y(s) = (s+a)y(0) + y'(0) + R(s) \quad \therefore y(s) = \frac{(s+a)y(0) + y'(0)}{s^2 + as + b} + \frac{R(s)}{s^2 + as + b}$$

- ② Resolver la ecuación diferencial:  $y''+4y = 9t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 7$

#### Solución

Tomando la Transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$L\{y''+4y\} = L\{9t\}, \text{ de donde } s^2 L\{y\} - s y(0) - y'(0) + 4L\{y\} = \frac{9}{s^2}$$

$$(s^2 + 4)L\{y\} = \frac{9}{s^2} + 7 = \frac{7s^2 + 9}{s^2} \Rightarrow L\{y\} = \frac{7s^2 + 9}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{9}{4s^2} + \frac{19}{4} \left(\frac{1}{s^2 + 4}\right)$$

$$y = L^{-1}\left\{\frac{9}{4s^2} + \frac{19}{4} \left(\frac{1}{s^2 + 4}\right)\right\} \quad \therefore y = \frac{9t}{4} + \frac{19}{8} \text{sen } 2t$$



- ③ Resolver la ecuación Diferencial  $y'' - 3y' + 2y = 4t + 12e^{-t}$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = -1$

**Solución**

Tomando la Transformada de Laplace se tiene.  $L\{y'' - 3y' + 2y\} = L\{4t + 12e^{-t}\}$

$$s^2 L\{y\} - s y(0) - 3s L\{y\} + 3y(0) + 2L\{y\} = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}$$

$$(s^2 - 3s + 2)L\{y\} - 6s + 18 = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}$$

$$(s^2 - 3s + 2)L\{y\} = 6s - 18 + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} = \frac{6s^4 - 13s^3 - 7s^2 + 4s + 4}{s^2(s+1)}$$

$$L\{y\} = \frac{6s^4 - 13s^3 - 7s^2 + 4s + 4}{s^2(s+1)(s^2 - 3s + 2)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s-2} + \frac{3}{s-1}$$

$$y = L\left\{\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s-2} + \frac{3}{s-1}\right\} = 3 + 2t + 2e^{-t} - 2e^{2t} + 3e^t$$

- ④ Resolver la ecuación diferencial  $y'' - 4y' + 5y = 125t^2$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$

**Solución**

Tomando la Transformada de Laplace se tiene.  $L\{y'' - 4y' + 5y\} = L\{125t^2\}$ , de donde

$$s^2 L\{y\} - s y(0) - y'(0) - 4s L\{y\} + 4y(0) + 5L\{y\} = \frac{250}{s^3}$$

$$(s^2 - 4s + 5)L\{y\} = \frac{250}{s^3}, \text{ despejando } L\{y\} \text{ se tiene}$$

$$L\{y\} = \frac{250}{s^3(s^2 - 4s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{s^2 - 4s + 5}$$

$$L\{y\} = 250 \left[ \frac{11}{125s} + \frac{4}{25s^2} + \frac{1}{5s^3} - \frac{1}{125} \left( \frac{11s - 24}{s^2 - 4s + 5} \right) \right]$$

$$y(t) = 250L^{-1}\left\{\frac{11}{125s} + \frac{4}{25s^2} + \frac{1}{5s^3} - \frac{1}{125}\left(\frac{11s-24}{s^2-4s+5}\right)\right\}$$

$$= 250\left(\frac{11}{125} + \frac{4t}{25} + \frac{t^2}{10} - \frac{11}{125}e^{2t}\cos t + \frac{2}{125}e^{2t}\sin t\right)$$

$$\therefore y(t) = 22 + 40t + 25t^2 - 22e^{2t}\cos t + 4e^{2t}\sin t$$

5 Resolver la ecuación diferencial dada  $y'' + 9y = 18t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

**Solución**

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:  $L\{y'' + 9y\} = L\{18t\}$ , de donde se tiene:  $s^2L\{y\} - sy'(0) - y'(0) + 9L\{y\} = L\{18t\}$

$$(s^2 + 9)L\{y\} = \frac{18}{s^2} + y'(0) = \frac{s^2 y'(0) + 18}{s^2}$$

$$L\{y\} = \frac{s^2 y'(0) + 18}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9} \quad \dots (1)$$

$$\frac{s^2 y'(0) + 18}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9} = \frac{A(s^3 + 9s) + B(s^2 + 9) + Cs^3 + Ds^2}{s^2(s^2 + 9)}$$

$s^2 y'(0) + 18 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + 9As + 9B$  comparando coeficientes de  $s$  se tiene:

$$\begin{cases} A + C = 0 & A = 0 \\ B + D = y'(0) & B = 2 \\ \Rightarrow & \\ 9A = 0 & C = 0 \\ 9B = 18 & D = Y'(0) - 2 \end{cases} \quad \dots (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:  $L\{y\} = \frac{2}{s^2} + \frac{y'(0) - 2}{s^2 + 9}$ , tomando la inversa

$$y = L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} + \frac{y'(0) - 2}{s^2 + 9}\right\} = 2t - \frac{y'(0) - 2}{3}\sin 3t$$

$$\text{como } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \pi + \frac{y'(0) - 2}{3} \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{y'(0) - 2}{3} = \pi$$

$$\therefore y(t) = 2t + \pi \sin 3t$$

- ⑥ Resolver la ecuación diferencial dada:  $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = F(t)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

### Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:  $L\{y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)\} = L\{F(t)\}$ , de

$$\text{donde: } s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) - 4s L\{y(t)\} + 4y(0) + 3L\{y(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$(s^2 - 4s + 3) L\{y(t)\} = s - 4 + L\{F(t)\} \Rightarrow L\{y(t)\} = \frac{s - 4 + L\{F(t)\}}{s^2 - 4s + 3}, \text{ tomando inversa}$$

$$y(t) L^{-1}\left\{\frac{s - 4 + L\{F(t)\}}{(s - 3)(s - 1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s - 4}{(s - 3)(s - 1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{L\{F(t)\}}{(s - 3)(s - 1)}\right\}$$

$$= \frac{3}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1}\right\} - \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 3}\right\} + L^{-1}\{F(t)\} * L^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 3)(s - 1)}\right\}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{3t} + F(t) * \left(\frac{e^{3t}}{2} - \frac{e^t}{2}\right) = \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{3t} + \frac{1}{2} \int_0^t (e^{3u} - e^u) F(t - u) du$$

- ⑦ Resolver la ecuación diferencial dada  $tx''(t) - (4t + 1)x'(t) + 2(2t + 1)x(t) = 0$ ,  $x(0) = 0$

### Solución

Tomando la Transformada de Laplace en la ecuación dada

$$L\{tx''(t) - (4t + 1)x'(t) + 2(2t + 1)x(t)\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds} L\{x''(t)\} + 4\frac{d}{ds} L\{x'(t)\} - L\{x'(t)\} + 4\frac{d}{ds} L\{x(t)\} + 2L\{x(t)\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds} (s^2 L\{x'(t)\} - sx(0) - x'(0)) + 4\frac{d}{ds} (s L\{x(t)\} - x(0)) - sL\{x(t)\} + x(0)$$

$$-4\frac{d}{ds} L\{x(t)\} + 2L\{x(t)\} = 0$$

$$-2sL\{x(t)\} - s^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} + x(0) + 4L\{x(t)\} + 4s \frac{d}{ds} L\{x(t)\} - sL\{x(t)\}$$

$$+ x(0) - 4 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} + 2L\{x(t)\} = 0$$

$$-(s^2 - 4s + 4) \frac{d}{ds} L\{x(t)\} + (3s - 6)L\{x(t)\} = 0$$

$$(s - 2)^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} + 3(s - 2)L\{x(t)\} = 0$$

$$\frac{\frac{d}{ds} L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}} + \frac{3}{s - 2} = 0, \text{ integrando } \int \frac{\frac{d}{ds} L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}} ds + \int \frac{3ds}{s - 2} = \ln k$$

$$\ln(L\{x(t)\}) + \ln(s - 2)^3 = \ln k \Rightarrow (s - 2)^3 L\{x(t)\} = k \Rightarrow L\{x(t)\} = \frac{k}{(s - 2)^3}$$

$$x(t) = k L^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 2)^3}\right\} = \frac{kt^2 e^{2t}}{2} \quad \therefore \exists x(t), \forall k \neq 0, \text{ en particular si } k=1, \text{ se tiene la}$$

$$\text{solución } x(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t}$$

8

Resolver la ecuación diferencial  $y''(t) + y(t) = J_0(t)$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$

**Solución**

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:  $L\{y''(t) + y(t)\} = L\{J_0(t)\}$ , de donde

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + L\{y(t)\} = L\{J_0(t)\}$$

$$(s^2 + 1) L\{y(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}, \text{ despejando } L\{x(t)\}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{1}{(s^2 + 1)^{3/2}}, \text{ tomando inversa se tiene: } y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)^{3/2}}\right\}, \text{ de acuerdo}$$

$$\text{al ejercicio (20) de la transformada inversa se tiene: } y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + 1)^{3/2}}\right\} = tJ_1(t)$$

$$\therefore y(t) = tJ_1(t)$$

9

Resolver la ecuación diferencial dada por:  $y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

### Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:  $L\{y''(t) + ty'(t) - y(t)\} = 0$ , de donde:

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) - \frac{d}{ds} L\{y'(t)\} - L\{y(t)\} = 0$$

$$s^2 L\{y(t)\} - 1 - \frac{d}{ds} (sL\{y(t)\} - y(0)) - L\{y(t)\} = 0$$

$$s^2 L\{y(t)\} - 1 - L\{y(t)\} - s \frac{d}{ds} L\{y(t)\} - L\{y(t)\} = 0 \Rightarrow -s \frac{d}{ds} L\{y(t)\} + (s^2 - 2)L\{y(t)\} = 1$$

$$\frac{d}{ds} L\{y(t)\} - \frac{s^2 - 2}{s} L\{y(t)\} = -\frac{1}{s}, \text{ ecuación lineal}$$

$$L\{y(t)\} = e^{-\int \frac{s^2 - 2}{s} ds} \left[ \int e^{\int \frac{s^2 - 2}{s} ds} \left(-\frac{1}{s}\right) ds + c \right] = e^{s^2 - 2 \ln s} \left[ -\int e^{-s^2 + 2 \ln s} \frac{ds}{s} + c \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2} \left[ -\int e^{-\frac{s^2}{2}} s ds + c \right] = \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2} \left[ e^{-\frac{s^2}{2}} + c \right] = \frac{1}{s^2} + c \cdot \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}$$

Por el teorema del valor inicial se tiene:

$$0 = y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} + c \cdot \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s} \right) = 0$$

luego  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} + c \cdot \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s} \Rightarrow c = 0$ , entonces  $L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2}$ , tomando la inversa se tiene:

$$L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2} \text{ de donde } y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \text{ entonces } \therefore y(t) = t$$



- 10 Resolver la ecuación diferencial dada  $ty''(t) + (1-2t)y'(t) - 2y(t) = 0$ ,  $y(0)=1$ ,  $y'(0) = 2$

**Solución**

Tomando la Transformada de Laplace en la ecuación dada

$L\{t y''(t) + (1-2t)y'(t) - 2y(t)\} = 0$ , de donde :

$$-\frac{d}{ds}L\{y''(t)\} + L\{y'(t)\} + 2\frac{d}{ds}L\{y'(t)\} - 2L\{y(t)\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + sL\{y(t)\} - y(0) + 2\frac{d}{ds}(sL\{y(t)\} - y(0)) - 2L\{y(t)\} = 0$$

$$-2sL\{y(t)\} - s^2\frac{d}{ds}L\{y(t)\} + 1 + sL\{y(t)\} - 1 + 2L\{y(t)\} + 2s\frac{d}{ds}L\{y(t)\} - 2L\{y(t)\} = 0$$

$$-(s^2 - 2s)\frac{d}{ds}L\{y(t)\} - sL\{y(t)\} = 0$$

$$\frac{-\frac{d}{ds}L\{y(t)\}}{L\{y(t)\}} + \frac{s}{s^2 - 2s} = 0, \text{ integrando, } \int \frac{\frac{d}{ds}L\{y(t)\}}{L\{y(t)\}} + ds + \int \frac{ds}{s-2} = \ln k$$

$$\ln(L\{y(t)\}) + \ln(s-2) = \ln k \Rightarrow \ln(L\{y(t)\}) = \ln\left(\frac{k}{s-2}\right), \text{ de donde: } \ln L\{y(t)\} = \frac{k}{s-2},$$

aplicando el teorema del valor inicial se tiene:

$$1 = y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{ks}{s-2} = k \text{ entonces } L\{y(t)\} = \frac{1}{s-2}, \text{ tomando inversa}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}, \text{ por lo tanto, la solución es: } y(t) = e^{2t}.$$

- 11 Para que valores de A y B se tendrá que  $F(0) = 1$ ,  $F'(0) = 3$  siendo  $H(s) = \frac{s^2 + As - B}{s^3 - s}$

y  $F(t) = L^{-1}\{H(s)\}$ .

**Solución**

Descomponiendo en fracciones H(s) se tiene:

$$H(s) = \frac{s^2 + As - B}{s^3 - s} = \frac{M}{s} + \frac{N}{s-1} + \frac{R}{s+1}, \text{ de donde:}$$

$$M = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + As - B}{(s-1)(s+1)} = \frac{-B}{-1} = B \Rightarrow M = B$$

$$N = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 + As - B}{s(s+1)} = \frac{1+A-B}{2} \Rightarrow N = \frac{1+A-B}{2}$$

$$R = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^2 + As - B}{s(s-1)} = \frac{1-A-B}{2(s+1)}$$

$$\text{Luego } H(s) = \frac{B}{s} + \frac{1+A-B}{2(s-1)} + \frac{1-A-B}{2(s+1)}$$

$$F(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{B}{s} + \frac{1+A-B}{2(s-1)} + \frac{1-A-B}{2(s+1)}\right\} = B + \frac{1+A-B}{2}e^t + \frac{1-A-B}{2}e^{-t}$$

$$F(0) = 1 = B + \frac{1+A-B}{2} - \frac{1-A-B}{2}$$

$$F'(t) = \frac{1+A-B}{2}e^t - \frac{1-A-B}{2}e^{-t} \Rightarrow F'(0) = 3 = \frac{1+A-B}{2} + \frac{1-A-B}{2} \Rightarrow A = 3$$

$$\text{Además } 1 = B + 2 - \frac{B}{2} - 1 - \frac{B}{2} = 1 \text{ (verdadero), entonces } F(t) = B + \frac{4-B}{2}e^t - \frac{2+B}{2}e^{-t}$$

para  $A=3$  y para cualquier valor de  $B$ .

12

Resolver la ecuación diferencial dada por:  $y''(t) + 2y'(t) = f(t)$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ ,

$$\text{donde: } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi < t < 2\pi \\ 0 & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si } t > 2\pi \end{cases}$$

**Solución**

$$\text{La función } F(t) \text{ es lo mismo expresarlo así } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < \pi \\ 1 & \text{si } \pi < t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t > 2\pi \end{cases}$$

Ahora la función  $f(t)$  expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$$f(t) = \mu(t - \pi) - \mu(t - 2\pi), \text{ de donde } L\{f(t)\} = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s},$$

además  $L\{y''(t) + 2y'(t)\} = L\{f(t)\}$

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + 2sL\{y(t)\} - 2y(0) = L\{f(t)\}$$

$$(s^2 + 2s)L\{y(t)\} = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}, \text{ de donde } L\{y(t)\} = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s^2(s+2)}, \text{ tomando la inversa}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s^2(s+2)}\right\} = [(t - \pi) + e^{-(t-\pi)} - 1]\mu(t - \pi) - [(t - 2\pi) + e^{-(t-2\pi)} - 1]\mu(t - 2\pi)$$

$$y(t) = [t - \pi - 1 + e^{-(t-\pi)}]\mu(t - \pi) - [t - 2\pi - 1 + e^{-(t-2\pi)}]\mu(t - 2\pi)$$

**Nota:**  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\} = t + e^{-t} - 1$

- 13 Resolver la ecuación diferencial dada por:  $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ e^{-(t-1)} & , t > 2 \end{cases}$ , donde:  
 $y(0) = 1, y'(0) = -1$

**Solución**

Encontraremos la solución para  $t \leq 2$ ,  $L\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y(t)\right\} = 0$ , de donde:

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + 4sL\{y(t)\} - 4y(0) + 4L\{y(t)\} = 0$$

$$(s^2 + 4s + 4)L\{y(t)\} = s + 3, \text{ despejando } L\{y(t)\}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{s+3}{(s+2)^2}, \text{ ahora tomando la inversa } y(t) = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+2)^2}\right\} = te^{-2t} + e^{-2t}$$

Ahora veremos la solución para  $t > 2$

$$L\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y(t)\right\} = L\{e^{-(t-2)}\} \Rightarrow (s+2)^2 L\{y(t)\} - (s+3) = \frac{e^2}{s+1}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{s+3}{(s+2)^2} + \frac{e^2}{(s+2)^2(s+1)}, \text{ tomando la inversa}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+2)^2} + \frac{e^2}{(s+2)(s+1)}\right\} = e^{-2t} + te^{-2t} + e^2(e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t})$$

Luego la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = \begin{cases} te^{-2t} + e^{-2t} & , \text{ para } t \leq 2 \\ (t+1)e^{-2t} + e^{-(t-2)} - (t-1)e^{-2(t-1)} & , \text{ para } t > 2 \end{cases}$$

**14** Resolver la ecuación diferencial dado por

$$t x''(t) + x'(t) - a^2 t x(t) = 0, \quad x(0) = k, \quad x'(0) = 0, \quad a \neq 0$$

### Solución

Tomando la Transformada de Laplace

$$L\{t x''(t) + x'(t) - a^2 t x(t)\} = 0 = \frac{d}{ds} L\{x''(t)\} + L\{x'(t)\} + a^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2 L\{x(t)\}) - s x(0) - x'(0) + s L\{x(t)\} - x(0) + a^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} = 0$$

$$-2s L\{x(t)\} - s^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} + x(0) + s L\{x(t)\} - x(0) + a^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} = 0$$

$$-(s^2 - a^2) \frac{d}{ds} L\{x(t)\} - s L\{x(t)\} = 0$$

$$\frac{\frac{d}{ds} L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}} + \frac{s}{s^2 - a^2} = 0, \text{ integrando } \ln(L\{x(t)\}) + \frac{1}{2} \ln(s^2 - a^2) = \ln c$$

$$\ln \sqrt{s^2 - a^2} L\{x(t)\} = \ln c \text{ entonces } L\{x(t)\} = \frac{c}{\sqrt{s^2 - a^2}}$$

Aplicando teorema del valor inicial

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sc}{\sqrt{s^2 - a^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = x(0) = k \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{s^2}}} = k \Rightarrow c = k$$

$$L\{x(t)\} = \frac{k}{\sqrt{s^2 - a^2}} = x(t) = kL^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}}\right\} \Rightarrow x(t) = k I_0(at)$$

- 15 Resolver la ecuación diferencial dada por:  $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = F(t)$ ,  $y(0)=1$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Solución**

$$L\{y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) - 4sL\{y(t)\} + 4y(0) + 3L\{y(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$(s^2 - 4s + 3)L\{y(t)\} = s - 4 + L\{F(t)\} \text{ de donde:}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{s - 4 + L\{F(t)\}}{s^2 - 4s + 3} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\left\{\frac{s - 4 + L\{F(t)\}}{s^2 - 4s + 3}\right\}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{s - 4}{s^2 - 4s + 3}\right\} + L^{-1}\{L\{F(t)\}\} * L^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 3)(s - 1)}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 3}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1}\right\} + F(t) * \left(\frac{e^{3t}}{2} - \frac{e^t}{2}\right) = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} + F(t) * \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)$$

$$y(t) = \frac{3e^t}{2} - \frac{e^{3t}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t (e^{3u} - e^u) F(t - u) du$$

- 16 Resolver la ecuación diferencial dada por:  $y''(t) + 4y(t) = F(t)$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

$$F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

**Solución**

A la función  $F(t)$  expresaremos en términos de la función escalón unidad

$$F(t) = 1 - \mu(t - 1)$$



$$L\{y''(t) + 4y(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + 4L\{y(t)\} = L\{1 - \mu(t-1)\}$$

$$(s^2 + 4)L\{y(t)\} = 1 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1 - e^{-s} + s}{s}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{1 - e^{-s} + s}{s(s^2 + 4)} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-s} + s}{s(s^2 + 4)}\right\}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s-4}{(s^2+4)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\} * L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t - \mu(t-1) * \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \mu(t-1) * \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} &= \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{sen} 2(t-u) \cdot \mu(u-1) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{sen} 2(t-u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \operatorname{sen} 2z dz = \frac{1}{4} \cos 2z \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2(t-1) \end{aligned}$$

$$\text{Luego } y(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{1}{4} [\cos 2(t-1) - \cos 2t] \text{ para } t > 1$$

17 Resolver para  $x(t)$ ;  $F(t) = \int_0^t (t-u)^{-p} x'(u) du$ ,  $0 < p < 1$

### Solución

$$F(t) = \int_0^t (t-u)^{-p} x'(u) du = t^{-p} * x'(t), \quad 0 < p < 1$$

$$\text{Tomando la Transformada de Laplace } L\{F(t)\} = L\{t^{-p} * x'(t)\} = L\{t^{-p}\} L\{x'(t)\}$$

si  $L\{F(t)\} = f(s)$ , entonces se tiene:

$$f(s) = L\{t^{-p}\} L\{x'(t)\} = \frac{\Gamma(1-p)}{s^{1-p}} (s x(s) - x(0)) f(s) + \frac{\Gamma(1-p)}{s^{1-p}} x(0) = \frac{\Gamma(1-p) s x(s)}{s^{1-p}}$$

$$x(s) = \frac{s^{1-p} f(s)}{s\Gamma(1-p)} + \frac{x(0)}{s} = \frac{f(s)}{s^p\Gamma(1-p)} + \frac{x(0)}{s}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^p\Gamma(1-p)} + \frac{x(0)}{s}\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^p}\right\} + x(0) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} L^{-1}\{f(s)\} * L^{-1}\left\{\frac{1}{s^p}\right\} + x(0)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-p)} F(t) * \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} + x(0) = \frac{\text{sen } p\pi}{\pi} F(t) * t^{p-1} + x(0)$$

$$\therefore x(t) = \frac{\text{sen } p\pi}{\pi} F(t) * t^{p-1} + x(0)$$

- 18 Resolver sistema de ecuaciones diferenciales  $\begin{cases} x''(t) + y'(t) + 3x(t) = 15e^{-t} \\ y''(t) - 4x'(t) + 3y(t) = 15\text{sen } 2t \end{cases}$  con las condiciones  $x(0) = 35$ ,  $x'(0) = -48$ ,  $y(0) = 27$ ,  $y'(0) = -55$

**Solución**

Tomando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x''(t) + y'(t) + 3x(t)\} = L\{15e^{-t}\} \\ L\{y''(t) - 4x'(t) + 3y(t)\} = L\{15\text{sen } 2t\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2L\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) + sL\{y(t)\} - y(0) + 3L\{x(t)\} = 15L\{e^{-t}\} \\ s^2L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) - 4sL\{x(t)\} + 4x(0) + 3L\{y(t)\} = 15L\{\text{sen } 2t\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+3)L\{x(t)\} + sL\{y(t)\} = 35s - 21 + \frac{15}{s+1} \\ -4sL\{x(t)\} + (s^2+3)L\{y(t)\} = 27s - 19s + \frac{30}{s^2+4} \end{cases}; \text{Aplicando la regla de CRAMER}$$

$$L\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} 35s-21 + \frac{15}{s+1} & 5 \\ 27s-19s + \frac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}} = \frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}\right\}$$

$$\therefore x(t) = 3 \cos t - 15 \operatorname{sen} 3t + 3e^{-t} + 2 \cos 2t$$

$$L\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & 35s-21 + \frac{15}{s+1} \\ -4s & 27s-19s + \frac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}} = \frac{30s}{s^2+1} - \frac{60}{s^2+1} + \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{30s}{s^2+1} - \frac{60}{s^2+1} + \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$\therefore y(t) = 30 \cos t - 60 \operatorname{sen} t + 3e^{-t} + \operatorname{sen} 2t$$

19

Resolver el sistema de ecuación diferenciales  $\begin{cases} 2x'(t) + 2x(t) + y'(t) - y(t) = 3t \\ x'(t) + x(t) + y'(t) + y(t) = 1 \end{cases}$ , con las condiciones  $x(0)=1$ ,  $y(0)=3$

### Solución

Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{2x'(t) + 2x(t) + y'(t) - y(t)\} = L\{3t\} \\ L\{x'(t) + x(t) + y'(t) + y(t)\} = L\{1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2sL\{x(t)\} - 2x(0) + 2L\{x(t)\} + sL\{y(t)\} - y(0) - L\{y(t)\} = \frac{3}{s^2} \\ sL\{x(t)\} - x(0) + L\{x(t)\} - y(0) + L\{y(t)\} = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(s+1)L\{x(t)\} + (s-1)L\{y(t)\} = \frac{3}{s^2} + 5 \\ (s+1)L\{x(t)\} + (s+1)L\{y(t)\} = \frac{1}{s} + 4 \end{cases}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{s^2} + 5 & s-1 \\ \frac{1}{s} + 4 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(s+1) & s-1 \\ s+1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{s^3 + 8s^2 + 4s + 3}{s^2(s^2 + 4s + 3)} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+3} + \frac{3}{s+1}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+3} + \frac{3}{s+1}\right\} = t - 2e^{-3t} + 3e^{-t} \quad \therefore x(t) = t - 2e^{-3t} + 3e^{-t}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} 2(s+1) & \frac{2}{s^2} + 5 \\ s+1 & \frac{1}{s} + 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(s+1) & s-1 \\ s+1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{3s^3 + 5s^2 - s - 3}{2s^2(s^2 + 4s + 3)} = \frac{3s^2 + 2s - 3}{s^2(s+3)}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{3s^2 + 2s - 3}{s^2(s+3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+3}\right\} = 1 - t + 2e^{-3t}$$

$$\therefore y(t) = 1 - t + 2e^{-3t}$$

20

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.  $\begin{cases} x''(t) - x(t) + 5y'(t) = t \\ y''(t) - 4y(t) - 2x'(t) = -2 \end{cases}$ , con las condiciones iniciales siguientes.  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

**Solución**

Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x''(t) - x(t) + 5y'(t)\} = L\{t\} \\ L\{y''(t) - 4y(t) - 2x'(t)\} = L\{-2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 L\{x(t)\} - s x(0) - x'(0) - L\{x(t)\} + 5sL\{y(t)\} - 5y(0) = \frac{1}{s^2} \\ s^2 L\{y(t)\} - s x(0) - x'(0) - 4L\{y(t)\} - 2sL\{x(t)\} + 2x(0) = -\frac{2}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 + 1)L\{x(t)\} - 5sL\{y(t)\} = \frac{1}{s^2} \\ -2sL\{x(t)\} + (s^2 - 4)L\{y(t)\} = -\frac{2}{s} \end{cases}, \text{ aplicando el teorema de CRAMER}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2} & 5s \\ -\frac{2}{s} & s^2 - 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 1 & 5s \\ -2s & s^2 - 4 \end{vmatrix}} = \frac{11s^2 - 4}{s^2(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2} + \frac{5}{s^2 + 1} - \frac{4}{s^2 + 4}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s^2 + 1} - \frac{4}{s^2 + 4}\right\} = \{t + 5 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen} 2t\}$$

$$\therefore x(t) = -t + 5 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen} 2t$$

$$L\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s^2 + 1 & \frac{1}{s^2} \\ -2s & -\frac{2}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 1 & 5s \\ -2s & s^2 - 4 \end{vmatrix}} = \frac{-2s^2 + 4}{s(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 4}\right\} = t - 2 \cos t + \cos 2t \quad \therefore y(t) = t - 2 \cos t + \cos 2t$$

21

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x''(t) + 2x(t) - y'(t) = 2t + 5 \\ x'(t) - x(t) + y'(t) + y(t) = -2t - 1 \end{cases}, \text{ con las condiciones iniciales } x(0)=3, x'(0)=0, y(0)=-3$$

**Solución**



Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación.

$$\begin{cases} L\{x''(t) + 2x(t) - y'(t)\} = L\{2t + 5\} \\ L\{x'(t) - x(t) + y'(t) + y(t)\} = L\{-2t - 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 L\{x(t)\} - s x(0) - x'(0) + 2L\{x(t)\} - sL\{y(t)\} + y(0) = L\{2t + 5\} \\ sL\{x(t)\} - x(0) - L\{x(t)\} + sL\{y(t)\} - y(0) + L\{y(t)\} = L\{-2t - 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 + 2)L\{x(t)\} - sL\{y(t)\} = \frac{2}{s^2} + \frac{5}{s} + 3s + 3 \\ (s + 1)L\{x(t)\} + (s + 1)L\{y(t)\} = -\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} \end{cases} \quad ; \text{Aplicando la regla de CRAMER}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{s^2} + \frac{5}{s} + 3s + 3 & -s \\ -\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} & s + 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 2 & -s \\ s - 1 & s + 1 \end{vmatrix}} = \frac{3s^4 + 6s^3 + 7s^2 + 5s + 2}{s^2(s^3 + 2s^2 + s + 2)}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s + 2} + \frac{1}{s^2 + 1}, \text{ tomando inversa } x(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s + 2} + \frac{1}{s^2 + 1}\right\}$$

$$\therefore x(t) = 2 + t + e^{-2t} + \text{sen } t$$

igual modo se obtiene  $y(t)$  es decir.

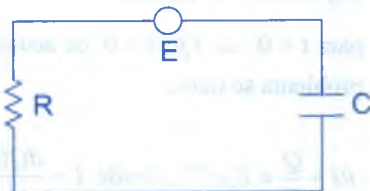
$$\therefore y(t) = 1 - t - 3e^{-2t} + \text{cos } t$$

22

Se conectan en serie una resistencia de  $R$  ohmios y un condensador de  $C$  faradios con un generador de  $E$  voltios (ver figura) en  $t = 0$  la carga del condensador es cero. Hallar la carga y la corriente en cualquier tiempo  $t > 0$ , si.

a)  $E = E_0$  constante

b) Si  $E = E_0 e^{-\alpha t}$



**Solución**

a) Dado del problema

circuito R - C

Resistencia = R ohmios

Capacidad = C faradios

Generador = E voltios

en  $t = 0$ ,  $Q(0) = 0$ , de acuerdo a la segunda ley de KIRCHOFF y condición del

problema se tiene:  $RI + \frac{Q}{C} = E_0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{E_0}{R}$ , ecuación lineal aplicando

transformada de Laplace se tiene:  $L\left\{\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q\right\} = L\left\{\frac{E_0}{R}\right\}$ , de donde

$$sL\{Q(t)\} - Q(0) + \frac{1}{RC}L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{RS}$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{RS}, \text{ despejando } L\{Q(t)\}$$

$$L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{RS\left(s + \frac{1}{RC}\right)}, \text{ tomando transformada inversa.}$$

$$Q(t) = L^{-1}\left\{\frac{E_0}{RS\left(s + \frac{1}{RC}\right)}\right\} = \frac{E_0}{R} L^{-1}\left\{\frac{1}{S\left(s + \frac{1}{RC}\right)}\right\}$$

$$Q(t) = E_0 C (1 - e^{-t/RC}) \text{ como } I = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC} \quad \therefore I = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC}$$

b) Datos del problema.

Circuito R - C

Capacidad = C faradios

Resistencia = R ohmios

Generador = E voltios

para  $t = 0 \Rightarrow Q(0) = 0$ , de acuerdo a la segunda Ley de Kirchoff y condiciones del problema se tiene.

$$RI + \frac{Q}{C} = E_0 e^{-at}, \text{ donde } I = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Luego  $R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = E_0 e^{-\alpha t}$ , de donde

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{E_0 e^{-\alpha t}}{R}, \text{ ecuación lineal aplicando transformada de Laplace se}$$

tiene:  $L\left\{\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t)\right\} = L\left\{\frac{E_0 e^{-\alpha t}}{R}\right\}$

$$s L\{Q(t)\} - Q(0) + \frac{1}{RC} L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{R(s + \alpha)}$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right) L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{R(s + \alpha)}, \text{ despejando } L\{Q(t)\}$$

$$L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{R\left(s + \frac{1}{RC}\right)(s + \alpha)}, \text{ tomando inversa}$$

$$Q(t) = L^{-1}\left\{\frac{E_0}{R\left(s + \frac{1}{RC}\right)(s + \alpha)}\right\} = \frac{E_0}{R} L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)(s + \alpha)}\right\}$$

$$Q(t) = \frac{CE_0}{1 - RC} L^{-1}\left\{\frac{1}{s + \alpha} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = \frac{CE_0}{1 - RC} (e^{-\alpha t} - e^{-t/RC})$$

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{E_0 C}{1 - RC} \left(\frac{e^{-t/RC}}{RC} - \alpha e^{-\alpha t}\right)$$

- 23) Desarrollar el problema 22) para el caso en que  $E = E_0 \sin \omega t$  y la carga del condensador se a  $Q_0$ .

**Solución**

Datos del problema:  $Q(0) = Q_0$ ,  $E = E_0 \sin \omega t$ , Resistencia = R ohmios

Capacidad = C faradios, de la condición del problema se tiene.

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{E_0 \sin \omega t}{R}, \text{ aplicando transformada de Laplace se tiene.}$$

$$L\left\{\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{RC}Q(t)\right\} = L\left\{\frac{E_0 \operatorname{sen} \omega t}{R}\right\}$$

$$sL\{Q(t)\} - Q(0) + \frac{1}{RC}L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{R} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\left(S + \frac{1}{RC}\right)L\{Q(t)\} = Q_0 + \frac{E_0 \omega}{s^2 + \omega^2}, \text{ despejando } L\{Q(t)\}$$

$$L\{Q(t)\} = \frac{Q_0}{S + \frac{1}{RC}} + \frac{E_0 \omega}{\left(S + \frac{1}{RC}\right)(s^2 + \omega^2)}, \text{ tomando inversa}$$

$$Q(t) = L^{-1}\left\{\frac{Q_0}{S + \frac{1}{RC}} + \frac{E_0 \omega}{\left(S + \frac{1}{RC}\right)(s^2 + \omega^2)}\right\}, \text{ de donde}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} + \frac{E_0}{R} \left[ \frac{R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \left( \frac{\operatorname{sen} \omega t}{RC} - \omega \cos \omega t \right) + \frac{\omega R^2 C^2 e^{-t/RC}}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right]$$

$$Q(t) = \left( Q_0 + \frac{\omega E_0 RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right) e^{-t/RC} - \frac{E_0}{R} \left( \frac{\omega R^2 C^2 \cos \omega t - RC \operatorname{sen} \omega t}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right)$$

24

Un inductor de  $L$  henrys y un condensador de  $C$  faradios están conectados en serie con un condensador de  $E$  voltios. En  $t = 0$ , la carga del condensador y la corriente del circuito son nulos. Hallar la carga del condensador en cualquier tiempo  $t > 0$ .

- a) Si  $E = E_0$  constante      b)  $E = E_0 e^{-\alpha t}$     $\alpha > 0$

### Solución

- a) Datos por el problema

Inductancia :  $L$  Henrys

Capacidad :  $C$  faradios

Resistencia :  $R = 0$ ,  $E = E_0$  de la segunda ley de Kirchoff se tiene:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{c} \int_0^t I(r) dr = V(t), \text{ de donde } \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \int_0^t I(r) dr = \frac{E_0}{L}$$

aplicando transformada de Laplace se tiene

$$L\left\{\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \int_0^t I(r) dr\right\} = L\left\{\frac{E_0}{L}\right\} \Rightarrow s L\{I(t)\} - I(0) + \frac{1}{LC} \frac{L\{I(t)\}}{s} = \frac{E_0}{Ls}$$

$$\left(s + \frac{1}{LCS}\right)L\{I(t)\} = \frac{E_0}{Ls}, \text{ despejando } L\{I(t)\}$$

$$L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{L\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)}, \text{ tomando la inversa}$$

$$Q(t) = L^{-1}\left\{\frac{E_0}{L\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)}\right\} = \frac{E_0 \sqrt{CL}}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{RL}}\right)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = \frac{E_0 \sqrt{CL}}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{RL}}\right) \Rightarrow Q(t) = \frac{E_0 \sqrt{CL}}{L} \int \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{RC}}\right) dt$$

$$Q(t) = -E_0 C \cdot \cos\left(\frac{t}{\sqrt{RC}}\right) + k \quad \text{para } Q(0) = 0 \text{ entonces } 0 = -E_0 C + k \Rightarrow k = E_0 C$$

$$\therefore Q(t) = E_0 C \left(1 + \cos\left(\frac{t}{\sqrt{CL}}\right)\right)$$

**b) Datos del problema**

Resistencia:  $R = 0$  ; Inductancia :  $L$  Henrys

Capacidad :  $C$  faradios ,  $E = E_0 e^{-\alpha t}$  ,  $\alpha > 0$  , para  $t = 0$  ,  $Q(0) = 0$  ,  $I(0) = 0$  , por la

segunda ley de Kirchoff se tiene:  $L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{c} \int_0^t I(r) dr = E_0 e^{-\alpha t}$

$$Q''(t) + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{E_0}{L} e^{-\alpha t}$$

aplicando transformada de Laplace  $L\{Q''(t) + \frac{1}{LC} Q(t)\} = L\left\{\frac{E_0}{L} e^{-\alpha t}\right\}$  , de donde



$$(s^2 + \frac{1}{LC})L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{L(s + \alpha)}, \text{ despejando } L\{Q(t)\}$$

$$L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{L(S + \alpha)(S^2 + \frac{1}{LC})}, \text{ tomando inversa}$$

$$Q(t) = \frac{E_0}{L} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(S + \alpha)(S^2 + \frac{1}{LC})} \right\} = \frac{E_0}{L} L^{-1} \left\{ \frac{A}{s + \alpha} + \frac{Bs + D}{s^2 + \frac{1}{LC}} \right\}$$

de donde efectuando operaciones se tiene

$$Q(t) = \frac{E_0}{L(\alpha^2 + \frac{1}{LC})} (e^{-\alpha t} - \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})) + \frac{\alpha E_0 \sqrt{C/L} \operatorname{sen}(t/\sqrt{LC})}{\alpha^2 + \frac{1}{LC}}$$

25

Desarrollar el problema 24) si  $E(t)$  es  $E_0\delta(t)$  donde  $\delta(t)$  es la función Delta De Diroc.

### Solución

De las condiciones del problema se tiene.

$$L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{c} \int_0^t I(r) dr = E, \text{ luego } \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \int_0^t I(r) dr = \frac{E_0\delta(t)}{L}$$

aplicando transformada de Laplace se tiene:

$$L\left\{ \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \int_0^t I(r) dr \right\} = L\left\{ \frac{E_0\delta(t)}{L} \right\} \Rightarrow sL\{I(t)\} - I(0) + \frac{1}{LC} \frac{L\{I(t)\}}{s} = \frac{E_0}{L}$$

$$(s + \frac{1}{LCs})L\{I(t)\} = \frac{E_0}{L}, \text{ despejando } L\{I(t)\}$$

$$L\{I(t)\} = \frac{E_0 s}{L(s^2 + \frac{1}{LC})}, \text{ tomando inversa } I(t) = \frac{E_0}{L} L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \right\} = \frac{E_0}{L} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$\text{como } \frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = \frac{E_0}{L} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right), \text{ integrando}$$

$$Q(t) = \frac{E_0}{L} \sqrt{LC} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + k, \text{ para } Q(0) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\therefore Q(t) = E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

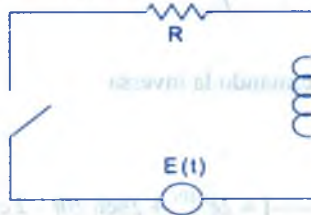
26

Un inductor de 3 Henrys esta en serie con una resistencia de 3 ohmios y una f.e.m. de 150 voltios, suponiendo que es  $t=0$ , la corriente es cero, halle la corriente en cualquier tiempo  $t > 0$ .

**Solución**

Datos del problema. Inductancia : 3 henrys, Resistencia : 30 ohmios.

$t = 0, I(0) = 0$ , f.e.m. : 150 voltios



$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E, \text{ de donde } \frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) = \frac{E}{L}, \text{ aplicando transformada}$$

$$L \left\{ \frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) \right\} = L \left\{ \frac{E}{L} \right\}, \text{ de donde } s L \{ I(t) \} - I(0) + \frac{R}{L} L \{ I(t) \} = \frac{E}{L}$$

$$\left( s + \frac{R}{L} \right) L \{ I(t) \} = \frac{E}{L}, \text{ despejando } L \{ I(t) \}$$

$$L \{ I(t) \} = \frac{E}{L S \left( s + \frac{R}{L} \right)} = \frac{E}{L} \left( \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R}{L}} \right), \text{ tomando inversa}$$

$$I(t) = \frac{E}{L} L^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R}{L}} \right\} = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

como  $E = 150, R = 30, L = 3$  se tiene  $I(t) = 5(1 - e^{-10t})$

- 27) Resolver el problema 26) si la f.e.m. es  $150 \text{ sen } 20t$

**Solución**

Datos del problema: f.e.m. =  $150 \text{ sen } 20t$

Inductancia = 3 Henrys ; Resistencia = 30 ohmios

su ecuación correspondiente es:  $L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E$ , de donde

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E}{L}, \text{ aplicando transformada } L\left\{\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t)\right\} = L\left\{\frac{E}{L}\right\}, \text{ entonces}$$

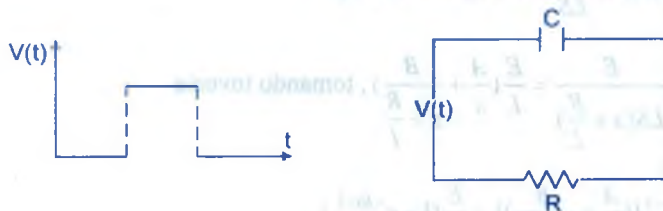
$$sL\{I(t)\} - I(0) + \frac{R}{L}L\{I(t)\} = L\left\{\frac{150 \text{ sen } 20t}{L}\right\}, \text{ despejando } L\{I(t)\}$$

$$L\{I(t)\} = \frac{1000}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + 400)}, \text{ tomando la inversa}$$

$$I(t) = 1000L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + 400)}\right\} = 2e^{-10t} + 2 \text{ sen } 20t - 2 \text{ cos } 20t$$

$$\therefore I(t) = 2e^{-10t} + 2 \text{ sen } 20t - 2 \text{ cos } 20t$$

- 28) Hallar la corriente  $I(t)$  que fluye en el circuito de la figura mostrada, si se aplica una onda cuadrada con voltaje de altura  $V_0$ . Se supone que el circuito no esta perturbado antes de aplicar la onda cuadrada.



**Solución**

$$\text{La ecuación del circuito es: } LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int I(r)dr = V(t)$$

del circuito  $L = 0$  y aplicamos la transformada

$$L\{RI(t) + \frac{1}{c} \int_0^t I(r)dr\} = L\{V(t)\} \Rightarrow RL\{I(t)\} + \frac{1}{CS} L\{I(t)\} = L\{V_0(U_a(t) - U_b(t))\}$$

$$(s + \frac{1}{RC})L\{I(t)\} = V_0(\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}) \Rightarrow L\{I(t)\} = \frac{V_0(e^{-as} - e^{-bs})}{R(s + \frac{1}{RC})}, \text{ tomando la inversa}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} L^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{e^{-bs}}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = \frac{V_0}{R} [e^{-\frac{t-a}{RC}} U_a(t) - e^{-\frac{t-b}{RC}} U_b(t)]$$

$$I(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t < a \\ \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t-a}{RC}} & , a < t < b \\ \frac{V_0}{R} [e^{-\frac{t-a}{RC}} - e^{-\frac{t-b}{RC}}] & , t > b \end{cases}$$

**13.8. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.-**

1

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 4e^{-2t}$ ,  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 4$       **Rpta.**  $x(t) = e^{-2t}(2t^2 + 2t - 1)$

b)  $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 6\cos 2t$ ,  $x(0) = 3$ ,  $x'(0) = 1$       **Rpta.**  $x(t) = 5\cos t - \sin t - 2\cos 2t$

c)  $y''(t) - y(t) = 5\sin 2t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$       **Rpta.**  $y(t) = 3\sinh x - \sin 2t$

d)  $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2\cos 2t - 4\sin 2t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

**Rpta.**  $y(t) = -\cos 2t + \cos t - \sin t$

e)  $y''(t) - t y'(t) + y(t) = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$       **Rpta.**  $y(t) = 1 + 2t$

f)  $t y''(t) + (-1-t)y'(t) + 2y(t) = t - 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  **Rpta.**  $y(t) = t$

g)  $\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 18e^{-t} \operatorname{sen} 3t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$

**Rpta.**  $y = 2e^{2t} - 3e^{-t} - e^{-t} \operatorname{sen} 2t + e^{-t} \cos 3t$

h)  $\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} - 4y = -3e^t + 4e^{2t}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 5$ ,  $y''(0) = 3$

**Rpta.**  $y = -\frac{27}{50} \cos 2t + \frac{57}{25} \operatorname{sen} 2t + \frac{3t e^t}{2} + \frac{e^t}{25} + \frac{e^{2t}}{2}$

2

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a)  $\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 11 \frac{dy}{dt} - 12y = 4$ ,  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

**Rpta.**  $y = \frac{e^{3t}}{21} - \frac{e^{-4t}}{21} + \frac{e^{-t}}{3} - \frac{1}{3}$

b)  $t^2 y''(t) - 2y(t) = 2$

**Rpta.**  $y = -1 - ct^2$

c)  $y''(t) + 2t y'(t) - 4y(t) = 6$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$

**Rpta.**  $y = 3t^2$

d)  $y''(t) - 8t y'(t) + 16y(t) = 3$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$

**Rpta.**  $y = \frac{3}{2} t^2$

e)  $y''(t) - 4t y'(t) + 4y(t) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 10$

**Rpta.**  $y = 10t$

f)  $\frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 2y = 10 \cos t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 3$

**Rpta.**  $y = -e^{-2t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} - \cos t + 2 \operatorname{sen} t$

g)  $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = e^{-2t} \operatorname{sen} t$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$

**Rpta.**  $y = \frac{1}{8} (\operatorname{sen} t - \cos t) + \frac{e^{-2t}}{8} (\operatorname{sen} t + \cos t)$



h)  $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 6$  **Rpta.**  $y = 2e^{4t} + e^{-2t}$

3 Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a)  $t x''(t) - (4t - 1)x'(t) + 2(2t + 1)x(t) = 0$  si  $x(0) = 0$  **Rpta.**  $x(t) = \frac{kt^2 e^{-2t}}{2}$

b)  $x \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  **Rpta.**  $y(0) = k J_0(x)$

c)  $t x''(t) + x'(t) - a^2 t x(t) = 0$ ,  $x(0) = k$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $a \neq 0$  **Rpta.**  $x(t) = c I_0(at)$

d) Resolver para  $V(t)$ , si  $\int_0^t V'(t)V(t-u)du = 24t^4$ ,  $V(0) = 0$  **Rpta.**  $V(t) = \pm 12t^2$

e)  $t x''(t) + 3x'(t) + t x(t) = 0$  si  $x(0) = \frac{1}{2}$  **Rpta.**  $x(t) = \frac{J_1(t)}{t}$

f)  $t^2 y''(t) + (2t^2 + t)y'(t) + (2t^2 + t - 1)y(t) = 0$ , si  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = \frac{1}{2}$

**Rpta.**  $y(t) = e^{-t} J_1(t)$

g)  $y'''(t) - 6y''(t) + 12y'(t) - 8y(t) = t^3 e^{2t} + 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 2$

**Rpta.**  $y(t) = \frac{e^{2t} t^6}{5!} + e^{2t} \left( -\frac{e^{-2t}}{8} + \frac{t^2}{8} - \frac{t}{9} + \frac{1}{8} \right) + e^{2t} - 3t e^{-2t} + 5t^2 e^{-2t}$

h)  $t^2 V''(t) + t V'(t) + (t^2 - 1)V(t) = 0$ ,  $V(1) = 2$  **Rpta.**  $V(t) = \frac{2J_1(t)}{J_1(1)}$

4 Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a)  $y''(t) + 4t(t) = 9t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 7$  **Rpta.**  $y(t) = \frac{9t}{4} + \frac{19}{8} \text{sen } 2t$

b)  $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + 12e^{-t}$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = -1$

**Rpta.**  $y(t) = 3 + 2t + 2e^{-t} - 2e^{2t} + 3e^t$

c)  $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 125t^2$  ,  $y(0) = y'(0) = 0$

**Rpta.**  $y = 22 + 40t + 25t^2 + 2e^{2t} (2 \operatorname{sen} t - 1 \operatorname{cost})$

d)  $y''(t) + y(t) = 8 \operatorname{cost}$  ,  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = -1$     **Rpta.**  $y(t) = \operatorname{cost} - \operatorname{sen} t + 4t \operatorname{sen} t$

e)  $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4e^{2t}$

**Rpta.**  $y(t) = c_1 e^{2t} + 4t e^{2t} + c_2 e^t$  donde  $c_1 = y'(0) - y(0) - 4$  ,  $c_2 = 2y(0) - y'(0) + 4$

f)  $y''(t) + 9y(t) = 18t$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$     **Rpta.**  $y(t) = 2t + \pi \operatorname{sen} 3t$

g)  $y''(t) + 4y = F(t)$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 1$  donde  $F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

**Rpta.**  $y(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{1}{4} [\cos(2t-2) - \cos 2t]$ , para  $t > 1$

h)  $y''(t) + 4y(t) = F(t)$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 1$  si  $F(t) = U(t-2)$

**Rpta.**  $y(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{1}{4} (\cos(t-2) - 1)$  si  $t > 2$

i)  $x'(t) + 3x(t) = e^{-2t}$  ,  $x(0) = 0$     **Rpta.**  $x(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$

j)  $x''(t) - x(t) = \operatorname{cost} - \operatorname{sen} t$  ,  $x(0) = 0$     **Rpta.**  $x(t) = \operatorname{sen} t$

k)  $x'(t) + x(t) = 2 \operatorname{sen} t$  ,  $x(0) = 0$     **Rpta.**  $x(t) = e^{-t} - \operatorname{cost} + \operatorname{sen} t$

l)  $2x'(t) + 6x(t) = t e^{-3t}$  ,  $x(0) = -\frac{1}{2}$     **Rpta.**  $x(t) = \frac{t^2 - 2}{4} e^{-3t}$

5

Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a)  $x''(t) + x(t) = 2e^t$  ,  $x(0) = 1$  ,  $x'(0) = 2$     **Rpta.**  $x(t) = e^t + \operatorname{sen} t$

b)  $x'(t) - 3x(t) = 3t^3 + 3t^2 + 2t + 1$  ,  $x(0) = -1$     **Rpta.**  $-\frac{5}{9} - \frac{2}{3}t - t^3 - \frac{4}{9}e^{3t}$

c)  $x''(t) + 2x'(t) = \frac{1}{7}(t - \frac{1}{4})e^{-2t}$  ,  $x(0) = 2$  ,  $x'(0) = -\frac{1}{56}$

**Rpta.**  $x(t) = 2 - \frac{t(2t+1)}{56}e^{-2t}$

d)  $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$  ,  $y(0) = y'(0) = 0$  ,  $f(t) = U(t-1)$

**Rpta.**  $y(t) = (\frac{e^{2(t-1)}}{2} - e^{t-1} + \frac{1}{2})U(t-1)$

e)  $t y''(t) + (1-2t)y'(t) - 2y(t) = 0$  ,  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = 2$  **Rpta.**  $y(t) = e^{2t}$

f)  $t y''(t) + (t-1)y'(t) - y(t) = 0$  ,  $y(0) = 5$  ,  $y'(0) = 0$  **Rpta.**  $y(t) = 5e^{-t}$

6) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a)  $y''''(t) + 6y''(t) + 12y'(t) + 8y(t) = 0$  ,  $y(0) = 4$  ,  $y'(0) = -12$  ,  $y''(0) = 34$

b)  $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \text{sen } t$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 1$

c)  $y'' - 3y' + 2y = 4t + e^{3t}$  ,  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = -1$

d)  $y''''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 0$  ,  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = -1$  ,  $y''(0) = -1$

e)  $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \text{sen } t$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(0) = 1$

f)  $y''''(t) - 3y''(t) - 4y'(t) + 12y(t) = 12e^{-t}$  ,  $y(0) = 4$  ,  $y'(0) = 2$  ,  $y''(0) = 18$

7) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a)  $P \int_a^b x(t-u)x(u)du = 2x(t)9 - \text{sen } pt$  ,  $p \neq 0$  **Rpta.**  $x(t) = J_1(pt)$

b) Si  $L\{F(t)\} = H(s)$ , resolver para  $x(t)$  la ecuación diferencial  $x''(t) + 6x'(t) + 7x(t) = F(t)$  sujeto a  $x(0) = x'(0) = 0$

**Rpta.**  $x(t) = F(t) * \frac{e^{-3t}}{\sqrt{2}} \text{senh}(\sqrt{2}t)$

c)  $y''(t) + y(t) = F(t)$ , donde  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{3\pi}{2} \\ \cos t, & \frac{3\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{2} \\ 0, & t > \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

**Rpta.**  $y(t) = \frac{1}{4}(\cos t \cdot \sin 2t - \sin t - \cos 2t + \sin t - 2t \cos t)$

d)  $\int_0^t x''(u)x'(t-u)du = x'(t) - x(t)$  si  $x'(0) = x(0) = 0$  **Rpta.**  $x(t) = t - \frac{t^2}{2}$

e)  $5 \int_0^t e^{u-2t} \cos 2(t-u)x(u)du = e^t(x'(t) + x(t)) - 1$ ,  $x(0) = 0$

**Rpta.**  $x(t) = \frac{5}{2} - 4te^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}$

f)  $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

**Rpta.**  $y(t) = \frac{e^t}{5} + \frac{e^{-t}}{5}(3\sin t - \cos t)$

g)  $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -2$

**Rpta.**  $y = e^t - te^t - \frac{t^2}{2}e^t + \frac{t^3 e^t}{60}$

h)  $y'''(t) + y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = -2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = -1$

**Rpta.**  $y = -\frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{5} + \frac{3}{10}\cos 2t + \frac{3}{5}\sin 2t$

8) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace.

$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = 0$  donde  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 9$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

9) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace.

$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = Q(t)$  donde  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $Q(t) = e^t + e^{-2t}$

- 10 Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace.  
 $F(t)y''(t) + R(t)y'(t) + S(t)y(t) = Q(t)$ , donde  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $F(t) = 4t^2$ ,  
 $S(t) = (t^2 + 1)^2$ ,  $Q(t) = 0$ .

- 11 Resolver la siguiente ecuación diferencial mediante Transformada de Laplace.

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = f(t) \text{ donde } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

**Rpta.**  $y(t) = \left(\frac{e^{2(t-1)}}{2} - e^{(t-1)} + \frac{1}{2}\right)U(t-1)$

- 12 Resolver la ecuación diferencial dado por:  $t y''(t) + 2y'(t) + t y(t) = 0$ ,  $y(0^+) = 1$ ,  $y(\pi) = 0$

**Rpta.**  $y(t) = \frac{\text{sen } t}{t}$

- 13 Resolver la ecuación diferencial  $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = V(t)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$

donde  $V(t) = \begin{cases} e^{2t} \cos t, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$

**Rpta.**  $y(t) = e^{2t} \cos t - e^{2t} \text{sen } t + \frac{t e^{2t} \text{sen } t}{2} - \frac{e^{2t}}{2} (t - 2\pi) \text{sen } t U(t - 2\pi)$

- 14 Utilizando Transformada de Laplace resolver la ecuación diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(u) du = f(t), \text{ donde } f(t) = \begin{cases} t, & t < 1 \\ (2-t), & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases} \text{ sujeto a la condición}$$

inicial  $y(0) = 1$ .

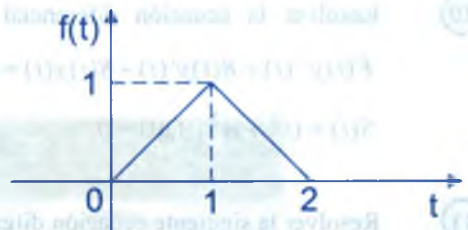
- 15 Resolver la ecuación  $y(t) = 4 \text{sen } t - 2 \int_0^t y(u) \text{sen}(t-u) du$  **Rpta.**  $y(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{sen } \sqrt{3} t$



- 16 Resolver el problema siguiente de valor inicial

$$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)du = f(t),$$

$y(0) = 1$  donde  $f$  es dado por el gráfico.



**Rpta.**  $y(t) = -2t e^{-t} + 1 + 2[t e^{-(t-1)} - 1]U(t-1) + [(1-t)^{-(t-1)} + 1]U(t-2)$

- 17 Resolver el siguiente problema de valor inicial.

$$y''(t) + 4y(t) = \text{sen } t - U(t - 2\pi) \cdot \text{sen}(t - 2\pi), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

**Rpta.**  $y(t) = \frac{1}{6}(-\text{sen } 2t + 2 \text{sen } t) + \frac{1}{6}(\text{sen } 2t - 2 \text{sen } t)U(t - 2\pi)$

- 18 Resolver la ecuación diferencial  $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = e^{-2t}(4 \cos 3t + 18 \text{sen } 3t)$ ,  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = -1$

- 19 Resolver la ecuación diferencial  $x''(t) + n^2 x(t) = a \text{sen } pt$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 3$   $n, p$  constantes positivos,  $n \neq p$

- 20 Resolver la ecuación diferencial  $t y''(t) + y'(t) + t y(t) = 0$  sujeto a las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

- 21 Resolver la ecuación diferencial  $t x''(t) + x'(t) + 4t x(t) = 0$ , con las condiciones iniciales  $x(0) = 3$ ,  $x'(0) = 0$

- 22 Calcular  $L\{J_1(t)\}$  y usando el resultado obtenido, resolver la ecuación diferencial  $x''(t) + x(t) = J_1(t)$  si  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 4$  donde  $L\{x(t)\} = x(s)$

- 23 Resolver la ecuación diferencial

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - 1)y(t) = 0, \quad \text{si } y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$$

24 Resolver  $\int_0^x x''(u)x''(t-u)du = 24t^3$  si  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

25 Resolver la ecuación diferencial  $tV''(t) + (t-1)V'(t) - V(t) = 0$  si  $V(0) = 5$  y  $V(\infty) = 0$

26 Resolver la ecuación :

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = F(t),$$

$$x(0) = x'(0) = 0 \text{ si } F(t) \text{ esta dado}$$

por el gráfico adjunto.

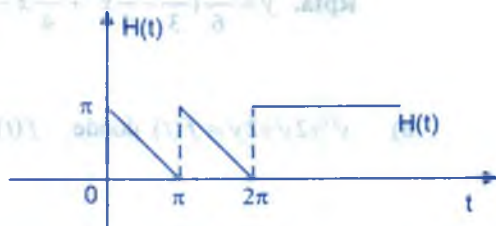


27  $t^2 x''(t) + t(2t+1)x'(t) + (2t^2 + t - 1)x(t) = 0$  ,  $x(0) = 0$  ,  $x'(0) = \frac{1}{2}$

28  $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 3t^2 + e^{2t} \text{ sen } 3t$  ,  $x(0) = x'(0) = 0$

29  $x''(t) + 3x'(t) = 1 - 2U(t - 2\pi)$  ,  $x(\pi) = 0$  ,  $x'(\pi) = -1$

30  $x''(t) - x'(t) = H(t)$  ,  $x(0) = 1$  ,  
 $x'(0) = 0$  si  $H(t)$  esta dado por el siguiente gráfico.



31  $t x''(t) + (2t+3)x'(t) + (t+3)x(t) = e^{-t}$  si  $x(0) = 1$

33  $t y''(t) + y'(t) + t y(t) = 0$  ,  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = 0$

33  $x''(t) + (2t-3)x'(t) + 2x(t) = 0$  si  $x(0) = 1$  ,  $x'(0) = 3$

34  $x''(t) + t x'(t) + x(t) = 0$  ,  $t > 0$ , sujeto a las condiciones iniciales  $x(0) = 1$  ,  $x'(0) = 0$

35  $x''(t) + 3x'(t) = 1 - 2U_2(t)$  sujeto a las condiciones  $x(\pi) = 1$  ,  $x'(\pi) = -1$

36  $(t-t^2)y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 6t$  , si  $y(0) = y(2) = 0$

37  $t^2 y''(t) + t(1-t)y'(t) - (1+3t)y(t) = 0$  sujeto a la condición  $y(0) = 1$  ,  $y'(0) = 4$

- 38) Resolver la ecuación diferencial  $y''+4y=f(x)$  si  $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \pi \\ 1-\text{sen } 3x & \text{si } x > \pi \end{cases}$   
 $y(0)=1, y'(0)=1$

Rpta.  $f(x)=\cos 2x+\frac{\text{sen } 2x}{2}+\frac{1}{4}[1-\cos 2(x-\pi)]U(x-\pi)+(-\frac{\text{sen } 3(x-\pi)}{5}+\frac{3}{10}\text{sen } 3(x-\pi))U(x-\pi)$

- 39) Hallar la función  $y=f(x)$  tal que:  $f(x)=2\int_0^x f(u)\cos(x-u)du=e^x$

Rpta.  $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-xe^{-x}=\cosh x-xe^{-x}$

- 40) Resolver las ecuaciones diferenciales.

a)  $y''-y=\frac{1}{2}\int_0^x e^u u^2 du, y(0)=y'(0)=0$

Rpta.  $y=\frac{e^x}{6}(\frac{x^3}{3}-\frac{9}{4}x^2+\frac{21}{4}x-\frac{45}{8})+1-\frac{e^{-x}}{16}$

b)  $y''+2y'+2y=f(t)$  donde  $f(t)=\begin{cases} 0 & , 0 < t < \pi \\ e^{-t} \cos t & , \pi < t < 2\pi \\ 0 & , t > 2\pi \end{cases}$

Rpta.  $y=e^{-t}[y(0)\cos t+(v(0)+y'(0))\text{sen } t]+\frac{e^{-t}}{2}(t-\pi)U(t-\pi)-[\frac{e^{-t}}{2}(t-2\pi)\text{sen } t]U(t-2\pi)$

c)  $y'+2y+2\int_0^x y(t)dt=f(t)$  donde  $f(t)=\begin{cases} e^{-t} \cos t & , 0 < t < \pi \\ 0 & , t > \pi \end{cases}, y(0)$

Rpta.  $\begin{cases} \frac{e^{-t}}{2}(t \text{sen } t - \text{sen } t + t \cos t) & , 0 < t < \pi \\ \frac{e^{-t}}{2}(t \text{sen } t - \text{sen } t + \cos t) + \frac{e^{-t}}{2}[(t-\pi)(\cos t - \text{sen } t) + \text{sen } t] & , t > \pi \end{cases}$

d)  $y''-4y'+5y=f(t), y(0)=1, y'(0)=1$  donde  $f(t)=\begin{cases} e^{2t} \text{sen } t & , 0 < t < 2\pi \\ 0 & , t > 2\pi \end{cases}$

Rpta. 
$$\begin{cases} e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t + e^{2t} \frac{t \operatorname{sen} t}{2}, & 0 < t < \pi \\ e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t + \pi e^{2\pi} \operatorname{sen} t, & t > 2\pi \end{cases}$$

41

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

a) 
$$\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) - y'(t) + 2y(t) = 14t + 3 \\ x'(t) - 3x(t) + y'(t) = 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y'(0) = 6.5$$

Rpta. 
$$\begin{cases} x(t) = 2 - \frac{e^t}{2} - \frac{e^{3t}}{2} - e^{-2t} \\ y(t) = 7t + 5 - e^t + \frac{5}{2}e^{-2t} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x'(t) + 2x(t) + y'(t) - y(t) = 3t \\ x'(t) + x(t) + y'(t) + y(t) = 1 \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3$$

Rpta. 
$$\begin{cases} x(t) = t + 3e^{-t} - 2e^{-3t} \\ y(t) = 1 - t + 2e^{-3t} \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x''(t) + 2x(t) - y'(t) = 2t + 5 \\ x'(t) - x(t) + y'(t) + y(t) = -2t - 1 \end{cases}, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = -3$$

Rpta. 
$$\begin{cases} x(t) = t + 2 + e^{-2t} + \operatorname{sen} t \\ y(t) = 1 - t - 3e^{-2t} - \operatorname{cos} t \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) - y'(t) - y(t) = 6e^{3t} \\ 2x'(t) - 3x(t) + y'(t) - 3y(t) = 6e^{3t} \end{cases}, \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 0$$

Rpta. 
$$\begin{cases} x(t) = (1 + 2t)e^t + 2e^{3t} \\ y(t) = (1 - t)e^t - e^{3t} \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + y = 3e^{-3t} \\ \frac{dy}{dt} + x - 4y = 1 \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$$
 Rpta. 
$$\begin{cases} x(t) = 3e^{-2t} - \frac{69}{40}e^{5t} - \frac{7}{8}e^{-3t} + \frac{3}{5} \\ y(t) = \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{69}{40}e^{5t} - \frac{e^{-3t}}{8} - \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = e^{-t}, & x(0) = 2 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = e^t, & y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Rpta.} \begin{cases} x = 8\sin t + 2\cos t \\ y = -13\sin t + \cos t + \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x - y = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x + y = 0 \end{cases}, \quad x(0)=0, y(0)=-1, x'(0)=0 \quad \text{Rpta.} \begin{cases} x = 2e^t - e^{2t} - 1 \\ y = e^t - 2 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} y' + y + 2z' + 3z = e^{-t} \\ 3y' - y + 4z' + z = 0 \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1 \quad \text{Rpta.} \begin{cases} y = 5e^t - 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ z = e^{-2t} + \frac{2e^{-t}}{2} - e^t \end{cases}$$

42) Resolver el sistema de ecuación diferencial  $\begin{cases} t y(t) + z(t) + t z'(t) = (t-1)e^{-t} \\ y'(t) - z(t) = e^{-t} \end{cases}$  sujeta a las condiciones iniciales:  $y(0) = 1, z(0) = -1$

43) Resolver el sistema de la ecuación diferencial  $\begin{cases} 2x'(t) - 3y'(t) = 2e^t, & x(0) = 2 \\ x'(t) - 2y'(t) = 0, & y(0) = 1 \end{cases}$   
**Rpta.**  $x(t) = 4e^t - 2, y(t) = 2e^t - 1$

44) Resolver el sistema de la ecuación diferencial  $\begin{cases} x'(t) + x(t) + 2y(t) = 0, & x(0) = 1 \\ 3x(t) + 2y(t) + y'(t) = 0, & y(0) = 2 \end{cases}$

**Rpta.**  $x(t) = \frac{6}{5e^{-4t}} - \frac{1}{5e^t}, y(t) = \frac{9}{5e^{-4t}} + \frac{e^t}{5}$

45) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y + e^t, & x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 8x - t, & y(0) = 1 \end{cases}$

46) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, & x(0) = -1 \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y, & y(0) = 2 \end{cases}$



**Rpta.**  $x = -3 \cos 3t - \frac{5}{3} \operatorname{sen} 3t$  ,  $y = 2 \cos 3t - \frac{7}{3} \operatorname{sen} 3t$

47) Resolver el sistema de la ecuación diferencial: 
$$\begin{cases} 2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1 & , x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2 & , y(0) = 0 \end{cases}$$

**Rpta.**  $x = -2e^{3t} + \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$  ,  $y = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}$

48) Resolver el sistema de la ecuación diferencial: 
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0 & , x(0) = 0 & , x'(0) = -2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + y - x = 0 & , y(0) = 0 & , y'(0) = -1 \end{cases}$$

**Rpta.**  $x = -\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t$  ,  $y = -\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t$

49) Resolver el sistema de la ecuación diferencial. 
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = t^2 & , x(0) = 8 & , x'(0) = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = 4t & , y(0) = 0 & , y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Rpta.**  $x = 8 + \frac{2}{3!} + \frac{t^4}{4!}$  ,  $y = -\frac{2t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}$

50) Resolver el sistema de la ecuación diferencial 
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 3y = 0 & , x(0) = 0 & , x'(0) = 2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 3y = t e^{-t} & , y(0) = 0 \end{cases}$$

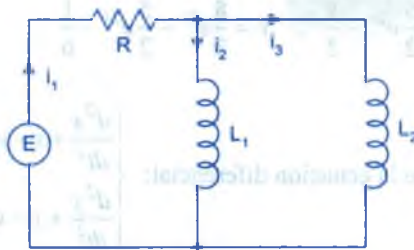
**Rpta.**  $x = \frac{t^2}{2} + t + 1 - e^{-t}$  ,  $y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

51) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a las corrientes  $i_2(t)$  e  $i_3(t)$  de la red mostrada en la Figura , es

$$L_1 \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t) \quad ; \quad L_2 \frac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t)$$

- b) Resuelva el sistema de la parte (a) si  $R = 5\Omega$ ,  $L_1 = 0.01H$ ,  $L_2 = 0.0125H$ ,  $E = 100V$ ,  $i_2(0) = 0$  e  $i_3(0) = 0$ .
- c) Determine el valor en amperes (A) de la corriente  $i_1(t)$ .

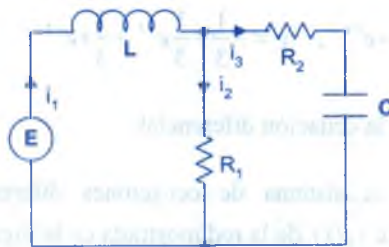


**Rpta.**  $i_2 = \frac{100}{9} - \frac{100}{9}e^{-900t}$ ,  $i_3 = \frac{80}{9} - \frac{80}{9}e^{-900t}$ ,  $i_1 = 20 - 20e^{-900t}$

- 52) a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a las corrientes  $i_2(t)$  e  $i_3(t)$  de la red mostrada en la figura es,

$$L \frac{di_2}{dt} + L \frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t) \quad ; \quad -R_1 \frac{di_2}{dt} + R_2 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C} i_3 = 0$$

- b) Resuelva el sistema de la parte (a) si  $R_1 = 10\Omega$ ,  $L_1 = 1H$ ,  $C = 0.2 F$ ,  $E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$
- c) Determine la corriente  $i_1(t)$  en amperes (A).

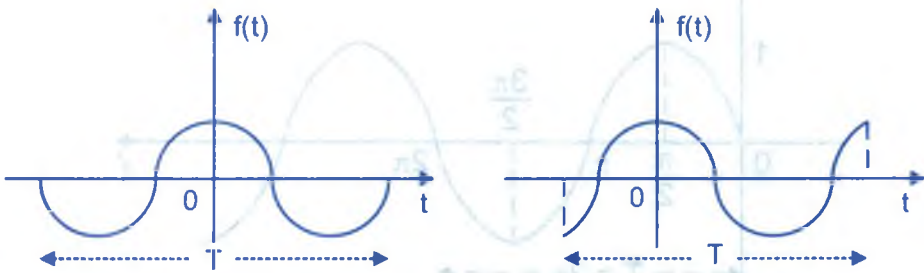


## CAPÍTULO XIV

### 14. SERIES DE FOURIER.-

#### 14.1. FUNCIONES PERIÓDICAS.-

**DEFINICIÓN.-** Se dice que una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es periódica, si existe un número positivo "T" tal que  $f(t + T) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . El número T recibe el nombre de periodo de la función  $f(t)$ .



**Ejemplo.-** Graficar y determinar el periodo de la función  $f(t) = (-1)^{[t]}$

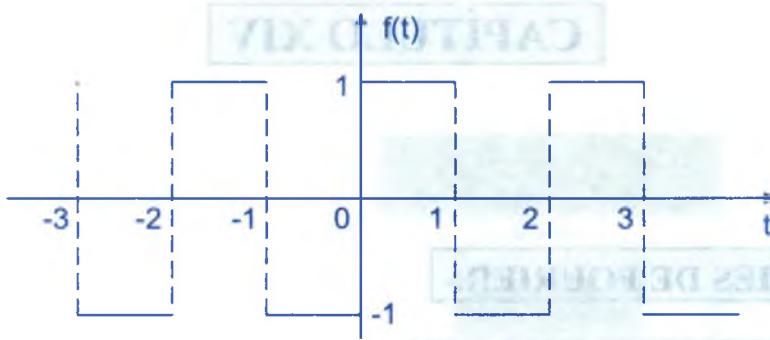
#### Solución

Se tiene que sí,  $2n \leq t < 2n + 1 \Rightarrow [t] = 2n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , de donde

$$f(t) = (-1)^{2n} = 1 \Rightarrow f(t) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$$

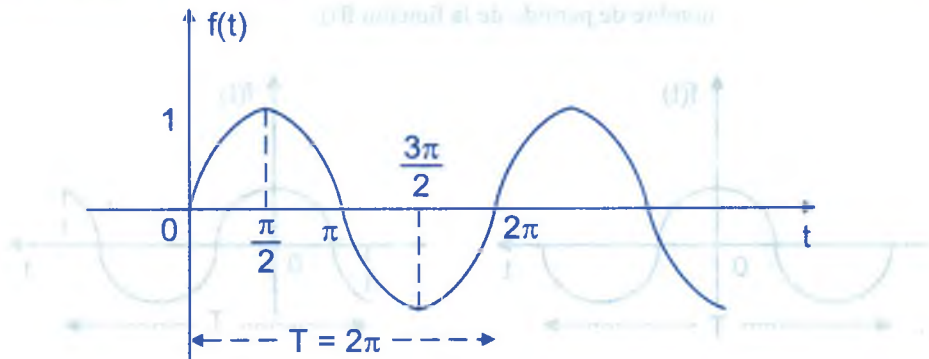
Si  $2n + 1 \leq t < (2n + 1) + 1 \Rightarrow [t] = 2n + 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , de donde

$$f(t) = (-1)^{2n+1} = -1 \Rightarrow f(t) = -1, \forall n \in \mathbb{Z}$$

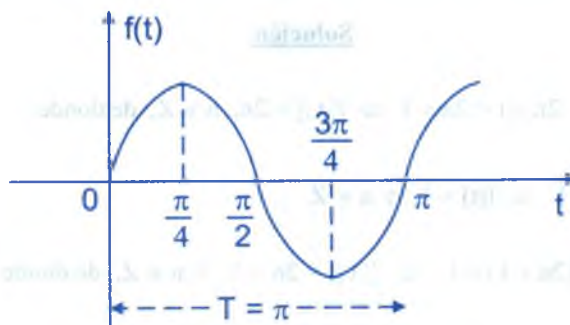


$f(t + 2) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Luego  $f(t)$  es periódica de periodo  $T = 2$

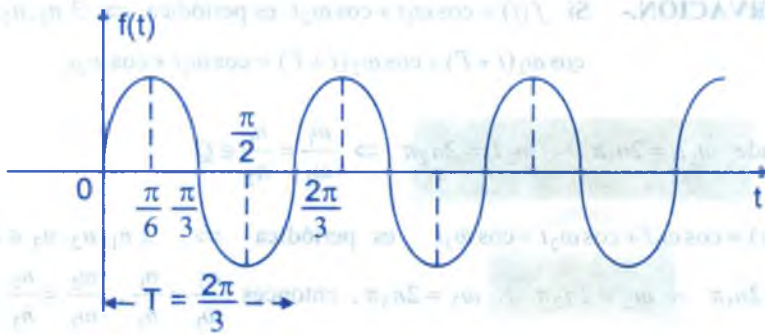
**Ejemplo.-** Las funciones  $1$ ,  $\text{sen } t$ ,  $\text{sen } 2t$ ,  $\text{sen } 3t, \dots$ ,  $\text{sen } nt$ ;  $\text{cos } t$ ,  $\text{cos } 2t$ ,  $\text{cos } 3t, \dots$ ,  $\text{cos } nt$  son funciones periódicas para el caso en que  $f(t) = \text{sen } t$



Para el caso en que  $f(t) = \text{sen } 2t$



Para el caso en que  $f(t) = \text{sen } 3t$



**OBSERVACION.-** Si  $f(t + T) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$f(t + 2T) = f((t + T) + T) = f(t + T) = f(t)$$

$$f(t + 3T) = f((t + 2T) + T) = f(t + 2T) = f(t)$$

$$f(t + nT) = f(t), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(t - T) = f((t - T) + T) = f(t)$$

$$f(t - 2T) = f((t - 2T) + T) = f(t - T) = f(t)$$

$$f(t - 3T) = f((t - 3T) + T) = f(t - 2T) = f(t)$$

$$f(t - nT) = f(t), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Luego si  $f(t + T) = f(t) \Rightarrow f(t + nT) = f(t)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in \mathbb{R}$

**Por ejemplo.-**  $\text{sen}(t + 2\pi)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{sen}(t + 2n\pi) = \text{sen } t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$

**Ejemplo.-** Demostrar que la función  $f(t) = \text{constante}$ , es una función periódica de periodo  $T$  para cualquier valor positivo de  $T$ .

#### Solución

Sea  $f(t) = k$  la función constante

Si  $f(t) = k$ , entonces  $f(t + T) = k$  por ser función constante de donde  $f(t) = f(t + T)$ , para todo  $t$ , por lo tanto  $f(t)$  es una función periódica de periodo  $T$ .



**OBSERVACIÓN.-** Si  $f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$  es periódica  $\Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tal que  
 $\cos \omega_1(t+T) + \cos \omega_2(t+T) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$

De donde  $\omega_1 T = 2n_1 \pi \wedge \omega_2 T = 2n_2 \pi \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \in \mathbb{Q}$

Si  $f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$  es periódica  $\Rightarrow \exists n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$  tal que  
 $\omega_1 T = 2n_1 \pi \wedge \omega_2 T = 2n_2 \pi \wedge \omega_3 T = 2n_3 \pi$ , entonces  $\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{n_1}{n_3}$ ,  $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{n_2}{n_3} \in \mathbb{Q}$

**Por ejemplo.-** Hallar el periodo de  $f(t) = \cos 2t + \cos \sqrt{2}t$  de donde  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ ,  
 entonces  $f(t) = \cos 2t + \cos \sqrt{2}t$  no es periódica.

**Ejemplo.-** Hallar el periodo de la función  $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4} + \cos \frac{t}{5}$

### Solución

Por definición se tiene:  $\cos \frac{1}{3}(t+T) + \cos \frac{1}{4}(t+T) + \cos \frac{1}{5}(t+T) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4} + \cos \frac{t}{5}$

$$\text{Entonces } \exists n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \text{ tal que: } \begin{cases} \frac{1}{3}T = 2\pi n_1 \\ \frac{1}{4}T = 2\pi n_2 \\ \frac{1}{5}T = 2\pi n_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 6\pi n_1 \\ T = 8\pi n_2 \\ T = 10\pi n_3 \end{cases}$$

resolviendo el sistema: para esto m.c.m. (6,8,10) = 120 de donde  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 15$ ,  
 $n_3 = 12$ . Luego  $T = 120 \pi$  (periodo mínimo)

**OBSERVACIÓN.-**

- ① Si  $f$  y  $g$  son periódicas con periodo  $T$ , entonces  $h = af + bg$ ,  $a$  y  $b$  constantes, es también periódica con periodo  $T$ .
- ② Si  $f$  y  $g$  son periódicas con periodo  $T$ , entonces  $f \cdot g$  es también periódica con periodo  $T$ .

En efecto:  $f(t+T) = f(t) \wedge g(t+T) = g(t), \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(t+T) = f(t+T)g(t+T) = f(t)g(t) = (f \cdot g)(t)$$

$$\therefore (f \cdot g)(t+T) = (f \cdot g)(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

**TEOREMA.-** Si  $f(t)$  es una función periódica con periodo  $T$  entonces se cumple:

$$\text{i) } \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad \text{ii) } \int_T^{T+t} f(t) dt = \int_0^t f(t) dt$$

### Demostración

(1) Como  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$ , entonces  $f(t+T) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$  ... (1)

Hacemos  $t+T = z \Rightarrow t = z-T$  reemplazando en (1) tenemos:  $f(t) = f(z-T)$

$$\text{consideremos la integral } \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z-T) dz = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t) dt$$

donde  $t = z-T \Rightarrow \alpha \leq t \leq \beta \Rightarrow \alpha \leq z-T \leq \beta \Rightarrow \alpha+T \leq z \leq \beta+T$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t) dt \quad \dots (*)$$

puesto que cualquier variable puede reemplazar al diferencial de la variable.

$$\text{i) } \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt$$

aplicando el resultado de (\*) a la primera integral del 2do miembro

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$\therefore \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad \dots (**)$$

$$\text{ii) } \text{Si se hace } \alpha = 0, \beta = t \text{ en (*) se tiene: } \int_T^{T+t} f(t) dt = \int_0^t f(t) dt$$

Si en (\*\*) hacemos  $a = \frac{T}{2}$  se obtiene:  $\int_0^T f(t)dt = \int_{\frac{T}{2}}^T f(t)dt$  ... (\*\*\*)

**TEOREMA.-** Si  $f(t+T) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , si  $g(t) = \int_0^t f(t)dt$ , entonces:

$$g(t+T) = g(t) \Leftrightarrow \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+T} f(t)dt = 0$$

### Demostración

$$g(t+T) = \int_0^{t+T} f(t+T)dt = \int_0^{t+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{t+T} f(t)dt \quad \dots (1)$$

de la parte (\*\*\*) y (ii) del teorema anterior se tiene:

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+T} f(t)dt, \quad \int_T^{t+T} f(t)dt = \int_0^t f(t)dt \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:  $g(t+T) = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+T} f(t)dt + \int_0^t f(t)dt = g(t) = \int_0^t f(t)dt$

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+T} f(t)dt = \int_0^t f(t)dt - \int_0^t f(t)dt = 0 \quad \text{de donde} \quad \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+T} f(t)dt = 0$$

**TEOREMA.-** Si  $f(t+T) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , entonces si  $F(t) = \int_0^t f(t)dt - \frac{a_0 t}{2}$

demostrar que  $F(t+T) = F(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  donde  $a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+T} f(t)dt$

### Demostración

$$\begin{aligned} F(t+T) &= \int_0^{t+T} f(t+T)dt - \frac{a_0}{2}(t+T) = \int_0^{t+T} f(t)dt - \frac{a_0 t}{2} - \frac{a_0 T}{2} \\ &= \int_0^T f(t)dt + \int_T^{t+T} f(t)dt - \frac{a_0 t}{2} - \frac{a_0 T}{2} = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+T} f(t)dt + \int_0^t f(t)dt - \frac{a_0 t}{2} - \frac{a_0 T}{2} \end{aligned}$$

$$F(t+T) = \frac{a_0 T}{2} + \int_0^{a_0 T} f(t) dt - \frac{a_0 t}{2} - \frac{a_0 T}{2} = \int_0^{a_0 T} f(t) dt - \frac{a_0 t}{2} = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\therefore F(t+T) = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

## 14.2. FUNCIONES ORTOGONALES.-

**DEFINICIÓN.-** Se dice que dos funciones reales  $g_m(t)$  y  $g_n(t)$  son ortogonales en el intervalo  $a \leq t \leq b$ .

Si la integral del producto  $g_m(t) \cdot g_n(t)$  sobre este intervalo  $a \leq t \leq b$  es igual a cero, es

decir: 
$$\int_a^b g_m(t) \cdot g_n(t) dt = 0, \quad m \neq n \quad \dots (*)$$

**OBSERVACIONES.-**

① Un conjunto de funciones reales  $g_0, g_1, g_2, \dots$ , que satisface (\*) para todos los pares de funciones distintos en el conjunto, es un "conjunto ortogonal" de funciones en ese intervalo.

② La integral 
$$N(g_m(t)) = \int_a^b g_m^2(t) dt \quad \dots (**)$$

se llama Norma de la función  $g_n(t)$  en el intervalo  $a \leq t \leq b$

③ Un conjunto ortogonal de funciones,  $g_0, g_1, \dots, g_m, \dots$ , en el intervalo  $a \leq t \leq b$ , tal que cuyas funciones tiene norma 1 satisface las relaciones:

$$\int_a^b g_m(t) \cdot g_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 1 & \text{si } m = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad \dots (***)$$

un conjunto de este tipo recibe el nombre de conjunto "Ortonormal" de funciones en el intervalo  $a \leq t \leq b$

**Ejemplo.-** El conjunto de funciones:

$\{1, \cos \omega_1 t, \cos \omega_2 t, \dots, \cos n \omega_2 t, \dots, \text{sen } \omega_0 t, \dots, \text{sen } n \omega_0 t\}$  es un conjunto ortogonal en el intervalo  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

Solución

- ① Si  $g_m(t) = 1$  y  $g_n(t) = \cos n\omega_0 t$ , entonces

$$\text{Si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \quad \text{si } n \neq 0$$

- ② Si  $g_n(t) = 1$ ,  $g_m(t) = \sin m\omega_0 t$  entonces  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(m\omega_0 t) dt = 0, \forall m$

- ③ Si  $g_n(t) = \cos n\omega_0 t$ ,  $g_m(t) = \cos m\omega_0 t$ , entonces:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2}, & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

- ④ Si  $g_n(t) = \cos(n\omega_0 t)$  y  $g_m(t) = \sin(m\omega_0 t)$ , entonces:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = 0, \forall n, \forall m$$

- ⑤ Si  $g_n(t) = \sin(n\omega_0 t)$  y  $g_m(t) = \sin(m\omega_0 t)$ , entonces:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2}, & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

**OBSERVACIÓN.-** Dado un conjunto ortogonal podemos obtener un conjunto Ortonormal dividiendo cada función entre la raíz cuadrada de su norma.

**Ejemplo.-** El conjunto  $\{1, \cos \omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t\}$  donde

$$N(1) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt, \quad N(\cos n\omega_0 t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \quad \text{y} \quad N(\sin n\omega_0 t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2},$$

entonces el conjunto  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\cos \omega_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \dots, \frac{\sin \omega_0 t}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \dots \right\}$  es un conjunto Ortonormal.



### 14.3. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- 1) Encontrar el periodo de las siguientes funciones:
- a)  $\cos nt$       b)  $\cos 2\pi t$       c)  $\sin nt$       d)  $\sin 2\pi t$
- e)  $\sin \pi t$       f)  $\cos \frac{2\pi t}{k}$       g)  $\sin \frac{2\pi t}{k}$       h)  $\cos \frac{2n\pi t}{k}$
- i)  $\sin \frac{2\pi nt}{k}$       j)  $|\sin \omega_0 t|$       k)  $\sin t + \sin \frac{t}{3} + \sin \frac{t}{5}$
- 2) Demostrar que la función  $f(t) = \text{constante}$ , es una función periódica de periodo  $T$  para cualquier valor positivo de  $T$ .
- 3) Si  $T$  es un periodo de  $f$ , demostrar que  $nT$ ,  $n = \pm 2, \pm 3, \dots$ , es un periodo de  $f$ .
- 4) Si  $f(t)$  es una función periódica de  $t$  con periodo  $T$ , demostrar que  $f(at)$  para  $a \neq 0$  es una función periódica de  $t$  con periodo  $\frac{T}{|a|}$ .
- 5) Demostrar que si  $f$  y  $g$  son periódicas de periodo  $T$ , también lo es  $h = af + bg$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes.
- 6) Si  $f(t)$  es una función periódica de  $t$  con periodo  $T$  e integrable, demostrar que  $f_a(t) = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(\tau) d\tau$  también es periódica con periodo  $T$ .
- 7) Demostrar que si  $f(t)$  y  $g(t)$  son continuas por tramos en el intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  y periódica de periodo  $T$ , entonces la función  $h(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t-\tau)g(\tau) d\tau$  es continua y periódica con periodo  $T$ .
- 8) Trazar las gráficas exactas de las funciones siguientes:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{si } -\pi < t < 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}, \quad f(t+2\pi) = f(t)$$

$$\text{b) } f(t) = \frac{t}{2}, \quad -\pi < t < \pi, \quad f(t+2\pi) = f(t)$$

$$\text{c) } f(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi < t < \pi \text{ y } f(t+2\pi) = f(t)$$

$$\text{d) } f(t) = t^3, \quad -\pi < t < \pi \text{ y } f(t+2\pi) = f(t)$$

$$\text{e) } f(t) = e^{|t|}, \quad -\pi < t < \pi \text{ y } f(t+2\pi) = f(t)$$

#### 14.4. SERIES DE FOURIER.-

Si la función  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$  y que puede representarse por medio de una serie trigonométrica de la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad \dots (1)$$

a esta serie se le llama serie trigonométrica de Fourier, a la serie (1) también puede representarse del siguiente modo

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad \dots (2)$$

En efecto:

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_0 t) \right)$$

$$\text{definimos: } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t &= c_n (\cos \theta_n \cos n\omega_0 t + \operatorname{sen} \theta_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)) \\ &= c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \end{aligned} \quad \dots (3)$$

ahora reemplazamos (3) en (1) y se obtiene:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

$$\therefore f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

donde  $c_0 = \frac{a_0}{2}$  y  $\theta_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$  y además  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  y  $\theta_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$  se conoce como: Amplitudes armónicas y ángulos de fase respectivamente.

### 14.5. EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER.-

Mediante la relación de ortogonalidad del conjunto de funciones  $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \operatorname{sen} n\omega_0 t, \dots, \operatorname{sen} 2\omega_0 t, \operatorname{sen} \omega_0 t, \dots\}$  podemos evaluar los coeficientes:  $a_0, a_n, b_n$  de la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)] \quad \dots (1)$$

donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  (frecuencia angular fundamental)

En efecto: integrando la ecuación (1) de  $-\frac{T}{2}$  a  $\frac{T}{2}$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \quad \dots (2)$$

pero por la ortogonalidad del conjunto de funciones se tiene:

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \forall n \neq 0, \quad \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \dots (3)$$

ahora reemplazamos (3) en (2) se tiene:

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + 0 + 0 = \frac{a_0}{2} T, \quad \text{de donde} \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

multiplicando la expresión (1) por  $\cos(m\omega_0 t)$  e integrando de  $-\frac{T}{2}$  a  $\frac{T}{2}$  se tiene:

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{a_0}{2} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \quad \dots (4)$$

pero por la ortogonalidad del conjunto de funciones se tiene:

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{T}{2}, \quad m=n \neq 0 \dots (5)$$

ahora reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = 0 + a_m \frac{T}{2} + 0 \quad (m = n), \quad \text{de donde} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

ahora multiplicamos (1) por  $\text{sen}(m\omega_0 t)$  e integrando de  $-\frac{T}{2}$  a  $\frac{T}{2}$

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt = \frac{a_0}{2} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt \quad \dots (6)$$

por la ortogonalidad del conjunto de funciones se tiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(m\omega_0 t) dt = 0, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt = 0, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(n\omega_0 t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt = \frac{T}{2}, \quad m=n \neq 0 \dots (7)$$

reemplazando (7) en (6) se obtiene:  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt = 0 + 0 + b_m \frac{T}{2} = b_m \frac{T}{2}$

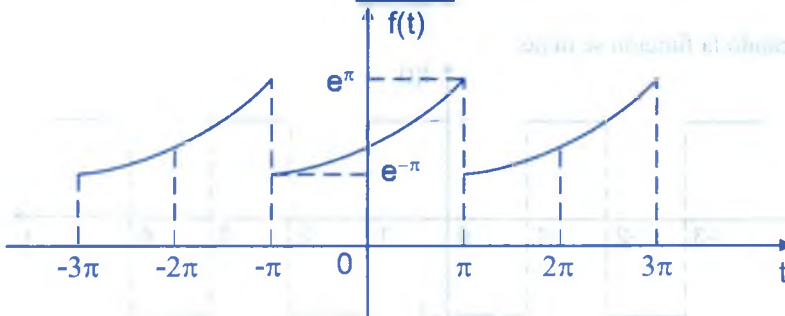
( $m = n$ ) de donde

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

**Ejemplo.-**

- ① Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t) = e^t$  en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ ,  $f(t + 2\pi) = f(t)$

**Solución**



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t))$$

donde  $T = 2\pi$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ , por lo tanto

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \text{sen} nt), \text{ de donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{1}{\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{2}{\pi} \text{senh} \pi$$



$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n \operatorname{senh} \pi}{(n^2 + 1)}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^t \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n n \operatorname{senh} \pi}{(n^2 + 1)}$$

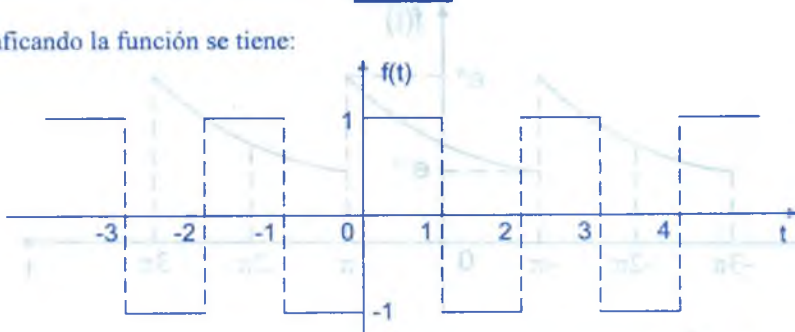
$$\therefore f(t) = \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2(-1)^n \operatorname{senh} \pi}{\pi(n^2 + 1)} \cos nt - \frac{2(-1)^n n \operatorname{senh} \pi}{\pi(n^2 + 1)} \operatorname{sen} nt \right]$$

$$\therefore f(t) = \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} + \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nt - \operatorname{sen} nt)$$

②

Hallar la serie de Fourier de la función dado por  $f(t) = (-1)^{[t]}$ **Solución**

Graficando la función se tiene:

La función  $f(t)$  es periódica:  $f(t+2) = f(t)$ ,  $\forall t$ 

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)]$$

de donde  $T = 2$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , por lo tanto

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi t) + b_n \operatorname{sen}(n\pi t)] \quad \dots (1)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-1}^1 (-1)^{[t]} dt = - \int_{-1}^0 dt + \int_0^1 dt = 0 \quad \dots (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\pi t dt = \int_{-1}^1 (-1)^{[t]} \cos n\pi t dt = 0 \quad \dots (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\pi t dt = \int_{-1}^1 (-1)^{[t]} \operatorname{sen} n\pi t dt =$$

$$= - \int_{-1}^0 \operatorname{sen} n\pi t dt + \int_0^1 \operatorname{sen} n\pi t dt = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n - (-1)^n + 1) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

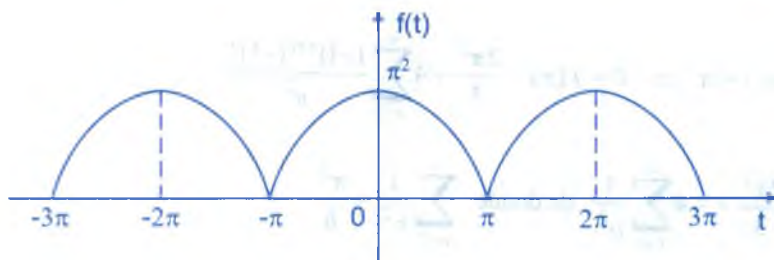
$$b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (4)$$

ahora reemplazando (2), (3), (4) en (1) se tiene:  $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi t}{2n-1}$

3

Hallar la serie de Fourier de la función cuya gráfica es:



### Solución

Los puntos  $(-\pi, 0)$ ,  $(0, \pi^2)$ ,  $(\pi, 0)$  están en la parábola

$$x^2 + Ax + By + C = 0 \quad \text{entonces} \quad y = \pi^2 - x^2$$

Entonces  $f(t) = \pi^2 - t^2$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$

Como  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  y  $T = 2\pi$  entonces  $\omega_0 = 1$

Luego  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$ , donde

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(\pi^2 - t^2) \operatorname{sen} t}_{\text{impar}} \, dt = 0 \Rightarrow b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - t^2) \, dt = \frac{2}{\pi} \left[ \pi^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - t^2) \cos nt \, dt = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}$$

$$f(t) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nt$$

**OBSERVACIÓN.-** Para calcular la suma de una serie infinita por ejemplo:

$$\text{Para } t = 0 \Rightarrow \pi^2 = f(0) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

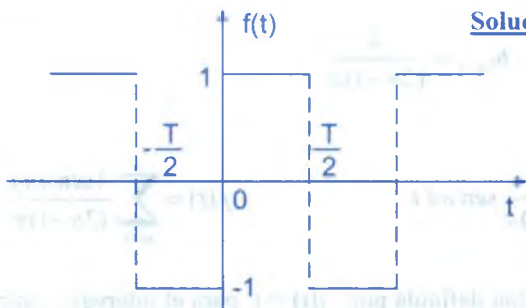
$$\text{Para } t = \pi \Rightarrow 0 = f(\pi) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^n}{n^2}$$

$$-\frac{2\pi^2}{3} = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

④

Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t)$  definida por:  $f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$

$f(t + T) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$

**Solución**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos n\omega_0 t \, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right] = \frac{2}{T} \left[ - \int_{-\frac{T}{2}}^0 \cos n\omega_0 t \, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ - \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] = \frac{2}{T} \left[ 0 + \frac{\operatorname{sen}(-\pi n)}{n\omega_0} + \frac{\operatorname{sen} \pi n}{n\omega_0} - 0 \right] = 0$$

$$\therefore \boxed{a_n = 0}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt \right] = \frac{2}{T} \left[ - \int_{-\frac{T}{2}}^0 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right] = \frac{2}{T} \left[ -\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right] = 0$$

$$\therefore a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ - \int_{-\frac{T}{2}}^0 \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \, dt \right] = \frac{2}{T} \left[ \frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \left( \frac{1}{n\omega_0} - \frac{\cos(n\pi)}{n\omega_0} \right) - \left( \frac{\cos n\pi}{n\omega_0} - \frac{1}{n\omega_0} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left( \frac{2}{n\omega_0} - \frac{2 \cos n\pi}{n\omega_0} \right) = \frac{4}{T} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{n\omega_0} \right), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{4}{T} \left( \frac{1 - \cos n\pi}{2\pi n} \right) = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi), \quad \text{como } \cos n\pi = (-1)^n$$

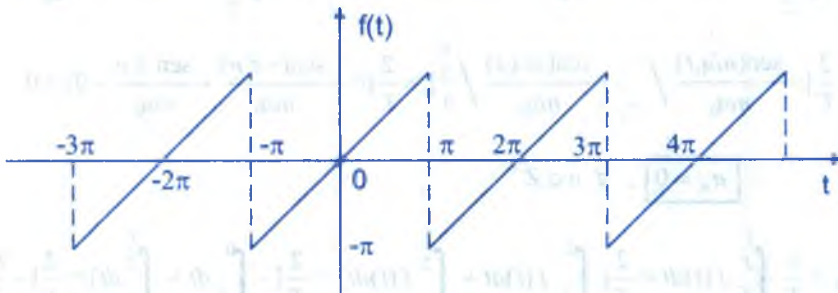
$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}, \text{ de donde } b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \operatorname{sen} n\omega_0 t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen} n\pi t \quad \therefore f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen} n\pi t}{(2n-1)\pi}$$

5

Encontrar la serie de Fourier de la función definida por:  $f(t) = t$  para el intervalo  $\langle -\pi, \pi \rangle$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$

### Solución



La serie de Fourier de la función  $f(t)$  se expresa:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \text{ donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t dt = 0, \text{ por ser } f(t) \text{ impar}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cos n\omega_0 t dt = 0$$

puesto que:  $t \cos n\omega_0 t$  es función impar

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \operatorname{sen} n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} n\omega_0 t dt$$

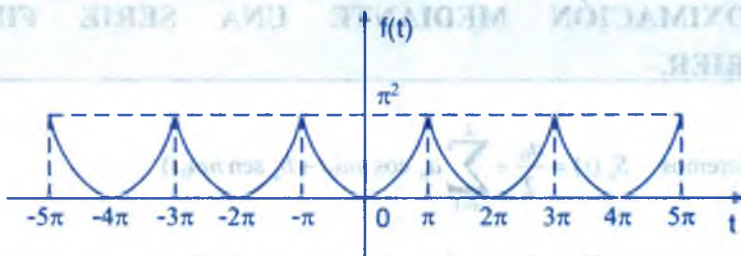


$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\text{sen } n\omega_0 t}{(n\omega_0)^2} - \frac{t \cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(-1)^n \pi}{n} + \frac{(-1)^n \pi}{n} \right] = \frac{2(-1)^n}{n}$$

$$\therefore f(t) = 2 \sum_n^{\infty} (-1)^n \text{sen } nt$$

- ⑥ Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t)$  definida por  $f(t) = t^2$  en el intervalo  $<-\pi, \pi>$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$

### Solución



La serie de Fourier de la función  $f(t)$  se expresa

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen } n\omega_0 t), \text{ donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{t^3}{3\pi} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi} [\pi^3 + \pi^3] = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt, \text{ donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1 \Rightarrow \omega_0 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2 \text{sen } nt}{n} + \frac{2t \cos nt}{n^2} - \frac{2}{n^3} \text{sen } nt \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2} \cos n\pi$$


$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{4}{n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{de donde } a_n = \frac{(-1)^n 4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt, \text{ donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1 \Rightarrow \omega_0 = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{t^2}{n} \cos nt + \frac{2t}{n^2} \operatorname{sen} nt + \frac{2 \cos nt}{n^3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

de donde se tiene  $b_n = 0$ , por lo tanto  $f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$

#### 14.6. APROXIMACIÓN MEDIANTE UNA SERIE FINITA DE FOURIER.-



Consideremos 
$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \quad \dots (1)$$

La suma de los  $(2k + 1)$  términos de una serie de Fourier que representa  $f(t)$  en el intervalo  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ . Si  $f(t)$  se aproxima por  $S_k(t)$ , es decir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) + \varepsilon_k(t) \quad \dots (2)$$

donde 
$$\varepsilon_k(t) = \sum_{n=k+1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad \dots (3)$$

entonces: 
$$\varepsilon_k(t) = f(t) - S_k(t) \quad \dots (4)$$

$\varepsilon_k(t)$  es la diferencia o error entre  $f(t)$  y su aproximación, entonces el error cuadrático medio es denotado por  $E_k$  y está definido como:

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\varepsilon_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t) - S_k(t))^2 dt \quad \dots (5)$$

**14.7. TEOREMA 1.-**

Si se aproxima la función  $f(t)$  por una serie finita de Fourier  $S_k(t)$ . Entonces esta aproximación tiene la propiedad de ser el mínimo error cuadrático medio.

**Demostración**

$$\text{Como } E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - S_k(t)]^2 dt \text{ y } S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{ sen } n\omega_0 t)$$

$$\text{Entonces } E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{ sen } n\omega_0 t)]^2 dt$$

Consideremos  $E_k$  como una función de  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$ , entonces para que el error cuadrático medio  $E_k$  sea un mínimo, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial b_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, k. \text{ En efecto:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial a_0} &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{ sen } n\omega_0 t)] (-\frac{dt}{2}) \\ &= -\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{a_0}{2T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^k a_n \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t dt + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^k b_n \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen } n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

$$\text{pero como } \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t dt = 0, \text{ para } n \neq 0;$$

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen } n\omega_0 t dt = 0, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \text{ y } a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \Rightarrow \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{a_0}{2}$$

$$\frac{a_0}{2T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \frac{a_0}{2T} \left[ \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right] = \frac{a_0}{2}, \text{ entonces se tiene: } \frac{\partial E_k}{\partial a_0} = -\frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2} + 0 + 0 = 0$$

$$\text{de donde } \frac{\partial E_k}{\partial a_0} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial a_n} &= -\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T [f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k a_n \cos n\omega_0 t - \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t] \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= -\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt + \frac{a_0}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \cos n\omega_0 t \, dt + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k a_n \int_{\frac{T}{2}}^T \cos^2 n\omega_0 t \, dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k b_n \int_{\frac{T}{2}}^T \operatorname{sen} n\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= -a_n + \frac{a_0}{T} (0) + \frac{2}{T} a_n \cdot \frac{T}{2} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k b_n (0) = -a_n + a_n = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, k$$

análogamente se prueba que  $\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, k$

#### 14.8. TEOREMA 2.-

El error cuadrático  $E_k$  en una aproximación a  $f(t)$  por  $S_k(t)$

definida por  $E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T [f(t) - S_k(t)]^2 dt$  se reduce

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

#### Demostración

Desarrollando  $E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T [f(t) - S_k(t)]^2 dt$  se tiene:

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T [f(t)]^2 dt - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \cdot S_k(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T [S_k(t)]^2 dt \quad \dots (\alpha)$$

calculando las dos ultimas integrales se tiene:

$$\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \cdot S_k(t) dt = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \right] dt$$

$$= \frac{a_0}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \underbrace{\sum_{n=1}^k a_n \left( \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right)}_{a_n} + \underbrace{\sum_{n=1}^k b_n a_n \left( \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right)}_{b_n}$$

$$= \frac{a_0}{T} \left( \frac{a_0 T}{2} \right) + \sum_{n=1}^k a_n^2 + \sum_{n=1}^k b_n^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) S_k(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \quad \dots (\beta)$$

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [S_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{n=1}^k a_n \cos n\omega_0 t + a_0 \sum_{n=1}^k b_n \sin n\omega_0 t \right. \\ \left. + \left( \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right)^2 \right] dt$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{a_0}{T} \sum_{n=1}^k a_n \underbrace{\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t dt}_0 + \frac{a_0}{T} \sum_{n=1}^k b_n \underbrace{\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt}_0$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 dt$$

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [S_k(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 dt$$

$$\left[ \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 = [a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + a_k \cos k\omega_0 t$$

$$+ b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + b_k \sin k\omega_0 t]$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^k a_n^2 \cos^2 n\omega_0 t + \sum_{n=1}^k b_n^2 \sin^2 n\omega_0 t + 2 \sum_{n,m=1, n \neq m}^k a_n a_m \cos n_0 t \cdot \cos m\omega_0 t + \\
 &+ 2 \sum_{n,m=1, n \neq m}^k b_n b_m \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t + 2 \sum_{n,m=1}^k a_n b_m \cos n\omega_0 t \cdot \sin m\omega_0 t \dots (*)
 \end{aligned}$$

ahora multiplicando por  $\frac{1}{T}$  e integrando en (\*) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right]^2 dt &= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^k a_n^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^k b_n^2 \frac{T}{2} \\
 &+ \frac{2}{T} \sum_{n,m=1}^k a_n a_m \underbrace{\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \cdot \cos m\omega_0 t dt}_0 + \frac{2}{T} \sum_{n,m=1}^k b_n b_m \underbrace{\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t \cdot \sin m\omega_0 t dt}_0 \\
 &+ \frac{2}{T} \sum_{n,m=1}^k a_n b_m \underbrace{\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \cdot \sin m\omega_0 t dt}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [S_k(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \quad \dots (\gamma)$$

Luego al reemplazar (β), (γ) en (α) se tiene:

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

**OBSERVACIONES.-**

① Como  $E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\varepsilon_k(t)]^2 dt$  entonces  $E_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\textcircled{2} \quad \text{Como } E_k \geq 0 \wedge E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\text{entonces } \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \geq 0, \text{ de donde}$$

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt$$

### 14.9. TEOREMA 3.- (TEOREMA DE PARSEVAL).-

Si  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , son los coeficientes de Fourier en la expresión de Fourier de una función periódica  $f(t)$  con periodo  $T$ , entonces

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

#### Demostración

$$\text{Como } E_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2), \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Entonces  $\{E_k\}_{k \geq 1}$ , es una sucesión de términos positivos

Ahora analizaremos si la sucesión es decreciente es decir:

$$E_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)}_{E_k} - \frac{1}{2} (a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2)$$

Entonces  $E_{k+1} = E_k - \frac{1}{2} (a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2)$ , de donde

$$E_{k+1} - E_k = -\frac{1}{2} (a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2) < 0 \Rightarrow E_{k+1} < E_k$$

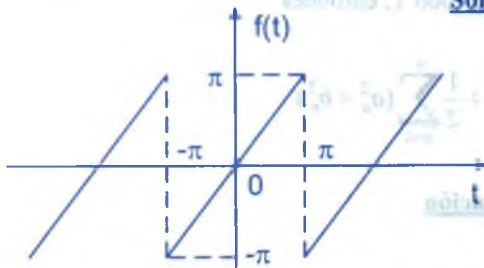
por lo tanto la sucesión  $\{E_k\}_{k \geq 1}$  es decreciente pero  $(0 \leq E_{k+1} \leq E_k \leq E_2 \leq E_1)$  es decir que la sucesión  $\{E_k\}_{k \geq 1}$  es acotada, por lo tanto la sucesión  $\{E_k\}_{k \geq 1}$  es convergente y  $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = 0$

$$\text{pero } \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \right) = 0$$

$$\text{de donde } \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

**Ejemplo.-** Aproximar la función  $f(t) = t$  en el intervalo  $\langle -\pi, \pi \rangle$  mediante una serie infinita de Fourier de 5 términos que sean diferentes de cero, calcular también el error cuadrático medio en la aproximación.

### Solución



$$f(t) = t, \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$T = 2\pi, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

La serie de Fourier de la función  $f(t) = t$  es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \text{ donde:}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 0 \text{ por ser } f(t) = t \text{ impar}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt dt = 0 \text{ puesto que la función } t \cos nt \text{ es}$$

impar en  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \overbrace{\text{sen } n\pi}^0 - \frac{t}{n} \cos n\pi \right] \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \text{sen } n\pi - \frac{\pi}{n} \cos n\pi \right]$$

$$= -\frac{2}{n} \cos n\pi, \text{ de donde } b_n = -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n-1}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n-1} \text{sen } nt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{sen } nt, \text{ sabemos que}$$

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen } n\omega_0 t) \quad \therefore S_5(t) = 2 \sum_{n=1}^5 \frac{(-1)^{n-1} \text{sen } nt}{n}$$

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

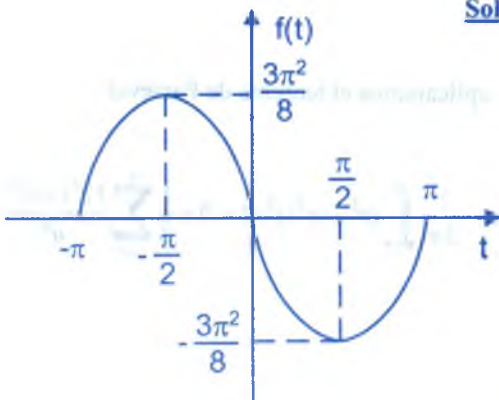
$$E_5 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 \frac{4}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 2[1 + 0.25 + 0.111 + \dots + 0.04] = \frac{\pi^2}{3} - 2.9272 = 0.363$$

$$\therefore E_5 = 0.363$$

**Ejemplo.-** Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = t^3 - \pi^2 t$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ ;  
 $f(t) = f(t + 2\pi)$ , aplicar el teorema de Parseval al resultado para calcular la

suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

### Solución



$$f(\pi) = f(-\pi) = 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi^2}{8}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi^2}{8}$$

$f(t) = t^3 - \pi t$  es una función impar  
entonces  $a_0 = a_n = 0$

Luego la serie de Fourier es:  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$ , donde  $b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$ , puesto que  $f(t) \operatorname{sen} nt$ , es función par

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t^3 - \pi^2 t) \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} t^3 \operatorname{sen} nt \, dt - \pi^2 \int_0^{\pi} t \operatorname{sen} nt \, dt \right) \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t^3 \operatorname{sen} nt \, dt &= \left[ -\frac{t^3 \cos nt}{n} + \frac{3}{n^2} t^2 \operatorname{sen} nt + \frac{6t}{n^3} \cos nt - \frac{6}{n^4} \operatorname{sen} nt \right] \Bigg|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n} \pi^3 (-1)^n + \frac{6\pi}{n^3} (-1)^n = -\frac{\pi^3}{n} (-1)^n + \frac{6\pi}{n^3} (-1)^n \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} nt \, dt = \left( -\frac{t \cos nt}{n} + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nt \right) \Bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{n} (-1)^n \quad \dots (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi^3}{n} (-1)^n + \frac{6\pi}{n^3} (-1)^n - \pi^2 \left( -\frac{\pi}{n} \right) (-1)^n \right] \\ &= -\frac{2\pi^2}{n} (-1)^n + \frac{12}{n^3} (-1)^n + \frac{2\pi^2}{n} (-1)^n = \frac{12}{n^3} (-1)^n \Rightarrow b_n = \frac{12}{n^3} (-1)^n \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$$

para calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ , aplicaremos el teorema de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) \, dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^3 - \pi^2 t)^2 \, dt = 0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12^2 (-1)^{2n}}{n^6}$$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^7}{7} - \frac{2\pi^2 t^5}{5} + \frac{\pi^4 t^3}{3} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 72 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$



$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi^7}{7} - \frac{2\pi^7}{5} + \frac{\pi^7}{3} \right] - \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\pi^7}{7} + \frac{2\pi^5}{5} - \frac{\pi^7}{3} \right] = 72 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{2\pi^7}{7} - \frac{4\pi^7}{5} + \frac{2\pi^7}{3} \right] = 144 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \text{ por lo tanto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{144} \left[ \frac{16}{105} \right] \pi^6 = \frac{\pi^6}{945}$$

#### 14.10. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER.-

Sea  $f$  una función periódica con periodo  $T$  y sea

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad \dots (1)$$

donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  y  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier de  $f(t)$

**Problema 1.-** Si  $S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$  ... (2)

La suma de los  $(2k + 1)$  términos de la serie de Fourier de  $f(t)$  donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  y

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt, \text{ entonces:}$$

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \frac{\operatorname{sen}\left(k + \frac{1}{2}\right)(z-t)}{2 \operatorname{sen} \omega_0 \left(\frac{z-t}{2}\right)} dz$$

#### Demostración

Como  $S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] + \sum_{n=1}^k \left( \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 z \, dz \right) \cos n\omega_0 t$$

$$+ \sum_{n=1}^k \left( \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 z \, dz \right) \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \sum_{n=1}^k \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z) (\cos n\omega_0 z \cdot \cos n\omega_0 t + \operatorname{sen} n\omega_0 z \cdot \operatorname{sen} n\omega_0 t) dz \\
&= \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z) dz + \sum_{n=1}^k \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z) \cos n\omega_0 (z-t) dz \\
&= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z) dz \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 (z-t) \right] dz \quad \dots (\alpha)
\end{aligned}$$

sabemos que:  $\operatorname{sen} \omega_0 (n + \frac{1}{2})s - \operatorname{sen} \omega_0 (n - \frac{1}{2})s = 2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 s}{2} \cos n\omega_0 s$ , entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^k [\operatorname{sen} \omega_0 (n + \frac{1}{2})s - \operatorname{sen} \omega_0 (n - \frac{1}{2})s] &= 2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 s}{2} \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 s \\
[\operatorname{sen} \frac{3\omega_0 s}{2} - \operatorname{sen} \frac{\omega_0 s}{2}] + [\operatorname{sen} \frac{5}{2} \omega_0 s - \operatorname{sen} \frac{3}{2} \omega_0 s] + \dots + [\operatorname{sen} \omega_0 (k + \frac{1}{2})s - \operatorname{sen} \omega_0 (k - \frac{1}{2})s] &= \\
= 2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 s}{2} \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 s &= \operatorname{sen} \omega_0 (k + \frac{1}{2})s - \operatorname{sen} \frac{\omega_0 s}{2}
\end{aligned}$$

Luego  $\operatorname{sen} \omega_0 (k + \frac{1}{2})s - \operatorname{sen} \frac{\omega_0 s}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 s}{2} \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 s$ , ( $s = z - t$ )

$$\operatorname{sen} \omega_0 (k + \frac{1}{2})s = 2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 s}{2} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 s \right]$$

$$\frac{\operatorname{sen} \omega_0 (k + \frac{1}{2})(z-t)}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0}{2} (z-t)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 (z-t) \quad \dots (\beta)$$

reemplazando (β) en (α) se tiene:

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 (z-t) \right] dz = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(z) \frac{\operatorname{sen} \omega_0 (k + \frac{1}{2})(z-t)}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0}{2} (z-t)} dz \dots (*)$$

**Problema 2.-** Demostrar que la expresión (\*) se puede escribir como

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda$$

### Demostración

En la expresión asterisco (\*) hacemos  $z - t = \lambda$  de donde  $dz = d\lambda$

$$\text{Además } -\frac{T}{2} \leq z \leq \frac{T}{2} \Rightarrow -\frac{T}{2} \leq \lambda + t \leq \frac{T}{2} \Rightarrow -\frac{T}{2} - t \leq \lambda \leq \frac{T}{2} - t$$

$$\text{entonces } S_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}-t}^{\frac{T}{2}-t} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda \quad \text{pero } f(t+\lambda+T) = f(t+\lambda)$$

$$\text{además } \frac{\operatorname{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 \lambda \quad \text{entonces}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 (\lambda+T)}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 (\lambda+T)}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 (\lambda+T) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0 \lambda = \frac{\operatorname{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \operatorname{sen}(\frac{\omega_0 \lambda}{2})}$$

por lo tanto la función integrando es periódica con periodo T en la variable "λ"

$$\text{además sabemos que: Si } f(t+T) = f(t), \forall t \quad \text{entonces } \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$\therefore S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda+t) \frac{\operatorname{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda$$

**Problema 3.-** Sea  $f(t)$  una función periódica, con periodo T, integrable absolutamente en un periodo. Entonces en todo punto de continuidad donde existe la derivada, la serie de Fourier de  $f(t)$  converge al valor  $f(t)$ , es decir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = f(t)$$

### Demostración

$$\text{Sea } S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\lambda) \frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda \quad \dots (1)$$

Sea  $t$  un punto de continuidad de  $f(t)$ , como  $\frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\omega_0\lambda$ , entonces

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda = \frac{1}{2} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\lambda + \underbrace{\sum_{n=1}^k \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0\lambda d\lambda}_0 = \frac{T}{2}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda = 1 \text{ y } f(t) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda, \text{ luego tenemos:}$$

$$\begin{aligned} S_k(t) - f(t) &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\lambda) \frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda \\ &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t+\lambda) - f(t)] \frac{\text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda}{2\text{sen}\frac{\omega_0\lambda}{2}} d\lambda, \text{ consideremos} \end{aligned}$$

$$g(\lambda) = \frac{f(\lambda+t) - f(t)}{2\text{sen}\omega_0\lambda}, \text{ entonces: } S_k(t) - f(t) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\lambda) \text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda d\lambda$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [S_k(t) - f(t)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(\lambda) \text{sen}(k+\frac{1}{2})\omega_0\lambda d\lambda = 0 \quad \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = f(t)$$

### OBSERVACIONES.-

- ① Si  $a_n$  y  $b_n$  son sucesiones de los coeficientes de Fourier de  $f(t) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . En efecto:

$$\text{Sabemos que } \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \text{ y } \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$$

es convergente ( $E_k$ ) con limite cero entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

② Si  $f(t)$  es una función continua por tramos y la integral del valor de  $f(t)$  es finita

$$\left( \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty \right) \text{ entonces } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt = 0$$

$$\text{como } \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty \Rightarrow \exists a_n \text{ y } b_n \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\text{entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt$$

### 14.11. LEMA (EL LEMA DE RIEMANN LABESGUE).-

Si  $g$  es una función continua por tramos en  $[a, b]$ , entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

#### Demostración

$$\text{Demostraremos que: } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0$$

$$\text{Hacemos } I(\lambda) = \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx, \quad a \leq x \leq b \quad \dots (1)$$

$$\text{Y sea } x = t + \frac{\pi}{\lambda}, \quad a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq t + \frac{\pi}{\lambda} \leq b \Rightarrow a - \frac{\pi}{\lambda} \leq t \leq b - \frac{\pi}{\lambda}$$

$$I(\lambda) = \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^{b - \frac{\pi}{\lambda}} g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \operatorname{sen} \lambda \left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) dt = - \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^{b - \frac{\pi}{\lambda}} g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \operatorname{sen} \lambda t dt$$



es decir:  $I(\lambda) = - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a+\frac{\pi}{\lambda}} g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda x \, dx \quad \dots (2)$

sumando (1) y (2) tenemos:

$$\begin{aligned}
 2I(\lambda) &= - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a+\frac{\pi}{\lambda}} g(x - \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda x \, dx + \int_a^b g(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx \\
 &= - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda x \, dx - \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda x \, dx + \\
 &\quad + \int_a^b g(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx + \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a g(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx \\
 &= - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \operatorname{sen} \lambda x \, dx + \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} [g(x) - g(x + \frac{\pi}{\lambda})] \operatorname{sen} \lambda x \, dx + \int_a^b g(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx
 \end{aligned}$$

consideremos que  $g(x)$  es continua en  $[a, b]$ , entonces en este caso  $\exists M > 0$  tal que  $|g(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$  entonces

$$|2I(\lambda)| = 2|I(\lambda)| \leq \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a |g(x + \frac{\pi}{\lambda})| \, dx + \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} |g(x) - g(x + \frac{\pi}{\lambda})| \, dx + \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a |g(x)| \, dx$$

entonces  $|2I(\lambda)| \leq M((b - a + \frac{\pi}{\lambda}) + M(a - a + \frac{\pi}{\lambda}) + \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} |g(x) - g(x + \frac{\pi}{\lambda})| \, dx$

$$= 2M \frac{\pi}{\lambda} + \underbrace{\int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} |g(x) - g(x + \frac{\pi}{\lambda})| \, dx}_{< \epsilon} \quad \dots (*)$$

**OBSERVACION.-** Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0 / |y - x| < \varepsilon \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$  entonces  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\left| \left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - x \right| = \frac{\pi}{\lambda} < \varepsilon \Rightarrow \left| g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(x) \right| < \varepsilon$$

Luego por (\*) y la observación se tiene:  $|I(\lambda)| \leq M \frac{\frac{\pi}{\lambda} + \frac{1}{2} \varepsilon (b - a - \frac{\pi}{\lambda})}{\frac{\lambda}{0}} \rightarrow 0$

$$|I(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2} (b - a) < \varepsilon \quad \therefore \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = 0$$

**Problema 4.-** Sea  $f(t)$  una función continua por tramos, periódica con periodo  $T$ .  
Entonces en todo punto de discontinuidad de  $f(t)$  tiene una derivada de

derecha e izquierda; la serie de Fourier de  $f(t)$  converge a  $\frac{1}{2}(f(t^+) + g(t^-))$

### Demostración

Probaremos que:  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$

Donde  $S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$

También sabemos que:  $S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \lambda} f(t + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda$

Es decir:  $S_k(t^+) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t^+ + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t^+ + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda$

Entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t^+) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t^+ + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda +$

$$+ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t^+ + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda \quad \dots(1)$$

Se tiene además  $\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda = 1$

En esta integral, la función integrando es una función par.

$$1 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda = \frac{4}{T} \int_{\frac{T}{2}}^0 \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda$$

entonces:  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^0 \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda = \frac{1}{2} \end{array} \right.$ , entonces:

$$\frac{1}{2} f(t^+) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t^+) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda$$

$$\frac{1}{2} f(t^-) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^0 f(t^-) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda, \text{ consideremos:}$$

$$\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t^+ + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda - \frac{1}{2} f(t^+) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{f(t^+ + \lambda) \text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda -$$

$$- \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t^+) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T [f(t^+ + \lambda) - f(t^+)] \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda$$

ahora sea  $g(\lambda) = \frac{f(t^+ + \lambda) - f(t^+)}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}}$  entonces  $g(\lambda)$  está bien definida y es continua luego

$$\text{es integrable } \frac{2}{T} \int_0^T f(t^+ + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} - \frac{1}{2} f(t^+) = \frac{2}{T} \int_0^T g(\lambda) \text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda d\lambda$$

tomando limite cuando  $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{T} \int_0^T f(t^+ + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} - \frac{1}{2} f(t^+) \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T g(\lambda) \text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda d\lambda = 0$$

$$\text{de donde } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T f(t^+ + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda = \frac{1}{2} f(t^+)$$

$$\text{análogamente } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T f(t^- + \lambda) \frac{\text{sen}(k + \frac{1}{2})\omega_0 \lambda}{2 \text{sen} \frac{\omega_0 \lambda}{2}} d\lambda = \frac{1}{2} f(t^-)$$

**OBSERVACIÓN.-**  $S_k$  : constante, entonces:  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t^+) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t^-) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t)$

## 14.12. DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER.-

**TEOREMA.-** Sea  $f(t)$  una función continua en  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  y  $f(-\frac{T}{2}) = f(\frac{T}{2})$  y  $f'(t)$  es continua por tramos y diferenciable. Entonces la serie de Fourier de:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen } n\omega_0 t)$$

se puede derivar término a término para obtener

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t + b_n \operatorname{cos} n\omega_0 t)$$

### Demostración

$f(t+T) = f(t)$ ,  $\forall t$  entonces  $f'(t+T) = f'(t)$  y

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \operatorname{cos} n\omega_0 t + \beta_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

donde  $\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t) \operatorname{cos} n\omega_0 t dt$ , integrando por partes

$$\begin{cases} u = \operatorname{cos} n\omega_0 t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -n\omega_0 \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t) \operatorname{cos} n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} f(t) \operatorname{cos} n\omega_0 t \Big|_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} -n\omega_0 f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T} [f(\frac{T}{2})(-1)^n - f(-\frac{T}{2})(-1)^n] + n\omega_0 (\frac{2}{T}) \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt$$

$$= n\omega_0 [\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt] = n\omega_0 b_n \Rightarrow \alpha_n = n\omega_0 b_n$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt, \text{ integrando por partes tenemos:}$$

$$\text{Sean } \begin{cases} u = \operatorname{sen} n\omega_0 t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n\omega_0 \operatorname{cos} n\omega_0 t \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \Big|_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) n\omega_0 \operatorname{cos} n\omega_0 t dt$$



$$= \frac{2}{T} \underbrace{\left[ f\left(\frac{T}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\omega_0 T}{2} - f\left(-\frac{T}{2}\right) \operatorname{sen} n\omega_0 \left(-\frac{T}{2}\right) \right]}_0 - \frac{2n\omega_0}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

$$= -n\omega_0 \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right] = -n\omega_0 a_n \Rightarrow \beta_n = -n\omega_0 a_n$$

$$\text{y } \alpha_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t) dt = \frac{2}{T} [f(t)]_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

$$\text{Entonces: } f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 [b_n \cos n\omega_0 t - a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t]$$

**Ejemplo.-**  $f(t) = \pi^2 - t^2$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ ;  $f(t + 2\pi) = f(t)$ ,  $\forall t$

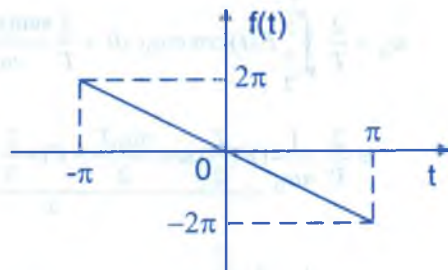
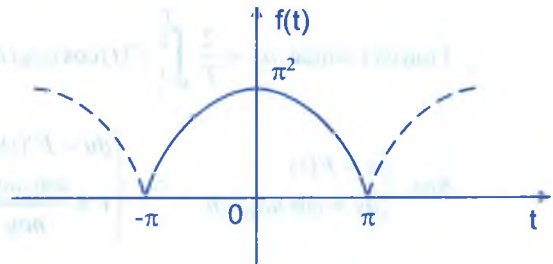
Hemos calculado su serie de Fourier de  $f(t)$  es decir:

$$f(t) = \frac{2\pi^3}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nt \quad \text{y}$$

$f'(t) = -2t$ , continua por tramos y su serie de Fourier será:

$$f'(t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-n) \operatorname{sen} nt}{n^2}$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nt$$



**TEOREMA.-** Sea  $f(t)$  una función continua por tramos en el intervalo  $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$  y

$$f(t + T) = f(t), \text{ entonces: } f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t);$$

se integra término a término para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{a_0}{2}(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n(\cos n\omega_0 t_2 - \cos n\omega_0 t_1) + a_n(\sin n\omega_0 t_2 - \sin n\omega_0 t_1)]$$

donde  $t_1, t_2 \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ ,  $t_1 < t_2$

### Demostración

Como  $f(t+T) = f(t)$ ,  $\forall t$  y  $F(t) = \int_0^t f(t) dt - \frac{a_0 t}{2}$

Entonces  $F(t+T) = F(t)$ ,  $\forall t$ , luego  $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$

Sea  $F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \sin n\omega_0 t)$  (la representación de su serie de

Fourier) donde  $\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos n\omega_0 t dt$ , integrando por partes.

Sea  $\begin{cases} u = F(t) \\ dv = \cos n\omega_0 t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = F'(t) dt \\ v = \frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \end{cases}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} F(t) \Big|_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{F'(t) \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} dt \\ &= \frac{2}{T} \frac{1}{n\omega_0} \underbrace{\left[ F\left(\frac{T}{2}\right) \sin \frac{n\omega_0 T}{2} - F\left(-\frac{T}{2}\right) \sin\left(-\frac{n\omega_0 T}{2}\right) \right]}_0 - \frac{2}{n\omega_0 T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F'(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{n\omega_0} \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F'(t) \sin n\omega_0 t dt \right] = -\frac{1}{n\omega_0} \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) \sin n\omega_0 t dt \right]$$

$$= -\frac{1}{n\omega_0} \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt - \frac{a_0}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt \right]$$

0 (por ser impar)

$$\alpha_n = -\frac{1}{n\omega_0}[b_n - 0] = -\frac{b_n}{n\omega_0} \Rightarrow \alpha_n = -\frac{b_n}{n\omega_0}$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt, \text{ integrando por partes}$$

$$\text{Sea } \begin{cases} u = F(t) \\ dv = \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = F'(t) dt \\ v = -\frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \end{cases}$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{T} \left( -F(t) \frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right) \Big|_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{F'(t) \cos n\omega_0 t}{n\omega_0} dt$$

$$= -\frac{2}{Tn\omega_0} \left[ F\left(\frac{\pi}{2}\right)(-1)^n - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1)^n \right] + \frac{1}{n\omega_0} \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F'(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{Tn\omega_0} \left[ F\left(-\frac{T}{2}\right) - F\left(\frac{T}{2}\right) \right] + \frac{1}{n\omega_0} \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t) - \frac{a_0}{2}) \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{Tn\omega_0} \left[ F\left(-\frac{T}{2}\right) - F\left(\frac{T}{2}\right) \right] + \frac{1}{n\omega_0} \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt - \frac{a_0}{T} \underbrace{\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t \, dt}_0 \right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{Tn\omega_0} \left[ F\left(-\frac{T}{2}\right) - F\left(\frac{T}{2}\right) \right] + \frac{1}{n\omega_0} \left[ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

$$\beta_n = \frac{2(-1)^n}{Tn\omega_0} \left[ F\left(-\frac{T}{2}\right) - F\left(\frac{T}{2}\right) \right] + \frac{a_n}{n\omega_0}$$

$$\text{pero } F(t) = \int_0^T f(t) dt - \frac{a_0 t}{2} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{T}{2}\right) = \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt - \frac{a_0 T}{4} \\ F\left(-\frac{T}{2}\right) = \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{a_0 T}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 F\left(-\frac{T}{2}\right) - F\left(\frac{T}{2}\right) &= \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{a_0 T}{4} - \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{a_0 T}{4} = - \int_{\frac{T}{2}}^0 f(t) dt - \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{a_0 T}{2} \\
 &= - \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{a_0 T}{2} = - \frac{a_0 T}{2} + \frac{a_0 T}{2} = 0 \quad \therefore \beta_n = \frac{a_n}{n\omega_0}
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } F(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n \cos n\omega_0 t + a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t]$$

$$F(t_1) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n \cos n\omega_0 t_1 + a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t_1]$$

$$F(t_2) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n \cos n\omega_0 t_2 + a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t_2]$$

$$\begin{aligned}
 F(t_2) - F(t_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n \cos n\omega_0 t_2 + a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t_2] - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n \cos n\omega_0 t_1 + a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t_1]
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{t_2} f(t) dt - \frac{a_0 t_2}{2} - \int_0^{t_1} f(t) dt + \frac{a_0 t_1}{2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [b_n (\cos n\omega_0 t_1 - \cos n\omega_0 t_2) + a_n (\operatorname{sen} n\omega_0 t_2 - \operatorname{sen} n\omega_0 t_1)]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{a_0}{2} (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n (\cos n\omega_0 t_2 - \cos n\omega_0 t_1) + a_n (\operatorname{sen} n\omega_0 t_2 - \operatorname{sen} n\omega_0 t_1)]$$

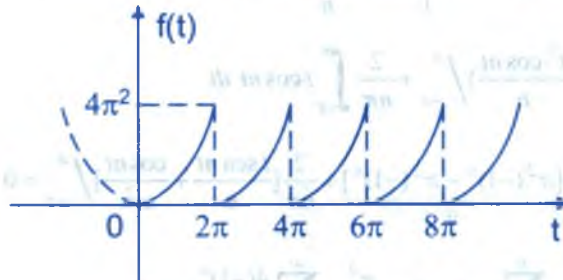
**Ejemplo.-** Dada la función  $f(t) = t^2$ ,  $0 < t < 2\pi$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

- Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t)$ .
- ¿Cuál es el punto de convergencia de la serie de Fourier de  $f(t)$  en cada punto de discontinuidad?

- c) Hallar la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
- d) Hallar la serie de Fourier de  $\frac{t}{3}(t^2 - \pi^2)$ , a partir de la parte (a)
- e) Hallar la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{\pi^2}{n^2}\right)$

**Solución**

- a) Graficando la función  $f(t) = t^2$ ,  $0 < t < 2\pi$



La serie de Fourier de la función  $f(t) = t^2$  es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \text{ donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt dt, \text{ integrando por partes}$$

$$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \cos nt dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2t dt \\ v = \frac{\operatorname{sen} nt}{n} \end{cases}$$



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \frac{t^2 \operatorname{sen} nt}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2t \operatorname{sen} nt}{n} \, dt = -\frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} nt \, dt$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left[ -\frac{t \cos nt}{n} + \frac{\operatorname{sen} nt}{n^2} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \operatorname{sen} nt \, dt, \text{ integrando por partes}$$

$$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \operatorname{sen} nt \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2t \, dt \\ v = -\frac{\cos nt}{n} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{t^2 \cos nt}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt \, dt$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \underbrace{[\pi^2 (-1)^n - \pi^2 (-1)^n]}_0 + \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{t \operatorname{sen} nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nt$$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$$

b)  $f(2\pi^-) = \lim_{t \rightarrow 2\pi^-} f(t) = 4\pi^2$  y  $\lim_{t \rightarrow 2\pi^+} f(t) = f(2\pi^+) = 0$  entonces

$$\frac{f(2\pi^-) + f(2\pi^+)}{2} = \frac{4\pi^2 - 0}{2} = 2\pi^2$$

c) Como  $f(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$  para  $t=0$ ,  $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\theta}{n^2} = 0$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

d) Como  $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$ , integrando se tiene:

$$\int_0^t t^2 dt = \int_0^t \frac{\pi^2}{3} dt + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_0^t \cos nt dt \Rightarrow \frac{t^3}{3} = \frac{\pi^2 t}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} nt$$

$$\frac{t}{3}(t^2 - \pi^2) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} nt \quad \text{para } t = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} \left( \frac{\pi^2}{4} - \pi^2 \right) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = -\frac{\pi^3}{32}$$

como  $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$  para  $t = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

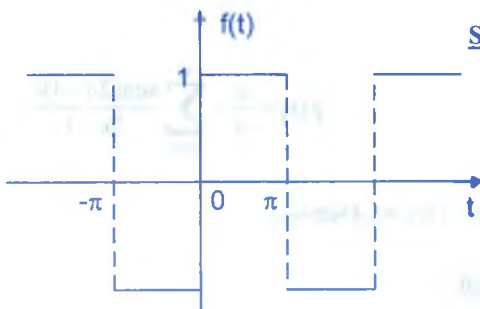
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^3} + \frac{\pi^2}{n^2} \right) = -\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^4}{6}$$

### 14.13. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

①

Hallar la serie de Fourier de la función dada por  $f(t) =$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < t < 0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < t < \pi \end{cases}$$



**Solución**

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \quad T = 2\pi$$

La serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -\frac{\pi}{4} dt + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\pi}{4} t \Big|_{-\pi}^0 + \left[ \frac{\pi}{4} t \right] \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(t) \cos nt dt + \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -\frac{\pi}{4} \cos nt dt + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \cos nt dt \right] = \frac{1}{4} \left[ -\frac{\operatorname{sen} nt}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\operatorname{sen} t}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \operatorname{sen} nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(t) \operatorname{sen} nt dt + \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -\frac{\pi}{4} \operatorname{sen} nt dt + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} nt dt \right]$$

$$b_n = \frac{1}{4} \left[ \frac{\cos nt}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \left( -\frac{\cos nt}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \right]$$

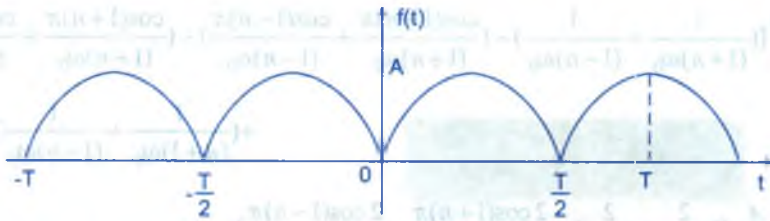
$$b_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$b_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \quad \therefore \quad f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

② Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t) = |A \operatorname{sen} \omega_0 t|$

**Solución**



Como  $f(t)$  es una función impar, entonces  $b_n = 0$

Luego la serie de Fourier de la función  $f(t)$  es:  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$  y  $T = \pi$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |A \operatorname{sen} \omega_0 t| dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 |A \operatorname{sen} \omega_0 t| dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |A \operatorname{sen} \omega_0 t| dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 -A \operatorname{sen} \omega_0 t dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} A \operatorname{sen} \omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{A \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right]_{-\pi/2}^0 - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{A \cos \omega_0 t}{\omega_0} \right]_0^{\pi/2}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2$$

$$= \frac{1}{\pi} [(A - (-A))] - \frac{1}{\pi} [-A - A] = \frac{1}{\pi} (2A) + \frac{2A}{\pi} = \frac{4A}{\pi} \quad \therefore a_0 = \frac{4A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |A \operatorname{sen} \omega_0 t| \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \int_{-\pi/2}^0 -A \operatorname{sen} \omega_0 t \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\pi/2} A \operatorname{sen} \omega_0 t \cos n\omega_0 t dt \right]$$

$$= \frac{2A}{\pi} \left[ \int_{-\pi/2}^0 -\frac{1}{2} (\operatorname{sen}(1+n)\omega_0 t + \operatorname{sen}(1-n)\omega_0 t) dt + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(1+n)\omega_0 t + \operatorname{sen}(1-n)\omega_0 t) dt \right]$$

$$= \frac{A}{\pi} \left[ \left( \frac{\cos(1+n)\omega_0 t}{(1+n)\omega_0} + \frac{\cos(1-n)\omega_0 t}{(1-n)\omega_0} \right) \right]_{-\pi/2}^0 - \left( \frac{\cos(1+n)\omega_0 t}{(1+n)\omega_0} + \frac{\cos(1-n)\omega_0 t}{(1-n)\omega_0} \right) \right]_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{A}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{(1+n)\omega_0} + \frac{1}{(1-n)\omega_0} \right) - \left( \frac{\cos(1+n)\pi}{(1+n)\omega_0} + \frac{\cos(1-n)\pi}{(1-n)\omega_0} \right) - \left( \frac{\cos(1+n)\pi}{(1+n)\omega_0} + \frac{\cos(1-n)\pi}{(1-n)\omega_0} \right) + \left( \frac{1}{(n+1)\omega_0} + \frac{1}{(1-n)\omega_0} \right) \right]$$

$$= \frac{A}{\omega_0 \pi} \left[ \left( \frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) - \frac{2 \cos(1+n)\pi}{1+n} - \frac{2 \cos(1-n)\pi}{1-n} \right]$$

$$= \frac{A}{2\pi} \left[ \frac{4}{1-n^2} - 2 \left( \frac{\cos(1-n)\pi}{1+n} + \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} \right) \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{A}{2\pi} \left[ \frac{4}{1-n^2} - 2 \left( -\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \right) \right] & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{A}{2\pi} \left[ \frac{4}{1-n^2} - 2 \left( \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right) \right] & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{A}{2\pi} \left[ \frac{4}{1-n^2} + \frac{4}{1-n^2} \right] & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{A}{2\pi} \left[ \frac{4}{1-n^2} - \frac{4}{1-n^2} \right] & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{A}{\pi} \left( \frac{4}{1-n^2} \right) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\text{Luego } a_{2n} = \frac{4A}{\pi} \left( \frac{1}{(1-(2n)^2)} \right) = \frac{4A}{\pi} \left( \frac{1}{1-4n^2} \right)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi} \left( \frac{1}{1-4n^2} \right) \cos 2n\omega_0 t \quad \therefore f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos 2n\omega_0 t$$

③

Desarrollar  $f(t) = e^{r \cos t} \cos(r \sin t)$  en serie de Fourier (Sugerencia: usar la serie de potencias para  $e^z$  cuando  $z = re^{jt}$ )

### Solución

$$\text{Como } \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \text{sen } \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$f(t) = e^{r \cos t} \cos(r \sin t) = e^{r \left( \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right)} \cdot \frac{e^{jr \sin t} + e^{-jr \sin t}}{2}$$



$$= \frac{1}{2} e^{r \frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2}} \cdot \left[ e^{jr \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}} + e^{-jr \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}} \right] = \frac{1}{2} e^{r \frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2}} \cdot \left[ e^{r \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2}} + e^{-r \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ e^{r(e^{jt} + e^{-j} + e^{jt} - e^{-jt})} + e^{-r(e^{jt} - e^{-jt} + e^{-jt} + e^{-jt})} \right] = \frac{1}{2} [e^{re^{jt}} + e^{-re^{-jt}}]$$

como  $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

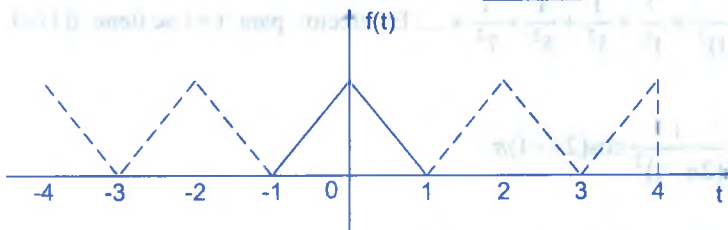
$f(t) = \frac{1}{2} [e^{re^{jt}} + e^{-re^{-jt}}]$ , entonces se tiene:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(re^{jt})^n + (re^{-jt})^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} (e^{jnt} + e^{-jnt})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} (e^{jnt} + e^{-jnt}) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \cos nt \quad \therefore f(t) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \cos nt$$

- ④ Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t) = \begin{cases} t+1; & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1; & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

### Solución



Graficando la función  $f(t)$

se tiene:  $T = 2$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

observamos que  $f \in P C[-1,1]$ , es decir:  $f(t+2) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  y  $f \in V_p \Rightarrow$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t, \quad b_n = 0$$

donde  $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt$

$$= \int_{-1}^0 (t+1)dt + \int_0^1 (-t+1)dt = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(0 + \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\pi t dt = \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t dt = \int_{-1}^0 f(t) \cos n\pi t dt + \int_0^1 f(t) \cos n\pi t dt \\ &= \int_{-1}^0 (t+1) \cos n\pi t dt + \int_0^1 (-t+1) \cos n\pi t dt \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2 \pi^2} - \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} - \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} + \frac{1}{n^2 \pi^2} = \frac{2}{n^2 \pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi^2} \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4}{n^2 \pi^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

NOTA.-  $\begin{cases} \cos n\pi = (-1)^n \\ \sin n\pi = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ . Luego  $a_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi t$$

NOTA.- A partir de esta serie de Fourier podemos obtener la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \text{ En efecto: para } t=1 \text{ se tiene } f(1)=0$$

$$0 = f(1) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n-1)^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5 Hallar la serie de Fourier de  $f(t) = e^t$ ,  $|t| \leq \pi$

### Solución

$|t| \leq \pi \Rightarrow -\pi \leq t \leq \pi \Rightarrow T = 2\pi$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$ ; la serie de Fourier de la función  $f(t)$  es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \text{ donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{1}{\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt dt = \frac{e^t [n \operatorname{sen} nt + \cos nt]}{\pi(n^2 + 1)} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{\pi} \cos n\pi}{\pi(n^2 + 1)} - \frac{e^{-\pi} \cos(-n\pi)}{\pi(n^2 + 1)} = \frac{(-1)^n}{\pi(n^2 + 1)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{2(-1)^n \operatorname{senh} \pi}{\pi(n^2 + 1)}$$

$$a_n = \frac{2(-1)^n \operatorname{senh} \pi}{\pi(n^2 + 1)}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \operatorname{sen} nt dt = \frac{e^t (\operatorname{sen} nt - n \cos nt)}{\pi(n^2 + 1)} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{\pi} (-n \cos n\pi)}{\pi(n^2 + 1)} - \frac{e^{-\pi} (-n \cos(-n\pi))}{\pi(n^2 + 1)} = \frac{n(-1)^n e^{-\pi} - e^{\pi} n(-1)^n}{\pi(n^2 + 1)} = \frac{n(-1)^n (e^{-\pi} - e^{\pi})}{\pi(n^2 + 1)}$$

$$= -\frac{2n(-1)^n \operatorname{senh}(\pi)}{\pi(n^2 + 1)} \quad \therefore b_n = \frac{-2n(-1)^n \operatorname{senh}(\pi)}{\pi(n^2 + 1)}$$

$$\therefore f(t) = \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2 \operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n \cos nt}{1+n^2} - \frac{n(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^2+1} \right]$$

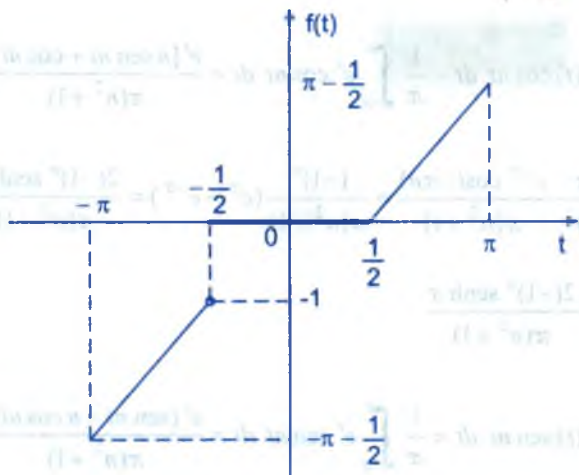
⑥

Hallar la serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -|t - \frac{1}{2}| & ; -\pi \leq t < -\frac{1}{2} \\ 0 & ; -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2} & ; \frac{1}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Solución

Mediante la definición del valor absoluto se tiene:  $f(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2} & ; -\pi \leq t < -\frac{1}{2} \\ 0 & ; -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2} & ; \frac{1}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$



Como  $f(t + 2\pi) = f(t)$  donde  $T = 2\pi$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

La serie de Fourier de la función  $f(t)$  es:  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ , donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{2}\right) dt + 0 + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} (t - 1) dt \right] = \frac{1}{2\pi} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos nt dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} 0 \cdot \cos nt dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos nt dt \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos nt \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos nt \, dt \right] = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} nt \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} 0 \cdot \operatorname{sen} nt \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \left(t - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} nt \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} nt \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \left(t - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} nt \, dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{2}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n} \cos \frac{n}{2} - \frac{2(-1)^n}{n} \right]$$

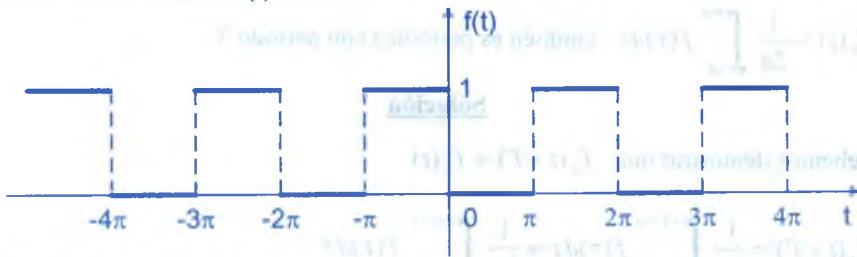
$$b_n = \frac{1}{\pi n} \left[ -\frac{2}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) + \cos\left(\frac{n}{2}\right) - 2(-1)^n \right]$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi} - 1 \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) \cos nt + \frac{1}{n} \left( -\frac{2}{n} \operatorname{sen} \frac{n}{2} + \cos \frac{n}{2} - 2(-1)^n \right) \right]$$

- 7) Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t)$  definida por  $f(t) = 1$ , para  $-\pi < t < 0$ ,  $f(t) = 0$ ,  $0 < t < \pi$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

### Solución

Graficando la función  $f(t)$  se tiene:



La serie de Fourier de la función  $f(t)$  se expresa en la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \text{ donde}$$



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(t) dt + \int_0^{\pi} f(t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 dt + 0 \right] = \frac{1}{\pi} [0 + \pi] = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \cos nt dt + \int_0^{\pi} 0 \cdot \cos nt dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nt dt = \frac{\sin nt}{nt} \Big|_{-\pi}^0 = 0 + \frac{\sin nt}{nt} = 0 \Rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(t) \sin nt dt + \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos nt}{n} \right] \Big|_{-\pi}^0 = -\frac{1}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\text{Luego } b_{2n-1} = -\frac{2}{(2n-1)\pi} \quad \therefore f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

8 Si  $f(t)$  es una función periódica de  $t$ , con periodo  $T$  e integrable, demostrar que

$$f_a(t) = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(\tau) d\tau, \text{ también es periódica con periodo } T.$$

### Solución

Debemos demostrar que  $f_a(t+T) = f_a(t)$

$$f_a(t+T) = \frac{1}{2a} \int_{t+T-a}^{t+T+a} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_{t-a+T}^{t+a+T} f(\tau) d\tau$$

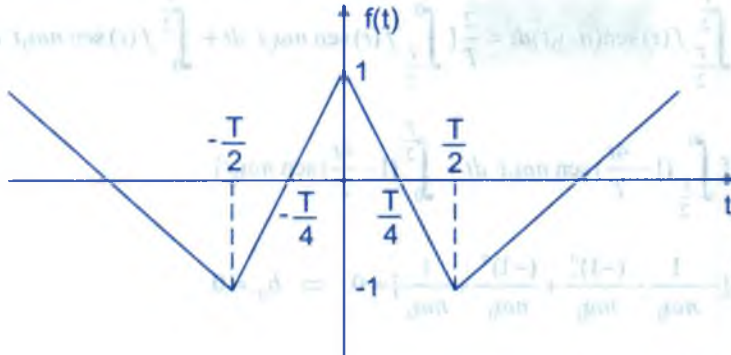
ahora usando el hecho de que para cualquier función periódica de  $t$  con periodo  $T$ , se

$$\text{cumple que: } \int_{\alpha+t}^{\beta+t} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt, \text{ entonces tenemos que:}$$

$$f_a(t+T) = \frac{1}{2a} \int_{t-a+T}^{t+a+T} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(\tau) d\tau = f_a(t)$$

de donde  $f_a(t+T) = f_a(t)$  L.q.q.d

- 9 Encontrar la serie de Fourier para la función cuya forma de onda se muestra en la figura.



### Solución

La regla de correspondencia de la gráfica de  $f(t)$  es:  $f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T}; & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T}; & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(1 + \frac{4t}{T}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{4t}{T}\right) dt \right] = \frac{2}{T} \left[ \left(t + \frac{2t^2}{T}\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \left(t - \frac{2t^2}{T}\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ 0 - \left(-\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) + \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\right) - 0 \right] = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(1 + \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \cos(n\omega_0 t) dt \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \frac{4}{n^2 \omega_0^2 T} - \frac{4(-1)^n}{n^2 \omega_0^2 T} + \frac{4(-1)^n}{n^2 \omega_0^2 T} + \frac{4}{n^2 \omega_0^2 T} \right] = 16 \left[ \frac{1}{n^2 \omega_0^2 T^2} - \frac{(-1)^n}{n^2 \omega_0^2 T^2} \right] = \frac{16}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{8}{n^2 \pi^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \therefore a_{2n-1} = \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ -\frac{1}{n\omega_0} - \frac{(-1)^n}{n\omega_0} + \frac{(-1)^n}{n\omega_0} + \frac{1}{n\omega_0} \right] = 0 \Rightarrow b_n = 0$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos(2n-1)\omega_0 t$$

10

Encontrar la suma de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

### Solución

Utilizando la serie de Fourier de la función  $f(t)$  del ejercicio (9), es decir:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T} & ; -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T} & ; 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1$$

como  $f(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\omega_0 t}{(2n-1)^2}$ , para  $t=0$

$$f(0) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- 11 Utilizar el teorema de PARSEVAL, para probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  utilizando el problema (4) de 14.5.

**Solución**

Se trata de la función  $f(t)$  dada por:  $f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1; & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$

el desarrollo en serie de Fourier es:  $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)t}{2n-1}$

por el teorema PARSEVAL se tiene:  $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

$$\frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f^2(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(2n-1)^2 \pi^2}$$

$$\frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right] = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{T} \left[ \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right] = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- 12 Integrar la serie de Fourier de  $f(t) = t^2$  para obtener  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{sen } nt}{n^3} = \frac{1}{12} (t^2 - \pi)t$  y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

**Solución**

En la parte 14.12 se ha calculado la serie de Fourier de  $f(t) = t^2$ , es decir:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}, \text{ integrando se tiene:}$$

$$\int_0^x t^2 dt = \int_0^x \frac{\pi^2}{3} dt + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_0^x \cos nt dt \Rightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx, \quad (11)$$

de donde 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nt}{n^3} = \frac{1}{12} (t^3 - \pi^2 t) = \frac{t}{12} (t^2 - \pi^2)$$

ahora aplicamos el teorema de Parseval 
$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = 0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [0^2 + (\frac{4(-1)^n}{n^3})^2]$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{9} (t^3 - \pi^2 t)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^6} \Rightarrow \frac{1}{18\pi} [\frac{t^7}{7} - \frac{2\pi^2 t^5}{5} + \frac{\pi^4 t^3}{3}] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

$$\frac{16\pi^6}{18\pi(105)} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

(13)

De un conjunto infinito de funciones reales  $\{\phi_n(t)\}_{n \geq 1}$  se dice que es un conjunto

ortonormal en el intervalo  $\langle a, b \rangle$  si  $\int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) dt = \delta_{mn}$ , donde  $\delta_{mn}$  es la función Delta de Kronecker. Sea  $f(t)$  una función definida en el intervalo  $\langle a, b \rangle$  y si se supone

que  $f(t)$  se puede representar como  $f(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \dots + c_n \phi_n(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$

en el intervalo  $\langle a, b \rangle$ , donde los  $c_n$  son constantes. Demostrar  $c_n = \int_a^b f(t) \phi_n(t) dt$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Los coeficientes  $c_n$  se denominan coeficientes de Fourier de  $f(t)$  con respecto al conjunto ortonormal  $\{\phi_n(t)\}$ .

### Solución

Como  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$ , multiplicamos ambos miembros de la igualdad por  $\phi_m(t)$ :

$f(t) \phi_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \phi_m(t)$ , al integrar en el intervalo de  $\langle a, b \rangle$  se tiene:



$$\int_a^b f(t)\phi_m(t)dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \phi_m(t)dt, \text{ donde } n = 1, 2, 3, \dots \text{ y } m = 1, 2, 3, \dots$$

haciendo  $m = 1$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\phi_1(t)dt &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)\phi_1(t)dt = \int_a^b (c_1\phi_1(t)\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)\phi_1(t) + \dots)dt \\ &= c_1 + c_2(0) + \dots + c_n(0) + \dots = c_1 \end{aligned}$$

para  $m = 2$ , se tiene:

$$\int_a^b f(t)\phi_2(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_2(t)dt, \text{ haciendo el mismo análisis}$$

$$\int_a^b f(t)\phi_2(t)dt = 0 + c_2 + 0 + \dots = c_2$$

$$\text{para } m = n, \text{ se tiene: } \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_n(t)dt = 0 + 0 + \dots + c_n + \dots = c_n$$

$$\therefore c_n = \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt$$

14 Si  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$  se aproxima por  $f_k(t) = \sum_{n=1}^k c_n \phi_n(t)$ . Demostrar que el error

cuadrático medio  $\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - f_k(t)]^2 dt$ , es mínimo.

### Solución

Llamemos  $E_k$  al error cuadrático medio, es decir:

$$E_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - f_k(t)]^2 dt \quad \dots (1)$$

reemplazando el valor de  $f_k(t) = \sum_{n=1}^k c_n \phi_n(t)$  en (1)

$$E_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=1}^k c_n \phi_n(t)]^2 dt, \text{ derivando con respecto a } c_n$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial c_n} = \frac{2}{b-a} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=1}^k c_n \phi_n(t)] (-\phi_n(t)) dt$$

$$= \frac{2}{b-a} \int_a^b [-\sum_{n=1}^k \phi_n(t) f(t) + \sum_{n=1}^k c_n \phi_n(t) \sum_{n=1}^k \phi_n(t)] dt$$

$$= \frac{2}{b-a} \int_a^b [\sum_{n=1}^k c_n \phi_n^2(t) - \sum_{n=1}^k c_n \phi_n^2(t)] dt = 0, \text{ L.q.q.d.}$$

15

Demostrar que si  $c_n$  son los coeficientes de Fourier de  $f(t)$  con respecto al conjunto ortonormal  $\{\phi_n(t)\}$ , entonces  $\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^k c_n^2$ . Este resultado se conoce como la identidad de PARSEVAL.

### Solución

Como  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t)$ , multiplicando por si mismo

$$[f(t)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \phi_n^2(t)$$

integrando ambos miembros en el intervalo  $\langle a, b \rangle$

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \phi_n^2(t) dt, \text{ de donde } \int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \phi_n^2(t) dt$$

y como  $\int_a^b \phi_n^2(t) dt = \delta_{nn} = 1$ , entonces se tiene:  $\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ , L.q.q.d.

## 14.14. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1

Hallar la serie de Fourier de la función:  $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t, & 1 \leq t \leq 4 \end{cases}$ ,  $f(t+4) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

- ② Si  $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2-t, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$  y  $f(t+3) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$ . Hallar su serie de Fourier y graficar la función.
- ③ Si  $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \leq 4 \end{cases}$  y  $f(t+4) = f(t)$ . Hallar su serie de Fourier y graficar la función.
- ④ Si  $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \leq 3 \\ -1, & 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$  y  $f(t+5) = f(t)$ . Hallar su serie de Fourier y graficar la función.
- ⑤  $f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t \leq 2 \\ -3, & 2 < t < 4 \\ 1, & 4 \leq t \leq 7 \end{cases}$  y  $f(t+7) = f(t)$ . Hallar su serie de Fourier y graficar la función.
- ⑥ Si  $f(t) = \begin{cases} 0, & -c < t < 0 \\ c-t, & 0 < t < c \end{cases}$  y  $f(t+2c) = f(t)$ . Hallar su serie de Fourier y graficar.
- ⑦ Si  $f(t) = \begin{cases} 0, & -c < t < 0 \\ (c-t)^2, & 0 < t < c \end{cases}$  y  $f(t+2c) = f(t)$ . Hallar su serie de Fourier y graficar.
- ⑧ Si  $f(t) = \begin{cases} 3\pi+2t, & -\pi < t < 0 \\ \pi+2t, & 0 < t < \pi \end{cases}$  y  $f(t+2\pi) = f(t)$ . Halle la serie de Fourier y graficar.
- ⑨ Si  $f(t) = \begin{cases} t(c+t), & -c < t < 0 \\ (c-t)^2, & 0 < t < c \end{cases}$  y  $f(t+2c) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar.
- ⑩ Si  $f(t) = \begin{cases} t+1, & -2 < t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$  y  $f(t+4) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar.
- ⑪ Si  $f(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$  y  $f(t+2\pi) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar la función.
- ⑫ Si  $f(t) = \begin{cases} 0, & -c < t < 0 \\ e^{-t}, & 0 < t < c \end{cases}$  y  $f(t+2c) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar.

13 Si  $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ t^2, & 0 < t < \pi \end{cases}$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar.

14 Si  $f(t) = \begin{cases} \frac{-\pi - t}{2}, & -\pi < t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ \frac{\pi - t}{2}, & 0 < t < \pi \end{cases}$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar.

15 Si  $f(t) = \begin{cases} -\pi - t, & -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \\ t, & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar.

16 Hallar la serie de Fourier para la función  $f(t) = t - [|t|]$

17 Si  $f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi < t < 0 \\ \pi - t, & 0 < t < \pi \end{cases}$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ . Hallar su serie de Fourier y graficar.

18 Si  $f(t) = \begin{cases} t, & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar.

19 Si  $f(t) = \begin{cases} t^2, & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ . Halle su serie de Fourier y graficar.

20 Hallar los coeficientes de Fourier y encontrar la serie de Fourier para la función  $F(t) = |A \operatorname{sen} \omega_0 t|$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_0 = \alpha$ .

21 Si  $f(t) = 1 - 2t^2 - t^4$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , halle la serie de Fourier y con el resultado obtenido

sumar la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$  (aplicando PARSEVAL).

22) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = \cosh(kt)$  para  $0 < t < c$  y hallar la serie para  $t = \frac{c}{2}$

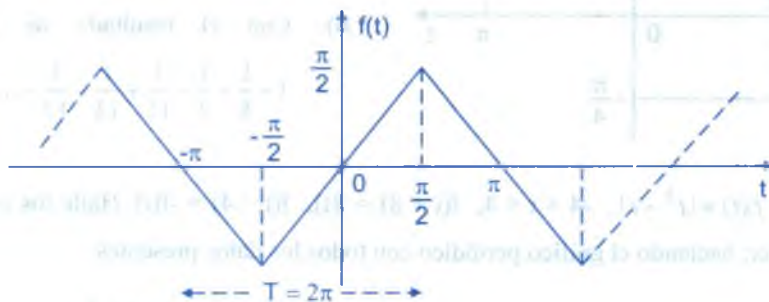
23) Si  $f(t)$  es una función periódica integral, con periodo  $T$ , demostrar que  $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)(\frac{T}{2}-t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n\omega_0}$  donde  $b_n$  es un coeficiente de Fourier de  $f(t)$  y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ (sug. Desarrollar } \frac{T}{2}-t, \text{ para } 0 < t < T \text{ en serie de Fourier).}$$

24) Sean  $f(t)$  y  $g(t)$  funciones continuas por tramos con periodo  $T$  y sean  $a_n, b_n$  y  $\alpha_n, \beta_n$  los respectivos coeficientes de Fourier de  $f(t)$  y  $g(t)$ , demostrar que

$$\frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)dt = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

25) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t)$  dado por el gráfico, estudiar la convergencia puntual en  $[-3\pi, 3\pi]$



26) Halle la serie de Fourier de  $f(t) = t^2 - t$ ,  $-1 < t < 1$ , por evaluación directa, graficar.

27) Desarrollar en serie de Fourier la función definida por:  $f(t) = \begin{cases} -2t, & -\pi < t < 0 \\ 3t, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ ,  $f(t + 2\pi) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  usando el resultado de este desarrollo, calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$



- 28) Calcular la serie de Fourier de  $f(t) = e^{at}$  en  $-\pi \leq t \leq \pi$  use este resultado para calcular la

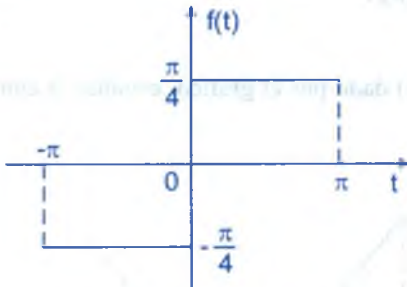
suma de la serie 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{a^2 + n^2}$$

- 29) Si  $f(t) = t^4$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ , halle la serie de Fourier de  $f(t)$  y calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 - \frac{6}{n^2})^2}{n^4}$$
, graficar la función.

- 30) Sea  $f(t) = \begin{cases} t^3 + 1, & -1 \leq t \leq 0 \\ t^3 - 1, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$ , tal que  $f(t-1) = -f(t)$  gráfica y halle la serie de Fourier.

- 31) Si  $f(t)$  esta dado por el gráfico adjunto:



- a) Halle su serie de Fourier de la función  $f(t)$ .

- b) Con el resultado de (a) verificar

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \dots = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

- 32) Sea  $f(t) = |t^3 - t|$ ,  $-4 < t < 4$ ,  $f(t+8) = f(t)$ ,  $f(t-4) = -f(t)$ . Halle los coeficientes de Fourier, haciendo el gráfico periódico con todos los datos presentes.

- 33) Hallar la serie de Fourier de  $f(t)$  dado por:  $f(t) = \begin{cases} 1, & 2 < t < 3 \\ 4-t, & 3 < t < 4 \\ t-4, & 4 < t < 5 \\ 1, & 5 < t < 6 \end{cases}$ ,  $f(t+4) = f(t)$ .

- 34) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = \frac{\pi^2 t - t^3}{3}$  en  $-\pi \leq t \leq \pi$  y mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

35) Hallar la serie de Fourier  $f(t) = \begin{cases} \frac{t^2 - \pi t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi \\ -\frac{t^2 - \pi t}{2}, & -\pi \leq t \leq 0 \end{cases}$  y probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ .

36) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = \begin{cases} -\pi - t, & -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \\ t, & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$  al resultado

obtenido aplicar Teorema de PARSEVAL para sumar la serie.

37) Explícitamente determinar los coeficientes de Fourier de la función  $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < -1 \\ |t|, & |t| < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$  en el intervalo  $[-2, 2]$

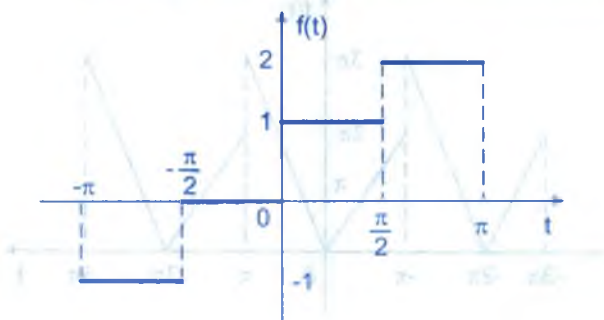
38) Si  $f(t) = \begin{cases} -t, & -3 < t < 0 \\ t, & 0 < t < 3 \end{cases}$ . Determinar los coeficientes de Fourier y hallar la suma de

la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ .

39) Halle la serie de Fourier de  $f(t) = |A \cos \omega_0 t|$

40)  $f(t)$  esta dado por el gráfico adjunto, halle su serie de Fourier de  $f(t)$  y sumar la serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2}$$



41) Si  $f(t) = |t^2 - 1|$ ,  $-2 < t < 2$ ,  $f(t - 4) = -f(t)$ , Graficar  $f(t)$  y calcular la serie de Fourier de  $f(t)$ .

42) Demostrar que si  $F(t)$  y  $G(t)$  son continuas por tramos en  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$  y periódicas con

periodo  $T$ , entonces la función definida por  $H(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t - \mu)G(\mu)d\mu$ , también es

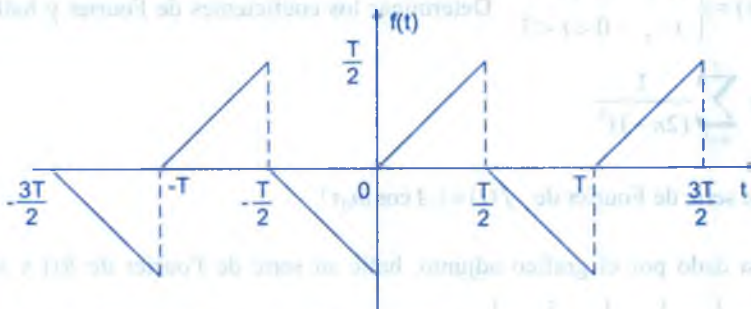
una función periódica.

43) a) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = \cos \alpha t$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ , cualquiera)

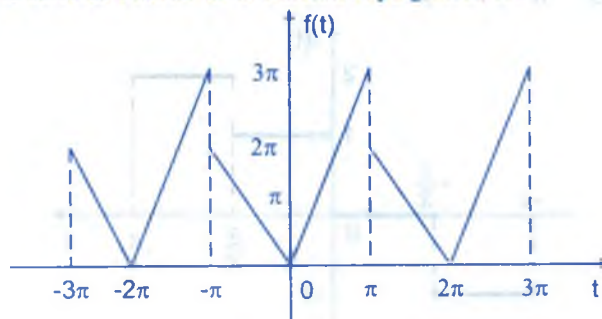
b) Hallar  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - \alpha^2)^2}$  c) Determinar:  $\text{ctg}(\alpha\pi)$

d) Determinar  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - \alpha^2)^2}$  e) Calcular  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

44) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t)$  cuya función gráfica es:



45) a) Hallar la serie de Fourier de la función cuya gráfica es:

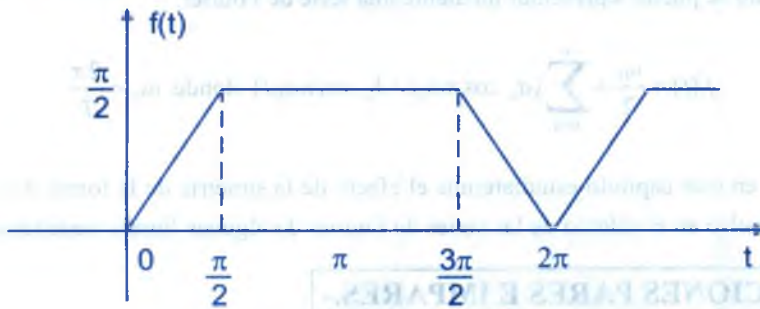


b) Aplicando el teorema de PARSEVAL hallar la suma de la serie correspondiente.

- 46) Si  $f(t + 2\pi) = f(t)$ ,  $\forall t$  y  $F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt$ . Demostrar que:  $F(x)$  es periódica con periodo  $2\pi$ , donde  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$

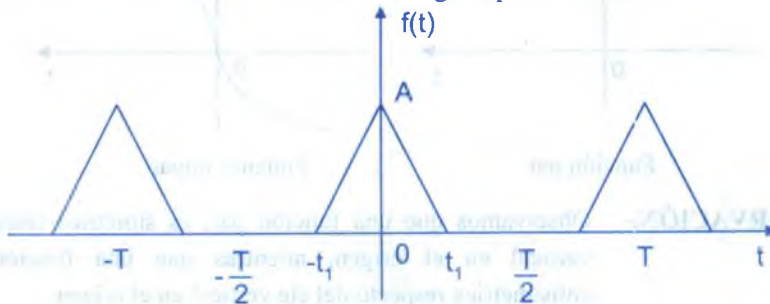
- 47) Dado  $\frac{t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\text{sen } nt}{n}$ ,  $-\pi < t < \pi$ , usando integración probar que:
- $$\frac{t^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2} \text{ y que: } \frac{t^3}{12} - \frac{\pi^2 t}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{sen } nt}{n^3}, \text{ para } -\pi < t < \pi$$

- 48) Hallar la serie de Fourier de  $f(t)$  representado por el gráfico adjunto:



- 49) Sea  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función seccionalmente continua con periodo  $2\pi$  y supongamos que  $F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \text{sen } nt)$  y sea  $F(t + \pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \text{sen } nt)$ , probar que:  $A_n = (-1)^n a_n$ ,  $B_n = (-1)^n b_n$

- 50) Encontrar la serie de Fourier de onda de la figura, por diferenciación.



## CAPÍTULO XV

### 15. SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES: PARES, IMPARES, SIMETRÍA DE MEDIA ONDA, CUARTO DE ONDA PAR Y CUARTO DE ONDA IMPAR.-

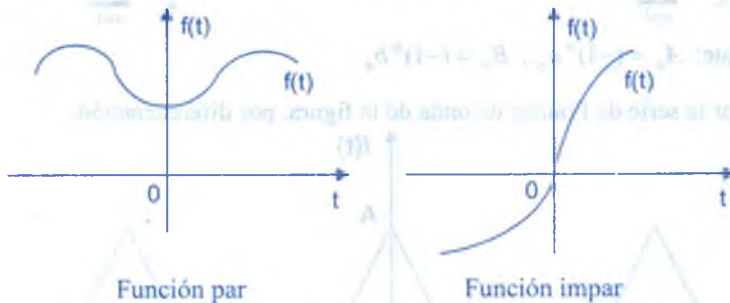
En el capítulo XIV se ha estudiado que cualquier función periódica  $f(t)$  con periodo  $T$  que satisface la condición de ser continua por tramos e integrable sobre cualquier intervalo se puede representar mediante una serie de Fourier.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad \text{donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Ahora en este capítulo estudiaremos el efecto de la simetría de la forma de onda y el uso del impulso en el cálculo de las series de Fourier de algunas formas ondulatorias.

#### 15.1. FUNCIONES PARES E IMPARES.-

Diremos que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es par si satisface la condición  $f(-t) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  y es impar si satisface la condición  $f(-t) = -f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .



**OBSERVACIÓN.-** Observamos que una función par, es simétrica respecto del eje vertical en el origen, mientras que una función impar es antisimétrica respecto del eje vertical en el origen.



## 15.2. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES PARES E IMPARES.-

- ① Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones pares entonces  $f \cdot g$  es función par.

### Demostración

Sea  $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ , por demostrar que  $h(t)$  es función par

$$h(-t) = f(-t) \cdot g(-t) = f(t) \cdot g(t) = h(t) \text{ por lo tanto}$$

como  $h(-t) = h(t)$  entonces  $f(t) \cdot g(t)$  es función par.

- ② Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones impares entonces  $f \cdot g$  es función par.

### Demostración

$f, g$  son funciones impares  $\Rightarrow f(-t) = -f(t)$  y  $g(-t) = -g(t)$

sea  $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ , por demostrar que  $h(t)$  es función par

$$h(-t) = f(-t) \cdot g(-t) = (-f(t)) \cdot (-g(t)) = f(t) \cdot g(t) = h(t)$$

como  $h(-t) = h(t)$  entonces  $f(t) \cdot g(t)$  es función par

- ③ Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función par y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función impar entonces  $f \cdot g$  es una función impar.

### Demostración

Como  $f$  es una función par, entonces  $f(-t) = f(t)$  y como  $g$  es una función impar, entonces  $g(-t) = -g(t)$ .

Sea  $h(t) = f(t) \cdot g(t)$  por demostrar que  $h(t)$  es función impar.

$$h(-t) = f(-t) \cdot g(-t) = f(t) \cdot (-g(t)) = -f(t) \cdot g(t) = -h(t)$$

como  $h(-t) = -h(t)$ , entonces  $f(t) \cdot g(t)$  es función impar

- ④ Toda función  $f(t)$ , se puede expresar como la suma de dos funciones componentes, de las cuales la una es par y la otra impar.

### Demostración

Se conoce que cualquier función  $f(t)$  se puede expresar así:

$$f(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(-t) + \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}f(-t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \dots (1)$$

$$\text{Sean } \begin{cases} f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \\ f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \end{cases} \dots (2)$$

$$\text{Donde } f_e(-t) = \frac{1}{2}[f(-t) + f(t)] = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] = f_e(t)$$

Por lo tanto  $f_e(t)$  es función par

$$f_o(-t) = \frac{1}{2}[f(-t) - f(t)] = -\frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] = -f_o(t)$$

por lo tanto  $f_o(t)$  es función impar, entonces  $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ , donde  $f_e(t)$  es la componente par y  $f_o(t)$  es la componente impar de la función  $f(t)$ .

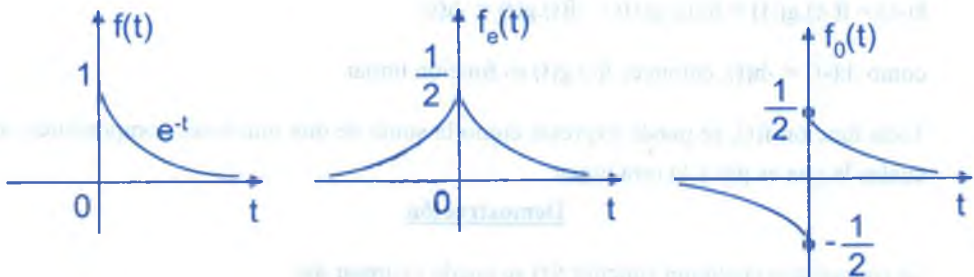
**Ejemplo.-** La función  $f(t) = e^t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \cosh t + \sinh t$

$$\therefore f(t) = e^t = \cosh t + \sinh t$$

**Ejemplo.-** Hallar las componente par e impar de la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

**Solución**



$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow f(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ e^t, & t < 0 \end{cases}$$

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t}; & t > 0 \\ \frac{1}{2}e^t; & t < 0 \end{cases}; \quad f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t}; & t > 0 \\ -\frac{1}{2}e^t; & t < 0 \end{cases}$$

Luego las componentes par e impar de la función  $f(t)$  son  $f_e(t)$  y  $f_o(t)$  que se muestran en la figura.

⑤ Si la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es par, entonces se cumple:  $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$

### Solución

Aplicando la propiedad de integral definida:  $\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt \dots (1)$

haciendo  $t = -x$ , en la primera integral

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-x)(-dx) = - \int_a^0 f(-x)dx = \int_0^a f(-x)dx$$

como  $f(t)$  es par, es decir  $f(-x) = f(x)$ , de donde

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt \dots (2)$$

al reemplazar (2) en (1) se tiene:

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

$$\therefore \int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

- 6 Si la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es impar, entonces se cumple  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$

**Demostración**

Aplicando la propiedad de la integral definida

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \quad \dots (1)$$

como  $f(t)$  es impar entonces  $f(-t) = -f(t)$  ... (2)

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

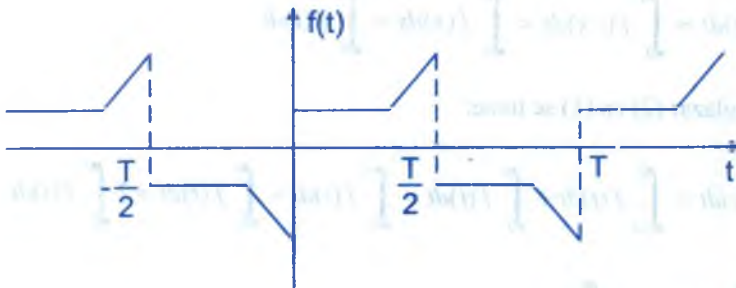
$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 0$$

$$\therefore \int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

**15.3. SIMETRÍA DE MEDIA ONDA.-**

Si la función  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$ , entonces se dice que la función  $f(t)$  tiene simetría de media onda si satisface la condición:  $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$

**OBSERVACIÓN.-** Mostraremos en la figura una forma de onda con simetría de media ondas se debe observar que la porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva desplazado horizontalmente medio periodo.



**NOTA.-** Simetría de media onda no es par ni impar.

**TEOREMA.-** Si una función negativa  $f(t)$  tiene simetría de media onda. Demostrar que:

$$f(t) = -f\left(t - \frac{1}{2}T\right)$$

**Demostración**

Como  $f(t)$  tiene simetría de media onda, entonces se tiene:  $f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right)$  ... (1)

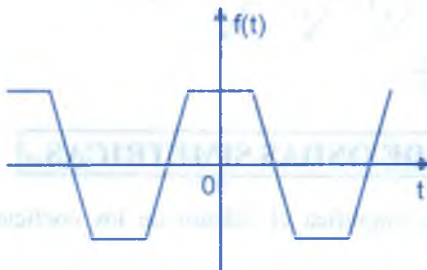
como  $f(t)$  es periódica con periodo  $T$ , entonces:

$$f\left(t - \frac{1}{2}T\right) = f\left(t + T - \frac{1}{2}T\right) = f\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad \dots (2)$$

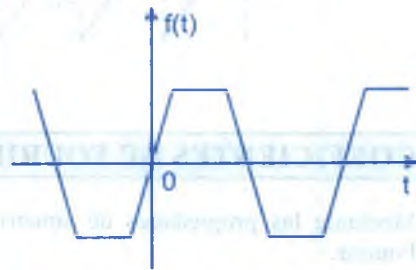
por lo tanto de (1) y (2) se tiene:  $f(t) = -f\left(t - \frac{1}{2}T\right)$

### 15.4. SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA.-

Si la función periódica  $f(t)$  tiene simetría de media onda y además es una función par o impar, entonces se dice que  $f(t)$  tiene una simetría de cuarto de onda par ó impar mediante los siguientes gráficos mostraremos las formas de ondas con simetría de cuarto de onda.



Simetría de cuarto de onda par



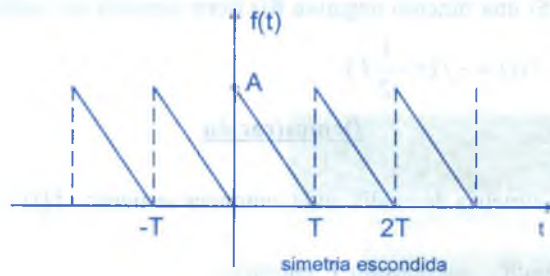
Simetría de cuarto de onda impar

### 15.5. SIMETRÍA ESCONDIDA.-

Con frecuencia la simetría de una función periódica no es evidente debido a la presencia de un término constante. Esto lo ilustraremos en el ejemplo siguiente.

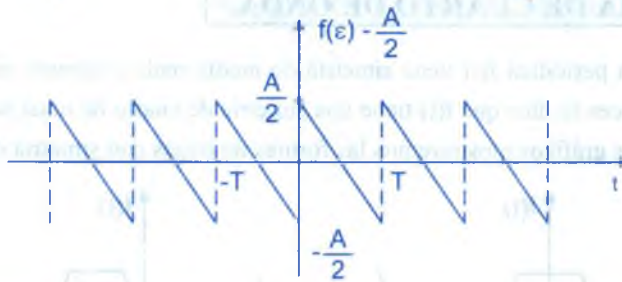
**Ejemplo.-** De la figura mostrada, demostrar que si se construye una nueva función sustrayendo de  $f(t)$  el término constante  $\frac{A}{2}$ , la nueva función es una función impar.





### Solución

La sustracción del término constante  $\frac{A}{2}$  de  $f(t)$ , lo que hace es desplazar el eje horizontal hacia arriba en  $\frac{A}{2}$  y resulta la nueva función  $g(t) = f(t) - \frac{A}{2}$  es una función impar.



## 15.6. COEFICIENTES DE FOURIER DE ONDAS SIMETRICAS.-

Mediante las propiedades de simetría se simplifica el cálculo de los coeficientes de Fourier.

**TEOREMA.-** Si  $f(t)$  es una función par y periódica con periodo  $T$ . Demostrar que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t, \text{ donde } a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \text{ y } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

### Demostración

La serie de Fourier de la función  $f(t)$  es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t) \quad \dots (1)$$

donde  $a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$ ,  $b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

como  $\sin \omega_0 t$  es impar y  $f(t)$  es par entonces  $f(t) \sin n\omega_0 t$  es función impar (por la

propiedad 3 de 15.2), luego  $\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt = 0$ , por la propiedad 6 de 15.2

por lo tanto se tiene:  $b_n = 0$  ... (2)

Como  $\cos n\omega_0 t$  es par y  $f(t)$  es par entonces  $f(t) \cos n\omega_0 t$  es par, luego

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (\text{por la propiedad 5 de 15.2})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad \dots (3)$$

al reemplazar (2) y (3) en (1) se obtiene:

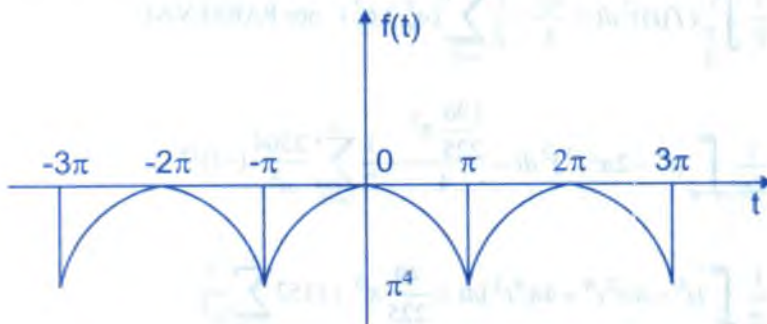
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad \text{y} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

### Ejemplo.-

- a) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ ,  $f(t+2\pi) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$

### Solución

Construyendo la gráfica de la función  $f(t)$ .



$f(t)$  es una función par, entonces la serie de Fourier es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t^4 - 2\pi^2 t^2) \cos nt \, dt$$

integrando sucesivamente por partes se tiene:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t^4 - 2\pi^2 t^2) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{24\pi(-1)^n}{n^4} \right) = -\frac{48(-1)^n}{n^4}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t^4 - 2\pi^2 t^2) \, dt = -\frac{14}{15} \pi^4$$

como  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ , entonces :  $f(t) = -\frac{7\pi^4}{15} - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nt$

- b) De la serie de Fourier de la parte (a) calcule la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$  aplicando el teorema de PARSEVAL.

### Solución

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 \, dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{por PARSEVAL}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^4 - 2\pi^2 t^2)^2 \, dt = \frac{196}{225} \pi^8 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2304}{n^8} (-1)^{2n}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (t^8 - 4\pi^2 t^6 + 4\pi^4 t^4) \, dt = \frac{49}{225} \pi^8 + 1152 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$$

$$\frac{107}{315} \pi^8 = \frac{49}{225} \pi^8 + 1152 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} \Rightarrow \frac{535-343}{1575} \pi^8 = 1152 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$$

$$1152 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{192}{1575} \pi^8, \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

- c) De la serie de Fourier de la parte (a), calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

### Solución

En la serie de Fourier  $f(t) = -\frac{7\pi^4}{15} - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^4}$

Hacemos  $t = \pi$ ;  $-\pi^4 = -\frac{7\pi^4}{15} - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^4}$

$$48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^4} = \pi^4 - \frac{7\pi^4}{15} = \frac{8\pi^4}{15}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

- d) Hallar la serie de Fourier de la función  $g(t) = t(t^2 - \pi^2)$  mediante la función  $f(t)$  de la parte (a).

### Solución

Como  $f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 4\pi^2 t$ , luego

$f'(t) = 4(t^3 - \pi^2 t)$  es continua en  $[-\pi, \pi]$ , además

$f(-\pi) = f(\pi) = -\pi^4$ ;  $f'(t)$  es continua por tramos

$$f(t) = -\frac{7\pi^4}{15} - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^4}, \text{ derivando}$$

$$f'(t) = -48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\operatorname{sen} nt)}{n^3} = 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$$

$$4(t^3 - \pi^2 t) = 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3} \Rightarrow t^3 - \pi^2 t = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$$

$$\therefore g(t) = t(t^2 - \pi^2) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}$$

- e) Aplicando el teorema de PARSEVAL a la serie de Fourier de la parte (d) calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

**Solución**

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{por Parseval}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^3 - \pi^2 t)^2 dt = 0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n 12}{n^3} \right)^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{144}{n^3}$$

$$72 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2) dt = \frac{8\pi^6}{105} \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^6}{945}$$

- f) Hallar la serie de Fourier de la función  $g(t) = \frac{t}{15}(3t^4 - 10\pi^2 t^2 + 7\pi^4)$  mediante la función  $f(t)$  de la parte (a).

**Solución**

$$\text{La serie de Fourier de } f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2 = -\frac{7\pi^4}{15} - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^4}, \text{ integrando}$$

$$\int_0^{\pi} (t^4 - 2\pi^2 t^2) dt = -\frac{7\pi^4}{15} t - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \int_0^{\pi} \cos nt dt$$



$$\frac{t^5}{5} - \frac{2\pi^2 t^3}{3} + \frac{7\pi^4 t}{15} = -48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^5}$$

$$\frac{t}{15} (3t^4 - 10\pi^2 t + 7\pi^4) = -48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^5}$$

**TEOREMA 2.-** Si  $f(t)$  es una función impar y periódica con periodo  $T$ , demostrar que la serie de Fourier de  $f(t)$  es  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$ , donde

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

### Demostración

La serie de Fourier de la función  $f(t)$  es:  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \dots (1)$

$$\text{donde } a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$$

como  $f(t)$  es impar y  $\cos n\omega_0 t$  es par entonces  $f(t) \cos n\omega_0 t$  es impar, entonces

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (\text{por la propiedad 5 de 15.2})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{T} (0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \dots (2)$$

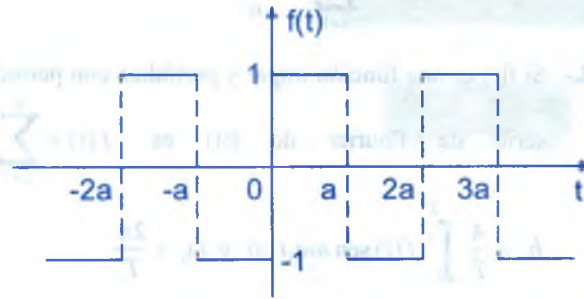
como  $f(t)$  es impar y  $\operatorname{sen} n\omega_0 t$  es impar entonces  $f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t$  es par entonces

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \quad \dots (3)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = 0 \quad \text{puesto que } f(t) \text{ es impar por lo tanto de (2) y (3) en (1) se tiene :}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \quad \text{donde} \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$$

**Ejemplo.-** Hallar la serie de Fourier de la función tal que cuyo gráfico es :



### Solución

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < a \\ -1 & \text{si } -a < t < 0 \end{cases}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}, \quad f(t+2a) = f(t)$$

como  $f(t)$  es impar y  $f(t+2a) = f(t)$  es periódica entonces, la serie de Fourier de la función

$$f(t) \text{ es: } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{a}, \quad \text{donde}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{a} \, dt = \frac{2}{a} \int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{a} \, dt$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{a} \Big|_0^a = -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi} \quad \text{por lo tanto} \quad f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{a} t}{2n-1}$$

aplicando el teorema de PARSEVAL se tiene:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \text{ por Parseval}$$

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f^2(t) dt = 0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2n-1)} \Rightarrow \frac{1}{2a} \left( \int_{-a}^0 dt + \int_0^a dt \right) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi^2}{8}$$

**TEOREMA 3.-** Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica  $f(t)$  que tiene simetría de media onda, contiene armónicas impares solamente.

#### Demostración

La serie de Fourier de la función  $f(t)$  es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{ sen } n\omega_0 t), \text{ donde}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos n\omega_0 t \, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

cambiando  $t$  por  $(t - \frac{1}{2}T)$  en la primera integral, se tiene :

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t - \frac{1}{2}T\right) \cos n\omega_0 \left(t - \frac{1}{2}T\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right] \dots (1)$$

como  $f(t)$  tiene simetría de media onda, entonces se tiene :

$$f(t) = f\left(t - \frac{1}{2}T\right) \text{ y como } \text{sen } n\pi = 0, \text{ entonces}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} -f(t) [\cos n\omega_0 t \cdot \cos n\pi + \text{sen } n\pi \cdot \text{sen } n\omega_0 t] dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T (1 - [-1]^n) f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{2(1 - (-1)^n)}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt, & n \text{ impar} \end{cases}, \text{ en forma similar se demuestra que:}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \text{ para } n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt, & \text{ para } n \text{ impar} \end{cases}$$

**TEOREMA 4.-** Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica  $f(t)$  que tiene simetría de cuarto de onda par, consta solamente de armónicos impares de términos el coseno, es decir:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega_0 t] \quad \text{del} \quad a_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^T f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt$$

#### Demostración

La serie de Fourier de la función  $f(t)$  se tiene:  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)$

como  $f(t)$  tiene simetría de cuarto de onda por  $f(t) = f(-t)$  y  $f(t + \frac{1}{2}T) = -f(t)$  y del teorema 2 y 3 se tiene :

$$\begin{cases} b_n = 0 \\ a_{2n} = 0 \end{cases}, \text{ para todos los valores de } n \text{ incluyendo } a_0$$

$$a_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \cos[(2n-1)\omega_0 t] dt$$

$$= \frac{4}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt + \int_{\frac{T}{4}}^T f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt \right]$$

cambiando la variable  $t$  por  $(t + \frac{1}{2}T)$  en la segunda integral

$$a_{2n-1} = \frac{4}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt + \int_{\frac{T}{4}}^0 f\left(t + \frac{1}{2}T\right) \cos[(2n-1)\omega_0 \left(t + \frac{1}{2}T\right)] dt \right]$$

aplicando la propiedad  $f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right)$ , se tiene :

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \frac{4}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt + \int_{\frac{T}{4}}^0 f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt \right] \\ &= \frac{4}{T} \left[ \int_{\frac{T}{4}}^0 f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt + \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt \right] \\ &= \frac{4}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt \end{aligned}$$

**TEOREMA 5.-** Demostrar que la serie de Fourier de cualquier función periódica  $f(t)$  que tiene simetría de cuarto de onda impar, consta de armónicos impares de términos del seno solamente, es decir :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)\omega_0 t \quad \text{y} \quad b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \sin(2n-1)\omega_0 t \, dt$$

#### Demostración

$$\text{Como } f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$f(t)$  tiene simetría de cuarto de onda impar entonces  $f(-t) = -f(t)$  y  $f\left(t + \frac{1}{2}T\right) = -f(t)$

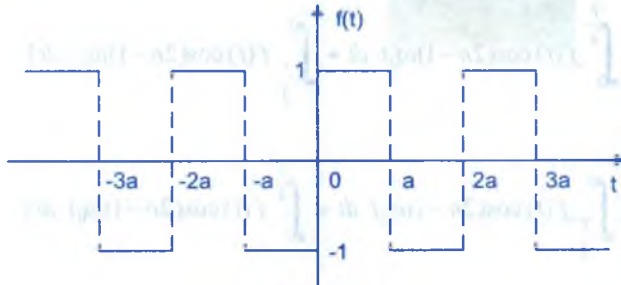
y de los teoremas 2 y 3 se tiene:  $\begin{cases} a_n = 0 \\ b_{2n} = 0 \end{cases}$ , para todos los valores de  $n$  incluyendo  $a_0$



$$b_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t \, dt, \text{ por el mismo criterio del teorema (4) se tiene :}$$

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t \, dt$$

**Ejemplo.-** Encontrar la serie de Fourier de la onda cuadrada que se muestra en la figura



### Solución

La función  $f(t)$  tiene simetría de cuarto de onda impar entonces

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)\omega_0 t], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$$

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t \, dt = \frac{8}{2a} \int_0^{\frac{a}{2}} \operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{a} t \, dt$$

$$= \frac{4}{a} \left( -\frac{a \cos(2n-1)\frac{\pi t}{a}}{\pi(2n-1)} \right) \Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\frac{\pi}{a} t]}{2n-1}, \text{ si aplicamos el teorema de Parseval}$$

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2n-1)^2}$$

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

**15.7. EXPANSIONES DE MEDIO RANGO.-**

Sea  $f(t)$  una función periódica con periodo  $T = 2\ell$  y  $f(-t) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , entonces

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t, \text{ donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\ell}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{\ell}t\right) \quad \dots (1)$$

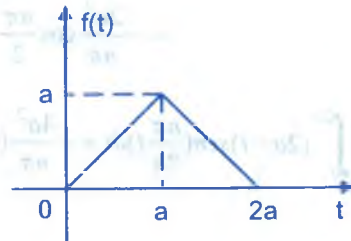
donde  $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{\ell}t\right) dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) dt \quad \dots (2)$

Si  $f(-t) = -f(t)$  entonces  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) \quad \dots (3)$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) dt \quad \dots (4)$$

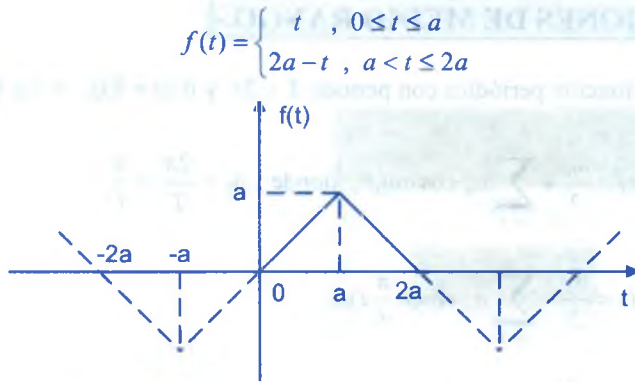
de acuerdo a las expresiones (2) y (4) solo se necesita que la función  $f(t)$  esté definida en el intervalo finito  $[0, \ell]$ , entonces la serie (1) y (3) representan ambas una misma función  $f(t)$  dada en el intervalo  $[0, \ell]$  y fuera de este intervalo la serie (1) representa la extensión periódica par, con  $T = 2\ell$ ; la serie (3) representara la extensión periódica con  $T = 2\ell$ , y las series (1) y (3) se denomina “Expansión De medio Rango” de la función dada  $f(t)$ .

**Ejemplo.-** Hallar la serie de medio rango de  $f(t)$  tal que cuya gráfica es :



**Solución**

La función  $f(t)$  cuya gráfica es dada, tiene por regla de correspondencia.



Extensión periódicamente impar y  $f(t + 4a) = f(t)$ ,  $T = 4a$

Su serie de Fourier es  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2a}\right)$ , donde

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2a}\right) dt = \frac{1}{a} \int_0^{2a} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2a}\right) dt$$

$$= \frac{1}{a} \left[ \int_0^a t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2a}\right) dt + \int_a^{2a} (2a - t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2a}\right) dt \right] \quad \dots (1)$$

$$\int_0^a t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2a}\right) dt = \left[ -\frac{2at}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi t}{2a}\right) + \frac{4a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2a}\right) \right] \Big|_0^a$$

$$= -\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad \dots (2)$$

$$\int_a^{2a} (2a - t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2a}\right) dt = -\frac{4a^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{4a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4a(-1)^n}{n\pi}$$

$$= -\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad \dots (3)$$

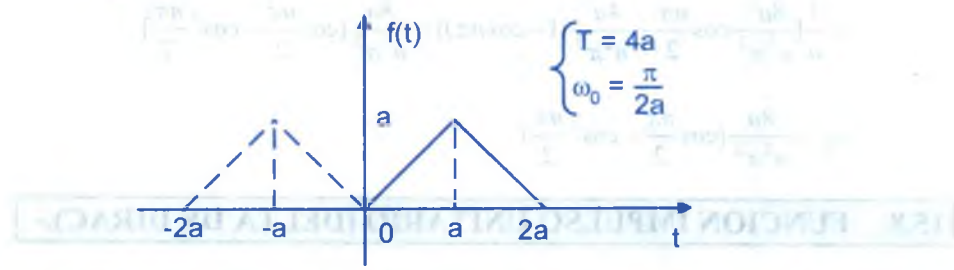
ahora reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$b_n = \frac{1}{a} \left[ -\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{4a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4a(-1)^n}{n\pi} - \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{a} \left( \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{8a}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right)$$

Si  $\left\{ \begin{array}{l} n=1, \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \\ n=2, \operatorname{sen} \pi = 0 \\ n=3, \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1 \Rightarrow b_{2n} = 0, \text{ si } n=1,2,3,\dots \\ n=4, \operatorname{sen} 2\pi = 0 \\ n=5, \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} = 1 \end{array} \right.$   $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = (-1)^n$   
 $b_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{8a}{n^2\pi^2}$

$$f(t) = \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen}(2n-1) \frac{\pi t}{2a} \quad (\text{serie en seno})$$



Extensión periódicamente par, y su serie de Fourier es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left( \frac{n\pi}{2a} t \right), \text{ donde :}$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{2a} f(t) dt = \frac{1}{a} \left[ \int_0^a t dt + \int_a^{2a} (2a-t) dt \right] = \frac{1}{a} \left[ \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right] = a$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}t\right) dt = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}t\right) dt \\
 &= \frac{1}{a} \left[ \int_0^a t \cos\left(\frac{n\pi}{2a}t\right) dt + \int_a^{2a} (2a-t) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}t\right) dt \right] \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^a t \cos\left(\frac{n\pi}{2a}t\right) dt = \frac{2a^2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \quad \dots (2)$$

$$\int_a^{2a} (2a-t) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}t\right) dt = -\frac{4a^2 \cos n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{2a^2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} \quad \dots (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{a} \left[ \frac{2a^2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} - \frac{4a^2 \cos n\pi}{n^2\pi^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2a^2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{a} \left[ \frac{8a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} (1 + \cos n\pi) \right] = \frac{8a}{n^2\pi^2} \left[ \cos \frac{n\pi}{2} - \cos^2 \frac{n\pi}{2} \right] \\
 a_n &= \frac{8a}{n^2\pi^2} \left( \cos \frac{n\pi}{2} - \cos^2 \frac{n\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

## 15.8. FUNCION IMPULSO UNITARIO (DELTA DE DIRAC).-

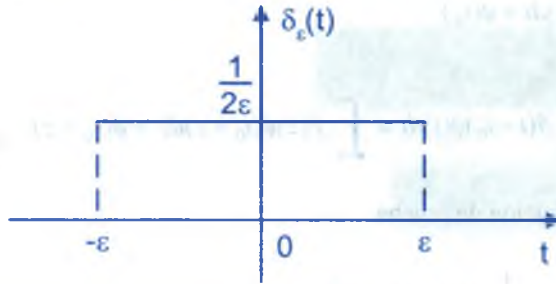
La función impulso unitario  $\delta(t)$ , conocido también como función Delta de Dirac, puede definirse de varias maneras, generalmente se expresa mediante la relación.

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{si } |t| < \varepsilon \\ 0, & \text{si } |t| \geq \varepsilon \end{cases}$$

y la función  $\delta(t)$  queda expresada por :  $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$

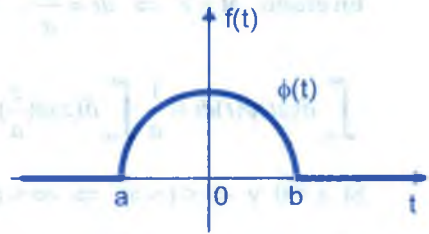


$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(t) dt = \frac{1}{2\varepsilon} t \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} (\varepsilon + \varepsilon) = 1$$



**15.9. ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA  $C_0^\infty$ .-**

Una función de prueba es una función infinitamente diferenciable que se anula fuera de algún intervalo finito abierto  $\langle a, b \rangle$ ; es decir, una función de prueba es una función continua que se anula fuera de algún intervalo finito.



**15.10. EL CONJUNTO DE LAS FUNCIONES LINEALES.-**

Al conjunto de las funciones lineales denotaremos por:

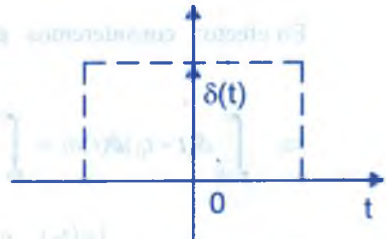
$$D = \{T: C_0^\infty \rightarrow R \subset C / T \text{ es una funcional lineal}\}.$$

Luego la función  $\delta(t)$  se definirá por la relación

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0 \\ \infty, & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \dots (1)$$

y además  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \dots (2)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0) \quad \dots (3)$$



### 15.11. PROPIEDADES.-

$$\textcircled{1} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt = \phi(t_0)$$

En efecto:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\phi(t_0+z)dz = \phi(t_0+z) \Big|_{z=0} = \phi(t_0), \quad (t-t_0 = z)$

Esto es por la función de prueba

$$\textcircled{2} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\phi(0), \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

En efecto:  $at = z \Rightarrow dt = \frac{dz}{a}$ . Si  $a > 0$  y  $-\infty < t < \infty \Rightarrow -\infty < at < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\phi\left(\frac{z}{a}\right)dz = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{z}{a}\right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{a} \phi(0) \quad \dots (\alpha)$$

Si  $a < 0$  y  $-\infty < t < \infty \Rightarrow -\infty < at < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(z)\phi\left(\frac{z}{a}\right)\frac{dz}{a} = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\phi\left(\frac{z}{a}\right)\frac{dz}{a} = -\frac{1}{a} \phi(0) \quad \dots (\beta)$$

Luego de  $(\alpha)$  y  $(\beta)$  se tiene:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\phi(0)$

$$\textcircled{3} \quad \text{Si } g(t) \text{ es continua en } \langle a, b \rangle, \text{ entonces: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)g(t)dt = \begin{cases} g(t_0), & a < t_0 < b \\ 0, & \text{fuera de } \langle a, b \rangle \end{cases}$$

En efecto: consideremos  $\phi(t) = \begin{cases} g(t), & a < t < b \\ 0, & \text{fuera de } \langle a, b \rangle \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt = \int_a^b \delta(t-t_0)g(t)dt \quad \text{por lo tanto} \quad \phi(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)g(t)dt$$

es decir:  $\phi(t_0) = \begin{cases} g(t_0), & a < t_0 < b \\ 0, & \text{fuera de } \langle a, b \rangle \end{cases}$

④ Si  $a < b$ , Demostrar que :  $\int \delta(t-t_0)dt = \begin{cases} 1, & \text{para } a < t_0 < b \\ 0, & \text{para } b < t_0 < a \end{cases}$

En efecto : Haremos la interpretación de la expansión, para esto seleccionaremos la

función de prueba  $\phi(t)$  tal que  $\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } a < t < b \\ 0, & \text{para } b < t < a \end{cases}$

De la propiedad (1) se tiene :

$$\int_a^b \delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt = \phi(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{para } a < t_0 < b \\ 0, & \text{para } b < t_0 < a \end{cases}$$

⑤ Si  $f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$ , donde  $f(t)$  es una función continua en  $t = 0$ , Demostrar que :

a)  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

b)  $\delta(-t) = \delta(t)$

En efecto : como  $f(t)$  es una función continua, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\delta(t)]\phi(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)[f(t)\phi(t)]dt = f(0)\phi(0) \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(0)\delta(t)]\phi(t)dt \end{aligned}$$

puesto que  $\phi(t)$  es una función de prueba arbitraria, se concluye que  $f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$

ahora la propiedad se tiene :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)dt = \frac{1}{|a|} \phi(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(t)\phi(t)dt$$

$$\therefore \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

haciendo  $a = -1$  se tiene:  $\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \delta(t) = \delta(t)$ , por lo tanto  $\delta(t)$  es una función par

**Ejemplo.-**

① Evaluar  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5)e^{4t} \cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right) dt$

**Solución**

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-5)e^{4t} \cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right) dt = \phi(5) \quad \text{donde} \quad \delta(t) = e^{4t} \cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right)$$

por lo tanto  $\phi(5) = 2^{20} \cos n\pi = e^{20}(-1)^n$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5)e^{4t} \cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right) dt = e^{20}(-1)^n$$

②  $\int_2^8 \delta(t-10)e^{-t} dt$

**Solución**

$$\int_2^8 \delta(t-10)e^{-t} dt = 0 \quad \text{puesto que} \quad t_0 = 10 \notin \langle 2, 8 \rangle$$

③  $\int_2^8 \delta(t-7)e^{-t} dt = \phi(7) \quad \text{donde} \quad \phi(t) = e^{-t} = e^{-7}$

### 15.12. DERIVADAS DE LA FUNCIÓN $\delta$ .-

**DEFINICIÓN.-** La derivada  $\delta'(t)$  de la función  $\delta(t)$  está definida por la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\delta(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)dt = -\phi'(0) \quad \text{donde} \quad \delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}, \quad \phi'(0) = \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t=0}$$

calculando la  $n$ -ésima derivada de la función  $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t)\phi(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi''(t)dt = \phi''(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'''(t)\phi(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t)\phi'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi''(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'''(t)dt = -\phi'''(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)dt = (-1)^n \phi^{(n)}(0) \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)dt = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$

**Ejemplo.-** Evaluar  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \left(\frac{1}{a^2t^2 - b^2}\right) dt$

**Solución**

$$\phi(t) = \frac{1}{a^2t^2 - b^2} = \frac{1}{(at-b)(at+b)} = \frac{A}{at-b} + \frac{B}{at+b}$$

$$A = \lim_{t \rightarrow \frac{b}{a}} \frac{1}{at+b} = \frac{1}{2b} \quad ; \quad B = \lim_{t \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{at-b} = \frac{1}{2b}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2b} \left( \frac{1}{at-b} - \frac{1}{at+b} \right) = \frac{1}{2b} \left[ \frac{1}{at-b} - \frac{1}{at+b} \right] \quad \text{derivando}$$

$$\phi'(t) = \frac{1}{2b} \left[ \left( \frac{-a}{(at-b)^2} \right) - \left( \frac{-a}{(at+b)^2} \right) \right] \quad \text{derivando}$$

$$\phi''(t) = \frac{1}{2b} \left[ \frac{1.2a^2}{(at-b)^3} - \frac{1.2a^3}{(at+b)^3} \right] \quad \text{derivando}$$

$$\phi'''(t) = \frac{1}{2b} \left[ \left( \frac{-1.2.3.a^3}{(at-b)^4} \right) - \left( \frac{-1.2.3.a^3}{(at+b)^4} \right) \right] \quad \text{derivando}$$

$$\phi^{(4)}(t) = \frac{1}{2b} \left[ \left( \frac{1.2.3.4.a^4}{(at-b)^5} \right) - \left( \frac{1.2.3.4.a^4}{(at+b)^5} \right) \right] \quad \text{derivando}$$

$$\phi^{(n)}(t) = \frac{1}{2b} \left[ \frac{(-1)^n 1.2.3...n.a^n}{(at-b)^{n+1}} - \frac{(-1)^n (1.2.3...n)a^n}{(at+b)^{n+1}} \right]$$



$$\phi^{(n)}(t) = \frac{1}{2b} \left[ \frac{(-1)^n n! a^n}{(at-b)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n! a^n}{(at+b)^{n+1}} \right]$$

$$\phi^{(n)}(0) = \frac{1}{2b} \left[ \frac{(-1)^n n! a^n}{(-b)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n! a^n}{b^{n+1}} \right] = \frac{1}{2b} \left[ \frac{n! a^n}{b^{n+1}} - \frac{(-1)^n n! a^n}{b^{n+1}} \right]$$

$$= \frac{n! a^n}{2b^{n+2}} [-1 - (-1)^n] = \frac{n! a^n}{2b^{n+2}} [(-1)^{n+1} - 1]$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \phi(t) dt = \frac{n! a^n}{2b^{n+2}} [(-1)^{n+1} - 1]$$

### 15.13. PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS DE LA FUNCIÓN $\delta$ .

① Demostrar que la expresión  $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt$

#### Demostración

La integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt$ , integramos por partes:  $\begin{cases} u = \phi(t) \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \phi'(t) dt \\ v = f(t) \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt = f(t) \phi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt$$

se conoce que la función de prueba  $\phi(t)$  es tal que se anula fuera de algún intervalo, es decir, es cero en  $t = \pm\infty$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt$$

② Si  $f(t)$  es una función continua y diferenciable, Demostrar la regla del producto.

$$[f(t) \cdot \delta(t)]' = f(t) \cdot \delta'(t) + f'(t) \cdot \delta(t)$$

#### Demostración

Aplicando la propiedad (1) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\delta(t)]' \phi(t) dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\delta'(t)] \phi'(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) [f(t)\phi'(t)] dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) [(f(t)\delta(t))' - f'(t)\phi(t)] dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) [f(t)\phi(t)]' dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) [f'(t)\phi(t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) [f(t)\phi(t)] dt + \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t) \cdot f'(t)] \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta'(t) \cdot f(t) + \delta(t) \cdot f'(t)] \phi(t) dt \end{aligned}$$

$$\therefore [f(t)\delta(t)]' = f(t)\delta'(t) + \delta(t)f'(t)$$

3 Demostrar que:  $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

**Demostración**

Por la propiedad (2) se tiene :  $f(t)\delta'(t) = [f(t)\delta(t)]' - f'(t)\delta(t)$  ... (α)

y la propiedad (5) de (15.11) se tiene :

$$f(0)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f'(t)\delta(t) = f'(0)\delta(t)$$

$$[f(0)\delta(t)]' = f(0)\delta'(t)$$

sustituyendo en (α) se obtiene :  $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

4 Demostrar que la función δ es la derivada de la función μ(t), la cual está definida por la

expresión :  $\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)\phi'(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt$

**Demostración**

De la primera propiedad se tiene :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu'(t)\delta(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)\phi'(t) dt = - \int_0^{\infty} \phi'(t) dt = -[\phi(\infty) - \phi(0)] = \phi(0)$$

puesto que  $\phi(\infty) = 0$ . Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu'(t)\phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt \quad \therefore \mu'(t) = \frac{d(\mu(t))}{dt} = \delta(t)$$

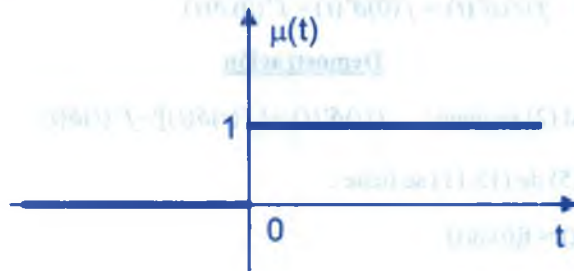
### 15.14. FUNCIÓN ESCALONADA UNITARIA.-

La función generalizada (o función simbólica)  $\mu(t)$  se conoce como la función unitaria de Heeviside ó función escalonada unitaria y es definida por :

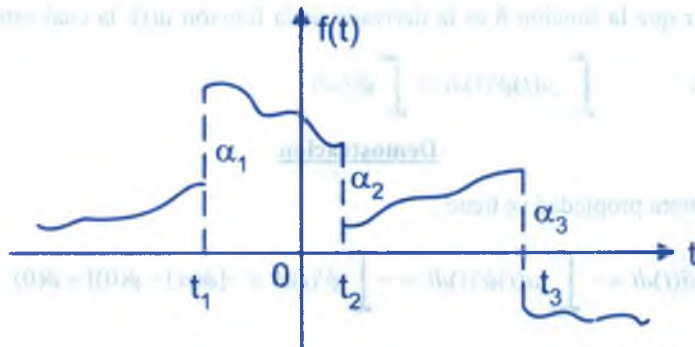
$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ 1, & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

La función  $\mu(t)$  no está definida para  $t = 0$

Observemos que la derivada  $\mu(t)$  vale cero cuando  $t < 0$ , y cuando  $t > 0$  vale :



**PROBLEMA.-** Si  $f(t)$  es una función continua por tramos con discontinuidad súbitas  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , en  $t_1, t_2$  como en la figura y la función  $f'(t)$  está definida en todas partes excepto estas discontinuidades de numero finito encontrar la derivada generalizada de  $f(t)$

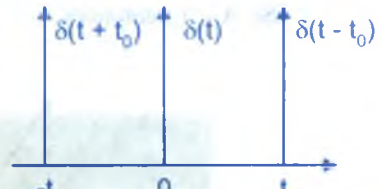


#### Solución

Si  $\alpha_i > 0$ , entonces los impulsos son hacia arriba

Si  $\alpha_i < 0$ , entonces los impulsos son hacia abajo

$$\alpha_i = f(t_i^+) - f(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$$



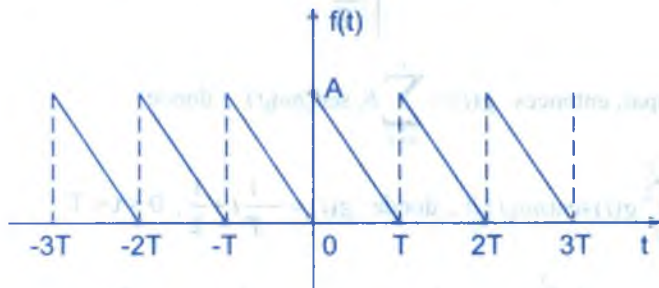
consideremos la función  $g(t) = f(t) - \sum_k \alpha_k \mu(t - t_k)$

$$\text{donde } \mu(t - t_k) = \begin{cases} 1, & \text{para } t > t_k \\ 0, & \text{para } t < t_k \end{cases}$$

obviamente la función  $g(t)$  es continua en todas partes y su derivada es igual a  $f'(t)$

excepto en un número finito de puntos donde  $g'(t) = f'(t) - \sum_k \alpha_k \delta(t - t_k) \dots (*)$

**OBSERVACIÓN.-** Una función periódica se dice que tiene simetría escondida; cuando la simetría no es evidente por ejemplo.

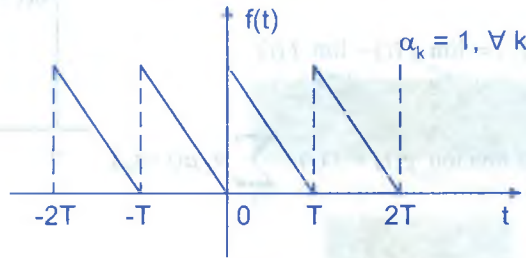


Sea  $g(t) = f(t) - \frac{A}{2}$

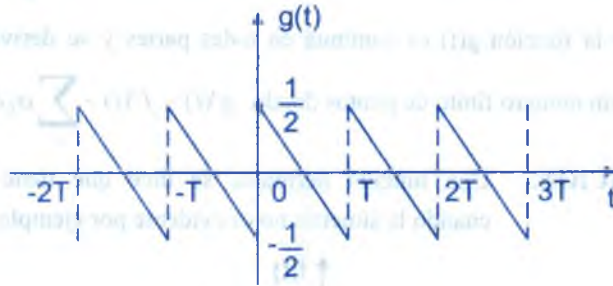


Simetría impar

Si  $A = 1$ , entonces



$$g(t) = f(t) - \frac{1}{2}$$



$g(t)$  es impar, entonces  $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$ , donde

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^T g(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt, \text{ donde } g(t) = -\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}, 0 < t < T \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{entonces } b_n = \frac{4}{T} \int_0^T \left(-\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{n\pi}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{entonces } g(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sen} n\omega_0 t), \text{ derivando en el sentido de funciones generalizadas}$$

$$f'(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_0 \cos(n\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$$



es decir:  $f'(t) = \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$  ... (β)

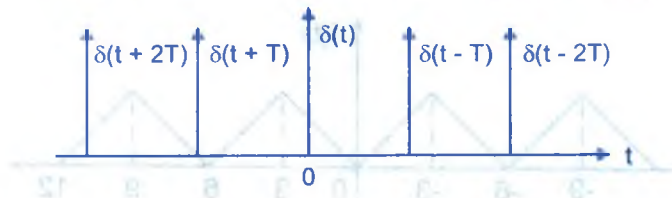
$g(t) = f(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{nk} U(t - nT)$ , entonces  $g'(t) = f'(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

$f'(t) = g'(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  ... (γ)

de (γ) y (β) se tiene que:  $\frac{1}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$

a esta función denotaremos por:  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} + \underbrace{\frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)}_{S.T.F.}$

es decir  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  se denomina el "Tren Periódico de Impulso Unitario"



**OBSERVACIÓN.-** Deducir la serie de Fourier de  $\delta_T(t)$

Sea  $\delta_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$

donde  $a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) dt = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt = \frac{2}{T}$  es decir  $a_0 = \frac{2}{T}$

$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} (\cos n\omega_0 t)|_{t=0} = \frac{2}{T}$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \left[ -\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

$$\therefore \delta_T(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t$$

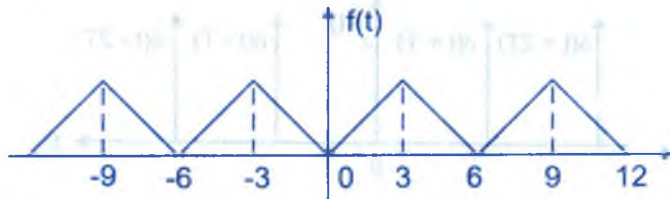
### 15.15. EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER POR DIFERENCIACIÓN.-

Para facilitar el cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier para ciertas funciones, se usa la función  $\delta$  junto con la diferenciación.

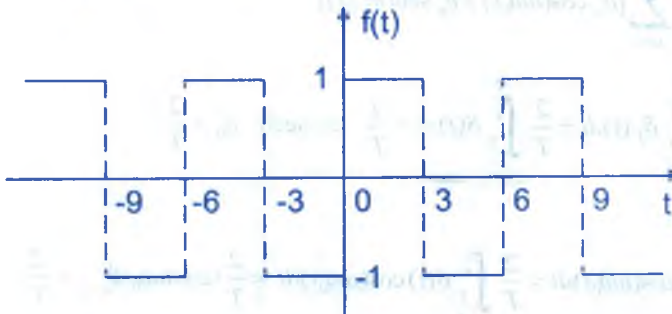
**Ejemplo.-** Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = |t|$ ,  $-3 < t < 3$  (periódica) usando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios.

#### Solución

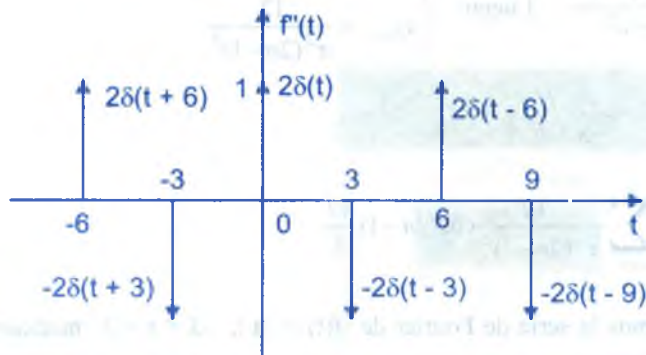
$$f(t) = |t| = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 3 \\ -t, & -3 < t < 0 \end{cases}$$



$$f'(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ -1, & -3 < t < 0 \end{cases}$$



$$f''(t) = 0$$



$$\begin{aligned} f''(t) &= \delta_6(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-6n) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3(2n-1)) \\ &= 2 \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-6n) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta((+3)-6n) \right] \\ &= 2 \left[ \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right) - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}(t+3)\right) \right] \\ &= \frac{2}{3} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right) \right) = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right) \end{aligned}$$

Entonces :  $f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} [1 - (-1)^n] \cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)$

Como la función  $f(t) = |t|$  es par, entonces :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right), \quad -3 < t < 3$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi a_n}{3}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}t\right)$$

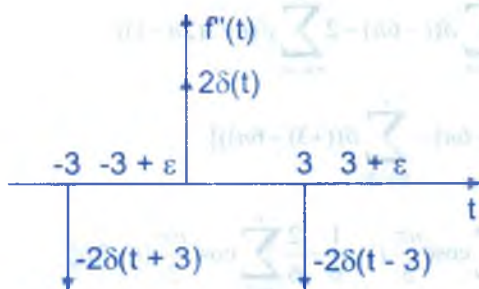
$$f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right) \quad \text{entonces} \quad -\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9} = \frac{2}{3} [1 - (-1)^n]$$

$$a_n = -\frac{6(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}. \text{ Luego: } \begin{cases} a_{2n} = 0, \quad \forall n=1,2,\dots \\ a_{2n-1} = \frac{12}{\pi^2(2n-1)^2} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{4}{6} \int_0^3 t dt = \frac{t^2}{3} \Big|_0^3 = 3$$

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-12}{\pi^2(2n-1)^2} \cos(2n-1) \frac{\pi t}{3}$$

ahora hallamos la serie de Fourier de  $f(t) = |t|$ ,  $-3 < t < 3$  mediante diferenciación o impulsos unitarios.



$$f''(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-3)$$

$$-3 + \varepsilon < t < 3 + \varepsilon \text{ o } -3 < t < 3 \text{ pero } f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{3} t\right)$$

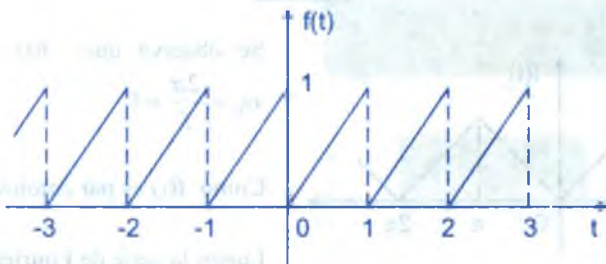
$$\Rightarrow -\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9} = \frac{2}{6} \int_{-3}^3 [2\delta(t) - 2\delta(t-3)] \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9} &= \frac{1}{3} \left[ 2 \int_{-3}^3 \delta(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) dt - 2 \int_{-3}^3 \delta(t-3) \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ 2 \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) \Big|_{t=0} - 2 \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) \Big|_{t=3} \right] = \frac{1}{3} [2 - 2(-1)^n] = \frac{2}{3} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi^2 n^2 a_n}{9} = \frac{2}{3} (1 - (-1)^n) \Rightarrow a_{2n-1} = \frac{-12}{\pi^2 (2n-1)^2}$$

**15.16. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-**

- ① Encontrar la serie de Fourier de la función  $f(t)$  que se muestra en la figura

**Solución**

La regla de correspondencia de la gráfica mostrada es :

$$f(t) = t, 0 \leq t \leq 1, f(t+1) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}, T = 1$$

como  $f(t)$  es una función impar entonces  $a_0 = a_n = 0$

Luego la serie de Fourier de la función  $f(t)$  es :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t), \text{ donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(2n\pi t) dt = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t \operatorname{sen} 2\pi n t dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} t \operatorname{sen}(2\pi n t) dt, \text{ integrando por partes } \begin{cases} u = t \\ dv = \operatorname{sen} 2\pi n t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\frac{\cos 2\pi n t}{2\pi n} \end{cases}$$

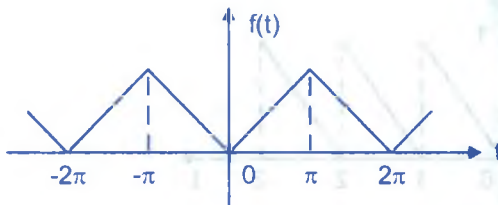
$$b_n = 4 \left[ -\frac{t \cos 2\pi n t}{2\pi n} + \frac{\operatorname{sen} 2\pi n t}{4\pi^2 n^2} \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 4 \frac{(-1)^{n+1}}{4\pi n} \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} 2\pi n t}{n}$$



- ② Encontrar la serie de Fourier de la función  $f(t)$  definida por  $f(t) = |t|$  para  $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$

**Solución**



Se observa que  $f(t)$  es par y  $T = 2\pi$ ,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

Como  $f(t)$  es par entonces  $b_n = 0$

Luego la serie de Fourier de la función  $f(t)$  es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_0 n t, \text{ donde: } a_0 = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi \Rightarrow a_0 = \pi$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \cos n \omega_0 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos n t dt = \frac{2}{\pi} \left( \frac{t \sin n t}{n} + \frac{1}{n^2} \cos n t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-1 + (-1)^n}{n^2} \right]$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \text{ por lo tanto } a_{2n-1} = \frac{-4}{(2n-1)^2 \pi}$$

$$\therefore f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$$

- ③ Sea  $f(t)$  una función periódica con periodo  $T$  definida en  $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$ , cuya serie de

Fourier es:  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , si  $f_e(t)$  y  $f_o(t)$  son los componentes par e impar de  $f(t)$ , demostrar que las series de Fourier de  $f_e(t)$  y  $f_o(t)$

son respectivamente  $f_e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega_0 t$ ;  $f_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \omega_0 t$

**Solución**

Sabemos que: 
$$\begin{cases} f(t) = f_e(t) + f_0(t) & \dots (1) \\ f(-t) = f_e(t) - f_0(t) & \dots (2) \end{cases}$$

Luego se tiene: 
$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad \dots (3)$$

$$\begin{cases} f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \\ f(-t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t - b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \end{cases} \quad \dots (4)$$

ahora reemplazamos (4) en (3) obteniéndose

$$\begin{aligned} f_e(t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t - b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \right] \quad \therefore f_e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \end{aligned}$$

además de (1) y (2) se tiene : 
$$f_0(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \quad \dots (5)$$

ahora reemplazando (4) en (5) se tiene :

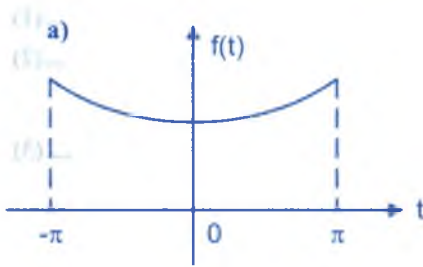
$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t - b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \right] \quad \therefore f_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \end{aligned}$$

④ Utilizar el resultado del ejercicio (3) para encontrar la expansión en serie de Fourier de cada una de las siguientes funciones definidas en  $\langle -\pi, \pi \rangle$  con periodo  $2\pi$

a)  $f(t) = \cosh t$

b)  $f(t) = \operatorname{senh} t$

**Solución**



$T = 2\pi$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$ , como  $f(t) = \cosh t$  es par entonces  $b_n = 0$

Su serie de Fourier es :  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t$

donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t dt = \frac{2 \sinh \pi}{\pi}$$

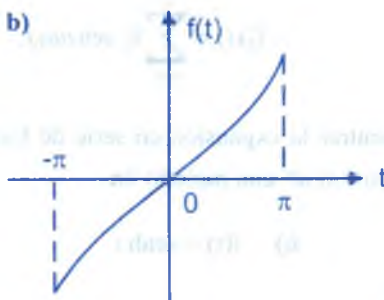
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cdot \cos nt dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cos nt dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^t + e^{-t}) \cos nt dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^t \cos nt + e^t n \sin nt}{1+n^2} + \frac{e^{-t} n \sin nt - e^{-t} \cos nt}{1+n^2} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2(e^{\pi} - e^{-\pi}) \cos nt}{1+n^2} \right] = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}$$

$$\therefore f(t) = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{1+n^2} \right]$$



$f(t) = \sinh t$ ;  $T = 2\pi$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

Como  $f(t) = \sinh t$  es impar entonces  $a_0 = a_n = 0$

Luego la serie de Fourier de la función  $f(t)$  es :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \text{ , donde}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{senh} t \cdot \operatorname{sen} nt \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^t - e^{-t}) \operatorname{sen} nt \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^t (\operatorname{sen} nt - n \cos nt) + e^{-t} (\operatorname{sen} nt + n \cos nt)}{1+n^2} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-e^{\pi} n (-1)^n}{1+n^2} + \frac{1}{1+n^2} + \frac{e^{-\pi} n (-1)^n}{1+n^2} - \frac{1}{1+n^2} \right] \\
 &= \frac{-2(-1)^n n}{\pi(1+n^2)} \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{2(-1)^{n+1} n \operatorname{senh} \pi}{\pi(1+n^2)} \\
 \therefore f(t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2} \operatorname{senh} \pi \cdot \operatorname{sen} nt
 \end{aligned}$$

5) Partiendo de la serie de Fourier de la función  $f(t) = \cos \alpha t$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ , calcular la

suma de la serie  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$ .

**Solución**

$f(-t) = \cos(-\alpha t) = \cos \alpha t = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , entonces  $f(t)$  es par y periódica, entonces

$b_n = 0$ , luego su serie de Fourier es:  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ , donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha t \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} \alpha t}{\alpha} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \pi}{\alpha \pi} - \frac{\operatorname{sen}(-\alpha \pi)}{\alpha \pi} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \pi}{\alpha \pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n \omega_0 t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha t \cdot \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha t \cdot \cos nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\alpha + n)t + \cos(\alpha - n)t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\operatorname{sen}(\alpha + n)t}{\alpha + n} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha - n)t}{\alpha - n} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2\alpha(-1)^n \operatorname{sen} \alpha\pi}{\alpha^2 - n^2} \right] = \frac{2\alpha(-1)^n \operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \text{ de donde}$$

$$\cos \alpha t = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n \operatorname{sen} \alpha\pi}{\alpha^2 - n^2} \cos nt = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2} \cos nt \right]$$

$$\cos \alpha\pi = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2 - \alpha^2} \right]$$

$$c \operatorname{tg} \alpha\pi = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \right] \Rightarrow \pi(c \operatorname{tg} \alpha\pi - \frac{1}{\pi\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \quad \dots (1)$$

$$\frac{-2\alpha}{n^2 - \alpha^2} = \frac{-2\alpha}{(n-\alpha)(n+\alpha)} = \frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\alpha}{n^2 - \alpha^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-n+\alpha}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} + \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:  $\pi(c \operatorname{tg} \alpha\pi - \frac{1}{\pi\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha}$ , si  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\pi(c \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}}, \text{ de donde } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = -2$$

6

Hallar la serie de Fourier de la función  $g(t) = 3t^2 - \pi^2$ **Solución**



La función  $g(t) = 3t^2 - \pi^2$ , es la derivada de la función  $f(t) = t^3 - \pi^2 t$ , como  $f(\pi) = f(-\pi) = 0$  y  $f(t) = t^3 - \pi^2 t$  es continua en  $[-\pi, \pi]$ , donde su serie de Fourier es

$$f(t) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} nt}{n^3}, \text{ entonces se tiene:}$$

$$f'(t) = 3t^2 - \pi^2 = g(t) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cos nt}{n^3} = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$$

$$\therefore g(t) = 3t^2 - \pi^2 = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$$

7) A partir del resultado del ejercicio (6). Hallar la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

### Solución

$$\text{Como } g(t) = 3t^2 - \pi^2 = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}$$

$$\text{para } t = \pi \Rightarrow g(\pi) = 3\pi^2 - \pi^2 = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n^2}$$

$$2\pi^2 = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

8) Calcular  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^n(t) \left( \frac{2t+5}{t^2-3t+2} \right) dt$

### Solución

$$\phi(t) = \frac{2t+5}{t^2-3t+2} = \frac{9}{t-2} - \frac{7}{t-1}$$

$$\phi'(t) = -\frac{9}{(t-2)^2} + \frac{7}{(t-1)^2} = \frac{(-1) \cdot 9 \cdot 1!}{(t-2)^2} + \frac{(-1)^2 \cdot 7 \cdot 1!}{(t-1)^2}$$

$$\phi''(t) = \frac{18}{(t-2)^3} - \frac{14}{(t-1)^3} = \frac{(-1)^2 \cdot 9x2!}{(t-2)^3} + \frac{(-1)^3 \cdot 7x2!}{(t-1)^3}$$

$$\phi'''(t) = \frac{-54}{(t-2)^4} + \frac{42}{(t-1)^4} = \frac{(-1)^3 \cdot 9 \cdot 3!}{(t-2)^4} + \frac{(-1)^4 \cdot 7 \cdot 3!}{(t-1)^4}$$

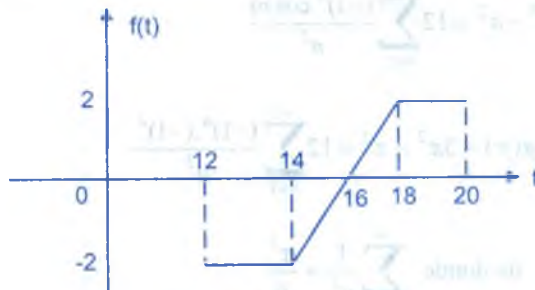
$$\phi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n \cdot 9xn!}{(t-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 7xn!}{(t-1)^{n+1}}, \text{ de donde}$$

$$\phi^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n \cdot 9xn!}{(-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 7xn!}{(-1)^{n+1}} = -\frac{9xn!}{2^{n+1}} + 7xn!$$

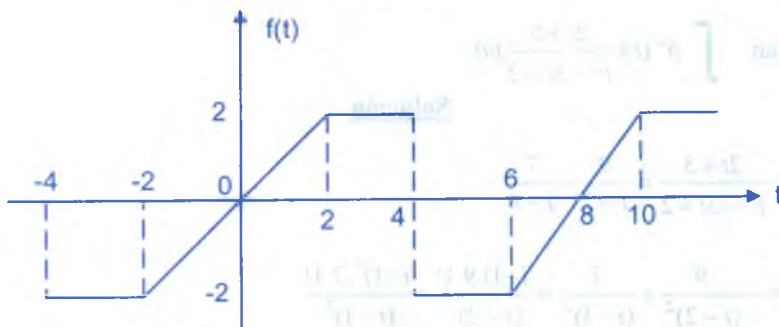
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^n(t) \left( \frac{2t+5}{t^2-3t+2} \right) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$

9

Hallar la serie de Fourier de la función, tal que cuya gráfica es :



**Solución**



8

La regla de correspondencia de la función  $f(t)$  es :

$$f(t) = \begin{cases} -2; & -4 < t < -2 \\ t; & -2 < t < 2 \\ 2; & 2 < t < 4 \end{cases}, T = 8, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$$

$f(t)$  es impar entonces  $a_0 = a_n = 0$ , la serie de Fourier es :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}t\right), \text{ de donde}$$

$$b_n = \frac{4}{8} \int_0^8 f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^8 f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right) dt + \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 t \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{4} dt + \frac{1}{2} \int_2^4 2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -\frac{8}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \left(\frac{4}{n\pi} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4(-1)^n}{n\pi} + \frac{4 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \right]$$

$$b_n = \frac{9}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

$$b_1 = \frac{8}{\pi^2(1)^2} + \frac{4}{1\pi} \quad ; \quad b_2 = -\frac{4}{2\pi}$$

$$b_3 = -\frac{8}{\pi^2(3)^2} + \frac{4}{3\pi} \quad ; \quad b_4 = -\frac{4}{4\pi}$$

$$b_5 = \frac{8}{\pi^2 5^2} + \frac{4}{5\pi} \quad ; \quad b_6 = -\frac{4}{6\pi}$$

$$b_7 = -\frac{8}{\pi^2 \cdot 7^2} + \frac{4}{7\pi} \quad ; \quad b_8 = -\frac{4}{8\pi}$$

Luego  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{4}\right)$ , donde

$$b_n = \begin{cases} b_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1} 8}{(2n-1)^2 \pi} + \frac{4}{(2n-1)\pi}, & n = 1, 2, \dots \\ b_{2n} = -\frac{4}{(2n)\pi}; & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \operatorname{sen} \frac{\pi t}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi}\right) \operatorname{sen} \frac{3\pi t}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \pi t + \dots \right]$$

10

Si  $v(t) = \operatorname{sen} t$ ,  $-\pi < t < \pi$ . Hallar su serie de Fourier.

### Solución

La función  $v(t)$  es par, entonces  $b_n = 0$

Como  $T = 2\pi$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1 \Rightarrow \omega_0 = 1$  y la serie de Fourier es :

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt; \text{ donde}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \operatorname{sen} t dt$$

$$= \frac{2}{\pi} [-t \cos t + \operatorname{sen} t] \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} [\pi + 0] = 2$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen} t \cdot \cos t dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t [\operatorname{sen}(n+1)t + \operatorname{sen}(1-n)t] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-\pi \cos(n+1)\pi}{1+n} - \frac{\pi \cos(1-n)\pi}{1-n} - \frac{\pi \cos(1+n)\pi}{1+n} - \frac{\pi \cos(1-n)\pi}{1-n} \right]$$

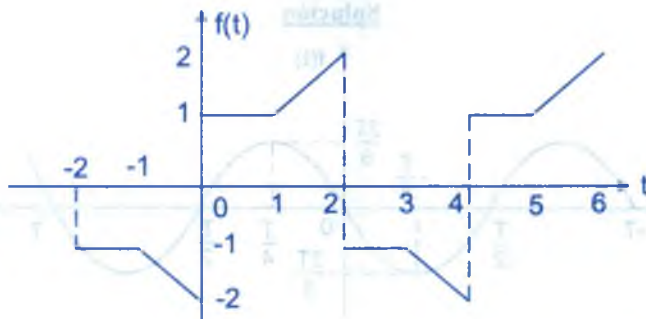
$$= -\frac{\cos(n+1)\pi}{1+n} - \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n}, \text{ como } \cos(1+n)\pi = -\cos n\pi$$

por lo tanto  $a_n = \frac{2(-1)^n}{1-n^2}$   $\therefore v(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{1-n^2}$

11 Si  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 8 < t < 9 \\ t-8 & \text{si } 9 < t < 10 \end{cases}$ , de las condiciones de  $f(t)$  para que tenga una serie de

Fourier de la forma:  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos(2n-1)\omega_0 t + b_{2n-1} \sin(2n-1)\omega_0 t]$ . Hallar dicha serie de Fourier y graficar  $f(t)$ .

**Solución**



$f(t+4) = f(t)$ ,  $f(t) = -f(t+2)$  simetría de media onda

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos(2n-1)\omega_0 t + b_{2n-1} \sin(2n-1)\omega_0 t], \text{ donde}$$

$$T = 4, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \frac{4}{T} \int_0^2 f(t) \cos(2n-1)\omega_0 t \, dt = \int_0^2 f(t) \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} t \, dt \\ &= \int_0^1 \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} t \, dt + \int_1^2 t \cos(2n-1) \frac{\pi}{2} t \, dt = -\frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \end{aligned}$$

$$b_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^2 f(t) \sin(2n-1)\omega_0 t \, dt = \int_0^2 f(t) \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} t \, dt$$



$$= \int_0^1 \sin(2n-1) \frac{\pi t}{2} dt + \int_1^2 t \sin(2n-1) \frac{\pi t}{2} dt = \frac{6}{(2n-1)\pi} - \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2}$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{-4}{(2n-1)^2 \pi^2} \right) \cos(2n-1) \frac{\pi t}{2} + \left( \frac{6}{(2n-1)\pi} - \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2} \right) \sin(2n-1) \frac{\pi t}{2} \right]$$

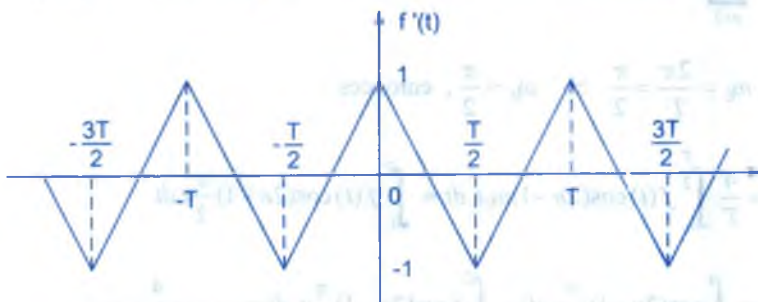
12) Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios, hallar la serie de

Fourier para la función :  $f(t) = \begin{cases} t + \frac{2}{T}t^2 & ; -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ t - \frac{2}{T}t^2 & ; 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$

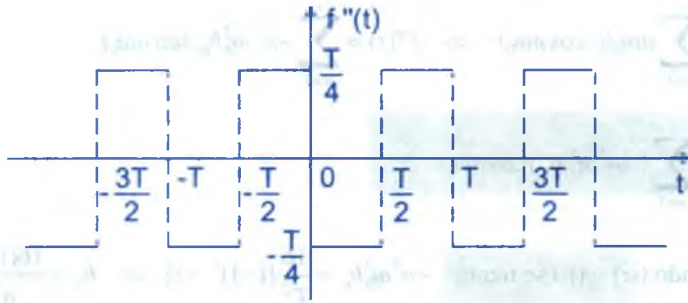
**Solución**



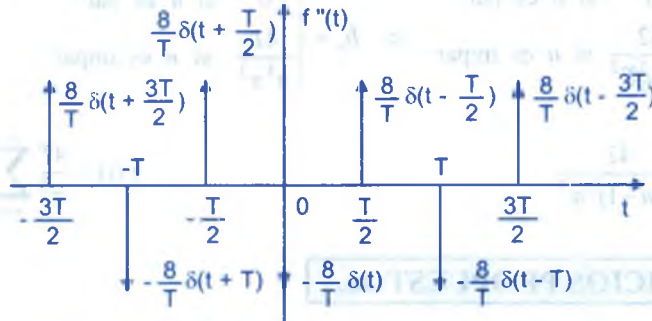
$$f'(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T} & ; -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T} & ; 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$



$$f''(t) = \begin{cases} \frac{4}{T} & ; -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ -\frac{4}{T} & ; 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$



$f'''(t) = 0$



$$f'''(t) = \frac{8}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2n-1)\frac{T}{2}) - \frac{8}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \frac{8}{T} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t + \frac{T}{2} - nT\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right]$$

$$= \frac{8}{T} \left[ \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T} - \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \omega_0 t \right]$$

$$= \frac{16}{T^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n \omega_0 t - \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \omega_0 t \right] = \frac{16}{T^2} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \cos n \omega_0 t$$

$$f'''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{T^2} [(-1)^n - 1] \cos n \omega_0 t \dots (\alpha)$$

como  $f(t)$  es impar  $\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } n \omega_0 t$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 b_n \cos n\omega_0 t \Rightarrow f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \omega_0^2 b_n \sin n\omega_0 t$$

$$f'''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^3 \omega_0^3 b_n) \cos n\omega_0 t \quad \dots (\beta)$$

comparando  $(\alpha)$  y  $(\beta)$  se tiene:  $-n^3 \omega_0^3 b_n = \frac{16}{T^2} [(-1)^n - 1] \Rightarrow b_n = \frac{16(1 - (-1)^n)}{n^3 \omega_0^3 T^2}$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{32}{n^3 \omega_0^3 T^2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Rightarrow b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4T}{n^3 \pi^3} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

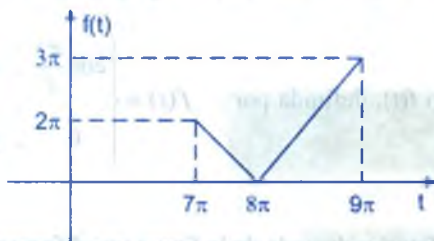
$$b_{2n-1} = \frac{4T}{(2n-1)^3 \pi^3} \quad \therefore f(t) = \frac{4T}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\omega_0 t}{(2n-1)^3}$$

### 15.17. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- ① Probar que la función cero es la única función que es simultáneamente par e impar.
- ② Si la función  $f(t)$  es impar, probar que  $|f(t)|$  es par.
- ③ Sea la función  $f(t)$  diferenciable en el intervalo  $\langle -a, a \rangle$ . Demostrar que su derivada  $f'(t)$  es impar cuando  $f(t)$  es par y par cuando  $f(t)$  es impar.
- ④ Encontrar las componentes par e impar de las siguientes funciones :
  - a)  $f(t) = e^t$
  - b)  $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$
  - c)  $f(t) = \sin t - \sin 2t$
- ⑤ Demostrar que el valor de la media cuadrática de  $f(t)$  es igual a la suma de los valores de los medios cuadráticos de sus componentes pares e impares ó sea :

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t))^2 dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f_e(t))^2 dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f_o(t))^2 dt$$

- 6 a) Hallar la serie de Fourier de la función tal que cuya gráfica es :



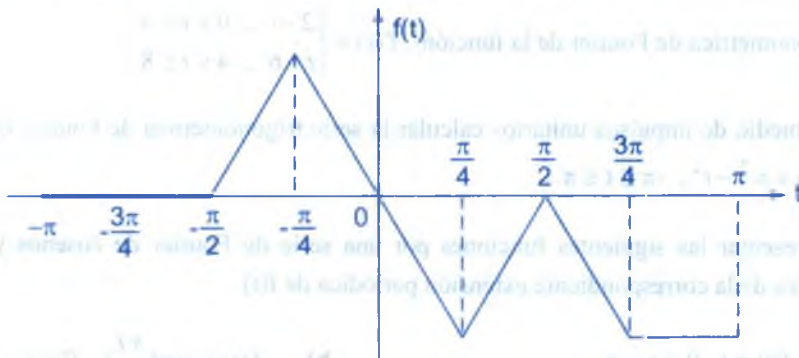
- b) Aplicar el teorema de Parseval al resultado de (a) para probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

- 7 A partir de la serie de Fourier de  $f(t) = t$ ,  $-\pi < t < \pi$ . Calcular la suma de las series

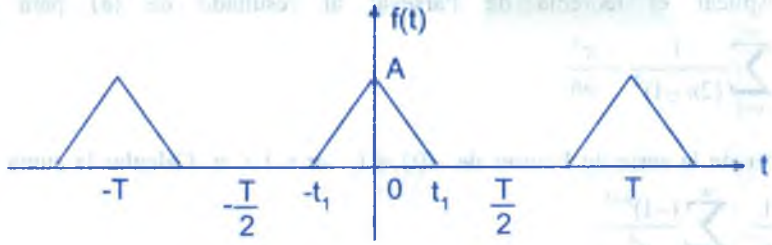
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

- 8 Utilizando la diferenciación encontrar la serie de Fourier de la función  $f(t)$  dada por la gráfica.



- 9 Por diferenciación, calcular la serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , -\frac{T}{2} < t < -2 \\ At + 2A & , -2 < t < -1 \\ A & , -1 < t < 1 \\ 2A - At & , 1 < t < 2 \\ 0 & , 2 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad f(t+T) = f(t).$$

- 10) Sea  $F''(t) = \delta(t-2) - 3\delta(t-5)$  si  $f(10) = 8$  y  $f'(10) = 7$ . Hallar  $f(t)$ .
- 11) Desarrollar la función  $f(t)$ , definida por :  $f(t) = \begin{cases} \cos \frac{\pi t}{\ell}, & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\ell}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{\ell}{2} < t \leq \ell \end{cases}$ , en serie de cosenos.
- 12) Encontrar la serie de Fourier de onda de la figura por diferenciación.
- 
- 13) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = |\sin t|$
- 14) Usando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios, encontrar la serie trigonométrica de Fourier de la función  $f(t) = \begin{cases} 2-t, & 0 \leq t \leq 4 \\ t-6, & 4 \leq t \leq 8 \end{cases}$
- 15) Por medio de impulsos unitarios calcular la serie trigonométrica de Fourier de la función  $f(t) = \pi^2 - t^2, -\pi \leq t \leq \pi$ .
- 16) Representar las siguientes funciones por una serie de Fourier de cosenos y trazar una gráfica de la correspondiente extensión periódica de  $f(t)$ .
- a)  $f(t) = t, 0 < t < \pi$                       b)  $f(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), 0 < t < \ell$
- 17) Si  $f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < t < 0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < t < \pi \end{cases}$ , Hallar la serie de Fourier y con el resultado obtenido evaluar  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$



- 18 Hallar la serie de Fourier de  $f(t) = |t| - \frac{\pi}{2}$ , en  $-\pi \leq t \leq \pi$  y utilizando este resultado

para demostrar que 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

- 19 Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t) = t^2$ ,  $-c < t < c$  y utilizando el resultado

demostrar que 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

- 20 Hallar la serie de Fourier de la función :  $f(t) = \begin{cases} t(c+t) & , -c < t < 0 \\ (c-t)^2 & , 0 < t < c \end{cases}$

- 21 Si la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$  en el intervalo  $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$  es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$
,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Demostrar que la serie de Fourier de

cosenos y los senos de  $f(t)$  en el intervalo  $\langle 0, \frac{T}{2} \rangle$  son respectivamente

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos n\omega_0 t$$
 y 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \sin n\omega_0 t$$
 suponer que  $f(t) = 0$ , para  $-\frac{T}{2} < t < 0$ .

- 22 Sea la función  $f(t)$  periódica con periodo  $T$ . Si  $f(\frac{1}{2}T - t) = f(t)$ , determinar el comportamiento de los coeficientes de Fourier  $a_n$  y  $b_n$  de  $f(t)$  ilustrar gráficamente.

- 23 Si la función periódica  $f(t)$  con periodo  $T$  satisface  $f(\frac{1}{2}T - t) = -f(t)$ , determinar el comportamiento de los coeficientes de Fourier  $a_n$  y  $b_n$  de  $f(t)$  ilustrar gráficamente.

- 24 Encontrar la serie de Fourier de cosenos y la de senos de

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi t}{4} & \text{para } 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{4} \pi t(\pi - t) & \text{para } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

- 25) Hallar la serie de Fourier de medio rango (serie de coseno) de la función  $f(t)$  con sus respectivos gráficos y con el resultado obtenido calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}, \text{ donde } f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{32}(\pi-2t)(\pi+2t), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{12}(2t-\pi)(2t-3\pi), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

- 26) Si  $G(t) = -t$ ,  $-\pi < t < \pi$ . Hallar la serie trigonométrica de Fourier mediante la derivación (impulsos unitarios o delta de Dirac), usando  $G'''(t)$

- 27) Demostrar que :

a)  $f(t) = \delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$

b)  $t\delta'(t) = -\delta(t)$

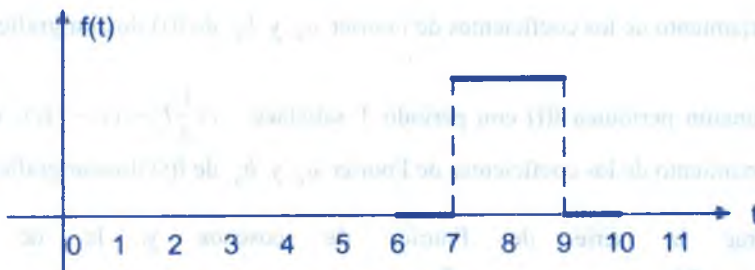
c)  $\delta'(t) = -\delta'(t)$

d)  $\delta^n(-t) = (-1)^n \delta^n(t)$

- 28) Utilizar la diferenciación para encontrar los coeficientes de Fourier de la función  $f(t) = t$  para  $<-\pi, \pi>$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

- 29) Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios y la diferenciación, encontrar los coeficientes de Fourier de la función definida por  $f(t) = e^t$ , para  $<-\pi, \pi>$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

- 30) Dada la función  $f(t)$  periódica con periodo  $T = 4$ , tal que cuya gráfica es :



- a) ¿Qué tipo de simetría tiene la función  $f(t)$ ?

- b) Hallar la serie de Fourier de  $f(t)$ .

- c) Para  $t=0$ , calcular la suma de la serie correspondiente.  
 d) Aplicando el teorema de Parseval, calcular la suma de la serie correspondiente.

31 Representar la siguiente función  $f(t)$  por medio de una serie de Fourier Senoidal y construir la gráfica de la correspondiente prolongación periódica de  $f(t) = t^2, 0 < t < \pi$

32 Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas por tramos en  $-\infty, \infty$  con periodo  $2\pi$  y sean  $a_k, b_k$  y  $\alpha_k, \beta_k$  respectivamente los coeficientes de Fourier para  $f$  y  $g$ . Calcular

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t).g(t)dt$$

33 Calcular a)  $\delta(\sin t)$  b)  $\delta(t^4 - 1)$

34 Evaluar las siguientes expresiones :

a)  $\delta(t^2 - a^2)$       b)  $\delta(146 - \frac{1}{256})$       c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \arctg t dt$

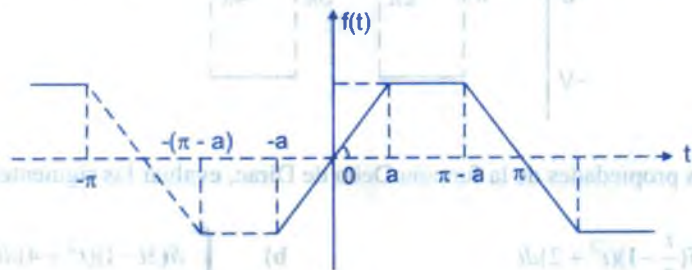
d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)} e^{at} \sin(bt + k) dt$       e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-t) \delta(a-400) e^{4t} \sin(5t + 2) dt$

f)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-3) e^{at} (bt+c) dt$       g)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-6) \arctg t dt$

35 Calcular y graficar  $\delta(t^5 + 3t^4 - 5t^3 - 15t^2 + 4t + 12)$

36 Sea  $G''(t) = \delta(t-3) - 6\delta(t-5)$ ,  $G(10) = 8$ ,  $G'(10) = 7$ , calcular  $G(t)$ .

37 Usando los impulsos unitarios, hallar la serie de Fourier de la función adjunta por el gráfico.



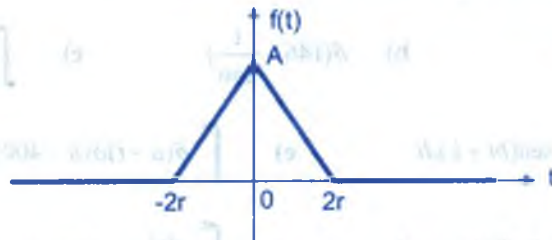
- 38) Sea  $f(t) = \begin{cases} 1 - (1-t)^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t)^2, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$ . De la condición a  $H(t)$  para que tenga una serie de

Fourier de la forma  $H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)\omega_0 t$

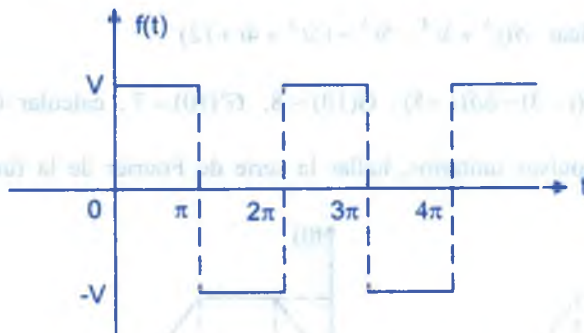
- 39) a) Si  $f(t) = t - t^3$ ,  $-1 < t < 1$ . Halle la serie trigonométrica de Fourier por medio de impulsos unitarios usando  $f^{IV}(t)$ .

b) Usando el resultado obtenido en (a) calcular la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

- 40) Calcular por diferenciación la transformada de  $f(t)$  cuya gráfica es :



- 41) Hallar la serie de Fourier de la función  $f(t)$  cuya gráfica es :



- 42) Usando las propiedades de la función Delta de Dirac, evaluar las siguientes integrales.

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{2} - 1\right)(t^2 + 2)dt$

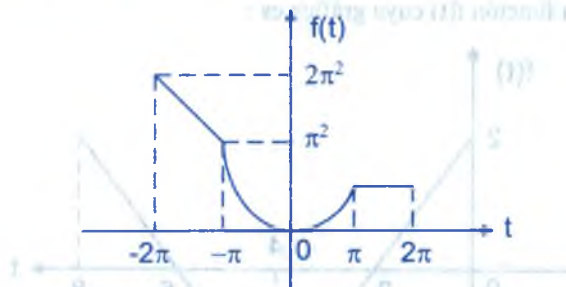
b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3t - 1)(t^2 + 4)dt$

c)  $\int_0^{\infty} e^{-2t} \delta(a-t) \delta(a-2) da$

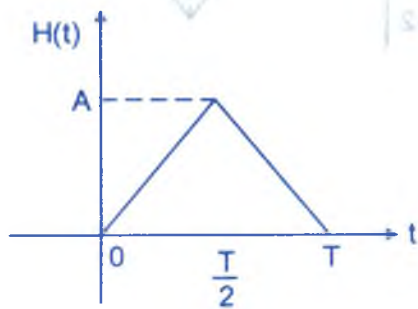
d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3t-1) dt$

43 Si  $G(t) = t \sin t$ ,  $-\pi < t < \pi$ , Graficar y dar las condiciones para que  $G(t)$  tenga una serie de la forma  $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)\omega_0 t$  y halle dicha serie.

44 Si  $F(t)$  es la función dada por el gráfico adjunto, halle la serie trigonométrica de Fourier por medio de impulsos unitarios usando  $F'''(t)$



45 Si  $H(t)$  está dado por el gráfico adjunto, calcular su serie de medio rango con sus respectivas gráficas.



46 Si  $F(t) = t^3$ ,  $0 < t < T$ . Halle su serie de Fourier por medio de impulsos unitarios, utilizando  $F^{IV}(t)$ , graficar todos los impulsos.

47 Si  $G(t) = t(\pi^2 - t^2)$ ,  $0 < t < T$ , ¿Qué condiciones debe satisfacer  $G(t)$  para que tenga una serie de Fourier de la forma  $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos(2n-1)\omega_0 t + b_{2n-1} \sin(2n-1)\omega_0 t]$ ? Graficar la función para esa condición y halle dicha serie.

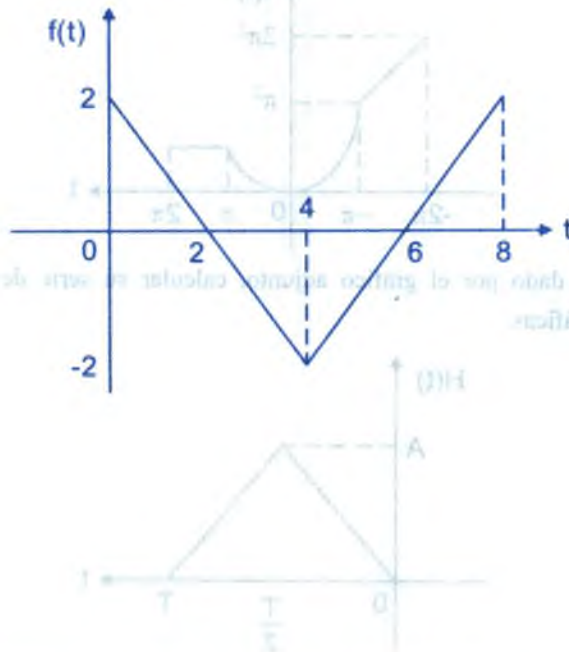


- 48) Graficar la función  $f(t)$  y usando los impulsos unitarios hallar la serie de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , -c < t < 0 \\ (c-t)^2 & , 0 < t < c \end{cases}$$

- 49) Hallar la serie de Fourier para un tren periódico de impulsos unitarios  $\delta_{2\pi}(t)$  a partir de la función  $f(t) = t + \pi$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ .

- 50) Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios, encontrar la serie de Fourier de la función  $f(t)$  cuya gráfica es :



# CAPÍTULO XVI

## 16. ESPECTROS DE FRECUENCIA DISCRETA.-

Las funciones periódicas representadas mediante una serie de Fourier implican que la especificación de sus coeficientes determinan únicamente la función; ahora en este capítulo se tratará de usar los coeficiente de Fourier en el estudio de las funciones periódicas y se introducirá el concepto de espectros de frecuencia de señales periódicas.

### 16.1. FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER.-

Dentro de las aplicaciones de las series de Fourier, es importante expresar estas series en términos de los exponenciales complejos  $e^{\pm jn\omega_0 t}$

Consideremos la serie de Fourier de la función periódica  $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t) \quad \dots (1)$$

donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , el seno y coseno, se puede expresar en términos de las exponenciales,

es decir :

$$\begin{cases} \cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \\ \sen n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \end{cases} \quad \dots (2)$$

al reemplazar (2) en (1) se tiene :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right] \quad \dots (3)$$

al agrupar y teniendo en cuenta  $\frac{1}{j} = -j$  se puede expresar así :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t} \right] \quad \dots (4)$$

ahora hacemos  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ ,  $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$

$$\begin{aligned} \text{entonces : } f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

Luego  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \dots (5)$

A la ecuación (5) se denomina forma compleja de la serie de Fourier de  $f(t)$  ó serie compleja de Fourier de  $f(t)$ .

Los coeficientes  $c_n$  se puede evaluar en términos de  $a_n$  y  $b_n$  es decir :

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad \dots (6)$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \left[ \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[ \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos n\omega_0 t - j \sen n\omega_0 t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \dots (7)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \quad \dots (8)$$

Las ecuaciones 6, 7 y 8 se puede combinar en una sola fórmula, es decir :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots (9)$$

como  $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$  es periódica con periodo T, entonces al considerar la ecuación (8) se tiene  $c_n$  que se puede hallar a partir de la fórmula

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \dots (10)$$

además: como  $c_n = \frac{a_n - b_n j}{2}$ ,  $c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + b_n j}{2}$

$c_n + \bar{c}_n = a_n$ ,  $c_n - \bar{c}_n = -b_n j$

$c_n = |c_n| e^{j\phi_n(t)}$ ,  $|c_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$ ,  $c_{-n} = |c_n| e^{-j\phi_n(t)}$ ,  $\phi_n(t) = \arctg(-\frac{b_n}{a_n})$

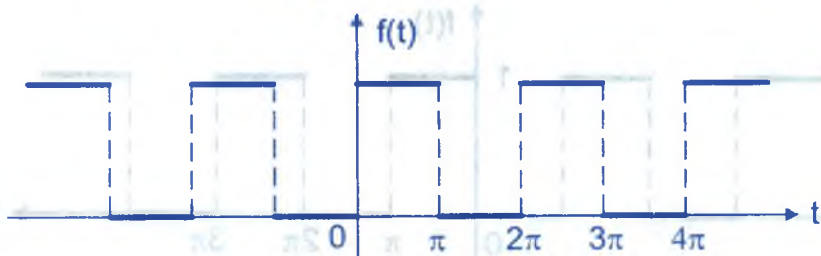
**Ejemplo.-** Hallar la serie compleja de Fourier para la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < t < \pi \\ -1, & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases}, \quad f(t + 2\pi) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

**Solución**

Como  $c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$ , donde  $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$  es una función periódica, con

periodo T, entonces :  $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$



$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{e^{-jnt}}{jn} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$c_n = \frac{j}{2n\pi} [(-1)^n - 1]$$

para  $n$  par  $c_n = 0$ ,  $n$  impar  $-\frac{j}{2n\pi}$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ -\frac{j}{2n\pi} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

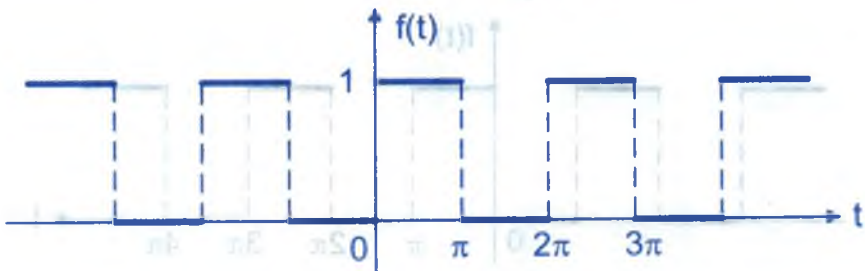
Luego se tiene:  $c_{2n-1} = -\frac{j}{(2n-1)\pi}$ ,  $\bar{c}_{2n-1} = \frac{j}{(2n-1)\pi}$

$$f(t) = -\frac{j}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{j(2n-1)t}$$

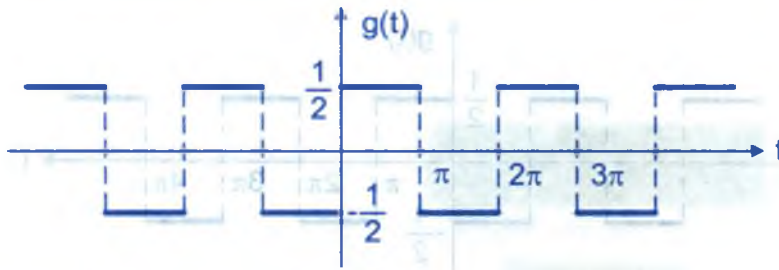
$$c_{2n-1} = -\frac{j}{(2n-1)\pi}, \quad \bar{c}_{2n-1} = \frac{j}{(2n-1)\pi}, \quad \text{entonces:}$$

$$c_{2n-1} + \bar{c}_{2n-1} = 0 = a_{2n-1} \quad \text{y} \quad c_{2n-1} - \bar{c}_{2n-1} = -\frac{2}{(2n-1)\pi} j = -b_{2n-1} j$$

$$b_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}, \quad \text{entonces} \quad f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \text{sen}(2n-1)t$$







$g(t) = f(t) - \frac{1}{2}$ , función impar; entonces

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nt \, dt = -\frac{1}{n\pi} \cos nt \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi} (-\cos n\pi + 1) = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$b_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}, \quad b_{2n} = 0, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen}(2n-1)t, \quad \text{de donde} \quad f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

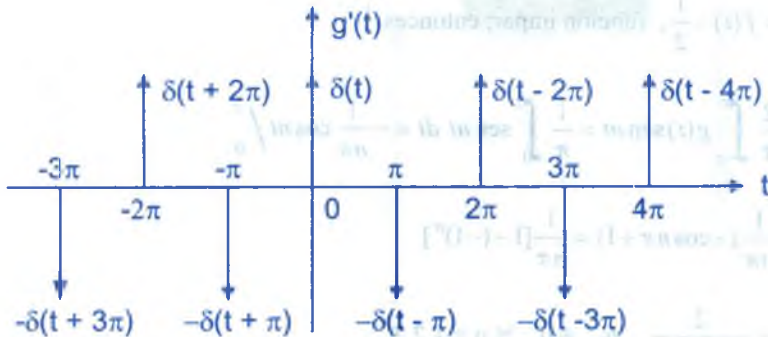
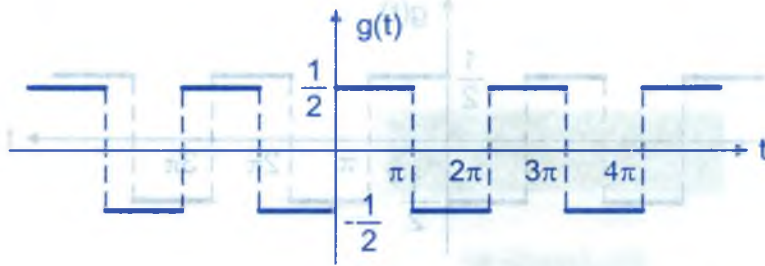
o también usando cuarto de media de simetría  $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t$ , donde

$$b_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} g(t) \operatorname{sen}(2n-1)t \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2} \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{(2n-1)\pi} \quad \therefore \quad g(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

ahora calcularemos usando el tren de impulso unitario.

$$g(t) = f(t) - \frac{1}{2}$$



$$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega t$$

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n\pi) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - (2n-1)\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n\pi) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta((t+T) - 2n\pi)$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(t + \pi)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \cos nt$$

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt, \text{ derivando se tiene:}$$

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nt, \text{ de donde } \frac{1}{\pi} [1 - (-1)^n] = n b_n$$

por lo tanto  $b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ , de donde  $b_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}$

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)t}{2n-1} = f(t) = \frac{1}{2} \quad \therefore f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

**16.2. ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS.-**

Diremos que un conjunto de funciones complejas  $f(t)$  ( $f: \langle a,b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ ) es ortogonal en el intervalo  $\langle a,b \rangle$  si :  $\int_a^b f_n(t) \cdot \overline{f_m(t)} dt = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ r_n, & \text{si } n = m \end{cases}$ , donde  $\overline{f_m(t)}$  es el conjugado complejo de  $f_m(t)$ .

**Ejemplo.-** Si  $f_m(t) = e^{jm\omega_0 t} = \cos m\omega_0 t + j \text{sen } m\omega_0 t$

$$\overline{f_m(t)} = e^{-jm\omega_0 t} = \cos m\omega_0 t - j \text{sen } m\omega_0 t$$

**Ejemplo.-** Probar que el conjunto de funciones complejas  $\{e^{jn\omega_0 t}\} \forall n \in \mathbb{Z}$  es ortogonal en  $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$

**Solución**

i)  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot \overline{e^{jm\omega_0 t}} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \frac{1}{jn\omega_0} e^{jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$   
 $= \frac{1}{jn\omega_0} (e^{j2\pi n} - e^{-2j\pi n}) = 0 \text{ si } n \neq 0$

ii)  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot \overline{e^{jm\omega_0 t}} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\omega_0(n-m)t} dt = \frac{e^{j\omega_0(n-m)t}}{j\omega_0(n-m)} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$   
 $= \frac{1}{j\omega_0(n-m)} [e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}]$

$$= \frac{1}{j\omega_0(n-m)} [(-1)^k - (-1)^k] = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ si } n \neq m$$

iii) Si  $n = m$ , entonces 
$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot \overline{e^{jn\omega_0 t}} dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de funciones complejas, determinar los

coeficientes de Fourier : 
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \dots (1)$$

donde  $f(t+T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots (2)$$

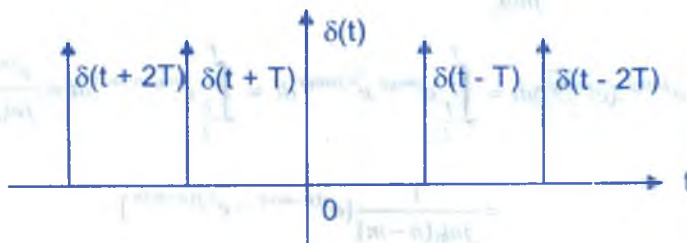
a la expresión (1) multiplicamos por  $e^{-jm\omega_0 t}$

$$f(t) e^{-jm\omega_0 t} = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t}, \text{ integrando}$$

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\omega_0(n-m)t} dt, \text{ de donde}$$

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = c_n T \text{ por lo tanto } c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

deducir la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios.



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ donde}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} (e^{-jn\omega_0 t}) \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

de donde  $c_n = \frac{1}{T}$  y por lo tanto  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$

**OBSERVACIÓN.-**

$$\begin{aligned} \delta_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} + 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-jn\omega_0 t} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \right] = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \cos n\omega_0 t \qquad \therefore \delta_T(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \cos n\omega_0 t \end{aligned}$$

**OBSERVACIÓN.-** Se sabe que la serie de Fourier constituye un poderoso instrumento en el tratamiento de diversos problemas que implican funciones periódicas.

Sin embargo muchos problemas prácticos no involucran funciones periódicas, por lo tanto es necesario desarrollar un método de análisis de Fourier que incluyan funciones no periódicas. Luego estudiaremos la representación frecuencial de funciones no periódicas por medio de las series de Fourier.

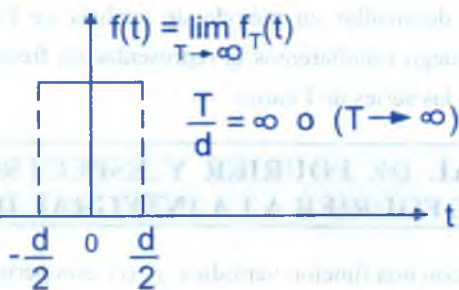
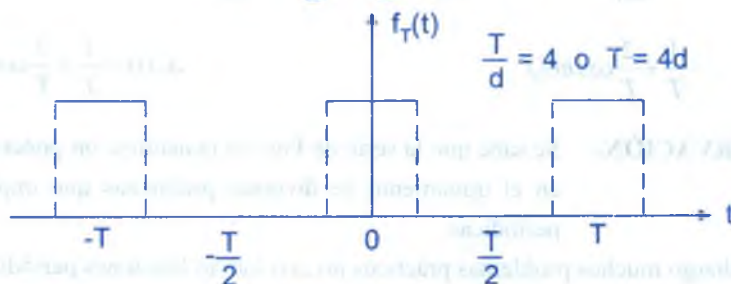
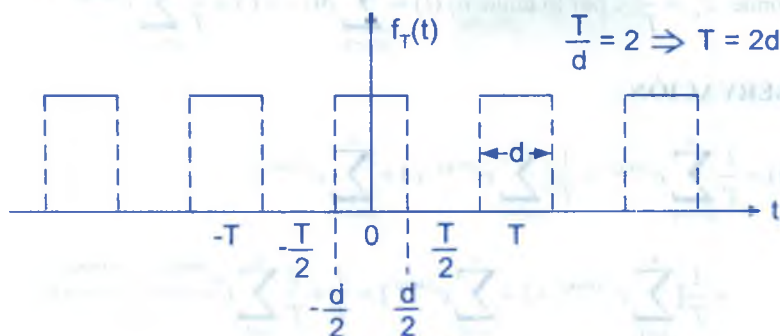
### 16.3. INTEGRAL DE FOURIER Y ESPECTROS CONTINUOS DE LA SERIE DE FOURIER A LA INTEGRAL DE FOURIER.-

Expresamos con una función periódica  $f_T(t)$  con periodo T, cuando se hace que T tienda a infinito, en este caso la función resultante  $f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t)$  deja de ser periódica a este proceso de limite ilustraremos mediante un tren de pulsos rectangulares.



Consideremos la función  $f_T(t)$ , definida por :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } -\frac{T}{2} < t < -\frac{d}{2} \\ 1, & \text{para } -\frac{1}{2}d < t < \frac{1}{2}d \\ 0, & \text{para } \frac{1}{2}d < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad \text{de donde } f_T(t+T) = f_T(t), \quad T > d$$



Quando  $t \rightarrow \infty$ , se obtiene la función :  $f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{cuando } -\frac{d}{2} < t < \frac{d}{2} \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$

naturalmente la función  $f(t)$  no es periódica.

**TEOREMA 1.-** Sea  $f(t)$  una función periódica con periodo  $T$ , cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $f(t)$  se convierte en una función no periódica. Encontrar la representación de esta función no periódica.

### Demostración

Sea  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ , es la forma exponencial de la serie de Fourier ... (1)

$$\text{donde } c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \dots (2)$$

Al reemplazar en la serie de Fourier se tiene :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t}$$

como  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , entonces  $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \right) \omega_0 e^{jn\omega_0 t} \quad \dots (3)$$

$$\text{cuando } T \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{T} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_0 \rightarrow 0$$

luego sea  $\omega_0 = \Delta\omega$ , entonces la frecuencia de cualquier "armónico"  $n\omega_0$  debe corresponde a la variable general de frecuencia que describe el espectro continuo, es decir  $n \rightarrow \infty$  a medida que  $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow 0$  de tal manera que el producto infinito, es decir :

$n\omega_0 = n\Delta\omega \rightarrow \omega$ . Luego la ecuación (3) se convierte en :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\Delta\omega x} dx \right) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega$$

cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , entonces la función no periódica se convierte en :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} d\omega \quad \dots (4)$$

si se define  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$  ... (5)

ahora reemplazamos (5) en (4) obteniéndose

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \dots (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) es la representación de Fourier de la función no periódica.

**OBSERVACIÓN.-** Se observa que la ecuación (6) es análoga a la ecuación (1) y la ecuación (5) es análoga a la ecuación (2), luego a la ecuación (4) se conoce como Identidad de Fourier.

**OBSERVACIÓN.-** Se hace hincapié en que la anterior derivación heurística de (5) y (6) no esta fundamentada en una base rigurosamente matemática. Sin embargo, desde el punto de vista de la ingeniería, el interés primordial en la interpretación y utilización de tales relaciones.

### TEOREMA 2.- (Teorema de la integral de Fourier)

Si  $f(t)$  es real entonces  $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx d\omega$

#### Demostración

$$\begin{aligned} \text{Se conoce que } f(t) &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\omega(t-x)} dx d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\cos \omega(t-x) + j \text{sen} \omega(t-x)] dx d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{sen} \omega(t-x) dx d\omega \end{aligned}$$

Si  $f(t)$  es real, entonces  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx d\omega$

como  $\cos \omega(t-x)$  es par con respecto a  $\omega$ , entonces se tiene :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx d\omega$$

#### 16.4. TRANSFORMADA DE FOURIER.-

La función  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ , es conocida como la integral de Fourier ó Transformada de Fourier de  $f(t)$  y denotamos por :

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \dots \text{(I)}$$

Si  $\mathcal{F}^{-1}$  es el símbolo que se utiliza para indicar la operación inversa, es decir para obtener  $f(t)$  cuando  $F(\omega)$  es dado, esto es :

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} dt \quad \dots \text{(II)}$$

a la función  $f(t)$  se denomina Transformada Inversa de Fourier de  $F(\omega)$ . Las expresiones de (I) y (II) se conocen como par de Transformada de Fourier.

**TEOREMA 1.-** La condición suficiente para que exista Transformada de Fourier de  $f(t)$  es que la integral del valor absoluto de la función  $f(t)$  debe ser infinita

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right)$$

#### Demostración

Como  $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t \Rightarrow |e^{-j\omega t}| = \sqrt{\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t} = 1$

y  $|f(t) e^{-j\omega t}| = |f(t)| \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-j\omega t}| dt$ , es finita

entonces  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$  es finita, es decir :

existe la Transformada de Fourier  $\mathcal{F}[f(t)]$

**NOTA.-** La función  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$  es en general compleja y se tiene  $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$ , donde  $|F(\omega)|$  se denomina espectro de magnitud de  $f(t)$  y  $\phi(\omega)$  espectro de fase de  $f(t)$ .

**TEOREMA 2.-** Si  $f(t)$  es real, demostrar que las partes real e imaginaria de  $F(\omega)$  son :

$$\operatorname{Re}(F(\omega)) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \quad ; \quad \operatorname{Im}(F(\omega)) = X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

así mismo demostrar que  $R(\omega)$  y  $X(\omega)$  son funciones par e impar de  $\omega$  respectivamente ósea  $R(\omega) = -R(-\omega)$ ,  $X(\omega) = -X(-\omega)$ ,  $F(-\omega) = F(\omega)$  donde  $F(\omega)$  es el conjugado complejo de  $F(\omega)$ .

### Demostración

$$\text{Como } F(\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt \quad \dots (1)$$

$$\text{Además se conoce: } e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t \quad \dots (2)$$

al reemplazar (2) en (1) se tiene :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t] \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt = R(\omega) + j X(\omega) \end{aligned}$$

igualando las partes real e imaginaria, se tiene :

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \quad ; \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

como  $f(t)$  es real se tiene :

$$R(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = R(\omega)$$

$$X(-\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(-\omega t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt = -X(\omega)$$



es decir que  $R(\omega)$  es una función par de  $\omega$  y  $X(\omega)$  es una función impar de  $\omega$ .

$$F(-\omega) = R(-\omega) + jX(-\omega) = R(\omega) - jX(\omega) = F(\omega)$$

**TEOREMA 3.-**  $f(t)$  es real si y solo  $F(-\omega) = F(\omega)$

### Demostración

i) Si  $f(t)$  es real, entonces  $F(-\omega) = F(\omega)$  ya está demostrado en el teorema 2.

ii) Si  $F(-\omega) = F(\omega)$  entonces  $f(t)$  es real, por demostrar. Supongamos que  $f(t) = f_1(t) + j f_2(t)$ , donde  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son funciones reales y

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \text{ es decir que :}$$

$$f_1(t) + j f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + j X(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

$$f_1(t) + j f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \operatorname{sen} \omega t] d\omega + \\ + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X(\omega) \cos \omega t + R(\omega) \operatorname{sen} \omega t] d\omega$$

igualando las partes real e imaginaria se tiene :

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \operatorname{sen} \omega t] d\omega$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t + X(\omega) \operatorname{sen} \omega t] d\omega$$

y como  $F(-\omega) = F(\omega)$  entonces  $R(-\omega) = R(\omega)$  y  $X(-\omega) = -X(\omega)$ , entonces  $R(\omega) \operatorname{sen} \omega t$  y  $X(\omega) \cos \omega t$  son impares de  $\omega$  de donde  $f_2(t) = 0 \Rightarrow f(t) = f_1(t)$  es real.

**TEOREMA 4.-** Si  $f(t)$  es real, demostrar que su espectro de magnitud  $|F(\omega)|$  es una función par de  $\omega$  y que su espectro de fase  $\phi(\omega)$  es una función impar de  $\omega$ .

Demostración

Si  $f(t)$  es real, entonces  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$  y  $\overline{F(\omega)} = |F(\omega)| e^{-j\phi(\omega)} = |F(\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$

$$F(-\omega) = |F(-\omega)| e^{j\phi(-\omega)} \Rightarrow \text{comparando se tiene: } |F(-\omega)| e^{j\phi(-\omega)} = |F(\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

$$\therefore |F(-\omega)| = |F(\omega)| \wedge \omega(\phi) = -\phi(\omega)$$

**TEOREMA 5.-** Demostrar que si la Transformada de Fourier de  $f(t)$  es real, entonces  $f(t)$  es una función par de  $t$  y que si la transformada de Fourier de un real  $f(t)$  es imaginario puro, entonces  $f(t)$  es una función impar de  $t$ .

Demostración

Consideremos la Transformada de Fourier de  $f(t)$  es decir:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = R(\omega) + j X(\omega), \text{ donde}$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \quad \wedge \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

Si  $F(\omega) = R(\omega) \wedge X(\omega) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = 0$ , entonces  $f(t) \sin \omega t$  es impar y como  $\sin \omega t$  es impar entonces  $f(t)$  es par.

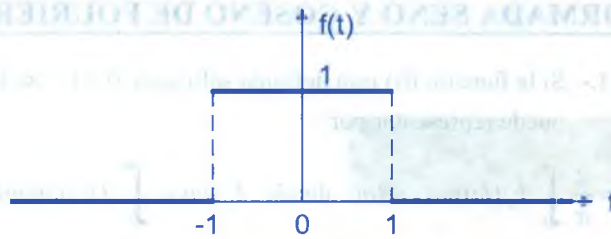
Si  $\mathcal{F}[f(t)]$  es imaginario puro, entonces se tiene  $F(\omega) = j X(\omega) \wedge R(\omega) = 0$ , entonces

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 0$  entonces  $f(t) \cos \omega t$  es impar, pero como  $\cos \omega t$  es par en  $t$  entonces  $f(t)$  es impar.

**OBSERVACIÓN.-** Si  $f(t)$  es una función real y  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = R(\omega) + j X(\omega)$  de  $\mathcal{F}[f_e(t)] = R(\omega)$  y  $\mathcal{F}[f_o(t)] = jX(\omega)$ , donde  $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$ , siendo  $f_e(t)$  y  $f_o(t)$  las componentes par e impar de  $f(t)$  respectivamente.

**Ejemplo.-** Hallar la integral de Fourier que representa la función  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < 1 \\ 0 & \text{para } |t| > 1 \end{cases}$

Solución



$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt \\
 &= \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-1}^1 = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega} + \frac{1}{j\omega} e^{j\omega} = \frac{2}{\omega} \left( \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} \right) = \frac{2}{\omega} \text{sen}\omega \\
 \therefore F(\omega) &= \frac{2\text{sen}\omega}{\omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{y } f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[f(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\text{sen}\omega}{\omega} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\omega}{\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\omega}{\omega} (\cos \omega t + j\text{sen}\omega t) d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\omega \cdot \cos \omega t}{\omega} d\omega + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\omega \cdot \text{sen}\omega t}{\omega} d\omega
 \end{aligned}$$

para  $f(t)$  es real, entonces  $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\omega \cdot \cos \omega t}{\omega} d\omega$

además  $f(-t) = f(t)$  es par entonces  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\omega \cdot \cos \omega t}{\omega} d\omega$

**Ejemplo.-** Deducir del ejemplo anterior que  $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$

**Solución**

Como  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos t \omega \cdot \text{sen}\omega}{\omega} d\omega$ , para  $t = 0$ , se tiene :

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos 0 \cdot \text{sen}\omega}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\omega}{\omega} d\omega \quad \therefore \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

## 16.5. TRANSFORMADA SENO Y COSENO DE FOURIER.-

**TEOREMA 1.-** Si la función  $f(t)$  está definida solo para  $0 < t < \infty$ . Demostrar que  $f(t)$  se puede representar por :

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega, \text{ donde } F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

### Demostración

Como  $f(t)$  solo está definida para  $0 < t < \infty$ , entonces podemos definir para  $-\infty < t < 0$  por la ecuación  $f(-t) = f(t)$  por lo que la función resultante es par.

Si se define  $F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$  entonces  $f(t) = \int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega t d\omega$

$F_c(\omega)$  se denomina Transformada coseno de Fourier de  $f(t)$  la cual se denotará por :

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega)) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t dt$$

**TEOREMA 2.-** Si  $f(t)$  está definida solo para  $0 < t < \infty$ , Demostrar que  $f(t)$  se puede representar por :  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \text{sen} \omega t dt$  donde  $F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \text{sen} \omega t dt$

### Demostración

Como  $f(t)$  solo está definida por  $0 < t < \infty$ , entonces podemos definir para  $-\infty < t < 0$  por la ecuación  $f(-t) = -f(t)$ , entonces la función resultante es impar.

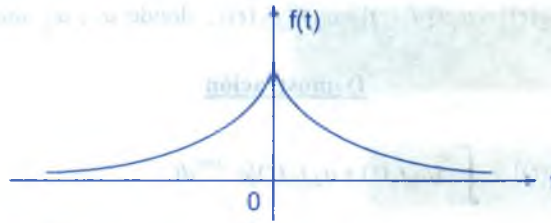
Si se define  $F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \text{sen} \omega t dt$ , entonces  $f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \text{sen} \omega t d\omega$

$F_s(\omega)$  se denomina Transformada seno de Fourier, la cual se denotara por

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \text{sen} \omega t dt, \quad f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}[F_s(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \text{sen} \omega t dt$$

**Ejemplo.-** Hallar la integral de Fourier de  $f(t) = e^{-kt}$  cuando  $t > 0$  y  $f(-t) = f(t)$ ,  $k > 0$

**Solución**



$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt} e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt} [\cos \omega t - j \text{sen} \omega t] dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt} \cos \omega t dt - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt} \text{sen} \omega t dt}_0$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt} \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-kt} \cos \omega t dt$$

$$= -\frac{2k}{k^2 + \omega^2} e^{-kt} \left( -\frac{\omega}{k} \text{sen} \omega t + \text{cos} t \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{2k}{k^2 + \omega^2} \quad \therefore F(\omega) = \frac{2k}{k^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$e^{-kt} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{k^2 + \omega^2} d\omega, \quad (t > 0, k > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{k^2 + \omega^2} dt = \frac{\pi}{2k} e^{-kt}, \quad (t > 0, k > 0)$$

**OBSERVACION.-** Si  $f(t)$  es una función par  $\Rightarrow X(\omega) = 0$  y

$$F(\omega) = R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad \text{y} \quad f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega$$

Si  $f(t)$  es impar, entonces  $R(\omega) = 0$  y  $F(\omega) = jX(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \text{sen} \omega t dt$  y

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \text{sen} \omega t d\omega$$



## 16.6. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADA DE FOURIER.-

- ① Si  $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$  y  $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$ , entonces :  
 $\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{F}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[f_2(t)]$ , donde  $a_1, a_2$  son constantes arbitrarios.

### Demostración

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \end{aligned}$$

- ② Si  $a$  es una constante real y  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , entonces  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

### Demostración

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega \left(\frac{u}{a}\right)} du \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \dots (1) \end{aligned}$$

sea  $at = u \Rightarrow dt = \frac{du}{a}$ ;  $a > 0$  y como  $-\infty < t < \infty \Rightarrow -\infty < at < \infty$  y  $t = \frac{u}{a}$

$a < 0$  y como  $-\infty > at > \infty$ , entonces

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)u} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)u} du = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene:  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

- ③ Si  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , Demostrar que  $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$

### Demostración

De la Propiedad (2) se tiene :  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 1$  entonces para

$a = -1$ , se tiene que :  $\mathcal{F}[f(-t)] = \frac{1}{|-1|} F(-\omega) = F(-\omega)$

④ Si  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , Demostrar que :  $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

**Demostración**

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega(t_0+u)} du$$

$$\text{Sea } t-t_0 = u \Rightarrow t = u+t_0 \quad = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u} du$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$= F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$-\infty < t-t_0 < \infty$$

⑤ Si  $\omega_0$  es una constante real y  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ . Demostrar que  $\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$

**Demostración**

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

⑥ Si  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , entonces  $\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi f(-\omega)$

**Demostración**

Sabemos que  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t} d\omega$ , entonces

$$2\pi \cdot f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \text{ si se reemplaza } t \text{ por } -t \text{ se tiene :}$$

$$2\pi \cdot f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi \cdot f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[F(t)]$$

Luego  $2\pi f(-\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

7 Si  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$  y  $f(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Demostrar que :

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega) = j\omega \mathcal{F}[f(t)]$$

**Demostración**

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{f(t)e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

como  $f(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \frac{f(t)e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$

Luego  $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega F(\omega) = j\omega \mathcal{F}[f(t)]$

**OBSERVACIÓN.-** Mediante la aplicación repetidas de la propiedad (7) se tiene :

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega) = (jn)^n \mathcal{F}[f(t)]$$

8 Si  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ,  $\omega \neq 0$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) = 0$ , Demostrar que :

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[f(t)]$$

**Demostración**

Sea  $\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  y  $\phi'(t) = f(t)$  y si

$$\mathcal{F}[\phi(t)] = \phi(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[\phi'(t)] = \mathcal{F}[f(t)] = j\omega \phi(\omega)$$

Con la condición que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) = 0$

Luego  $\phi(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$  si  $\omega \neq 0$

Si  $\omega = 0 \Rightarrow \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt$

Cuando  $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq 0$ , se tiene que:  $\mathcal{F} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

9 Si  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[-jt f(t)] = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$

**Demostración**

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ , de donde

$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} -jt f(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[-jt f(t)]$

Luego  $\mathcal{F}[-jt f(t)] = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$

**Ejemplo.-**

1 Si  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , entonces  $\mathcal{F}[f(at)e^{j\omega_0 t}] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$

**Solución**

$\mathcal{F}[f(at)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$

Sea  $at = u \Rightarrow dt = \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j(\omega - \omega_0)\frac{u}{a}} du = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\frac{(\omega - \omega_0)u}{a}} du$

Si  $a > 0$  y  $-\infty < t < \infty$   $= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$

Si  $a < 0$ , entonces  $\mathcal{F}[f(at)e^{j\omega_0 t}] = \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$

Luego  $\mathcal{F}[f(at)e^{j\omega_0 t}] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$

2 Si  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , hallar  $\mathcal{F}[f(t)\text{sen}\omega_0 t]$

**Solución**

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)\text{sen}\omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[f(t)\left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right)\right] = \frac{1}{2j} \mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t} - f(t)e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2j} (\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] - \mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]) = \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]\end{aligned}$$

Luego  $\mathcal{F}[f(t)\text{sen}\omega_0 t] = \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$

3

Hallar la Transformada de Fourier de  $f(t) = e^{-a|t|}$ **Solución**

$$\begin{aligned}F[e^{-a|t|}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 a^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \Big|_0^{\infty} \\ &= \left(\frac{1}{a-j\omega} - 0\right) - \left(0 - \frac{1}{a+j\omega}\right) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \\ &= \frac{a+j\omega + a-j\omega}{(a-j\omega)(a+j\omega)} = \frac{2a}{a^2 - \omega^2} \quad \text{Luego } \mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

4

Hallar la Transformada de Fourier de  $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ **Solución**

Aplicando la propiedad (6) al resultado del ejemplo (3) esto es, como

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = F(\omega) \quad \text{y} \quad f(t) = e^{-a|t|}$$

Entonces  $\mathcal{F}\left[\frac{2a}{a^2 + t^2}\right] = 2\pi \cdot f(-\omega) = 2\pi \cdot e^{-a|\omega|}$



Entonces  $\mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right] = 2\pi e^{-a|\omega|}$ , de donde  $F\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right] = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$

**16.7. CONVOLUCIÓN.-**

Consideremos las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , entonces La Convolución de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  está definida por la expresión :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx$$

la cual es denotada por :  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$

**OBSERVACION.-** Un caso especial importante es cuando  $f_1(t) = 0$  para  $t < 0$  y  $f_2(t) = 0$  para  $t < 0$ . Entonces  $f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx$

**16.8. PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN.-**

- ① Demostrar que la convolución es conmutativa  $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

**Demostración**

Aplicando la definición de Convolución se tiene:  $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx$

Sea  $t-x = y$  de donde  $dx = -dy$  además cuando  $\begin{cases} x \rightarrow -\infty & ; & y \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty & ; & y \rightarrow -\infty \end{cases}$

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(t-x) dx = \int_{\infty}^{-\infty} f_1(t-y) \cdot f_2(y) (-dy) \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} f_2(y) \cdot f_1(t-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) \cdot f_1(t-y) dy = f_2(t) * f_1(t) \end{aligned}$$

- ② Demostrar que la Convolución es asociativa  $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

**Demostración**

Sea  $g(t) = f_1(t) * f_2(t)$  y  $h(t) = f_2(t) * f_3(t)$ , entonces

$$g(t) * f_3(t) = f_1(t) * h(t) \quad \dots \text{(a)}$$

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \cdot f_2(t-y) dy \quad \dots \text{(b)}$$

$$g(t) * f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_3(t-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \cdot f_2(x-y) dy \right] f_3(t-x) dx \quad \dots \text{(c)}$$

y dado que  $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) \cdot f_3(t-z) dz \quad \dots \text{(d)}$

$$h(t-y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) \cdot f_3(t-y-z) dz \quad \dots \text{(e)}$$

por consiguiente, la integral se identifica dentro del paréntesis angular en el segundo miembro de (c) como  $h(t-y)$ , de donde  $g(t) * f_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) h(t-y) dy = f_1(t) * h(t)$   
 por lo tanto :  $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

- ③  $f(t) * \delta(t) = f(t)$ , donde  $\delta(t)$  es la función impulso unitario es decir que la Convolución de una función  $f(t)$  con una función impulso unitario conduce a la misma función  $f(t)$ .

#### Demostración

Aplicando la definición de Convólución se tiene :  $f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(t-x) dx$

utilizando la propiedad conmutativa se tiene :

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot f(t-x) dx = f(t) \text{ para la función impulso unitario.}$$

$$\therefore f(t) * \delta(t) = f(t)$$

- ④ Demostrar que:  $f(t) * \delta(t-T) = f(t-T)$  ;  $f(t-t_1) * \delta(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$

#### Demostración

$$f(t) * \delta(t-T) = \delta(t-T) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-T) \cdot f(t-x) dx = f(t-T)$$

$$\therefore f(t) * \delta(t-T) = f(t-T)$$

$$\begin{aligned}
 f(t-t_1)*\delta(t-t_2) &= \delta(t-t_2)*f(t-t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t_2)f(t-x-t_1)dx \\
 &= f(t-t_2-t_1) = f(t-t_1-t_2)
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(t-t_1)*\delta(t-t_1) = f(t-t_1-t_2)$$

### 16.9. TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN EL TIEMPO.-

Si  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$  y  $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ , entonces  $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(\omega).F_2(\omega)$

#### Demostración

Aplicando la definición de la Transformada de Fourier de  $f_1(t)*f_2(t)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx \right] e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{j\omega t} dt \right] dx \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\text{pero } \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[f_2(t-x)] = F_2(\omega)e^{-j\omega x} \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x).F_2(\omega)e^{-j\omega x} dx = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-j\omega x} dx \right] F_2(\omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x)e^{-j\omega x} dx] F_2(\omega) = F_1(\omega).F_2(\omega)
 \end{aligned}$$

Luego  $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(\omega).F_2(\omega)$

### 16.10. TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN LA FRECUENCIA.-

Si  $\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)] = f_1(t)$  y  $\mathcal{F}^{-1}[F_2(\omega)] = f_2(t)$

Entonces :  $\mathcal{F}[F_1(\omega)*F_2(\omega)] = 2\pi.f_1(t).f_2(t)$

$$\text{ó } \mathcal{F}[f_1(t).f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega - y)dy$$

### Demostración

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y).F_2(\omega - y)dy\right] \\ \begin{cases} \omega - y = x \\ \omega = x + y \\ d\omega = dx \end{cases} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y).F_2(\omega - y)dy \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y).F_2(x)dy \right] e^{j(x+y)t} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{j(1+y)t} dx \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t)e^{jyt} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{jx t} dx \right] dy \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] = 2\pi.f_1(t).f_2(t) \end{aligned}$$

Luego  $\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi.f_1(t).f_2(t)$

**Ejemplo.-** Utilizar la convolución para encontrar  $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\right]$

### Solución

Se conoce que  $\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega).F_2(\omega)$ , entonces

$$\mathcal{F}[F_1(\omega).F_2(\omega)] = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x).f_2(t-x)dx$$

También se sabe que  $\mathcal{F}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{\alpha + j\omega}$ , donde  $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Entonces  $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega}\right] = e^{-t}U(t)$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2+j\omega}\right] = e^{-2t}U(t), \text{ donde } U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}U(x)e^{-2(t-x)}U(t-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-2t}U(x)U(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-2t}dx = e^{-2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx \\ &= e^{-2t}(e^t - 1) = (e^{-t} - e^{-2t})U(t) \end{aligned}$$

$$\text{donde } U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad U(t-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t \\ 1 & \text{si } x \leq t \end{cases}$$

$$U(x)U(t-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \wedge x > t \\ 1 & \text{si } 0 < x < t \end{cases}$$

También podemos hallar f(t) desarrollando F(ω) en fracciones parciales es decir :

$$F(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}, \text{ entonces :}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2+j\omega}\right] = e^{-t} - e^{-2t} = (e^{-t} - e^{-2t})U(t)$$

### 16.11. TEOREMA DE PARSEVAL Y ESPECTRO DE ENERGIA.-

Si  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$  y  $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ , demostrar que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)f_2(t)]dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega$$

#### Demostración

$$\text{Se conoce que : } \mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega-y)dy$$

$$\text{como } \mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt, \text{ entonces}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega - y)dy$$

$$\text{Si } \omega = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(-y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega$$

### 16.12. EL TEOREMA PARSEVAL.-

$$\text{Si } \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \text{ entonces } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

#### Demostración

$$\begin{aligned} \text{Si } \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[f^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)(e^{j\omega t})^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{j\omega t}]^* dt \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t} dt \right]^* = F^*(-\omega) \end{aligned}$$

es decir  $\mathcal{F}[f^*(t)] = F^*(-\omega)$

Luego si hacemos  $f_1(t) = f(t)$  y  $f_2(t) = f^*(t)$ , entonces como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega, \text{ entonces :}$$

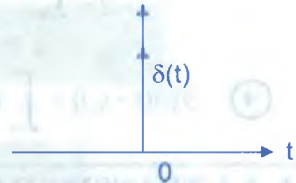
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*[-(-\omega)]d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

### 16.13. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN IMPULSO.-

La Transformada de Fourier de la función impulso unitario  $\delta(t)$ , está dado por :

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$



**OBSERVACIÓN.-** Analizando la definición se tiene:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

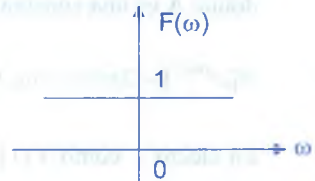
**OBSERVACIÓN.-**

$$\textcircled{1} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

En efecto : como  $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ , entonces

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[1]$$

$$\therefore \delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1]$$



$$\textcircled{2} \quad \delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t dt$$

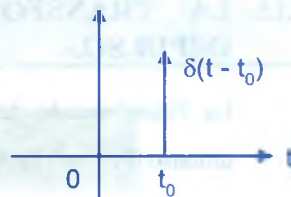
En efecto :  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega + j \text{sen} \omega t) dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos \omega t}_{\text{par}} dt + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\text{sen} \omega t}_{\text{impar}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t dt$$

$$\therefore \delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t dt$$

③ En general se tiene :

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} dx, \quad \delta(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xy) dx$$



④  $\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=t_0} = e^{-j\omega t_0}$

### 16.14. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONSTANTE.-

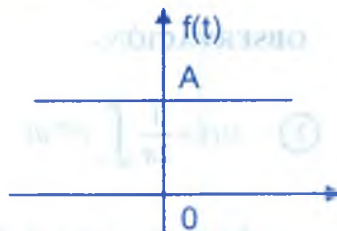
①  $\mathcal{F}[A] = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j\omega t} dt = 2\pi A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega)t} dt ; \delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} dx$

haciendo  $x = t$  e  $y = -\omega$ , entonces :

$$\delta(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega)t} dt = 2\pi A \delta(-\omega) \quad \text{y como}$$

$$\delta(-\omega) = \delta(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[A] = 2\pi A \delta(\omega)$$

donde  $A$  es una constante y  $\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\omega)$



②  $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$

En efecto : como  $\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\omega)$  y  $\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$ , entonces

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

**Ejemplo.-** Hallar  $\mathcal{F}[\cos \omega_0 t]$  y  $\mathcal{F}[\sen \omega_0 t]$

#### Solución

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} 2\pi \delta(\omega + \omega_0) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[\sen \omega_0 t] = -j\pi \delta(\omega - \omega_0) + j\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

**16.15. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DEL ESCALÓN UNITARIO.-**

Sea  $U(t)$  la función escalón unitario definido por :  $U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Sea  $\mathcal{F}[U(t)] = F(\omega)$  y como  $\mathcal{F}[U(-t)] = F(-\omega)$  y  $U(-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$  y  $U(t) + U(-t) = 1$ ,

excepto para  $t = 0$  y  $\mathcal{F}[U(t)] + \mathcal{F}[U(-t)] = \mathcal{F}[1] \Rightarrow F(\omega) + F(-\omega) = 2\pi \delta(\omega)$

Supongamos que  $F(\omega) = k \delta(\omega) + B(\omega)$ , donde  $B(\omega)$  es una función ordinaria y  $k$  es una constante y como  $\delta(-\omega) = \delta(\omega)$  entonces :

$$F(\omega) + F(-\omega) = k \delta(\omega) + B(\omega) + k \delta(-\omega) + B(-\omega) = 2k \delta(\omega) + B(\omega) + B(-\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

entonces se tiene  $k = \pi$  y  $B(\omega)$  es impar y podemos hallar  $B(\omega)$  y además

$$U'(t) = \frac{dU(t)}{dt} = \delta(t) \text{ y como } \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

$$\text{y } \mathcal{F}[U(t)] = F(\omega) \text{ y } \mathcal{F}[U'(t)] = j\omega F(\omega) = j\omega[\pi \delta(\omega) + B(\omega)] = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

y como  $\omega \delta(\omega) = 0$  y  $j\omega[\pi \delta(\omega) + B(\omega)] = 1$ , entonces

$$j\pi(\omega \delta(\omega)) + j\omega B(\omega) = 1 \Rightarrow j\omega B(\omega) = 1 \Rightarrow B(\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \text{ y como } F(\omega) = \mathcal{F}[U(t)] \quad \therefore \mathcal{F}[U(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

**Ejemplos.-**

① Calcular  $\mathcal{F}[1 - 3\delta(t) + 2\delta'(t - 2)]$

**Solución**

$$\mathcal{F}[1 - 3\delta(t) + 2\delta'(t - 2)] = \mathcal{F}[1] - 3\mathcal{F}[\delta(t)] + 2\mathcal{F}[\delta'(t - 2)]$$

$$= 2\pi \delta(\omega) - 3 + 2j\omega \mathcal{F}[\delta(t - 2)] = 2\pi\delta(\omega) - 3 + 2j\omega e^{-j2\omega}$$

② Calcular  $\mathcal{F}[\text{sen}^3 t]$

**Solución**

Se conoce que  $\text{sen}^3 t = \frac{1}{4} \text{sen} t - \frac{1}{4} \text{sen} 3t$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\text{sen}^3 t] &= \frac{1}{4} \mathcal{F}[\text{sen} t] - \frac{1}{4} \mathcal{F}[\text{sen} 3t] \\ &= \frac{1}{4} [-j\pi\delta(\omega - 1) + j\pi\delta(\omega + 1) - (-j\pi\delta(\omega - 3)) + j\pi\delta(\omega + 3)] \\ &= j\frac{\pi}{4} (\delta(\omega - 3) - \delta(\omega - 1)) + j\frac{\pi}{4} (\delta(\omega + 1) - \delta(\omega + 3))\end{aligned}$$

**16.16. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-**

① Encontrar la serie compleja de Fourier para la función  $f(t)$  definida por  $f(t) = \text{sen}^4 t$  en el intervalo  $\langle 0, \pi \rangle$  y  $f(t + \pi) = f(t)$

**Solución**

Mediante las identidades tenemos:  $e^{\pm jn\theta} = \cos n\theta \pm j \text{sen} n\theta$ , además se conoce

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{jn\theta} + e^{-jn\theta}}{2}; \quad \text{sen}(n\theta) = \frac{e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}}{2j}$$

Luego para el ejercicio dado se tiene:

$$f(t) = \text{sen}^4 t = \left( \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \right)^4, \text{ desarrollando se tiene:}$$

$$f(t) = \frac{1}{16} [e^{4j\theta} - 4e^{2j\theta} + 6 - 4e^{-2j\theta} + e^{-4j\theta}]$$

② Encontrar la serie compleja de Fourier para la función  $f(t)$  definida por  $f(t) = e^t$  en el intervalo  $\langle 0, 2\pi \rangle$  y  $f(t + 2\pi) = f(t)$ , mediante integración directa.

**Solución**



$$\text{Sea } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \text{ donde } c_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j} \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt, \text{ donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, T = 2\pi$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j- jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi[1-jn]} e^{j(1-jn)} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-jn)} (e^{2\pi(1-jn)} - 1) = \frac{1}{2\pi(1-jn)} (e^{2\pi} \cdot 2^{-2\pi n} - 1)$$

$$\text{como } e^{-2\pi n} = 1, \text{ luego } c_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)}$$

$$\text{entonces } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)} e^{jn t} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{jn t}}{1-jn}$$

- ③ Reducir el resultado del ejercicio (2) a la forma trigonométrica de la serie de Fourier.

**Solución**

Sabemos que  $a_n = c_n + c_{-n}$  de donde

$$c_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)} \Rightarrow c_{-n} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1+jn)}, \text{ luego se tiene:}$$

$$a_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)} + \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1+jn)} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-jn} + \frac{1}{1+jn} \right]$$

$$= \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left[ \frac{1+jn+1-jn}{1+n^2} \right] = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1+n^2)}$$

$$b_n = j[c_n - c_{-n}] = j \left[ \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)} - \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1+jn)} \right]$$

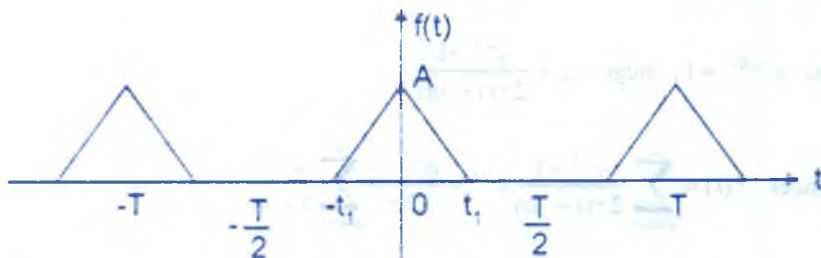
$$= j \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left[ \frac{1+jn-1+jn}{1+n^2} \right] = - \frac{(e^{2\pi} - 1)n}{\pi(1+n^2)}$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$

$$\text{Luego } f(t) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{2\pi} - 1}{1+n^2} \frac{\cos nt}{\pi} - \frac{e^{2\pi} - 1}{1+n^2} \frac{n \operatorname{sen} nt}{\pi} \right)$$

$$\therefore f(t) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos nt}{1+n^2} - \frac{n}{1+n^2} \operatorname{sen} nt \right) \right]$$

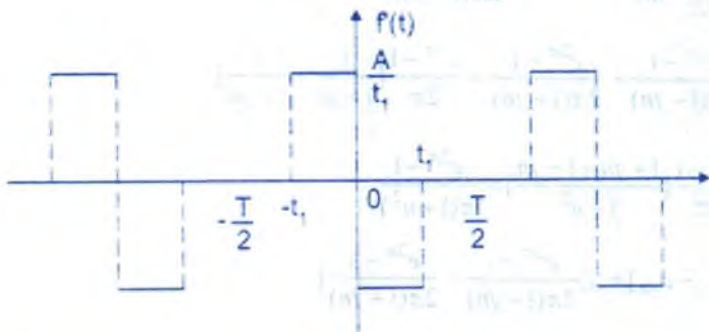
- 4 Hallar los coeficientes complejos de Fourier de la función  $f(t)$  que se muestra en la figura



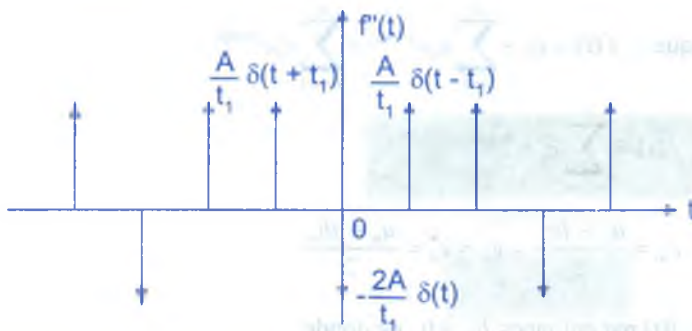
**Solución**

$$\text{Sea } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Diferenciando término a término se tiene:  $f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0) c_n e^{jn\omega_0 t}$ , graficando



$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0)^2 c_n e^{jn\omega_0 t} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n\omega_0)^2 c_n e^{jn\omega_0 t}$$



La segunda derivada de  $f(t)$  en el intervalo  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$  es :

$$f''(t) = \frac{A}{t_1} \delta(t + t_1) - \frac{2A}{t_1} \delta(t) + \frac{A}{t_1} \delta(t - t_1)$$

por lo tanto  $-(n\omega_0)^2 c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

$$= \frac{A}{T t_1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\delta(t + t_1) - 2\delta(t) + \delta(t - t_1)] e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{A}{T t_1} [e^{jn\omega_0 t_1} - 2 + e^{-jn\omega_0 t_1}] = \frac{2A}{T t_1} (\cos n\omega_0 t_1 - 1)$$

$$= -\frac{4A}{T t_1} \text{sen}^2 \frac{n\omega_0 t_1}{2}$$

Luego  $-(n\omega_0)^2 c_n = -\frac{4A}{T t_1} \text{sen}^2 \left(\frac{n\omega_0 t_1}{2}\right) \Rightarrow c_n = \frac{A t_1}{T} \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{n\omega_0 t_1}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 t_1}{2}\right)} \right]^2$

- 5 Demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de una función periódica par son reales, y los de una función periódica impar son imaginarios puros.

**Solución**

Sabemos que :  $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

i) Para  $f(t)$  par entonces  $b_n = 0$ , de donde

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - 0}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + 0}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n = \frac{a_n}{2}, \text{ real} \\ c_{-n} = \frac{a_n}{2}, \text{ real} \end{cases}$$

$c_n = c_{-n}$ ,  $f$  es par

ii) Para  $f(t)$  impar  $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$ , de donde

$$\begin{cases} c_n = \frac{0 - jb_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{0 + jb_n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n = -j \frac{b_n}{2}, \text{ imaginario} \\ c_{-n} = j \frac{b_n}{2}, \text{ imaginario} \end{cases}$$

$c_n = -c_{-n}$

6

Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones periódicas con periodo  $T$  y sus expansiones de Fourier son

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{para } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \text{ Demostrar que la función}$$

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \text{ es una función periódica de igual periodo } T, \text{ se puede}$$

$$\text{expresar como } h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t}$$

### Solución

$$\text{Sea } h(t) = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad \dots (1)$$

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t} \quad \dots (2)$$

de (1) y (2) se deduce que  $f(t) = f(t - \tau)g(\tau)$  entonces tenemos que demostrar que :

$$f(t - \tau)g(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t} \quad \dots (3)$$

como

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 (t - \tau)} \\ g(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 \tau} \end{cases}$$

ahora multiplicamos ambos miembros

$$f(t - \tau)g(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 (t - \tau)} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 (t - \tau + \tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\therefore f(t - \tau)g(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{por lo tanto} \quad h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t}$$

7 Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones periódicas de periodo  $T$  y sus expansiones de Fourier son

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \text{para} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{Demostrar que la función}$$

$h(t) = f(t).g(t)$  es una función periódica de igual periodo  $T$ , que se puede expresar como

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{donde} \quad \alpha_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k \quad (\text{sug. demostrar que } \alpha_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k \text{ son}$$

los coeficientes de Fourier de  $h(t)$ ).

**Solución**

Sean  $h(t) = f(t).g(t)$  ... (1)



$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} \quad \dots (2)$$

como  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} e^{j\omega_0(n-k)t}$  y  $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_k e^{j\omega_0 k t}$

multiplicando ambos miembros se tiene :

$$f(t)g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} e^{j\omega_0(n-k)t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{j\omega_0 k t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k e^{j\omega_0(n-k+k)t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k e^{j\omega_0 n t}$$

de donde  $h(t) = f(t) \cdot g(t)$

Si  $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t}$  y  $\alpha_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k$

Luego  $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ , como  $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k e^{j\omega_0 n t}$

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k e^{j\omega_0 n t} \right) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k dt = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k$$

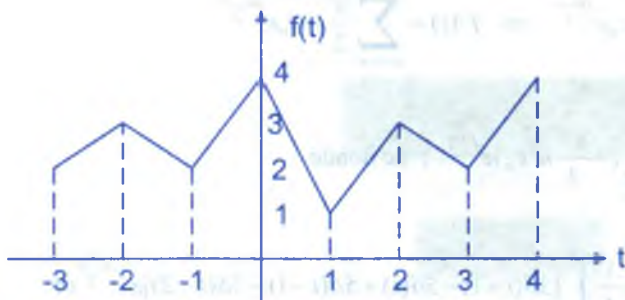
$$\alpha_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} d_k \Rightarrow h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{L.q.q.d.}$$

8

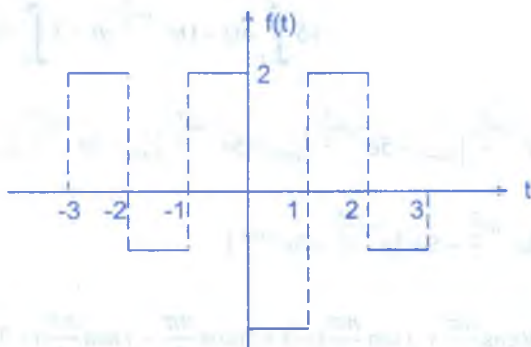
Hallar la serie compleja, utilizando derivacion (Delta de Dirac) de la función

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & ; -2 < t < -1 \\ 2t+4 & ; -1 < t \leq 0 \\ -3t+4 & ; 0 < t < 1 \\ 2t-1 & ; 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

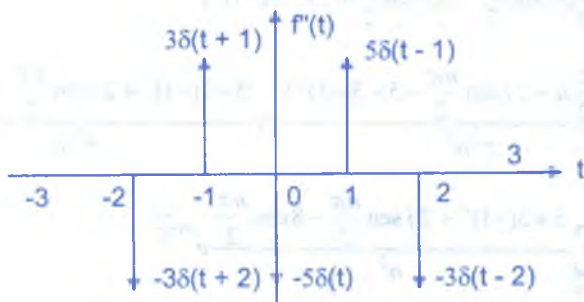
Solución



$$f(t) = \begin{cases} -1 & ; -2 < t < -1 \\ 2 & ; -1 < t \leq 0 \\ -3 & ; 0 < t < 1 \\ 2 & ; 1 \leq t < 2 \end{cases}$$



$f''(t) = 0$ , cuya gráfica es :



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}, \quad f''(t) = 3\delta(t+1) - 5\delta(t) + 5\delta(t-1) - 3\delta(t-2), \quad -2 < t < 2$$



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{\pi}{2}t} \Rightarrow f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2} j n c_n e^{jn\frac{\pi}{2}t}$$

$$f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi^2}{4} n^2 c_n\right) e^{jn\frac{\pi}{2}t}, \text{ de donde}$$

$$-\frac{\pi^2 n^2}{4} c_n = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 [3\delta(t+1) - 5\delta(t) + 5\delta(t-1) - 3\delta(t-2)] e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2 n^2}{4} c_n &= \frac{1}{4} \left[ \int_{-2}^2 3\delta(t+1) e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt - 5 \int_{-2}^2 5\delta(t) e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt + \right. \\ &\quad \left. + 5 \int_{-2}^2 \delta(t-1) e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt - 3 \int_{-2}^2 \delta(t-2) e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi^2 n^2}{4} c_n = \frac{1}{4} [3e^{-jn\frac{\pi}{2}t} \Big|_{t=-1} - 5e^{-jn\frac{\pi}{2}t} \Big|_{t=0} + 5e^{-jn\frac{\pi}{2}t} \Big|_{t=1} - 3e^{-jn\frac{\pi}{2}t} \Big|_{t=2}]$$

$$= \frac{1}{4} [3e^{-jn\frac{\pi}{2}} - 5 + 5e^{-jn\frac{\pi}{2}} - 3e^{-jn\pi}]$$

$$= \frac{1}{4} [3(\cos \frac{n\pi}{2} + j \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}) - 5 + 5(\cos \frac{n\pi}{2} - j \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}) - 3(-1)^n]$$

$$= \frac{1}{4} [8 \cos \frac{n\pi}{2} - 2j \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - 5 - 3(-1)^n]$$

$$c_n = -\frac{(8 \cos \frac{n\pi}{2} - 2j \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - 5 - 3(-1)^n)}{\pi^2 n^2} = \frac{5 + 3(-1)^n + 2j \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - 8 \cos \frac{n\pi}{2}}{\pi^2 n^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{5 + 3(-1)^n + 2j \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - 8 \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2} e^{jn\frac{\pi}{2}t}$$

9

Usando convolución, hallar  $f(t) = F^{-1} \left[ \frac{1}{(1+j\omega)}, \frac{1}{(2+j\omega)} \right]$

**Solución**

$$F(\omega) = F[f(t)] = \frac{1}{(1+j\omega)} \cdot \frac{1}{(2+j\omega)}, \text{ de donde}$$

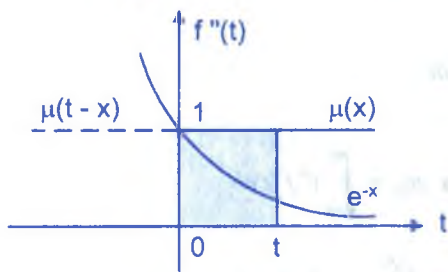
$$G(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \text{ y } H(\omega) = \frac{1}{2+j\omega}, \text{ por lo tanto se tiene:}$$

$$g(t) = F^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega}\right] = e^{-t} \mu(t) \quad \dots (1)$$

$$h(t) = F^{-1}\left[\frac{1}{2+j\omega}\right] = e^{-2t} \mu(t) \quad \dots (2)$$

por convolución  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)} \mu(t-x) e^{-2x} \mu(x) dx$

$$f(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \mu(x) \mu(t-x) dx$$



$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t \\ 1 & \text{si } x < t \end{cases}$$

$$\mu(x)\mu(t-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \wedge x > t \\ 1 & \text{si } 0 < x < t \end{cases}$$

$$f(t) = e^{-t} \int_0^t e^{-x} dx = e^{-t} \left(-e^{-x} / -1\right) \Big|_0^t = e^{-t} (-e^{-t} + 1)$$

$$f(t) = -e^{-2t} + e^{-t} \text{ de donde } f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})U(t)$$

10 Si  $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$ , demostrar que  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$  se puede expresar como

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}$$

**Solución**

Por definición  $F(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

Como  $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

Si  $x = j\omega t$ , al reemplazar se tiene:  $e^{-j\omega t} = 1 - j\omega t + \frac{1}{2!}(j\omega t)^2 - \frac{1}{3!}(j\omega t)^3 + \dots$

multiplicando a ambos miembros por  $f(t)$ , e integrando

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(j\omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2!}(j\omega t)^2 f(t) dt - \dots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = (j\omega)^0 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt - (j\omega)^1 \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt + \frac{(j\omega)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (j\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$$

como  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$  y además  $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$

por lo tanto se tiene:  $F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}$  L.q.q.d.

**16.17. EJERCICIOS PROPUESTOS.-**

- ① Encontrar los coeficientes complejos de Fourier y dibujar los espectros de frecuencia para la semionda senoide rectificada  $f(t)$  definida por  $f(t) = \begin{cases} A \text{sen } \omega_0 t, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$  y

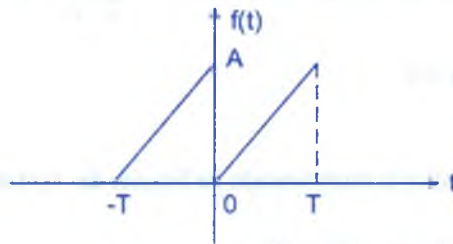
$f(t+T) = f(t)$ , donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .



2) Encontrar los coeficientes complejos de Fourier y dibujar los espectros de frecuencia para la función diente de sierra definida por  $f(t) = -\frac{1}{T}t + \frac{1}{2}$ , para  $0 < t < T$  y  $f(t+T) = f(t)$ .

3) Aplicar el teorema de Parseval al resultado del ejercicio (2) para probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

4) Mediante la diferenciación encontrar la serie compleja de Fourier para la función diente de sierra de la figura.



5) Hallar la serie compleja de Fourier de  $F(t) = |t^2 - 1|$ ,  $-2 < t < 2$ , graficar  $F(t)$  y su espectro de amplitud.

6) Si  $f(t)$  es una función periódica con periodo  $T$ , y los coeficientes complejos de Fourier son  $c_n$ , demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de la función portadora, de amplitud modulada periódicamente  $f(t) \cos m\omega_0 t$  están dados por  $\frac{1}{2}(c_{n-m} + c_{n+m})$ .

7) Calcular la Transformada de Fourier de las siguientes funciones

a)  $U(t - a)$  (función escalón unitario)

b)  $S_a(4t) * e^{-at^2}$ , donde  $S_a(4t) = \frac{\text{sen } 4t}{4t}$

8) Sean  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ ,  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{t^2}{2b^2}}$ . Calcular  $H(t) = f(t) * g(t)$

9) Usando la definición de convolución, calcular  $h(t) = |t| * e^{-at} U(t)$

- 10 Calcular  $F[f''(t) * t^2 U(t)]$
- 11 Usando la definición de convolución, calcular  $e^{-t} * |t| U(t)$
- 12 Calcular  $F\left[\frac{3j\omega + 5}{\omega^2 - 3j\omega - 2}\right]$
- 13 Calcular  $F^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2 - 5j\omega + 6} + (\cos \omega + e^\omega)\delta(\omega)\right]$
- 14 Si  $f(t)$  es integrable en el intervalo finito  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  y  $\omega$  es real, demostrar que:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt = 0$$



- 15 Si  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , hallar la transformada de Fourier de  $f(t) \sin \omega_0 t$
- 16 Calcular  $\mathcal{F}\{|t| \cos 100\pi t + U(t-4)\}$
- 17 Si  $\mathcal{F}\{f(t)\} = H(\omega)$ , Probar que :  $\mathcal{F}\{H(t)\} = 2\pi F(-\omega)$
- 18 Determinar  $\mathcal{F}\{\cos(at)\} = H(\omega)$  y gráficas  $\|H(\omega)\|$
- 19 Si  $\mathcal{F}\{f(t)\} = H(\omega)$ , Probar que :  $F[F(t) \cos at] = \frac{1}{2}[H(\omega - a) + H(\omega + a)]$
- 20 Verificar que:  $F[e^{-a|t|}(1 + a|t|)] = \frac{4a^3}{(a^2 + \omega^2)^2}$
- 21 Si  $H(t) = t^4$ ,  $-c < t < c$ , Halle su serie compleja de Fourier de  $H(t)$  y graficar su espectro y amplitud.
- 22 Por el método de impulsos unitarios, calcular la serie compleja de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & , -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{4}{\pi}t & , -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{8t}{\pi} - 6 & , \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

- 23) Demostrar que si  $f(t)$  es una función periódica y real con periodo  $T$ , entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{donde } c_n \text{ son los coeficientes complejos de Fourier de la función } f(t).$$

- 24) Demostrar que si  $f(t)$  es una función periódica y real con periodo  $T$ , entonces:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)f(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{j\omega_0 n \tau}, \quad \text{donde } c_n \text{ son los coeficientes complejos de Fourier de } f(t) \text{ y } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

- 25) El momento  $n$ -ésimo  $m_n$  de una función  $f(t)$  está definido por  $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$  para

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{demostrar que } m_n = (j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{donde}$$

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = \left. \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0} \quad \text{y } F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

- 26) Si  $f(t)$  es una función imaginaria pura, esto es  $f(t) = j g(t)$ , donde  $g(t)$  es real, demostrar que las partes real e imaginaria de  $F(\omega)$  son  $R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin \omega t dt$ ,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos \omega t dt \quad \text{así mismo, demostrar que } R(\omega) \text{ y } X(\omega) \text{ son funciones impar y par de } \omega, \text{ respectivamente, esto es: } R(-\omega) = -R(\omega), X(-\omega) = X(\omega), F(-\omega) = -F^*(\omega)$$

- 27) Hallar la integral de Fourier que representa la función  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < 1 \\ 0 & \text{para } |t| > 1 \end{cases}$

- 28) Utilizar el resultado del ejercicio (27), para deducir  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$   
(sug: hacer  $t = 0$  en el resultado de (27)).



## BIBLIOGRAFIA

- 1 Matemáticas Superiores para Ingeniería por: C.R. – WYLIE, JR.
- 2 Matemática Avanzada para Ingeniería. Volumen I por: ERWIN KREYSZIG.
- 3 Ecuaciones Diferenciales por: KREIDER – KULLER – OSTBERG.
- 4 Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por: A. KISELIOV – M. KROSNOV – G. MAKARENKO.
- 5 Ecuaciones Diferenciales por: DONALD – L. KREIDER.
- 6 Ecuaciones Diferenciales por: RALPH PALMER AGNEV.
- 7 Ecuaciones Diferenciales Aplicadas por: M.R. – SPIEGEL.
- 8 Ecuaciones Diferenciales Elementales por: L.M. KELLS.
- 9 Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera por: WILLIAN E. BOYCE – RICHARD C. PRIMA.
- 10 Matemáticas Avanzadas para Ingeniería por: ERWIN KREYSZIG. Tomo II.
- 11 Ecuaciones Diferenciales por: TAKAUCHI – RAMIREZ – RUIZ.
- 12 Ecuaciones Diferenciales por: KAJL NIELSEN.
- 13 Ecuaciones Diferenciales por: SHEPLEY L. ROSS.
- 14 Ecuaciones Diferenciales Elementales por: EARL D. RAINVILLE.
- 15 Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: WILLIAN R. DERAICA – STANLEY Y GROSSMAN.
- 16 Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: F. SINMONS.
- 17 Curso Elemental de Matemática Superior. Tomo V por: J. QUINET.
- 18 Ecuaciones Diferenciales por: FRANK AYRES.
- 19 Introducción a las Ecuaciones Diferenciales por: WILLIAN E. BOYCE Y RICHARD C. DIPRIMA.
- 20 Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional por: L. EL SGOLTS.
- 21 Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por: EARL Y. CODDINGTON.
- 22 Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático por: G. BARANENKOV – B. DEMIDOVICH.
- 23 Ecuaciones Diferenciales por: H. B. PHILLIPS.
- 24 Ecuaciones Diferenciales por: HARRY W. REDDICK y DONALD E. KIBBEY.



## Bibliografía

- 25 Introducción al Análisis Lineal por: KREIDER – KULLER – OSTBERG – PERKINS.  
Tomo II.
- 26 Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: BETZ BURCHAM EWING.
- 27 Ejercicios y Problemas de Matemática Superior por: P. DANKO y A. POPOV. Tomo II.
- 28 Matemática Superior en Ejercicios y Problemas por: T. y A. KOZHE'VNIKOVA.
- 29 Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático por: G.N. BERMAN.
- 30 Matemática para Administración y Economía por: JEAN E. DRAPER, JANE S. KLINGMAN. JEAN WEBER.
- 31 Matemática para Economistas por: TARO YAMANE.
- 32 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por: CARLOS IMOZ – ZOENEK VOREL.
- 33 Matemática Superior para Matemáticos, Física e Ingenieros. Volumen II por: R. ROTHE.
- 34 Análisis Matemático por: PROTTER – MORREY.
- 35 Análisis Matemático. Volumen II por HAASER – LASALLE – SULLIVAN.
- 36 Calculus. Volumen II por: TOM M. APOSTOL.
- 37 Ecuaciones Diferenciales por: F. MERCELLAN, L. CASASIAS, A. ZARZO.
- 38 Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: DENNIS G. ZILL.
- 39 Matemáticas Avanzadas para Ingeniería por: PETER V. O'NEIL.
- 40 Ecuaciones Diferenciales por: C.H. EDWARDS, JR. DAVID E. PENNEY.
- 41 Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales por R. KENT NAGLE y EDWARDS B. SAFF.
- 42 Ecuaciones Diferenciales y problemas con condiciones en la frontera por: C.H. EDWARDS, Jr. y DAVID E. PENNEY.
- 43 Curso de Matemática Superior Tomo IV por: J. QUINET.
- 44 Transformada de Laplace por: MURRAY R. SPIEGEL.
- 45 Introducción to the Laplace Transfor por: HOLL, D.C. MAPLE Y B. WINDOGRADE.
- 46 Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera por: STEPHEN L. CAMPBELL y RICHARD HABERMAN.
- 47 Introducción al Análisis de Fourier por: R.D. STUART.
- 48 Introducción a las Series e Integrales de Fourier por: ROBERT SEELEY.
- 49 Series de Fourier y Problemas de Contorno por: RUEL V. CHURCHILL.
- 50 Análisis de Fourier por HWEI P. HSU.



*Eduardo Espinoza Ramos*  
*Graduado y Titulado en Matemática Pura.*  
*Catedrático de las principales*  
*Universidades de la Capital*

## OBRAS PUBLICADAS

