Cálculo II

Eliezer Batista
Elisa Zunko Toma
Márcio Rodolfo Fernandes
Silvia Martini de Holanda Janesch

2ª Edição
Florianópolis, 2012

Governo Federal
Presidente da República: Dilma Vana Rousseff
Ministro de Educação: Aloízio Mercadante
Coordenador Nacional da Universidade Aberta do Brasil: Celso Costa

Universidade Federal de Santa Catarina
Reitora: Roselane Neckel
Vice-Reitora: Lúcia Helena Martins Pacheco
Pró-Reitoria de Graduação: Roselane Fátima Campos e Rogério Luiz de Souza
Pró-Reitoria de Pós-Graduação: Joana Maria Pedro e Juarez Vieira do Nascimento
Pró-Reitoria de Pesquisa: Jamil Assereuy Filho e Heliete Nunes
Pró-Reitoria de Extensão: Edilson da Rosa e Maristela Helena Zimmer Bortolini
Pró-Reitoria de Planejamento e Orçamento: Luiz Alberton e Izabela Raquel
Pró-Reitoria de Administração: Antônio Carlos Montezuma Brito e Irvando Luiz Speranzini
Pró-Reitoria de Assuntos Estudantis: Beatriz Augusto de Paiva e Simone Matos Machado
Centro de Ciências da Educação: Vera Lucia Bazzo
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas: Tarciso Antônio Grandi

Cursos de Licenciaturas na Modalidade à Distância
Coordenação Acadêmica Matemática: Márcio Rodolfo Fernandes
Coordenação de Ambientes Virtuais: Nereu Estanislau Burin

Comissão Editorial
Antônio Carlos Gardel Leitão
Albertina Zatelli
Elisa Zunko Toma
Igor Mozolevski
Luiz Augusto Saeger
Roberto Corrêa da Silva
Ruy Coimbra Charão

Laboratório de Novas Tecnologias – LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica das Licenciaturas à Distância UFSC/CED/CFM

Coordenação Geral: Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Marina Bazzo de Espíndola

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Andréa Brandão Lapa

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materias: Juliana Cristina Faggion Bergmann

Design Gráfico

Coordenação: Cíntia Cardoso, Cristiane Barbato Amaral, Talita Ávila Nunes

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Cíntia Cardoso, João Paulo Battisti de Abreu, Kallani Bonelli, Laura Rodrigues, Roberto Colombo Gava, Talita Ávila Nunes

Ilustrações: Grazielle Xavier, Jean Henrique Menezes

Capa: Cíntia Cardoso

Design Instrucional

Coordenação: Elizandro Maurício Brick

Design Instrucional: Adriano Luiz dos Santos Né, Nicélio José Gesser, Maria Carolina Machado Magnus

Revisão Gramatical: Contextuar

Ficha Catalográfica

C144

Cálculo II/ Eliezer Batista, Elisa Zunko Toma, Márcio Rodolfo Fernandes, Silvia Martini de Holanda Janesch - 2 ed. - Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2012.

308 p.
Inclui bibliografia
UFSC. Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância
ISBN 978-85-8030-022-2

1. Cálculo integral. 2. Séries (Matemática). 3. Séries de potência. 4. Ensino a distância. I. Batista, Eliezer.

CDU: 517.3

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da UFSC

Sumário

Apresentação

Caro estudante,

Estamos iniciando a disciplina de Cálculo II!

O estudo dos conteúdos desta disciplina requer que você tenha conhecimento sobre limite, continuidade e derivada de função de uma variável, conceitos estes estudados na disciplina de Cálculo I.

O conteúdo deste material está divido em cinco capítulos. No Capítulo 1 estudaremos o conceito de integral e suas propriedades. Demonstraremos o Teorema Fundamental do Cálculo, um resultado importante que relaciona a integral com a derivada, e que simplifica consideravelmente a solução de muitos problemas envolvendo integrais. No Capítulo 2 estudaremos algumas técnicas de integração. No Capítulo 3, utilizaremos a integral definida para resolver problemas de cálculo de áreas, comprimento de arcos, volume de sólidos de revolução e área de superfícies de revolução. Os Capítulos 4 e 5 são dedicados ao estudo de séries numéricas e séries de potências. Vários métodos, ou testes, para analisar a convergência de séries numéricas e séries de potências serão apresentados, além de suas aplicações ao cálculo de integrais e representação de funções por séries de potências.

Os Capítulos 1 e 2 foram escritos pela Professora Sívia, o Capítulo 3 foi elaborado pelo Professor Eliezer e os Capítulos 4 e 5 são de responsabilidade da Professora Elisa. Em partes do texto são apresentadas atividades complementares que envolvem o uso de softwares matemáticos. Essas atividades foram contribuições do Professor Márcio.

Esperamos que ao final da disciplina, você tenha condições de calcular e aplicar com adequado desembaraço, integrais de função de uma variável e, além disso, que saiba analisar a convergência de séries numéricas e de potências, bem como representar funções por séries de potências. Também, esperamos que fique bem compreendido o sentido de aproximar uma função por seus polinômios de Taylor.

Os autores

Capítulo 1

Integrais

Capítulo 1

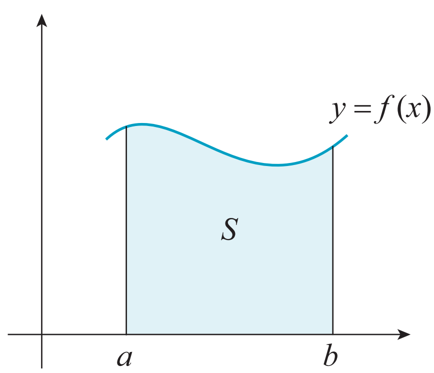
Integrais

Neste capítulo, estudaremos o conceito de integral e suas propriedades. A integral tem muitas aplicações na geometria (cálculo de área de regiões planas, comprimento de arco e cálculo de volumes) e na física (cálculo de trabalho, massa e momento de inércia). Um dos resultados mais importantes deste capítulo é o Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona a integral com a derivada, e simplifica consideravelmente a solução de muitos problemas envolvendo integrais.

1.1 Introdução

A principal motivação para estudar o conceito de integral está em encontrar a área de uma região plana qualquer. O problema pode ser formulado da seguinte forma:

Problema 1. Considere uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Admitimos que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$. Queremos encontrar a área da região plana S que está limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x=a$ e $x=b$, e o eixo x.



$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\leq y\leq f(x)\ e\ a\leq x\leq b\}$$

Figura 1.1

O problema de cálculo de área de uma região plana é antigo. Os gregos, há aproximadamente 2.500 anos, já sabiam como encontrar a área de qualquer polígono. A ideia da técnica empregada era dividir o polígono em triângulos ou retângulos e em seguida somar as áreas obtidas. No caso em que a região plana era qualquer, o método utilizado era o da exaustão, que consiste em inscrever ou circunscrever a figura com polígonos cujas áreas eram conhecidas e melhorar a aproximação da área desejada, aumentando o número de polígonos inscritos ou circunscritos. As Figuras 1.2 e 1.3 ilustram o método aplicado pelos gregos.

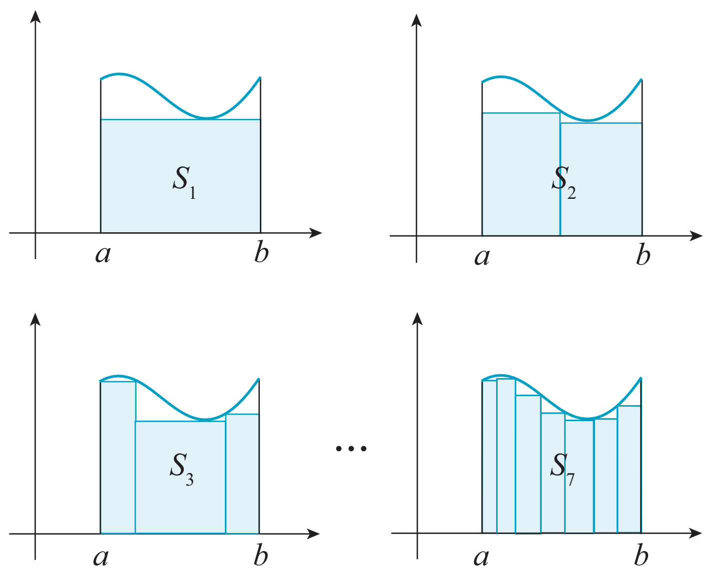


Figura 1.2

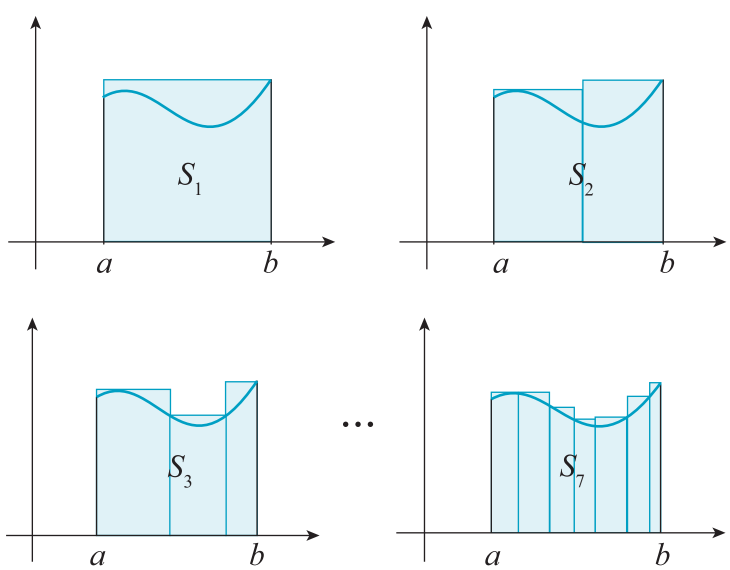


Figura 1.3

Para encontrar a área da região S do Problema 1, em primeiro lugar precisamos dizer o que significa a área de S, e depois tentar calculá-la. A ideia intuitiva de área nos leva a dizer que a área de uma região plana é um número real não negativo. Mas como defini-lo? Poderíamos pensar em definir a área de S como sendo o supremo das áreas S_n dos retângulos contidos em S (ver Figura 1.2). Vamos chamá-lo de medida interna de S, que denotaremos por $m_{\text{int}}(S)$. De forma semelhante, poderíamos pensar em definir a área de S como ínfimo das áreas S_n dos retângulos que contêm S (ver Figura 1.3). Vamos chamar este número de medida externa de S, e indicaremos por $m_{\text{ext}}(S)$. Ao tentar definir a área de S usando $m_{\text{int}}(S)$ ou $m_{\text{ext}}(S)$ surge a pergunta: esses números são iguais? Quando a função f é contínua a resposta é afirmativa. Assim, definimos a área de S como sendo o número real A não negativo tal que

$$A = m_{\text{int}}(S) = m_{\text{ext}}(S)\,.$$

As noções de $m_{\text{int}}(S)$ e $m_{\text{ext}}(S)$ levam os conceitos de integrais inferior e superior, respectivamente. No caso em que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e não negativa, os números $m_{\text{int}}(S)$ e $m_{\text{ext}}(S)$ coincidem com as integrais inferior e superior, respectivamente. Na Seção 1.2, trabalharemos com função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada, mas não necessariamente contínua, e veremos que as integrais inferior e superior nem sempre são iguais.

Antes de apresentar as definições de integrais inferior e superior, vamos relembrar os conceitos de supremo e ínfimo de um conjunto e suas propriedades que serão úteis para compreensão do texto.

Supremo e ínfimo de um conjunto

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que A é limitado superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in A$. Cada $b \in \mathbb{R}$ com essa propriedade chama-se cota superior de A. Analogamente, dizemos que A é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in A$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ com essa propriedade chama-se cota inferior de A.

Quando o conjunto A é limitado inferiormente e superiormente, dizemos que A é limitado, isto é, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $A \subset [a,b]$.

Uma cota superior de A que pertence a A, chama-se máximo de A e indica-se por $\max A$. Uma cota inferior de A que pertence a A, denomina-se mínimo de A e indica-se por $\min A$.

Exemplo 1.1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$. Temos:

a) $2, 1, -100$ são cotas inferiores de A. O conjunto A é limitado inferiormente.

b) O conjunto A não possui cota superior, isto é, não existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in A$. Logo, A não é limitado superiormente.

c) 2 é uma cota inferior de A que pertence ao conjunto A. Logo, $\min A = 2$.

Exemplo 1.2. Seja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$. Temos:

a) $-10, -5, -3$ são cotas inferiores de B e $4, 5, 7$ são cotas superiores de B. Segue que B é um conjunto limitado inferiormente e superiormente, logo B é limitado.

b) -3 é uma cota inferior de B que pertence ao conjunto B. Logo, $\min B = -3$.

c) O conjunto B não tem máximo. De fato, para todo $x \in B$ temos $\dfrac{x+4}{2} \in B$ e $x < \dfrac{x+4}{2}$. Desta forma, para cada $x \in B$, existe outro número em B que é estritamente maior que x. Portanto, B não admite máximo.

O conjunto B acima é limitado superiormente e não admite máximo, mas tem uma cota superior que é a menor de todas. Essa situação conduz a definição de **supremo** de um conjunto.

Definição 1.1. Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ chama-se supremo de A, quando b é a menor das cotas superiores de A e indica-se por $\sup A = b$.

O supremo de um conjunto pode ser caracterizado através das condições (S_1) e (S_2) apresentadas na proposição abaixo.

Proposição 1.1. Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ é o supremo de A, se, e somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:

(S_1) Para todo $x \in A$, tem-se $x \leq b$;

(S_2) Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $x \in A$ tal que $b - \varepsilon < x$. (Ver Figura 1.4)

Demonstração.

$(\Rightarrow)$ (S_1) é imediata, pois b é cota superior de A.

Para provar (S_2), suponhamos que existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $b - \varepsilon_0 \geq x$ para todo $x \in A$. Assim, $b - \varepsilon_0$ é uma cota superior de A. Como $b - \varepsilon_0 < b$ temos uma contradição, pois b é a menor das cotas superiores. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $b - \varepsilon < x$.

$(\Leftarrow)$ De (S_1) temos que b é cota superior de A. Falta mostrar que b é a menor das cotas superiores. Suponhamos que exista outra cota superior, digamos c, tal que $c < b$. Então $\varepsilon = b - c > 0$ e por (S_2), existe $x \in A$ tal que $b - (b - c) < x$. Assim, existe $x \in A$ tal que $c < x$, o que é absurdo, uma vez que c é uma cota superior de A.

■

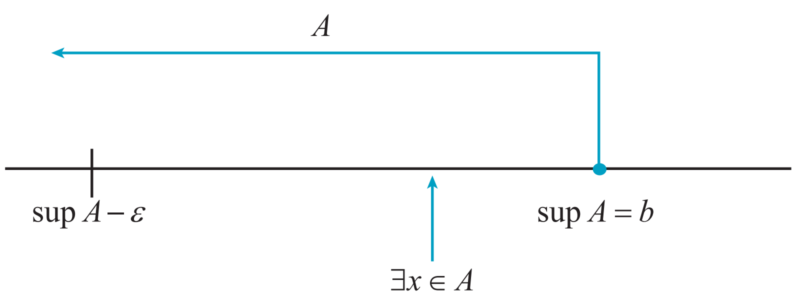


Figura 1.4

Note que (S_1) diz que b é cota superior de A e (S_2) afirma que não existe outra cota superior menor que b. De maneira análoga, define-se o **ínfimo** de um conjunto.

Definição 1.2. Seja $A \neq \varnothing$, $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ chama-se ínfimo de A, quando a é a maior das cotas inferiores de A e indica-se por $\inf A = a$.

Proposição 1.2. Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(I_1) Para todo $x \in A$, tem-se $x \geq a$;

(I_2) Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $x \in A$ tal que $x < a + \varepsilon$. (Ver Figura 1.5)

Demonstração. A prova é análoga à da proposição anterior. Fica como exercício.

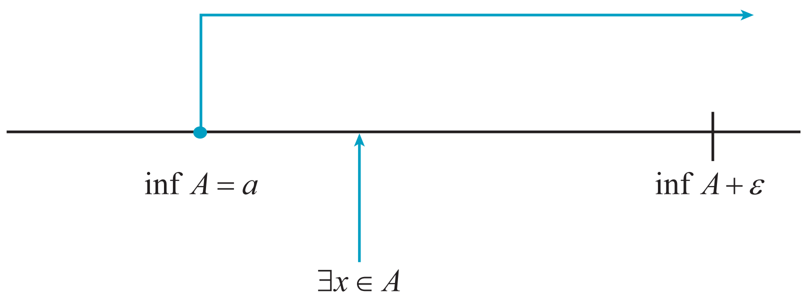


Figura 1.5

Exemplo 1.3. Considere o conjunto B do Exemplo 1.2. Temos:

a) 4 é a menor das cotas superiores de B, logo $\sup B = 4$.

b) -3 é a maior das cotas inferiores de B, portanto $\inf B = -3$.

c) Note que o conjunto B possui $\min B = \inf B$, e B não admite elemento máximo, mas possui supremo.

Em $\mathbb{R}$, todo subconjunto limitado superiormente possui supremo. Esse fato é apresentado no teorema abaixo.

Teorema 1.1. (**Teorema do Supremo**) Todo subconjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo em $\mathbb{R}$.

De forma análoga ao Teorema do Supremo, temos um resultado que diz que todo conjunto não vazio de números reais, que é limitado inferiormente, admite ínfimo.

Lembremos as seguintes propriedades de supremo e ínfimo.

Proposição 1.3. Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ e $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$. Se B é limitado e $A \subset B$, então

i) $\sup A \leq \sup B$ e

ii) $\inf B \leq \inf A$.

Demonstração.

i) Por hipótese, B é limitado, então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in B$. Como $A \subset B$, temos $x \leq b$ para todo $x \in A$. Assim, A é limitado superiormente.

Sendo A e B limitados superiormente, A e B admitem supremos, digamos $\sup A = \alpha$ e $\sup B = \beta$. De $\sup B = \beta$, temos $x \leq \beta$ para todo $x \in B$. Como $A \subset B$, então vale $x \leq \beta$ para todo $x \in A$. Assim, β é uma cota superior do conjunto A. Mas, α é a menor das cotas superiores de A. Logo, $\alpha \leq \beta$, ou seja, $\sup A \leq \sup B$.

ii) Demonstração análoga ao item i).

■

Exemplo 1.4. Determine, caso existam, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo do conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$.

Solução. O conjunto A pode ser escrito como $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$. Temos $\min A = -2$, $\max A = 2$, $\inf A = -2$ e $\sup A = 2$.

Exemplo 1.5. Considere a função $f:[-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$. Encontre $\sup\{f(x) \mid -2 \leq x \leq 2\}$ e $\inf\{f(x) \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f assume um valor máximo e um valor mínimo. Isto é, existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$.

Solução. A função f é contínua no intervalo $[-2,2]$, pelo Teorema de Weierstrass f assume em $[-2,2]$ valores máximo e mínimo que são 3 e -1, respectivamente. Portanto,

$$\sup\{f(x) \mid -2 \leq x \leq 2\} = 3 \quad \text{e} \quad \inf\{f(x) \mid -2 \leq x \leq 2\} = -1.$$

Isso também é fácil de ser verificado analisando o gráfico da parábola $y = x^2 - 1$.

1.2 Integrais inferior e superior – funções integráveis

Para definir integrais inferior e superior, precisamos de alguns conceitos relacionados à partição de um intervalo.

Partição de um intervalo

Uma partição do intervalo $[a,b]$ é um conjunto finito $P=\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ onde $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,...,n$ serão chamados os intervalos da partição P.

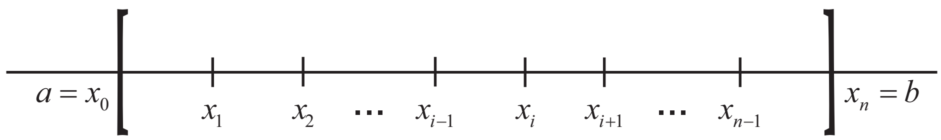


Figura 1.6

Os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de P não precisam ter o mesmo comprimento. O número

$$|P| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), ..., (x_n - x_{n-1})\}$$

é chamado *norma da partição* P.

Sejam P e Q partições de $[a,b]$. Dizemos que Q é mais fina do que P, ou que Q é um refinamento de P, se $P \subset Q$.

Soma inferior e soma superior

Sejam $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função **limitada** e $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Definimos a soma inferior $s(f;P)$ e a soma superior $S(f;P)$ da função f, referente à partição P como sendo

Dizer que a função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é *limitada*, significa que existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $|f(x)| \le c$ para todo $x \in [a,b]$.

$$
\begin{aligned}
s(f;P) &= m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\cdots+m_n(x_n-x_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
S(f;P) &= M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_n(x_n-x_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})
\end{aligned}
$$

onde

$m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \le x \le x_i\}$, ou seja,
$m_i =$ ínfimo dos valores $f(x)$ para x no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

e

$M_i = \sup\{f(x); x_{i-1} \le x \le x_i\}$, ou seja,
$M_i =$ supremo dos valores $f(x)$ para x no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Note que

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) = S(f;P),$$

pois $m_i \le M_i$ para todo $i = 1,\cdots,n$. Ou seja, a soma inferior de f é menor ou igual à soma superior de f relativa à mesma partição.

Quando f é contínua e não negativa em $[a,b]$, podemos interpretar a soma inferior $s(f;P)$ como sendo uma soma de áreas de retângulos inscritos ao gráfico f, e assim um valor aproximado (por falta) do que intuitivamente entendemos por área da região plana S, delimitada pelo gráfico de f, pelas retas $x=a$ e $x=b$, e pelo eixo x. Similarmente, a soma superior $S(f;P)$ pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos circunscritos ao gráfico de f, e como um valor aproximado (por excesso) da área da região plana S.

A Figura 1.7 ilustra as observações acima.

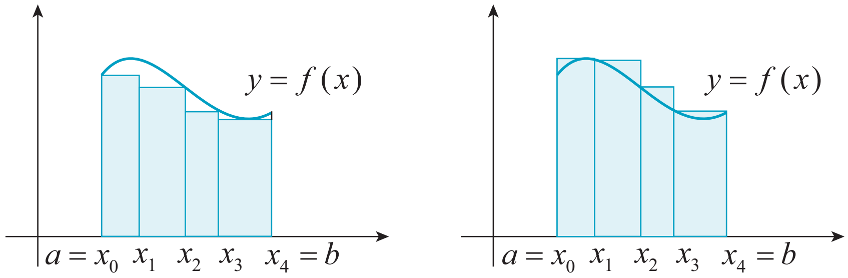


Figura 1.7

Exemplo 1.6. Calcular as somas inferior e superior para função $f(x)=x^2$, definida no intervalo $[0,1]$. Usar a partição $P=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$.

Solução. Os intervalos da partição P são $[x_0,x_1]=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ e $[x_1,x_2]=\left[\frac{1}{2},1\right]$. Temos

$$m_1=\inf\left\{x^2;0\le x\le\frac{1}{2}\right\}=0,\qquad M_1=\sup\left\{x^2;0\le x\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4},$$

$$m_2=\inf\left\{x^2;\frac{1}{2}\le x\le 1\right\}=\frac{1}{4}\quad\text{e}\quad M_2=\sup\left\{x^2;\frac{1}{2}\le x\le 1\right\}=1.$$

Segue que

$$\begin{aligned}s(f;P)&=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)\\&=0\left(\frac{1}{2}-0\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}S(f;P)&=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-0\right)+1\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

O que acontece com as somas inferior e superior quando acrescentamos um ponto à partição P, ou em geral, quando refinamos P? O próximo teorema mostra que a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Teorema 1.2. Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada, $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e Q um refinamento de P. Então

i) $s(f;P)\le s(f;Q)$ e

ii) $S(f;Q)\le S(f;P)$.

Demonstração.

i) Vamos assumir inicialmente que Q é obtida a partir de P acrescentando um ponto $\overline{x}$, digamos $Q=\{x_0,x_1,\dots,x_{i-1},\overline{x},x_i,\dots,x_{n-1},x_n\}$.

Sejam m_i, m' e m'' os ínfimos de f nos intervalos $[x_{i-1}, x_i], [x_{i-1}, \overline{x}]$ e $[\overline{x}, x_i]$, respectivamente.

Temos

$$s(f;Q) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2}) + m'(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) + m_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

e

$$s(f;P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2}) + m_i(x_i - x_{i-1}) + m_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

Fazendo,

$$\begin{aligned} s(f;Q) - s(f;P) &= m'(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= m'(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - \overline{x} + \overline{x} - x_{i-1}) \\ &= m'(\overline{x} - x_{i-1}) - m_i(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - \overline{x}) \\ &= (m' - m_i)(\overline{x} - x_{i-1}) + (m'' - m_i)(x_i - \overline{x}). \end{aligned}$$

Como $m' \geq m_i$ e $m'' \geq m_i$, devido à Proposição 1.3, temos

$$s(f;Q) - s(f;P) \geq 0.$$

Portanto, se Q é obtida a partir de P pelo acréscimo de um ponto, temos $s(f;P) \leq s(f;Q)$.

Se Q possui vários pontos a mais do que P, basta aplicar esse resultado repetidamente e teremos $s(f;P) \leq s(f;Q)$.

ii) A demonstração no caso das somas superiores é muito parecida e é deixada como exercício.

■

Como consequência do teorema acima, temos que toda soma inferior é menor ou igual a qualquer soma superior.

Corolário. Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para quaisquer partições P, Q de $[a,b]$ tem-se $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

Demonstração.

Consideremos a partição $P \cup Q$. Temos que a partição $P \cup Q$ é mais fina do que P e Q. Pelo Teorema 1.2 segue que

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q).$$

Portanto, $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

■

Consideremos o conjunto das somas inferiores referentes a todas as partições de $[a,b]$. Do corolário acima, temos que qualquer soma superior é uma cota superior para o conjunto. Segue que o conjunto é limitado superiormente, e pelo Teorema 1.1 possui supremo. Analogamente, qualquer soma inferior é uma cota inferior para o conjunto formado pelas somas superiores. Assim, faz sentido falar em ínfimo do conjunto formado pelas somas superiores. Essas observações levam às definições de integrais inferior e superior.

Definição 1.3. Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a integral inferior de f, denotada por $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, e a integral superior de f, denotada por $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, como sendo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P s(f;P) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P S(f,P).$$

O supremo e o ínfimo são tomados relativamente a todas as partições P do intervalo $[a,b]$.

Quando $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, dizemos que f é integrável em $[a,b]$. Esse valor comum é chamado de integral da função f e indicamos por $\int_a^b f(x)dx$.

Os números a e b são respectivamente os limites inferior e superior da integral, a função $f(x)$ é o integrando e o símbolo $\int$ é um sinal de integração. É comum referir-se à $\int_a^b f(x)\,dx$ como integral definida de f em $[a,b]$.

A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um número. Podemos utilizar outras letras para representar a variável independente sem mudar o valor da integral, ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds.$$

Exemplo 1.7. (Exemplo de função integrável) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a função constante $f(x)=k$. Mostre que f é integrável em $[a,b]$ e que

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a).$$

Solução. Seja $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Temos que

$$m_i=\inf\{f(x);x_{i-1}\le x\le x_i\}=k \quad \text{e}$$

$$M_i=\sup\{f(x);x_{i-1}\le x\le x_i\}=k \quad \text{para todo } i=1,\dots,n.$$

Assim,

$$s(f;P)=k(b-a) \quad \text{e} \quad S(f;P)=k(b-a).$$

Dado que P é qualquer, temos

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup_P s(f;P)=k(b-a) \quad \text{e}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf_P S(f,P)=k(b-a).$$

Como as integrais inferior e superior são iguais, f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx=k(b-a)$.

Exemplo 1.8. (Exemplo de função não integrável) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1, & se\ x\ é\ racional \\ -1, & se\ x\ é\ irracional. \end{cases}$$

Mostre que f é não integrável em $[a,b]$.

Solução. Seja $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Em todo intervalo $[x_{i-1},x_i]$ de P existem números racionais e irracionais. Assim,

$$m_i=\inf\{f(x);x_{i-1}\le x\le x_i\}=-1$$

e

$$M_i=\sup\{f(x);x_{i-1}\le x\le x_i\}=1$$

para todo $i=1,\dots,n$.

Segue que $s(f;P)=-(b-a)$ e $S(f;P)=(b-a)$ para qualquer partição P de $[a,b]$. Logo,

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \sup_P s(f;P) = -(b-a)$$

e

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,dx = \inf_P S(f;P) = (b-a).$$

Como

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \neq \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$$

temos que f é não integrável em $[a,b]$.

O Exemplo 1.8 mostra que nem toda função limitada é integrável. É importante saber quais funções são integráveis. Os Teoremas 1.3 e 1.4, cujas demonstrações serão omitidas, garantem que um grande número de funções é integrável.

Teorema 1.3. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é integrável.

Teorema 1.4. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada, com um número finito de pontos de descontinuidade. Então, f é integrável.

Área de uma região plana

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$. Definimos a área da região plana S, limitada pelo gráfico de $y=f(x)$, as retas $x=a$, $x=b$ e o eixo x, como sendo a integral de f no intervalo $[a,b]$ (ver figura abaixo). Escrevemos

$$\acute{A}rea\ S = \int_a^b f(x)dx.$$

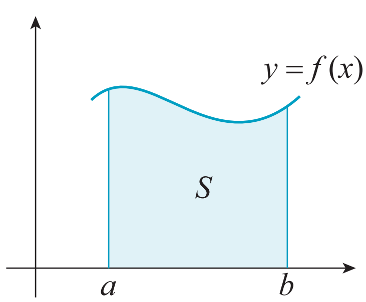


Figura 1.8

Exemplo 1.9. Calcule a área da região S limitada pelo gráfico da função $f(x)=5$, pelas retas $x=2$ e $x=6$, e o eixo do x.

Solução. A Figura 1.9 mostra a região S. Do Exemplo 1.7 temos que a função constante é integrável. Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [2,6]$, segue que

$$\acute{A}rea\ S = \int_2^6 5\,dx = 5(6-2) = 20\,u.a. \text{ (unidades de área).}$$

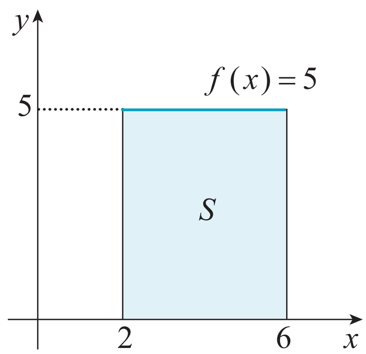


Figura 1.9

Exemplo 1.10. Calcule a $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$ interpretando-a em termos de área.

Solução. A função $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ é contínua no intervalo $[-3,3]$. Pelo Teorema 1.3 f é integrável no intervalo $[-3,3]$. Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [-3,3]$, podemos interpretar a integral como área sob a curva $y = \sqrt{9-x^2}$, x de -3 até 3. Observe que $y^2 = 9 - x^2$, ou

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ com } y \geq 0,$$

ou seja, o gráfico da f é a metade superior do círculo de raio 3. Portanto,

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

1.2.1 Exercícios

1) Determine, caso existam, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo dos conjuntos.

   a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ -2 \leq x \leq 5\}$;

   b) $B = \left\{\frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

2) Considere a função $f(x) = -x^2 + 2$. Determine:

   a) $\sup\{f(x);\ -3 \leq x \leq 1\}$;

   b) $\sup\{f(x);\ -3 \leq x \leq -1\}$.

3) Calcular as somas inferior e superior para função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ no intervalo $[1,3]$. Usar a partição tal que o comprimento de cada intervalo da partição seja $\dfrac{1}{2}$.

4) Considere a função definida por $f(x)=\begin{cases}-1, \; se\; 0\le x\le 2\\ 1, \; se\; 2<x\le 4\end{cases}$.
A função f é integrável em $[0,4]$? Justifique.

5) Avalie a integral $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ interpretando-a em termos de área.

6) Mostre o item ii) do Teorema 1.2.

1.3 Integral como limite de somas

Na seção anterior definimos a integral de uma função usando a linguagem de supremo e ínfimo de conjunto. Nosso objetivo agora é mostrar que a integral pode ser interpretada como limite de somas, chamadas de somas de Riemann. Para isso precisamos estabelecer alguns resultados.

Teorema 1.5. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) f é integrável;

ii) Dado $\varepsilon>0$ qualquer, existem partições P e Q do intervalo $[a,b]$ tais que $S(f;P)-s(f;Q)<\varepsilon$;

iii) Dado $\varepsilon>0$ qualquer, existe uma partição R do intervalo $[a,b]$ tal que $S(f;R)-s(f;R)<\varepsilon$.

Demonstração. Mostraremos que $(\text{i})\Rightarrow(\text{ii})$.
Temos que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup_P s(f;P) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf_P S(f;P).$$

Das propriedades de supremo e ínfimo (Proposições 1.1 e 1.2), dado $\varepsilon>0$, existem partições P e Q tais que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{2}<s(f;Q) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}>S(f;P).$$

Segue das relações acima e de f ser integrável em $[a,b]$ que

$$S(f;P)<\frac{\varepsilon}{2}+\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\frac{\varepsilon}{2}+\underline{\int_a^b} f(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+s(f;Q).$$

Portanto,

$$S(f;P)-s(f;Q)<\varepsilon.$$

Agora, vamos mostrar que $\text{(ii)}\Rightarrow\text{(iii)}$.
Seja $\varepsilon>0$. Por hipótese, existem partições P e Q do intervalo $[a,b]$ tais que

$$S(f;P)-s(f;Q)<\varepsilon.$$

Tome a partição $R=P\cup Q$ de $[a,b]$. Então, pelo Teorema 1.2, segue que

$$s(f;Q)\le s(f;R) \quad \text{e} \quad S(f;R)\le S(f;P).$$

Portanto, $S(f;R)-s(f;R)<\varepsilon.$

Falta mostrar que $\text{(iii)}\Rightarrow\text{(i)}$. Para quaisquer partições P e Q de $[a,b]$ temos, usando o Corolário do Teorema 1.2, que

$$s(f;P)\le S(f;Q).$$

Então, da definição de supremo podemos escrever que

$$\sup_P s(f;P)\le S(f;Q) \text{ para qualquer partição } Q \text{ de } [a,b].$$

Segue que, $\sup\limits_P s(f;P)$ é uma cota inferior do conjunto formado pelas somas superiores $S(f,Q)$ e, assim,

$$\sup_P s(f;P)\le \inf_P S(f;P).$$

Agora, vamos mostrar que $\sup\limits_P s(f;P)=\inf\limits_P S(f;P).$

Se fosse $\sup\limits_P s(f;P)<\inf\limits_P S(f;P)$ então

$$\inf_P S(f;P)-\sup_P s(f;P)>0.$$

Tome $\varepsilon=\inf\limits_P S(f;P)-\sup\limits_P s(f;P)$. Por hipótese, para este ε existe uma partição R do intervalo $[a,b]$ tal que

$$S(f;R)-s(f;R)<\varepsilon. \tag{1}$$

Como

$$\inf_P S(f;P)\le S(f;R) \ \text{ e } \ s(f;R)\le \sup_P s(f;P)$$

podemos escrever

$$S(f;R)-s(f;R)\geq \inf_P S(f;P)-\sup_P s(f;P)=\varepsilon,$$

o que contraria a desigualdade (1) . Assim,

$$\sup_P s(f;P)=\inf_P S(f;P),$$

ou seja, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Portanto, f é integrável. ■

Lema 1.1. Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada e $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Se Q é um refinamento de P onde $Q=P\cup\{\overline{x}\}$ então $S(f;P)-S(f;Q)\leq 2M\,|P|$ onde $M=\sup\{|f(x)|;x\in[a,b]\}$ e $|P|$ é a norma da partição P.

Demonstração. Suponhamos que $\overline{x}$ esteja entre x_{i-1} e x_i. Sejam $M_i,\ M'\ e\ M''$ os supremos da f em $[x_{i-1},x_i]$, $[x_{i-1},\overline{x}]$ e $[\overline{x},x_i]$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
S(f;P)-S(f;Q)&=M_i(x_i-x_{i-1})-M'(\overline{x}-x_{i-1})-M''(x_i-\overline{x})\\
&=M_i(x_i-\overline{x}+\overline{x}-x_{i-1})-M'(\overline{x}-x_{i-1})-M''(x_i-\overline{x})\\
&=M_i(x_i-\overline{x})+M_i(\overline{x}-x_{i-1})-M'(\overline{x}-x_{i-1})-M''(x_i-\overline{x})\\
&=(M_i-M'')(x_i-\overline{x})+(M_i-M')(\overline{x}-x_{i-1})\\
&\leq 2M(x_i-\overline{x})+2M(\overline{x}-x_{i-1})\\
&=2M(x_i-x_{i-1})\\
&\leq 2M\,|P|.
\end{aligned}$$

■

Observação: Generalizando o Lema 1.1, se Q é uma partição de $[a,b]$ obtida pelo acréscimo de n pontos à partição P, então $S(f;P)-S(f;Q)\leq 2nM\,|P|$.

Teorema 1.6. A integral superior de uma função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é o limite das somas superiores $S(f;P)$ quando a norma da partição P tende a zero, ou seja,

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\lim_{|P|\to 0} S(f;P).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Temos que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |P| < \delta \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon + \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < S(f;P) < \varepsilon + \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Da definição de integral superior temos

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f;P) \text{ para qualquer partição } P \text{ de } [a,b].$$

Observe que

$$-\varepsilon + \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < S(f;P) \text{ para qualquer partição } P \text{ de } [a,b].$$

Ainda, da definição de integral superior, para o $\varepsilon > 0$ dado existe uma partição $Q = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f;Q) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4(n-1)M}$, onde $M = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\}$. Seja P uma partição arbitrária com $0 < |P| < \delta$. Considere a partição $R = P \cup Q$. Note que a partição R (um refinamento de Q) é obtida a partir de P pelo acréscimo de no máximo $n-1$ pontos, pois Q possui $n+1$ pontos onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. Da observação feita após o Lema 1.1, temos

$$S(f;P) - S(f;R) \le 2M(n-1)|P|.$$

Segue que

$$\begin{aligned} S(f;P) &\le S(f;R) + 2M(n-1)|P| \\ &< S(f;Q) + 2M(n-1)\frac{\varepsilon}{4(n-1)M} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sempre que } \quad 0 < |P| < \delta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{|P| \to 0} S(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

■

De forma análoga, mostra-se que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{|P| \to 0} s(f;P)$.

Soma de Riemann

Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada e $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Uma soma de Riemann de f em relação à partição P é qualquer expressão $S_n(f)$ da forma

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1}),$$

onde c_i é um número em $[x_{i-1},x_i]$ para $i=1,2,\ldots,n$.

Se $f(c_i)>0$ então $f(c_i)(x_i-x_{i-1})$ representa a área do retângulo de base (x_i-x_{i-1}) e altura $f(c_i)$ (ver Figura 1.10).

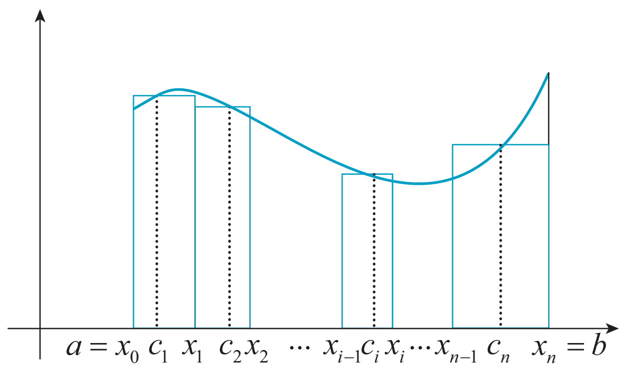


Figura 1.10

Observe que independentemente da escolha de $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ temos

$$s(f;P)\ \le\ S_n(f)\ \le\ S(f;P),$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

pois $m_i\le f(c_i)\le M_i$.

Exemplo 1.11. Determine a soma de Riemann para $f(x)=2-x^2$, $0\le x\le 2$ e P a partição de $[0,2]$ em 4 subintervalos de mesmo comprimento. Escolha c_i como sendo o extremo direito do subintervalo $[x_{i-1},x_i]$.

Solução. O número de subintervalos é 4, ou seja, $n=4$. O comprimento dos subintervalos é

$$\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}.$$

Os subintervalos são

$$\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right],\left[1,\frac{3}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{3}{2},2\right].$$

Assim, $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=1$, $c_3=\frac{3}{2}$ e $c_4=2$. Logo, a soma de Riemann é

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \sum_{i=1}^{4} f(c_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+f(1)\cdot\frac{1}{2}+f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+f(2)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{7}{4}+1-\frac{1}{4}-2\right] \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Teorema 1.7. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. As afirmações são equivalentes:

i) f é integrável;

ii) Existe o $\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})$, independentemente da escolha de $c_i\in[x_{i-1},x_i]$. Neste caso, $\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)\,dx$.

Demonstração.

i) $\Rightarrow$ ii) Do Teorema 1.6 e f integrável temos

$$\lim_{|P|\to 0} s(f;P)=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{|P|\to 0} S(f;P).$$

Observe que valem as relações

$$s(f;P)\le\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})\le S(f;P)$$

independentemente da escolha de $c_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Sejam f, g e h funções com o mesmo domínio D, sendo $f(x)\le g(x)\le h(x)$. Se $f(x)$ e $h(x)$ têm o mesmo limite L com $x\to a$ então $g(x)$ também tem limite L com $x\to a$.

Aplicando o limite nas desigualdades quando $|P|\to 0$ e o Teorema do Confronto, concluímos que

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)\,dx.$$

ii) $\Rightarrow$ i) Para provar que f é integrável em $[a,b]$, mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.

Seja $I = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Da definição de limite, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |P| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2)$$

independentemente da escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Fixemos $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ com $0 < |P| < \delta$ e tomemos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ de duas maneiras. Primeiramente, vamos escolher $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(c_i) < m_i + \dfrac{\varepsilon}{4n(x_i - x_{i-1})}$, onde $m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4} = s(f,P) + \frac{\varepsilon}{4},$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4} < s(f,P). \qquad (3)$$

Agora, vamos escolher $\overline{c}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(\overline{c}_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{4n(x_i - x_{i-1})}, \text{ onde } M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4} = S(f,P) - \frac{\varepsilon}{4},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4} > S(f,P). \qquad (4)$$

Das desigualdades (3) e (4) resultam que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4} \; < \; s(f;P) \; \le \; S(f;P) \; < \; \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

De (2), temos que as somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)(x_i - x_{i-1})$$

estão no intervalo $\left(I - \dfrac{\varepsilon}{4}, I + \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$. Logo, $s(f;P)$ e $S(f;P)$ pertencem ao intervalo $\left(I - \dfrac{\varepsilon}{2}, I + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, e assim $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$. Portanto, f é integrável.

■

O teorema acima garante que se f é integrável em $[a,b]$, então o valor do limite

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

é o mesmo, independentemente da escolha de c_i, e é igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. Se, para uma escolha particular dos c_i, encontrarmos $\lim\limits_{|P| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = L$, então teremos $\int_a^b f(x)\,dx = L$. Usaremos essa observação no próximo exemplo.

Exemplo 1.12. Considere a função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. A função f é integrável em $[a,b]$? Justifique. Caso afirmativo, determine $\int_a^b x\,dx$ como limite de somas de Riemann.

Solução. A função f é contínua em $[a,b]$, então pelo Teorema 1.3 temos f é integrável em $[a,b]$.

Para determinar $\int_a^b x\,dx$ dividiremos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento, formaremos as somas de Riemann $S_n(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ onde escolheremos c_i como sendo o extremo direito dos subintervalos da partição P, e calcularemos $\lim\limits_{|P| \to 0} S_n(f)$, que será $\int_a^b x\,dx$. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$P = \left\{ a,\ a + \frac{(b-a)}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, a + \frac{n(b-a)}{n} \right\}$$

a partição que consiste em dividir $[a,b]$ em n partes iguais, cada uma com comprimento $\dfrac{b-a}{n}$. Para cada subintervalo

$$\left[a+(i-1)\frac{(b-a)}{n}, a+i\frac{(b-a)}{n}\right],$$

temos $c_i = a+i\dfrac{(b-a)}{n}$ e $f(c_i) = a+i\dfrac{(b-a)}{n}$.

A soma de Riemann é

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{(b-a)}{n}\left[a+\frac{(b-a)}{n}+a+\frac{2(b-a)}{n}+\cdots+a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}+a+\frac{n(b-a)}{n}\right] \\
&= \frac{(b-a)}{n}\left\{na+\frac{(b-a)}{n}[1+2+\cdots+(n-1)+n]\right\} \quad \text{(usar soma de P.A. com } n \text{ termos)} \\
&= a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\left[\frac{(1+n)n}{2}\right] \\
&= ab-a^2+\frac{(b-a)^2}{2n}+\frac{(b-a)^2}{2} \\
&= \frac{b^2-a^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Como os comprimentos dos intervalos da partição P são iguais a $\dfrac{b-a}{n}$, fazer $|P|$ tender a zero equivale a fazer n tender a ∞. Logo,

$$\lim_{|P|\to 0} S_n(f) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{n}\right] = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Portanto, $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

1.3.1 Exercícios

1) Determine a soma de Riemann $S_n(f)$ da função $f(x) = 3x-2$, onde $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ é a partição do intervalo $[1,5]$ em quatro subintervalos de mesmo comprimento, e:

a) c_i é o extremo direito de intervalo $[x_{i-1}, x_i]$;

b) c_i é o extremo esquerdo do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$;

c) c_i é o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$.

2) Considere a função $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

i) f é integrável em $[0,1]$? Justifique.

ii) Encontre $\int_0^1 x^2 dx$ como limite de somas de Riemann.

Sugestão. Dividir o intervalo $[0,1]$ em n partes iguais, escolher c_i como sendo o extremo direito dos subintervalos, e usar a relação

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3) Considere a função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$.

i) f é integrável em $[a,b]$? Justifique.

ii) Encontre $\int_a^b e^x dx$ como limite de somas de Riemann.

1.4 Propriedades da integral

Na definição $\int_a^b f(x)\,dx$, assumimos $a < b$. Nos casos em que $a = b$ e $a > b$ definimos as integrais como sendo

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

respectivamente.

Teorema 1.8. Sejam f, g funções integráveis em $[a,b]$ e $k \in \mathbb{R}$. Então:

a) $k\,f$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$;

b) $f + g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,;$$

c) Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$;

d) Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Demonstração. Vamos provar os itens a), c) e d). O item b) deixamos como exercício.

a) Seja $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Toda soma de Riemann da função $k\,f$ é da forma

$$\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)(x_i-x_{i-1}) \quad \text{onde} \quad c_i\in[x_{i-1},x_i].$$

Como f é integrável em $[a,b]$, então existe

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

independentemente da escolha de $c_i\in[x_{i-1},x_i]$, e é igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Assim, usando as propriedades de limite de funções, obtemos

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)(x_i-x_{i-1}) = k\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$= k\int_b^a f(x)dx.$$

Portanto, $k\,f$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

c) Seja $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Como f é integrável em $[a,b]$, então existe

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

independentemente da escolha de c_i em $[x_{i-1},x_i]$, e é
$\int_a^b f(x)\,dx.$

Como $f(c_i)\geq 0$ para todo $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})\geq 0.$$

Portanto, por propriedade de limite de funções,

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})\geq 0, \text{ ou seja, } \int_a^b f(x)\,dx\geq 0.$$

d) De $f(x)\geq g(x)$ para todo $x\in[a,b]$ segue que

$$(f-g)(x)\geq 0 \quad \text{para todo} \quad x\in[a,b].$$

Dos itens a) e b) temos que $f-g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Aplicando o item (c) à função $f-g$, temos

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0.$$

Portanto, $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

■

Exemplo 1.13. Calcule a integral $\int_1^5 (3x+4)\,dx$.

Solução. Dos Exemplos 1.7 e 1.12, temos

$$\int_1^5 4dx = 4(5-1) = 16 \quad \text{e} \quad \int_1^5 x\,dx = \frac{25-1}{2} = 12.$$

Pelos itens a) e b) do Teorema 1.8, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_1^5 (3x+4)\,dx &= 3\int_1^5 x\,dx + \int_1^5 4dx \\ &= 3\cdot 12 + 16 = 52.\end{aligned}$$

Exemplo 1.14. Sejam f uma função integrável em $[a,b]$ e m, $M \in \mathbb{R}$. Mostre que, se $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Solução. Considere as funções g e h definidas por $g(x) = m$ e $h(x) = M$ para todo $x \in [a,b]$. Temos que g e h são integráveis em $[a,b]$, pois são funções constantes, e

$$\int_a^b mdx = m(b-a) \quad \text{e} \quad \int_a^b Mdx = M(b-a).$$

Como $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a,b]$, segue pelo item (d) do Teorema 1.8 que

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Teorema 1.9. Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a,c]$, em $[c,b]$ e em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Demonstração. Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Como $c \in (a,b)$ então ou c é um ponto da partição P, isto é, $c = x_i$ para algum i, ou c está no interior de algum subintervalo da partição P, ou seja, $c \in (x_{i-1}, x_i)$. Considere a partição P' de $[a,b]$ formada da seguinte maneira: se c for um ponto da partição P então P' será a própria P. Se $c \in (x_{i-1}, x_i)$ para algum i, então P' será a partição formada por todos os pontos de P mais o ponto c. Assim, os subintervalos da partição P' serão os mesmos de P, com exceção do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ que poderá ser dividido em $[x_{i-1}, c]$ e $[c, x_i]$. Dessa forma teremos $|P'| \le |P|$.

Suponhamos que na partição P' o intervalo $[a,c]$ foi dividido em l subintervalos e o intervalo $[c,b]$ foi dividido em $n-l$ subintervalos.

Sendo a função f integrável em $[a,b]$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})\\ &= \lim_{|P|\to 0}\left[\sum_{i=1}^{l} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=l+1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})\right]\\ &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{l} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=l+1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Como $|P'| \le |P|$, temos que $|P'| \to 0$ quando $|P| \to 0$. Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P'|\to 0}\sum_{i=1}^{l} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|P'|\to 0}\sum_{i=l+1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Como a função f integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ temos que os limites na igualdade acima são respectivamente $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$.

Portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

■

Exemplo 1.15. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 2, & se\ 0 \le x \le 2 \\ x, & se\ 2 < x \le 5 \end{cases}$.
Calcular a integral $\int_0^5 f(x)\,dx$.

Solução. A função f é integrável em $[0,5]$, pois é contínua (Teorema 1.3).

Temos que f é integrável em $[0,2]$ e, pelo Exemplo 1.7, obtemos

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 2dx = 2(2-0) = 4.$$

f é integrável em $[2,5]$ e, pelo Exemplo 1.12, obtemos

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^5 x\,dx = \frac{5^2 - 2^2}{2} = \frac{21}{2}.$$

Logo, pelo Teorema 1.9, temos

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 2dx + \int_2^5 x\,dx$$
$$= 4 + \frac{21}{2} = \frac{29}{2}.$$

1.4.1 Exercícios

1) Calcule a integral $\int_3^3 x \operatorname{sen} x^2 dx$.

2) Escreva a integral como uma única integral da forma $\int_a^b f(x)\,dx$.

   a) $\int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^7 f(x)\,dx + \int_7^{10} f(x)\,dx.$

   a) $\int_2^3 f(x)\,dx - \int_5^3 f(x)\,dx + \int_5^7 f(x)\,dx.$

3) Se $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$, $\int_0^4 f(t)\,dt = -2$ e $\int_3^4 f(t)\,dt = 2.$

   Encontre $\int_1^3 2f(t)\,dt.$

4) Mostre o item (b) do Teorema 1.8.

1.5 Teorema fundamental do cálculo

Calcular integrais definidas usando somas de Riemann é trabalhoso, mesmo para funções simples. Nesta seção vamos demonstrar o **Teorema Fundamental do Cálculo** que estabelece uma conexão entre as operações de derivação e integração. Este teorema permite encontrar a integral definida, para uma certa classe de funções, de maneira rápida e simples sem utilizar limites de somas. Para isso, introduzimos o conceito de primitiva de uma função.

Este teorema foi estabelecido independentemente por Sir Isaac Newton (1642-1727) na Inglaterra e Gottfried Leibniz (1646-1716) na Alemanha.

Definição 1.4. Sejam I um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função. Uma primitiva de f em I é uma função derivável $F: I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Exemplo 1.16.

a) Se $f(x) = 2x$, então $F(x) = x^2$ é uma primitiva de f, pois $F'(x) = f(x)$.

b) Se $f(x)=2e^{2x}$, então $F(x)=e^{2x}$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.

c) Se $f(x)=\operatorname{sen} x$, então $F(x)=-\cos x$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.

d) Se $f(x)=\cos(2x)$, então $F(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.

e) Se $f(x)=3^x$, então $F(x)=\dfrac{3^x}{\ln 3}$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.

f) Se $f(x)=x^4$, então $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ é uma primitiva de f, pois $F'(x)=f(x)$.

g) Para toda constante c $(c\in\mathbb{R})$, $F(x)=\dfrac{x^5}{5}+c$ é uma primitiva da função $f(x)=x^4$.

Note que se $F(x)$ é uma primitiva de f em $[a,b]$ então para toda constante c $(c\in\mathbb{R})$, a função $G(x)=F(x)+c$ também é primitiva de f em $[a,b]$.

A proposição a seguir, estabelece que se $F(x)$ é uma primitiva particular de f então toda primitiva de f é da forma $F(x)+c$.

Proposição 1.4. Se $F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$ são primitivas da função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, então existe uma constante $c\in\mathbb{R}$ tal que $G(x)=F(x)+c$ para todo $x\in[a,b]$.

Demonstração. Considere a função $H:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $H(x)=G(x)-F(x)$. Temos que

$$H'(x)=\left(G(x)-F(x)\right)'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

para todo $x\in(a,b)$.

Como a função H possui derivada nula em todos os pontos de (a,b), segue de um resultado visto no **Cálculo I**, que H é uma função constante. Portanto, existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $G(x)-F(x)=c$, ou seja, $G(x)=F(x)+c$ para todo $x\in[a,b]$.

■

Se uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ possui derivada nula em todos os pontos $c\in(a,b)$, então f é constante. *(Página 223 do material de Cálculo I)*

Observação. A Proposição 1.4 vale para um intervalo I qualquer.

Teorema 1.10. (Teorema Fundamental do Cálculo – TFC)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função integrável e $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma primitiva de f então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Seja uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstração. Seja $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$.

Temos que F é derivável em $[a,b]$, e consequentemente F é contínua em $[a,b]$. Segue que F é contínua e derivável em cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$ da partição P. Aplicando o Teorema do Valor Médio em cada intervalo de P, existe $c_i\in(x_{i-1},x_i)$ tal que

$$F'(c_i)=\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \text{ para todo } i=1,\ldots,n.$$

Como $F'(c_i)=f(c_i)$, resulta que

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(c_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1}) \quad (c_i \text{ escolhido como acima})\\ &= \sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]\\ &= F(b)-F(a). \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{|P|\to 0} S_n(f)=F(b)-F(a).$$

Como f é integrável, o valor deste limite é o mesmo, independentemente da escolha dos c_i e, portanto, $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

■

É comum expressar a diferença $F(b)-F(a)$ por $F(x)\Big|_a^b$.

Exemplo 1.17. Calcular as seguintes integrais definidas:

a) $\int_1^2 x^2\,dx;$

b) $\int_{-1}^{1}(2x^3+3)\,dx;$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen} x+x)\,dx.$

Solução.

a) A função $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x)=x^2$. Logo,

$$\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}.$$

b) Aplicando as propriedades da integral e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{-1}^{1}(2x^3+3)\,dx = 2\int_{-1}^{1}x^3dx+\int_{-1}^{1}3dx$$

$$=2\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1}+3x\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=2\left[\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]+3[1-(-1)]$$

$$=6.$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x+x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx$$

$$=-\cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[-\cos\frac{\pi}{2}-(-\cos 0)\right]+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$=1+\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2+8}{8}.$$

Exemplo 1.18. Calcule $\int_{-2}^{2}|x|dx$.

Solução. A função $f(x)=|x|$ pode ser escrita como

$$f(x)=\begin{cases}-x, se -2\le x\le 0\\ x, se\ 0<x\le 2\end{cases}.$$

Das propriedades da integral e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{-2}^{2}|x|dx=\int_{-2}^{0}-x\,dx+\int_0^2 x\,dx$$

$$=-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2$$

$$=2+2=4.$$

O **Teorema Fundamental do Cálculo** pode ser aplicado para calcular a integral definida de uma função f, quando se conhece uma primitiva de f. No que segue, mostraremos que toda função contínua em $[a,b]$ possui uma primitiva.

Se uma função f é contínua em $[a,b]$, então f é integrável no intervalo $[a,x]$ para qualquer $x \in [a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ a integral $\int_a^x f(t)\,dt$ é um número e é único. Assim podemos definir uma função G que a cada $x \in [a,b]$ associa esse número. Mostraremos que G é uma primitiva de f.

Teorema 1.11. Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então a função $G:[a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, é derivável e $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração. Seja $c \in [a,b]$. Para encontrar a derivada da função G determinaremos as derivadas laterais da G no ponto c. Inicialmente mostraremos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(c+h) - G(c)}{h} = f(c).$$

Vamos assumir $h > 0$ e admitir que $c + h \in [a,b]$, isto é, $c \in [a,b)$. Pela definição da G e o Teorema 1.9, temos

$$\begin{aligned} G(c+h) - G(c) &= \int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \\ &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \\ &= \int_c^{c+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

A função f é contínua em $[c, c+h]$, então pelo Teorema de Weierstrass existem $x_1, x_2 \in [c, c+h]$ tais que

$$f(x_1) \le f(t) \le f(x_2) \text{ para todo } t \in [c, c+h].$$

Pelo Exemplo 1.14, podemos escrever

$$f(x_1)h \;\le\; \int_c^{c+h} f(t)\,dt \;\le\; f(x_2)h.$$

Como $h>0$ e $\int_c^{c+h} f(t)\,dt = G(c+h)-G(c)$, temos

$$f(x_1) \le \frac{G(c+h)-G(c)}{h} \le f(x_2). \qquad (5)$$

Note que se $h \to 0^+$ então $x_1 \to c^+$ e $x_2 \to c^+$, pois x_1 e x_2 estão entre c e $c+h$. Da continuidade de f podemos escrever

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_1) = \lim_{x_1\to c^+} f(x_1) = f(c) \quad \text{e}$$

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_2) = \lim_{x_2\to c^+} f(x_2) = f(c).$$

Fazendo $h \to 0^+$ na desigualdade (5) e aplicando o Teorema do Confronto, obtemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(c+h)-G(c)}{h} = f(c),$$

ou seja, para c tal que $c \in [a,b)$, temos

$$G_+^{'}(c) \text{ existe e } G_+^{'}(c) = f(c).$$

De forma análoga, mostra-se que $G_-^{'}(c) = f(c)$ para $c \in (a,b]$ e assim $G^{'}(c) = f(c)$. Observe que, para a e b, temos apenas $G_+^{'}(a) = f(a)$ e $G_-^{'}(b) = f(b)$. Segue que G é derivável e $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

■

Exemplo 1.19. Encontre a derivada da função $G(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt$.

Solução. Como $f(t) = \operatorname{sen} t^2$ é contínua, então, pelo Teorema 1.11, temos que $G'(x) = f(x) = \operatorname{sen} x^2$.

Exemplo 1.20. Calcule $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2} e^t\, dt$.

Solução. Vamos aplicar o Teorema 1.11 juntamente com a Regra da Cadeia. Fazendo $u = x^2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} e^t\,dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} e^t\,dt \\
&= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} e^t\,dt\right]\cdot\frac{du}{dx} \\
&= e^u \cdot 2x \\
&= 2xe^{x^2}.
\end{aligned}$$

1.5.1 Exercícios

1) Calcular as integrais abaixo:

a) $\int_{-2}^{2}(2x+x^4)\,dx$;   c) $\int_0^1 3e^{2x}dx$;

b) $\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$;   d) $\int_0^1 3^t\,dt$.

2) Achar as derivadas das seguintes funções:

a) $G(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt$;

b) $F(x)=\int_x^3 \ln t^2 dt$;   (Sugestão. Escreva $\int_x^3 \ln t^2 dt = -\int_3^x \ln t^2 dt$)

c) $H(x)=\int_2^{e^{-x}} \cos t\,dt$.

3) Calcule a integral definida $\int_{-3}^{6} |x-4|\,dx$.

1.6 Integral indefinida

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma relação entre primitiva e integral definida. Para representar a família de todas as primitivas de uma função f, introduzimos a notação $\int f(x)\,dx$, que de acordo com a definição abaixo será chamada de **integral indefinida.**

Definição 1.5. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em um intervalo I, a expressão $F(x)+c$, onde c é uma constante arbitrária, é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por $\int f(x)\,dx = F(x)+c$.

Da definição acima, temos

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \quad \Leftrightarrow \quad F'(x)=f(x).$$

Note que a integral indefinida $\int f(x)\,dx$ representa uma família de funções (a família de todas as primitivas), enquanto a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número.

Propriedades da integral indefinida

Teorema 1.12. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções definidas em um intervalo I, que possuem primitivas, e k uma constante não nula. Então:

a) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$;

b) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$.

Demonstração.

a) Seja F uma primitiva de f. Temos kF é uma primitiva da função $k\,f$, pois

$$(kF(x))' = kF'(x) = k\, f(x) \text{ para todo } x \in I.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int k\, f(x)\, dx &= k\, F(x) + c \\ &= k\left[F(x) + \frac{c}{k} \right] \\ &= k\,[F(x) + c_1] \\ &= k \int f(x)\, dx. \end{aligned}$$

b) Deixamos como exercício.

■

Exemplo 1.21.

a) $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + c$, pois $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

b) $\int e^{2x} dx = \dfrac{e^{2x}}{2} + c$, pois $\left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)' = e^{2x}$.

c) $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$, pois $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$.

Podemos construir uma tabela de integrais a partir das derivadas das funções elementares. Chamamos essas integrais de imediatas. No que segue listamos algumas integrais imediatas.

Tabela de integrais imediatas

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ($\alpha$ é constante e $\alpha \neq -1$)

3) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

4) $\int e^{x} dx = e^{x} + c$

5) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c$, $a > 0$ e $a \neq 1$

6) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$

7) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$

8) $\int \sec^{2} x \, dx = \operatorname{tg} x + c$

9) $\int \operatorname{cossec}^{2} x \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$

10) $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + c$

11) $\int \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cossec} x + c$

12) $\int \dfrac{1}{x^{2}+1} dx = \operatorname{arc\,tg} x + c$

13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$

14) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^{2}-1}} dx = \operatorname{arc\,sec} |x| + c.$

Exemplo 1.22. Calcular a integral indefinida $\int \left(\frac{1}{x} + \operatorname{sen} x \right) dx$.

Solução.

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x} + \operatorname{sen} x \right) dx &= \int \frac{1}{x}\, dx + \int \operatorname{sen} x\, dx \quad \text{(propriedade da integral)}\\
&= \ln|x| + c_1 - \cos x + c_2 \quad (c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias})\\
&= \ln|x| - \cos x + c \quad (c = c_1 + c_2).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.23. Calcular a integral indefinida $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x}\, dx$.

Solução.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x}\, dx &= \int \left(x^2 + 3x + \frac{4}{x} \right) dx\\
&= \int x^2 dx + 3\int x\, dx + 4\int \frac{1}{x}\, dx \quad \text{(propriedades da integral)}\\
&= \frac{x^3}{3} + c_1 + 3\frac{x^2}{2} + c_2 + 4\ln|x| + c_3\\
&= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + c \quad (c = c_1 + c_2 + c_3).
\end{aligned}$$

Observação. Quando tivermos uma soma de várias integrais indefinidas, escreveremos uma única constante para indicar a soma das constantes de integração.

Exemplo 1.24. Calcule a integral indefinida $\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^3} \right) dx$.

Solução.

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^3} \right) dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx + 2\int \frac{1}{x^3}\, dx\\
&= \int \operatorname{tg} x \sec x\, dx + 2\int x^{-3}\, dx\\
&= \sec x + \frac{2x^{-2}}{-2} + c\\
&= \sec x - \frac{1}{x^2} + c.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.25. Calcule a integral definida $\int_0^1 \frac{2}{x^2 + 1}\, dx$.

Solução.

$$\int_0^1 \frac{2dx}{x^2+1} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 2\,\mathrm{arc\,tg}\, x \Big|_0^1 \quad \text{(tabela - item 12 e TFC)}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

1.6.1 Exercícios

1) Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int (3x^2 + x^4 + 1)\, dx;$

b) $\int \frac{t^3+9}{t^2}\, dt;$

c) $\int e^{-x} dx;$

d) $\int \frac{x^2 \ln x}{\ln x^2}\, dx;$

e) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\, dx;$

f) $\int \sqrt{\frac{4}{1-x^2}}\, dx.$

2) Verifique por diferenciação que a igualdade está correta.

a) $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c;$

b) $\int x^2 e^x\, dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c;$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\, dx = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + c.$

3) Determinar a função $f(x)$ tal que:

$$\int f(x)\, dx = 3\operatorname{sen} x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{3x^6} + c.$$

4) Calcule as integrais definidas:

a) $\int_0^2 (e^{2x} + x^2)\, dx;$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta + 2\theta)\, d\theta.$

1.7 Técnicas de integração

Muitas vezes, para calcular uma integral indefinida precisamos usar certos artifícios matemáticos para transformá-la em outra integral mais simples de ser obtida. Nesta seção vamos apresentar duas técnicas básicas para calcular integrais indefinidas, que são:

- Método da Substituição ou Mudança de Variável, e
- Método da Integração por Partes.

No próximo capítulo, veremos outras técnicas de integração.

1.7.1 Método da substituição ou mudança de variável

Sejam f e F funções tais que $F' = f$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem da g esteja no domínio de F. Podemos considerar a função composta $F \circ g$. Aplicando a Regra da Cadeia e usando o fato $F' = f$ temos

$$\begin{aligned}[F(g(x))]' &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

Assim, usando a Definição 1.5, obtemos a fórmula de integração pelo método da substituição

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

Se fizermos a mudança de variável $u = g(x)$ e substituirmos $g'(x)\,dx$ pela diferencial du, então

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + c.$$

Diferenciais foram vistas no **Cálculo 1.** Se $u = g(x)$ é uma função diferenciável, então $du = g'(x)\,dx$.

A técnica da mudança de variável é uma ferramenta poderosa para calcular integrais indefinidas, que permite substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.26. Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int 2x\, e^{x^2}\, dx$;

b) $\int \cos(3x+2)\, dx$;

c) $\int 3x^2 (x^3+2)^{10}\, dx$.

Solução.

a) Para calcular a integral $\int 2x\, e^{x^2}\, dx$, faremos a mudança de variável

$u = x^2$ e obtemos $du = 2x\, dx$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int 2x\, e^{x^2}\, dx &= \int e^u\, du \\ &= e^u + c \quad \text{(voltando à variável inicial } x) \\ &= e^{x^2} + c.\end{aligned}$$

b) Para calcular a integral $\int \cos(3x+2)\, dx$, faremos a substituição

$u = 3x+2$ e obtemos $du = 3dx$ ou $\dfrac{du}{3} = dx$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int \cos(3x+2)\, dx &= \int \frac{\cos u}{3}\, du \\ &= \frac{1}{3}\int \cos u\, du \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + c \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+2) + c.\end{aligned}$$

c) Encontraremos a $\int 3x^2 (x^3+2)^{10}\, dx$ fazendo a mudança de variável

$u = x^3 + 2$. Segue que $du = 3x^2 dx$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int 3x^2 (x^3+2)^{10}\, dx &= \int u^{10}\, du \\ &= \frac{u^{11}}{11} + c \\ &= \frac{(x^3+2)^{11}}{11} + c.\end{aligned}$$

Exemplo 1.27. Use o método da substituição para mostrar que

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\sec x| + c.$$

Solução.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx.$$

Fazendo $u = \cos x$ obtemos $du = -\operatorname{sen} x\, dx$.
Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\, dx &= -\int \frac{du}{u}\\ &= -\ln|u| + c\\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c\\ &= \ln|\sec x| + c.\end{aligned}$$

Exemplo 1.28. Calcule a integral indefinida $\int x^2\sqrt{1+x}\, dx$.

Solução. Fazendo $t^2 = 1 + x$ com $t \geq 0$, obtemos $2t\, dt = dx$.
Assim,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\, dx &= \int (t^2-1)^2 \cdot t \cdot 2t\, dt\\ &= 2\int (t^2-1)^2 \cdot t^2 dt\\ &= 2\int (t^4 - 2t^2 + 1)\cdot t^2 dt\\ &= 2\int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt\\ &= 2\left[\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right] + c\\ &= 2t^3\left[\frac{t^4}{7} - \frac{2t^2}{5} + \frac{1}{3}\right] + c\\ &= 2(1+x)\sqrt{(1+x)}\left[\frac{(1+x)^2}{7} - \frac{2(1+x)}{5} + \frac{1}{3}\right] + c.\end{aligned}$$

Exemplo 1.29. Calcule a integral $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$.

Solução.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$$

Fazendo $u = x - 1$ obtemos $du = dx$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} &= \int \frac{1}{u^2+4}\,du \\
&= \int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{u^2+4}{4}}\,du \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{t^2+1} \quad \text{(fazendo } t = \frac{u}{2} \text{ obtemos } 2dt = du\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} \quad \text{(tabela)} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + c \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} \frac{u}{2} + c \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} \frac{(x-1)}{2} + c.
\end{aligned}$$

O método da substituição de variável pode ser usado para calcular integrais definidas. Podemos utilizá-lo de duas formas:

1) Mudamos os limites de integração ao fazer a mudança de variável e aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesse caso, a fórmula da integração torna-se:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du. \qquad (u = g(x))$$

2) Calculamos a integral indefinida correspondente e em seguida aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 1.30. Calcule a integral definida $\int_0^2 \frac{4x}{x^2+1}dx.$

Solução. Fazendo $u = x^2 + 1$ obtemos $du = 2x\,dx$. Para encontrar os novos limites de integração, notemos que

se $x = 0$ então $u = 1$;
se $x = 2$ então $u = 5$.

Assim,

$$\int_0^2 \frac{4x}{x^2+1}dx = 2\int_1^5 \frac{du}{u}$$
$$= 2\ln|u|\Big|_1^5$$
$$= 2\ln 5 - 2\ln 1$$
$$= 2\ln 5.$$

Outra maneira de calcular a integral definida é obter primeiramente a integral indefinida e, em seguida, aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Vejamos:

$$\int \frac{4x}{x^2+1}dx = 2\int \frac{du}{u} \quad (u = x^2+1, \text{ temos } du = 2x\,dx)$$
$$= 2\ln|u| + c$$
$$= 2\ln(x^2+1) + c.$$

Aplicando o TFC, temos

$$\int_0^2 \frac{4x}{x^2-1}dx = 2\ln(x^2+1)\Big|_0^2$$
$$= 2\ln 5 - 2\ln 1$$
$$= 2\ln 5.$$

Exemplo 1.31. Encontre a área da região S limitada pelo gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, pelas retas $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$, e o eixo dos x.

Solução. A região S está ilustrada na Figura 1.11.

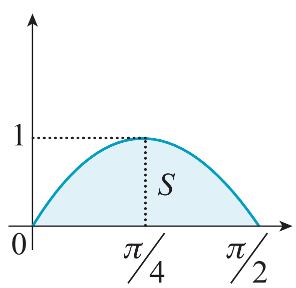


Figura 1.11

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área da região S (ver definição na Seção 1.2) é dada por

$$\acute{A}rea\ S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x\, dx.$$

Fazendo $u = 2x$, obtemos $du = 2dx$. Os novos limites de integração são:

se $x = 0$, então $u = 0$;

se $x = \frac{\pi}{2}$, então $u = \pi$.

Logo,

$$\begin{aligned}\acute{A}rea\ S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\, du \\ &= -\frac{1}{2}\cos u \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos \pi - \cos 0) \\ &= 1 u.a.\end{aligned}$$

1.7.1 Exercícios

1) Calcular as integrais indefinidas.

a) $\int \sqrt[3]{3x-1}\, dx$;

b) $\int \cos(5x+2)\, dx$;

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$;

d) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$;

e) $\int \operatorname{cotg} x\, dx$;

f) $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

2) Calcular as integrais definidas usando o método da mudança de variável.

a) $\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\, dx$;

b) $\int_1^2 \frac{3dx}{x \ln^2 3x}$;

c) $\int_1^2 x e^{3x^2}\, dx$;

d) $\int_0^3 2x 3^{x^2}\, dx$.

3) Calcule a integral $\int \sec x \, dx$.

Sugestão. Escreva $\sec x = \sec x \dfrac{(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x)}$.

4) Mostre que $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + c$, onde $a \neq 0$.

1.7.2 Método da integração por partes

Sejam f e g funções deriváveis num mesmo intervalo I. Pela regra da derivada do produto, temos:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Note que $[f(x) \cdot g(x)]$ é uma primitiva de $[f(x) \cdot g(x)]'$. Assim, podemos escrever

$$\int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]\, dx = f(x) \cdot g(x) + c_1,$$

ou ainda

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + c_1.$$

Observe que ao desenvolver a integral no segundo membro surgirá outra constante de integração. Supriremos a constante c_1 na fórmula acima e no final do processo introduziremos uma constante c para representar todas as constantes de integração envolvidas. Desse modo podemos escrever:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx,$$

que é a fórmula de integração por partes.

Vamos reescrever a fórmula da integração por partes, usando uma notação que se torna fácil de ser memorizada. Fazendo

$$u = f(x) \text{ e } v = g(x), \text{ temos } du = f'(x)dx \text{ e } dv = g'(x)\, dx.$$

Então a fórmula da integração por partes pode ser escrita como

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du.$$

Exemplo 1.32. Calcular a integral $\int x\cos x\,dx$.

Solução. Vamos aplicar o método da integração por partes para calcular a integral. Para isso, devemos escolher u e dv. Fazendo

$u = x$ e $dv = \cos x\,dx$, temos

$du = dx$ e $v = \operatorname{sen} x$.

Aplicando a fórmula da integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\\ &= x\operatorname{sen} x + \cos x + c\,.\end{aligned}$$

Exemplo 1.33. Calcular a integral $\int \ln x\,dx$.

Solução. Fazendo

$u = \ln x$ e $dv = dx$, temos

$du = \dfrac{1}{x}dx$ e $v = x$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\\ &= x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + c.\end{aligned}$$

Exemplo 1.34. Calcular a integral $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$.

Solução. Fazendo

$u = \operatorname{arcsen} x$ e $dv = dx$, obtemos

$du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e $v = x$.

Aplicando a fórmula de integração por partes, temos:

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx = x\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Para calcular a integral $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ faremos a mudança de variável,

$t = 1 - x^2$ e obtemos $dt = -2x\,dx$.

Assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_1$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + c_1\,.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c, \text{ onde } (c = -c_1).$$

Exemplo 1.35. Calcular a integral $\int x^2 \cos 2x\,dx$.

Solução. Fazendo

$$u = x^2 \quad \text{e} \quad dv = \cos 2x\,dx \text{ obtemos}$$

$$du = 2x\,dx \quad \text{e} \quad v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

Assim,

$$\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} 2x - \int x \operatorname{sen} 2x\,dx.$$

Para calcular a $\int x \operatorname{sen} 2x\,dx$ devemos aplicar novamente o método da integração por partes.

Fazendo

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = \operatorname{sen} 2x\,dx \text{ obtemos}$$

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Segue que,

$$\int x \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c_1.$$

Portanto,

$$\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c.$$

Exemplo 1.36. Calcular a integral $\int e^{3x} \cos x \, dx$.

Solução. Fazendo

$$u = e^{3x} \quad \text{e} \quad dv = \cos x \, dx \quad \text{temos}$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad \text{e} \quad v = \text{sen}\, x.$$

Assim,

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \text{sen}\, x - 3\int e^{3x} \text{sen}\, x \, dx.$$

Para calcular a integral $\int e^{3x} \text{sen}\, x \, dx$ aplicamos novamente a integração por partes. Fazendo

$$u = e^{3x} \quad \text{e} \quad dv = \text{sen}\, x \, dx \quad \text{temos}$$

$$du = 3e^{3x} dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x.$$

Segue que

$$\int e^{3x} \text{sen}\, x \, dx = -e^{3x} \cos x + 3\int e^{3x} \cos x \, dx.$$

Logo,

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \text{sen}\, x + 3e^{3x} \cos x - 9\int e^{3x} \cos x \, dx.$$

Note que a integral do segundo membro é igual à integral que queremos calcular.
Chamando $I = \int e^{3x} \cos x \, dx$ podemos escrever

$$I = e^{3x} \text{sen}\, x + 3e^{3x} \cos x - 9I,$$

ou seja,

$$I = \frac{1}{10}[e^{3x} \text{sen}\, x + 3e^{3x} \cos x].$$

Portanto,

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = \frac{e^{3x}}{10}[\text{sen}\, x + 3\cos x] + c.$$

Podemos calcular integrais definidas usando integração por partes. Combinando a fórmula de integração por partes com o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx,$$

que é a fórmula de integração por partes para integral definida.

Exemplo 1.37. Avalie a integral $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

Solução. Fazendo

$$u = f(x) = \ln x \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx = x\,dx \text{ obtemos}$$

$$du = f'(x)\,dx = \frac{1}{x}dx \quad \text{e} \quad v = g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Usando a fórmula da integração por partes para integral definida, temos

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx \\
&= \left(\frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{1^2}{2}\ln 1\right) - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 \\
&= 2\ln 2 - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= 2\ln 2 - \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

1.7.2 Exercícios

1) Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int x^2 e^x \, dx$;

b) $\int (x-3)\sec^2 x \, dx$;

c) $\int x^4 \ln x \, dx$;

d) $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$;

e) $\int \ln(x^2+1)\, dx$;

Sugestão. Aplicar o método da integração por partes e escrever $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$.

f) $\int \sec^3 x \, dx$;

Sugestão. Escreva $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$ e use $\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$.

2) Calcular as integrais definidas:

a) $\int_1^2 x e^x dx$; c) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos 2x\, dx$; d) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

3) Use o método da integração por partes para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.$$

Sugestão. Expresse $\operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x$.

4) Suponha que f'' é contínua em $[a,b]$. Mostre que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-x) f''(x)\, dx.$$

1.8 Cálculo de áreas

Vimos na Seção 1.2 que, se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, a área da região plana S limitada pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, e pelo gráfico de f é definida por $\text{Área } S = \int_a^b f(x)\, dx$.

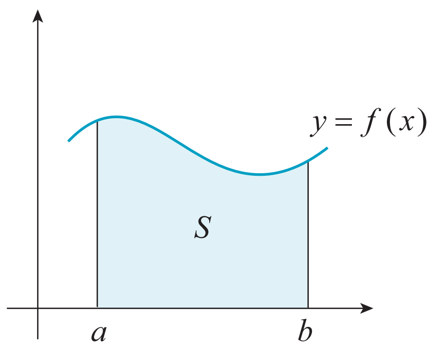
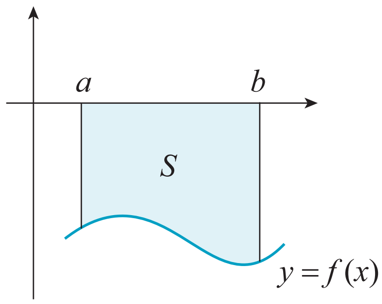


Figura 1.12

Podemos estender o cálculo de área para uma classe mais ampla de regiões planas. Vamos assumir que as funções envolvidas são funções contínuas em $[a,b]$. Vejamos:

1) Se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $-f(x) \geq 0$ e, assim,

$$\text{Área } S = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

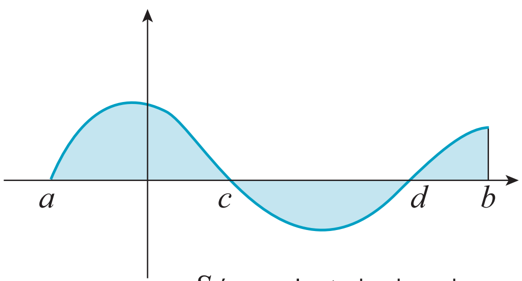


$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b\ \ e\ \ f(x) \le y \le 0\}$$

Figura 1.13

Observação. Se a região S é descrita como na Figura 1.14, então

$$Área\ S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$$

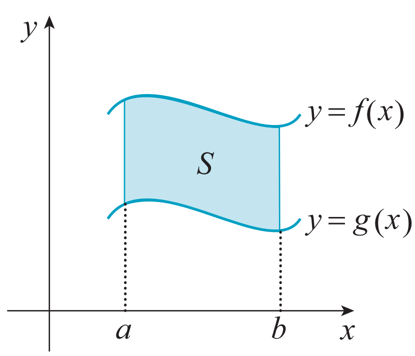


S é o conjunto hachurado

Figura 1.14

2) Se a região plana está entre os gráficos de duas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e as retas $x = a$ e $x = b$, com $f(x) \ge g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então:

$$Área\ S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$



$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b\ \ e\ \ g(x) \le y \le f(x)\}$$

Figura 1.15

A Figura 1.15 ilustra o caso onde S é a região limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pelos gráficos das funções f e g com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Note que $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se for mantido $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, mesmo que f e g não satisfaçam a condição $f(x) \geq 0$ e/ou $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, a fórmula para o cálculo da área do conjunto S continua o mesmo. As Figuras 1.16 (a) e 1.16 (b) ajudam a visualizar o cálculo da área.

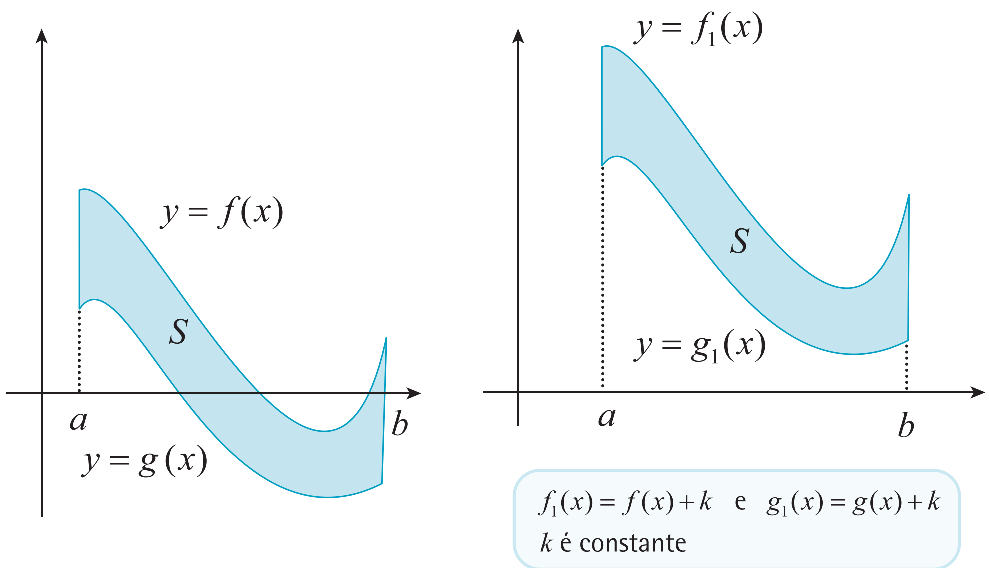


Figura 1.16

Conclusão. Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\text{Área } S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Exemplo 1.38. Calcular a área da região S limitada pelas retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$ e pela curva $y = x^3 + 2$.

Solução. A região S está ilustrada na Figura 1.17.

$$\begin{aligned}\text{Área } S &= \int_1^2 (x^3 + 2)\,dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + 2x\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \frac{23}{4}\,u.a.\end{aligned}$$

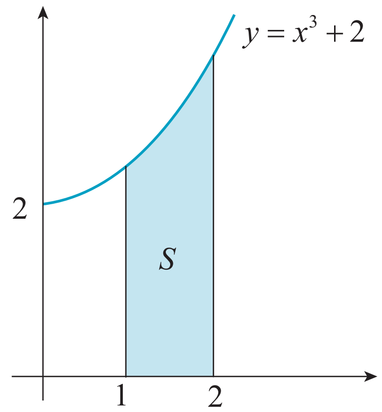


Figura 1.17

Observação. Em alguns casos $x = a$ e/ou $x = b$ precisam ser determinados.

Exemplo 1.39. Encontre a área da região S limitada pelo eixo x e pela parábola $y = x^2 + x - 2$.

Solução. A parábola $y = x^2 + x - 2$ corta o eixo dos x nos pontos $x = -2$ e $x = 1$, (ver Figura 1.18). Como $y = f(x) = x^2 + x - 2 \leq 0$ em $[-2, 1]$, resulta que

$$\begin{aligned} \text{Área } S &= -\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\, dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right] \Bigg|_{-2}^{1} \\ &= -\left(-\frac{9}{2} \right) = \frac{9}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

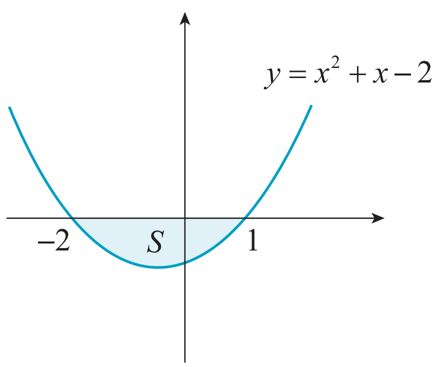


Figura 1.18

Exemplo 1.40. Calcular a área da região S limitada pelas retas $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x + 2$ e pela curva $x = \sqrt{y}$.

Solução. As curvas $y = -x + 2$ e $x = \sqrt{y}$ interceptam-se no ponto de abscissa 1 (ver Figura 1.19).

$$
\begin{aligned}
Área\ S &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} [-x + 2 - x^2]\, dx \\
&= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{1}{3} u.a.
\end{aligned}
$$

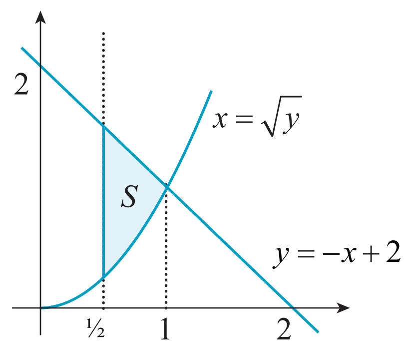


Figura 1.19

Exemplo 1.41. Encontre a área da região S limitada pelas retas $y = x + 2,\ y = 2,\ y = -1$ e pela curva $x = y^2$.

Solução. As retas $y = x + 2$ e $y = -1$ interceptam-se no ponto de abscissa -3. As curvas $y^2 = x$ e $y = 2$ interceptam-se no ponto de abscissa 4. As curvas $y^2 = x$ e $y = -1$ interceptam-se no ponto de abscissa 1. A Figura 1.20 indica os pontos de interseção das curvas.

$$
\begin{aligned}
Área\ S &= \int_{-3}^{0} [x + 2 - (-1)]\, dx + \int_{0}^{4} (2 - \sqrt{x})\, dx + \int_{0}^{1} [-\sqrt{x} - (-1)]\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-3}^{0} + 3x\Bigg|_{-3}^{0} + 2x\Bigg|_{0}^{4} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{4} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{1} + x\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \frac{15}{2} u.a.
\end{aligned}
$$

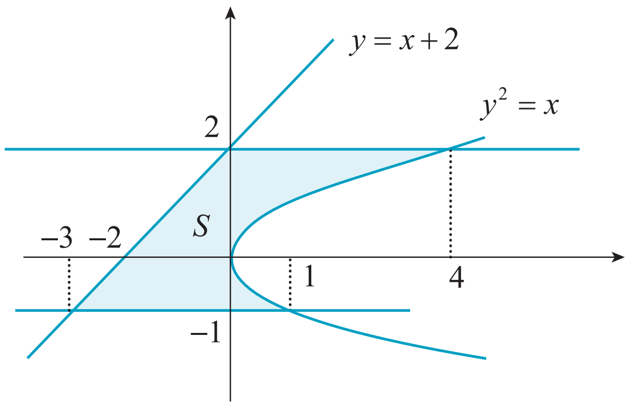


Figura 1.20

Outra maneira para encontrar a área acima é calcular a integral $\acute{A}rea\ S = \int_{-1}^{2} [y^2 - (y-2)]\, dy$.

1.8.1 Exercícios

1) Esboce a região limitada pelas curvas dadas e encontre a área da região:

a) $y = x^3$ e $y = x$;

b) $y = 6 + x$, $y = x^3$ e $y = -\dfrac{x}{2}$;

c) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$ e $y = 0$;

d) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$;

e) $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} 2x$ e $x = 0$ no primeiro quadrante;

f) $y = x - 1$ e $y^2 = 2x + 6$.

2) Considere a região descrita pelo conjunto S dado e calcule sua área.

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$;

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x \le 2,\ x \le y \le x^2\}$;

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ x^3 - x \le y \le -x^2 + 5x\}$.

1.9 Integrais impróprias

Na definição da integral $\int_a^b f(x)\,dx$, assumimos f uma função limitada no intervalo fechado e limitado $[a,b]$. Agora, vamos estender o conceito de integral para os demais tipos de intervalos. Isto é, para intervalos da forma $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ e $(-\infty,\infty)$.

Definição 1.6. (Integrais impróprias em intervalos limitados)

a) Seja $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,t]$, para todo t em (a,b). Se $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$ existir então este limite é chamado integral imprópria de f no intervalo $[a,b)$, e escrevemos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$.

b) Seja $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ uma função integrável em $[t,b]$, para todo t em (a,b). Definimos a integral imprópria de f no intervalo $(a,b]$ como sendo $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$, se este limite existir, e escrevemos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$.

c) Sejam $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função e $c\in(a,b)$. Se $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ existem então definimos a integral imprópria de f em (a,b) por $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Observações:

a) Com a notação do item (c) da definição acima, pode-se provar que, se $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ existem para algum, então $\int_a^\lambda f(x)\,dx$ e $\int_\lambda^b f(x)\,dx$ existem para todo . Logo, pela contrapositiva, para mostrar que $\int_a^b f(x)\,dx$ não existe, basta encontrar um ponto $c\in(a,b)$ tal que $\int_a^c f(x)\,dx$ ou $\int_c^b f(x)\,dx$ não exista.

b) Costuma-se chamar a expressão $\int_a^b f(x)\,dx$ de integral, mesmo que o domínio da f seja $[a,b)$, $(a,b]$ ou (a,b). E escreve-se a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ igual ao limite correspondente, mesmo antes de calcular o limite. Deixando subentendido que a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ só existe quando o limite correspondente existe. Por exemplo, se f está definida em $[a,b)$ escrevemos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$, mesmo antes de calcular o limite.

Quando a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, dizemos que essa integral é **convergente**. Caso contrário, dizemos que é **divergente**.

Exemplo 1.42. Determine se cada integral é convergente ou divergente.

a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx;$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx;$

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, onde $p>0$.

Solução.

a) A função $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ é contínua em $[0,t]$ para $0<t<2$. Logo, f é integrável em $[0,t]$ para todo $t\in(0,2)$. Da Definição 1.6, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx &= \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx\\ &= \lim_{t\to 2^-} -2\sqrt{2-x}\,\Big|_0^t\\ &= \lim_{t\to 2^-}(-2\sqrt{2-t}+2\sqrt{2})\\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2\sqrt{2}$, a integral $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$ é convergente.

b) A função $f(x)=\frac{1}{x}$ é contínua em $[t,1]$ para todo $0<t<1$. Logo, f é integrável em $[t,1]$ para todo $0<t<1$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}dx \\ &= \lim_{t\to 0^+} \ln x\Big|_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+}[\ln 1 - \ln t] = +\infty.\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}dx$ não existe, a integral $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ é divergente.

c) A função $f(x) = \frac{1}{x^p}$ é contínua em $[t,1]$ para todo $t \in (0,1)$. Note que, para $p=1$, a integral é $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$, que é divergente (item (b)).

Vamos analisar a convergência da integral para $p \neq 1$. Neste caso,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}dx \\ &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-p}dx \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{t^{-p+1}}{1-p}\right).\end{aligned}$$

Se $p > 1$ então $-p+1 < 0$, e, quando $t \to 0^+$, temos $t^{-p+1} \to +\infty$. Segue que

$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}dx \text{ não existe.}$$

Logo, a integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ com $p > 1$ é divergente.

Se $0 < p < 1$, então $-p+1 > 0$, e, quando $t \to 0^+$, temos $t^{-p+1} \to 0$ Logo,

$\lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}$, isto é, a integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ é convergente.

Portanto, a integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ é convergente para $0 < p < 1$ e divergente para $p \geq 1$.

Exemplo 1.43. Avalie a integral $\int_0^1 x \ln x \, dx$.

Solução. A função $f(x) = x \ln x$ não está definida na origem, e é contínua em $[t,1]$ para todo $0 < t < 1$. Assim,

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x \ln x \, dx.$$

Para obter $\int_t^1 x \ln x \, dx$, vamos usar integração por partes. Fazendo

$u = \ln x$ e $dv = x\,dx$, obtemos

$du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$.

Temos

$$\begin{aligned}\int_t^1 x \ln x \, dx &= \left.\frac{x^2}{2} \ln x \right|_t^1 - \frac{1}{2} \int_t^1 x \, dx \\ &= -\frac{t^2}{2} \ln t - \left.\frac{1}{4} x^2 \right|_t^1 \\ &= -\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4} \right].$$

Vamos usar a Regra de L' Hospital para calcular o limite do primeiro termo.

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0^+} -\frac{t^2}{2} \ln t &= \lim_{t \to 0^+} \frac{-\ln t}{\frac{2}{t^2}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{-\frac{1}{t}}{\frac{-4}{t^3}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{t^2}{4} = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}$.

Exemplo 1.44. Calcule a integral $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Solução. A função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ está definida em $(-1,1)$ e é contínua nos intervalos $[t,0]$ para todo $-1 < t < 0$ e $[0,s]$ para todo $0 < s < 1$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

desde que as integrais do segundo membro sejam convergentes. Vamos calcular

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Para obter $\int_{t}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, aplicaremos o método da substituição.

Fazendo $u = 1-x^2$, obtemos $du = -2xdx$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{t}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{-1}{2}\int_{1-t^2}^{1} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= -\sqrt{u}\Big|_{1-t^2}^{1} \\
&= -1+\sqrt{1-t^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{t\to -1^+}\left[-1+\sqrt{1-t^2}\right] \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{t\to 1^-}\int_{0}^{t} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx. \\
&= \lim_{t\to 1^-} -\sqrt{u}\Big|_{1}^{1-t^2} \\
&= \lim_{t\to 1^-}\left[-\sqrt{1-t^2}+1\right] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -1+1 = 0.$$

Exemplo 1.45. Calcule a integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx$.

Solução. A função $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ está definida em $(-1,1)$, e é contínua nos intervalos $[t,0]$ para todo $-1<t<0$ e $[0,s]$ para todo $0<s<1$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx,$$

desde que as integrais do segundo membro sejam convergentes. Calcularemos

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{0} \frac{1}{x^2-1}dx.$$

A função $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ pode ser escrita como

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Então

$$\begin{aligned}\int_{t}^{0} \frac{1}{x^2-1}dx &= \frac{1}{2}\int_{t}^{0} \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int_{t}^{0} \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1|\Big|_t^0 - \frac{1}{2}\ln|x+1|\Big|_t^0 \\ &= -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1|.\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}dx &= \lim_{t\to -1^+}\left[-\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1|\right] \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Como a integral $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1}dx$ é divergente, concluímos que $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}dx$ é divergente.

Se a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existir e f é não negativa no seu domínio $[a,b)$, $(a,b]$ ou (a,b), então esta integral pode ser interpretada como a área da região plana S sob gráfico de f e acima do eixo x, e entre retas $x=a$ e $x=b$ (ver Figura 1.21).

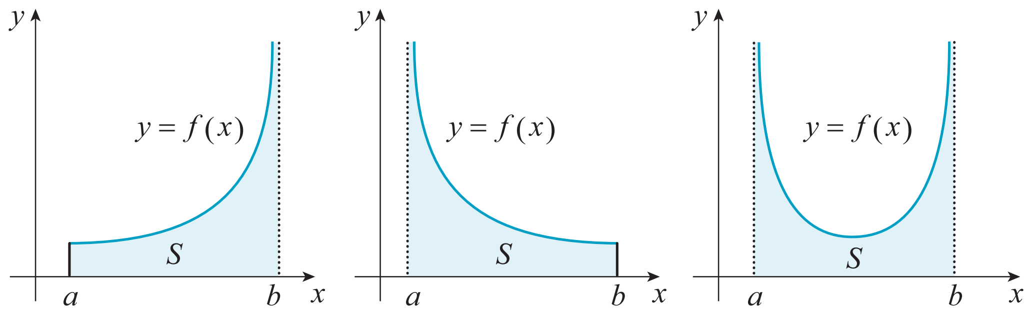


Figura 1.21

Definição 1.7. (Integrais impróprias em intervalos ilimitados)

a) Seja $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,t]$, para todo $t>a$. Se $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ existir, então este limite é chamado de integral imprópria de f no intervalo $[a,+\infty)$. Neste caso usamos a notação $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$.

Analogamente, se $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ é uma função integrável em $[t,b]$ para todo $t<b$, definimos a integral imprópria de f em $(-\infty,b]$ por $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$, quando o limite existir.

b) Seja $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função. Se para algum $c\in(a,+\infty)$ existirem $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$, definimos a integral imprópria de f em $(a,+\infty)$ por $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$.

De forma análoga, definem-se as integrais impróprias para funções definidas em intervalos da forma $(-\infty,b)$ e $(-\infty,+\infty)$.

Observações:

a) Costuma-se chamar as expressões $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ de integrais. E escreve-se a integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ igual ao limite correspondente, mesmo antes de calcular o limite. Deixando subentendido que a integral só existe quando o limite existe.

b) Com a notação do item (b) da definição acima pode-se provar que, se $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ existem para algum $c \in (a,+\infty)$, então $\int_a^{\lambda} f(x)\,dx$ e $\int_{\lambda}^{+\infty} f(x)\,dx$ existem para todo $\lambda \in (a,+\infty)$. O mesmo vale para integrais definidas em $(-\infty,b)$ e $(-\infty,+\infty)$.

Quando a integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe dizemos que esta integral é **convergente**. Caso contrário, dizemos que é **divergente**. O mesmo vale para as integrais $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exemplo 1.46. Determine se cada integral é convergente ou divergente.

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx;$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx;$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, onde $p > 0$.

Solução.

a) Da Definição 1.7, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} -e^{-x}\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}(-e^{-t}+e^0) \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{e^t}+1\right] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = 1$, a integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é convergente.

b) $$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \ln x\Big|_1^t
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} [\ln t - \ln 1]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty.$$

Como o limite não existe, a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ é divergente.

c) Para analisar a convergência da integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, estudaremos os casos em que $p = 1$ e $p \neq 1$.

Se $p = 1$ então a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ é divergente (item (b)).

Para $p \neq 1$, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-p} dx$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^t$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right].$$

Se $p > 1$, então $1 - p < 0$, e quando $t \to +\infty$ temos $t^{1-p} \to 0$. Logo,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}, \text{ isto é,}$$

a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ com $p > 1$ é convergente.

Se $0 < p < 1$ então $1 - p > 0$, e quando $t \to +\infty$ temos $t^{1-p} \to +\infty$. Neste caso,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-p} dx \text{ não existe,}$$

e assim a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ com $p < 1$ é divergente.

Portanto, a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ é convergente para $p > 1$ e divergente para $0 < p \leq 1$.

Exemplo 1.47. Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução. Da Definição 1.7, temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx.$$

Para calcular a integral $\int_0^t e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$ aplicaremos a integração por partes. Fazendo

$$u = e^{-x} \qquad \text{e} \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx, \text{ obtemos}$$

$$du = -e^{-x}dx \qquad \text{e} \qquad v = -\cos x.$$

Assim,

$$\int_0^t e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx = -e^{-x}\cos x\Big|_0^t - \int_0^t e^{-x}\cos x\,dx.$$

Para calcular $\int_0^t e^{-x}\cos x\,dx$, aplicamos novamente a integração por partes. Fazendo

$$u = e^{-x} \qquad \text{e} \qquad dv = \cos x\,dx, \text{ obtemos}$$

$$du = -e^{-x}dx \qquad \text{e} \qquad v = \operatorname{sen} x.$$

Logo,

$$\int_0^t e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx = (-e^{-t}\cos t + \cos 0) - \left[e^{-x}\operatorname{sen} x\Big|_0^t + \int_0^t e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx\right]$$

ou seja,

$$\int_0^t e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}[-e^{-t}\cos t + 1 - e^{-t}\operatorname{sen} t].$$

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos t}{e^t} + 1 - \frac{\operatorname{sen} t}{e^t}\right]$$

$= \frac{1}{2}$. (Note que $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ são limitadas e $\frac{1}{e^t} \to 0$ quando $t \to +\infty$)

Teorema (Cálculo I). Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções, e $x_0 \in (a,b)$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e g é limitada, então $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0.$

Exemplo 1.48. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+9}dx.$

Solução. Podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+9}dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+9}dx + \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+9}dx,$$

desde que ambas as integrais do segundo membro sejam convergentes. Calculando,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+9} = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2+9}dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\Big|_0^t \qquad \text{(Seção 1.7.2 – Exercício 4)}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{3}-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}0\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{3}$$

$$= \frac{\pi}{6}.$$

De forma análoga, mostra-se que $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+9}=\frac{\pi}{6}$.

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente e $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{3}$.

Observação. Qualquer uma das integrais impróprias definidas acima pode ser interpretada como uma área, desde que a função seja não negativa e a integral convergente. Por exemplo, se $f(x)\geq 0$ para todo $x\geq a$ e a integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe, então definimos a área da região correspondente $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\geq a, 0\leq y\leq f(x)\}$ como sendo $\text{Área } S=\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

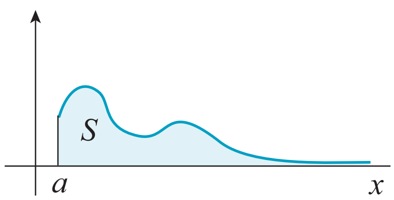


Figura 1.22

Exemplo 1.49. Esboce a região correspondente

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\leq 1,\ 0\leq y\leq e^x\}$$

e determine a área de S.

Solução. A região S está ilustrada na Figura 1.23.

$$\text{Área } S=\int_{-\infty}^{1} e^x dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_t^1 e^x dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} e^x \Big|_t^1$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (e - e^t)$$

$$= e \ u.a.$$

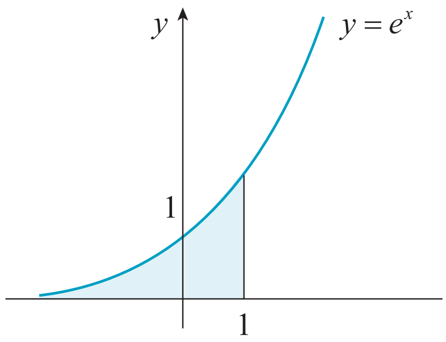


Figura 1.23

Em algumas situações, estamos interessados somente em saber se a integral é convergente ou divergente. O próximo resultado (Critério da Comparação) permite afirmar a convergência ou divergência de uma integral comparando-a com outra. A demonstração será omitida.

Teorema 1.13. **(Critério da Comparação)** Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções tais que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo $x \in I$, onde I é um intervalo da forma $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ ou $(-\infty,+\infty)$.

a) Se a integral de g em I é convergente, então a integral de f em I é convergente;

b) Se a integral de f em I é divergente, então a integral de g em I é divergente.

Note que o item b) no teorema acima é a contrapositiva do item a).

Observações:

a) O Critério da Comparação pode ser aplicado quando $f(x)$ e $g(x)$ são ambas não positivas. Sejam f e g funções tais que $f(x) \le g(x) \le 0$ para todo $x \in I$ (I é um dos intervalos mostrados anteriormente).

i) Se a integral de f em I converge, então a integral de g em I converge.

ii) Se a integral de g em I diverge, então a integral de f em I diverge.

b) No Critério da Comparação, a hipótese de $f(x)$ e $g(x)$ serem ambas não negativas (ou não positivas) é essencial. Se esta hipótese é removida, podemos ter problema. Vejamos: Considere as funções $f, g : (0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{-1}{x}$ e $g(x) = 1$. Temos $g(x) \geq f(x)$, pois $f(x) \leq 0$ para todo $x \in (0,1]$.

Calculando

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 dx = \lim_{t\to 0^+} x\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+}(1-t) = 1$$

e

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{-1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} - \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} - \ln|x|\Big|_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} - (\ln 1 - \ln|t|) = -\infty.$$

Logo,

$$\int_0^1 g(x)\,dx \text{ converge, mas } \int_0^1 f(x)\,dx \text{ diverge.}$$

Exemplo 1.50. Verifique que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$ é convergente.

Solução. Temos que

$$x^4 < x^4 + 1 \text{ para } x \geq 1.$$

Segue que

$$\frac{1}{x^4+1} < \frac{1}{x^4} \quad \text{para } x \geq 1.$$

Multiplicado por x a desigualdade acima temos,

$$0 < \frac{x}{x^4+1} < \frac{1}{x^3} \quad \text{para } x \geq 1.$$

Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ é convergente (Exemplo 1.46), segue pelo Critério da Comparação que a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$ é convergente.

Exemplo 1.51. Mostre que a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}dx$ é divergente.

Solução. Para $x \geq 1$ temos

$$1+e^{-x} > 1 \quad \text{e} \quad \frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} > 0.$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ é divergente, segue pelo Critério da Comparação que a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}dx$ é divergente.

Exemplo 1.52. Verifique que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+9}dx$ é convergente.

Solução. Para $x \geq 0$ temos $\cos^2 x \leq 1$. Podemos escrever

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^2+9} \leq \frac{1}{x^2+9} \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

Como $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}dx$ é convergente (Exemplo 1.48) segue, pelo Critério da Comparação, que a integral $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+9}dx$ é convergente.

Exemplo 1.53. Aplique o Critério da Comparação para verificar que $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ é convergente.

Solução. Para $0 < x \leq 1$ temos $0 < e^x \leq e$. Segue que

$$0 < \frac{e^x}{\sqrt{x}} \leq \frac{e}{\sqrt{x}} \quad \text{para } 0 < x \leq 1.$$

Como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ é convergente, temos que $\int_0^1 \frac{e}{\sqrt{x}}dx$ também é convergente. Logo, $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ é convergente, pelo critério da comparação.

1.9.1 Exercícios

1) Verifique se a integral é convergente ou divergente e avalie aquelas que são convergentes.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$;

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}dx$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+4t^2}\,dt;$

c) $\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx;$

d) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2},\ (a>0);$

f) $\int_{0}^{1} \ln z\,dz;$

g) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx;$

h) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos 2x\,dx.$

2) Use o critério da comparação para determinar se a integral é convergente.

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3(1+e^x)};$

b) $\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx;$

c) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2-x}\,dx;$

d) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}\,dx;$

e) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+1}}\,dx;$

f) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx.$

3) Se $f(t)$ é contínua para $t \geq 0$, a transformada de Laplace de f é a função F definida por $F(s)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$, e o domínio de F é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t)=1;$

b) $f(t)=\cos t;$

c) $f(t)=e^{at};$

d) $f(t)=t.$

1.10 Utilização de pacotes computacionais

Os computadores surgiram como ferramentas para facilitar a realização de grandes quantidades de operações de forma automática. Atualmente, essa não é a única de suas utilidades.

A manipulação de expressões simbólicas é um dos mais recentes usos dos computadores, produzindo resultados algébricos para problemas algébricos.

Nesse contexto, o pacote Gnu/Maxima é um ótimo representante podendo ser utilizado para a realização de cálculos íntegro-diferenciais, bastante úteis para auxiliar o aluno que está estudando disciplinas de Cálculo. Além disso, trata-se de um *software* livre (gratuito) que pode ser encontrado em http://maxima.sourceforge.net/.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos das potencialidades do Maxima no cálculo integral e diferencial.

Exemplo 1.54. Calcular $\int_1^5 (3x+4)\,dx$.

Solução. Podemos resolver esta integral através do cálculo da área delimitada pelas curvas dadas por $f(x)=3x+4$, $x=1$, $x=5$ e pelo eixo-x. Para facilitar, podemos desenhar o gráfico da respectiva região (Figura 1.24). Para isso, podemos usar o seguinte comando do pacote computacional Maxima:

plot2d(3*x + 4, [x, 1, 5])

onde o primeiro argumento representa a função, e o segundo argumento se divide em três partes: a variável independente e os extremos inferior e superior do intervalo onde a função deve ser representada.

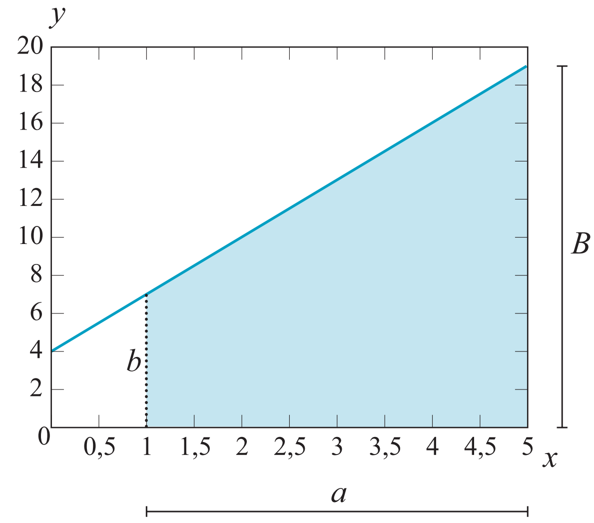


Figura 1.24: Esboço do gráfico de $f(x)=3x+4$ e determinação de área no intervalo [1,5].

Sabemos que a região hachurada no gráfico é um trapézio cuja área é dada por

$$\frac{(B+b).a}{2}=\frac{(19+7).4}{2}=52\,u.a.$$

Tal integral definida também pode ser calculada através do comando

integrate(3*x + 4, x,1, 5)

onde o primeiro argumento representa a função a ser integrada, o segundo representa a variável de integração e os dois últimos representam os extremos inferior e superior do intervalo de integração.

Exemplo 1.55. Encontrar a primitiva das integrais abaixo utilizando o Maxima:

a) $F(x) = \int 2x\,dx;$

b) $F(x) = \int 3e^{3x}\,dx;$

c) $F(x) = \int \operatorname{sen}(x)\,dx;$

d) $F(x) = \int x^4\,dx.$

Solução. Em todos os itens, pode-se utilizar o comando

integrate(f(x), x).

Repare que agora ele só tem dois argumentos: o primeiro que deve ser trocado pela respectiva função a ser integrada e o segundo que representa a variável de integração. Em

a) temos o comando **integrate(2x,x)**;

b) **integrate(3*exp(3*x),x)**;

c) **integrate(sin(x),x)** e em

d) **integrate(x^4,x)**.

Ao realizar esses testes, note que aos resultados podem ser adicionadas constantes de integração para representar toda a família de primitivas.

Exemplo 1.56. Calcular a área definida pelo gráfico da curva

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ em } [0,1].$$

Solução. O gráfico da respectiva região (Figura 1.25) pode ser obtido através do comando **plot2d(x/(x^2+1)^(1/2), [x, 0, 1])**.

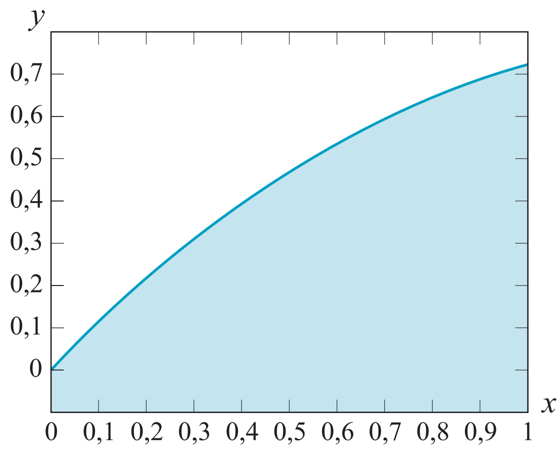


Figura 1.25: Esboço do gráfico de $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ e determinação de área no intervalo [0,1].

A área definida pelo gráfico da função f, no intervalo especificado, pode ser calculada através da integral

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

que o *software* Maxima pode calcular usando o comando

integrate(x/(x^2+1)^(1/2), x,0, 1),

resultando $\sqrt{2}-1\,u.a.$ Para obtermos somente a primitiva $\sqrt{x^2+1}$, podemos usar o comando

integrate((x^2+1)^(1/2) , x).

Exemplo 1.57. Calcular a área delimitada pelo gráfico das curvas $y=x^2$ e $y=2x-x^2$.

Solução. Para esboçar os gráficos das duas funções em um mesmo sistema de eixos coordenados, entre $x=-0,5$ e $x=1,5$ (Figura 1.26), utilizamos o comando

plot2d([x^2, 2*x-x^2] , [x, -0.5, 1.5])

onde o primeiro argumento se divide em duas partes representando cada uma das funções, e o segundo argumento se divide em três partes: a variável independente e os extremos inferior e superior do intervalo onde a função deve ser representada.

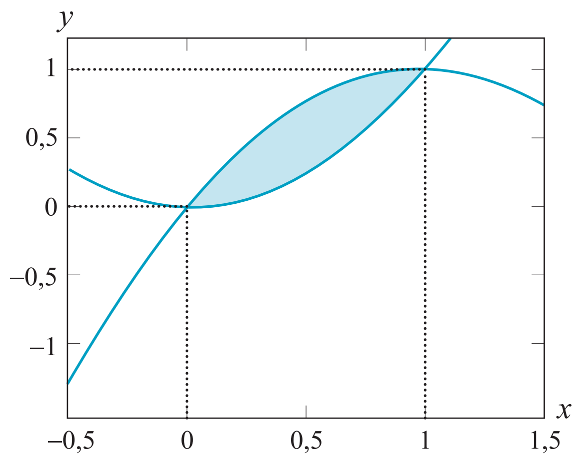


Figura 1.26: Esboço dos gráficos de $y_1 = x^2$ e $y_2 = 2x - x^2$ e determinação de área em $[0,1]$.

As abscissas dos pontos onde as duas curvas se interceptam são 0 e 1. Assim, a área definida pelo gráfico pode ser calculada através da integral $\int_0^1 \left[(2x - x^2) - x^2\right] dx$, usando

integrate(2*x, x,0, 1),

que resulta em $\frac{1}{3} u.a.$

Exemplo 1.58. Calcular $\int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx$.

Solução. Neste caso, trata-se de uma integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} e^{-x} dx = \lim_{b \to -\infty} F(b).$$

Vamos calcular a primitiva utilizando o comando

integrate(exp(-x), x,0,b)

que resulta em $F(b) = -e^{-b} + 1$. Em seguida calculamos o respectivo limite no infinito através de

limit (-exp(-b)+1, b, inf)

onde o primeiro argumento representa a função F, o segundo representa a variável independente b e o último representa para onde tende tal variável. Nesse caso, obtemos o resultado 1.

Exemplo 1.59. Calcular $\int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx$.

Solução. Agora, temos que calcular $\lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} e^{-x} dx = \lim_{b \to -\infty} F(b)$.
O comando

integrate(exp(-x), x,b,0)

resulta em $F(b) = e^{-b} - 1$ enquanto o limite calculado por

limit (exp(-b)-1, b, -inf)

resulta $+\infty$, indicado pelo *software* por **inf**, mostrando que a integral é divergente.

1.10.1 Exercícios

1) Calcule a integral $\int_{2}^{2} e^{-x^2} dx$.

2) Mostre que se f é contínua em $[-1,3]$, então

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{-1} f(x)\,dx = 0.$$

3) Considere a função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x},\ se\ x \neq 0 \\ 0,\ se\ x = 0 \end{cases}.$$

A função f é integrável em $[-1,1]$? Justifique.

4) Considere as integrais

$$\int_{0}^{2} f(t)\,dt = 3,\quad \int_{0}^{5} f(s)\,ds = 8 \quad \text{e} \quad \int_{3}^{5} f(u)\,du = -1.$$

Encontre $\int_{2}^{3} f(x)\,dx$.

5) Se f é contínua em $[a,b]$, mostre que $\left|\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \leq \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$.

Sugestão. Use $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ e Teorema 1.8.

6) Encontre uma função f tal que $f'(x) - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = 0$ e $f(1) = 1$.

7) Seja f função contínua em $[-a,a]$. Mostre que:

a) Se f é função par, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

b) Se f é função ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

8) Use o Exercício 7 acima para mostrar que, se $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, então $\int_{-1}^{1} x\,f(x^2)\,dx = 0$.

9) Mostre que se $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, então

$$\int_0^{\pi} g(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x\,dx = 0.$$

10) Encontre a derivada da função $G(x)=\int_2^{x^3}\cos t\,dt$.

Sugestão. Faça $u = x^3$ e use a Regra de Cadeia.

11) Verifique por diferenciação que a fórmula está correta.

a) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx = 2\sqrt{x-2}-\frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}}+c;$

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c;$

c) $\displaystyle\int\frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{1}{6}x\sqrt{x^2+4}-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right|+c.$

12) Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int(x^2+\operatorname{sen} x)\,dx$;

b) $\displaystyle\int\frac{x^4-3\sqrt[3]{x}+2}{x}dx$;

c) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2}dx$;

d) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$,

Sugestão. Dividir x^2 por (x^2+1);

e) $\displaystyle\int\frac{2-\operatorname{sen} x}{2x+\cos x}dx;$

f) $\int\operatorname{tg} x\,dx;$

g) $\displaystyle\int\frac{e^{\cos x}}{\operatorname{cossec} x}dx$;

h) $\int\cos x\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\,dx$;

i) $\displaystyle\int\frac{(x-1)}{x^2-2x+5}dx;$

j) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$,

Sugestão. Completar o quadrado;

k) $\int(x+\sec^2 5x)\,dx;$

l) $\int \cos^2 x\, dx$,

Sugestão. Use $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

m) $\int \log x\, dx$;

n) $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} dx$;

o) $\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} 3x\, dx$;

p) $\int x^2 \cdot \cos x\, dx$;

q) $\int x^2 \cdot e^x dx$;

r) $\int x^2 \cdot \ln x\, dx$.

13) Sabendo que $f(0) = g(0) = 0$, mostre que

$$\int_0^a f(x)\, g''(x)\, dx = f(a)\, g'(a) - f'(a)\, g(a) + \int_0^a f''(x)\, g(x)\, dx.$$

14) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se\ |x| \le 1 \\ 2^x, & se\ 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Determine $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$.

15) Calcule as integrais definidas:

a) $\int_1^2 \dfrac{\ln^3 x}{x} dx$;

b) $\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2} dt$;

c) $\int_1^2 \ln x\, dx$;

d) $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \operatorname{sen}^5 x\, dx$;

f) $\int_{-2}^{3} |x^2 - 1|\, dx$;

g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x\, dx$;

h) $\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x + |\cos x|)\, dx$.

16) Use integração por partes para mostrar as fórmulas de redução.

a) $\int \cos^n x\, dx = \dfrac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \dfrac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$.

b) $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$.

17) Calcule a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

18) Calcule a área entre a curva $y=(x+1)(x-1)(x+2)$ e o eixo dos x.

19) Calcule a área entre as curvas $x=y+1$ e $x=\dfrac{y^2}{2}-3$.

20) Esboce a região limitada pelas curvas dadas e encontre a área da região.

a) $y=x+6,\ y=x^3$ e $y=-x$;

b) $x=y^2-2,\ x=e^y,\ y=1$ e $y=-1$.

21) Determine a área da região limitada pelos gráficos de $y=\sec x$, $y=x,\ x=-\dfrac{\pi}{4}$ e $x=\dfrac{\pi}{4}$.

22) Verifique se a integral é convergente ou divergente, e avalie aquelas que são convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\text{sen}\,x\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

c) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{x^2-2x}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^4}\,dx$.

23) Use o critério da comparação para determinar se a integral é convergente.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\,\text{sen}\,x\,|}{x^3}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+10}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$.

24) a) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ é divergente.

b) Verifique que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{+t} x\,dx=0$. Note que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \neq \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx$.

25) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ função contínua. Mostre que existe $c\in(a,b)$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

Esse resultado é chamado de "**Teorema do Valor Médio para Integrais**".

Sugestão. Aplicar o Teorema de Weierstrass e o Teorema do Valor Intermediário.

Resumo

Os principais assuntos estudados neste capítulo foram:

- A definição de integral e suas propriedades;
- O Teorema Fundamental do Cálculo;
- Método da Substituição;
- Método da Integração por Partes;
- Aplicação da integral definida no cálculo de área;
- As definições de Integrais Impróprias. É importante saber calcular limite de funções.

Respostas dos exercícios

1.2.1 Exercícios

1) a) $\max A = \sup A = 5;\quad \min A = \inf A = -2;$

b) $\min B = \inf B = \frac{1}{2};\quad \sup B = 1.$

2) $2;\quad 1.$

3) $\frac{57}{60};\quad \frac{77}{60}.$

4) Sim, f é limitada em $[0,4]$ e descontínua somente no ponto 2.

5) π.

1.3.1 Exercícios

1) $34;\quad 22;\quad 28.$ 2) $\frac{1}{3}.$

1.4.1 Exercícios

1) 0.

2) a) $\int_2^{10} f(x)\,dx$; b) $\int_2^{7} f(x)\,dx$.

3) $-10.$

1.5.1 Exercícios

1) a) $\dfrac{64}{5}$; c) $\dfrac{3}{2}(e^2-1)$;

b) 0; d) $\dfrac{2}{\ln 3}$;

2) a) $\sqrt{1+x^2}$;

b) $-\ln x^2$;

c) $-e^{-x}\cos e^{-x}$.

3) $\dfrac{53}{2}$.

1.6.1 Exercícios

1) a) $x^3+\dfrac{x^5}{5}+x+c$; d) $\dfrac{1}{6}x^3+c$;

b) $\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{9}{t}+c$; e) $\sec x+c$;

c) $-e^{-x}+c$; f) $2\text{arcsen}\, x+c$.

3) $3\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^7}$.

4) a) $\dfrac{3e^4+13}{6}$; b) $3+\dfrac{\pi^2}{4}$.

1.7.1 Exercícios

1) a) $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{(3x-1)^4}+c$; d) $\dfrac{\ln^2 x}{2}+c$;

b) $\dfrac{1}{5}\text{sen}\,(5x+2)+c$; e) $\ln|\text{sen}\, x|+c$;

c) $\sqrt{x^2+4}+c$; f) $\dfrac{1}{2}\text{arc tg}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+c$;

2) a) $\dfrac{1}{3}\ln 9$; c) $\dfrac{1}{6}[e^{12}-e^3]$;

b) $-\dfrac{3}{\ln 6}+\dfrac{3}{\ln 3}$; d) $\dfrac{3^9-1}{\ln 3}$.

3) $\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$.

1.7.2 Exercícios

1) a) $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$;

b) $(x-3)\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c$;

c) $\frac{x^5}{5}\left[\ln x - \frac{1}{5}\right] + c$;

d) $x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$;

e) $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + c$;

f) $\frac{1}{2}[\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|] + c$.

2) a) e^2;

b) $-\frac{1}{2}$;

c) $\frac{4}{3}$;

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$.

1.8.1 Exercícios

1) a) $\frac{1}{2}\,u.a.$

b) $22\,u.a.$

c) $\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)u.a.$

d) $\frac{1}{2}\,u.a.$

e) $\frac{1}{4}\,u.a.$

f) $18\,u.a.$

2) a) $\frac{1}{3}u.a.$

b) $\frac{5}{6}u.a.$

c) $\frac{16}{3}u.a.$

1.9.1 Exercícios

1) a) Diverge;

b) π;

c) 1;

d) $\frac{\pi}{2a}$;

e) 0;

f) -1;

g) $-\ln\frac{2}{3}$;

h) $\frac{1}{5}$.

2) a) Converge;

b) Converge;

c) Diverge;

d) Converge;

e) Converge;

f) Diverge.

3) a) $\frac{1}{s}$, $s > 0$;

b) $\frac{s}{s^2+1}$, $s > 0$;

c) $\frac{1}{s-a}$, $s > a$;

d) $\frac{1}{s^2}$, $s > 0$.

1.10.1 Exercícios

1) 0.

3) Sim. f é limitada e possui em único ponto de descontinuidade.

4) 6.

6) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2$.

10) $3x^2 \cos x^3$.

12) a) $\frac{x^3}{3} - \cos x + c$;

b) $\frac{x^4}{4} - 9\sqrt[3]{x} + 2\ln|x| + c$;

c) $x - \frac{1}{x} + c$;

d) $x - \operatorname{arctg} x + c$;

e) $\ln|2x + \cos x| + c$;

f) $\ln|\operatorname{sen} x| + c$;

g) $-e^{\cos x} + c$;

h) $-\cos(\operatorname{sen} x) + c$;

j) $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$;

k) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + c$;

l) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$;

m) $x \log x - x \log e + c$;

n) $-2\cos x + c$;

o) $\frac{e^{2x}}{13}(2\operatorname{sen} 3x - 3\cos 3x) + c$;

p) $x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + c$;

q) $x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$;

i) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right|+c;$

r) $\frac{x^3}{3}\ln-\frac{x^3}{9}+c;$

14) $\frac{8}{3}+\frac{2}{\ln 2}.$

15) a) $\frac{\ln^4 2}{4}$;

b) $\frac{\pi}{4};$

c) $2\ln 2-1;$

d) $\frac{1}{3};$

e) $\frac{1}{384};$

f) $\frac{28}{3};$

g) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1;$

h) 4.

17) $\frac{1}{12}u.a.$

18) $\frac{37}{12}u.a.$

19) $18\,u.a.$

20) a) $19\ u.a.$

b) $\left(e-e^{-1}+\frac{10}{3}\right)u.a.$

21) $\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)u.a.$

22) a) Diverge;

b) Converge para π;

c) Diverge;

d) Converge para $\frac{1}{3\ln^3 3}$.

23) a) Converge ;

b) Converge ;

c) Diverge.

Capítulo 2

Métodos de Integração

Capítulo 2

Métodos de Integração

Neste capítulo, estudaremos métodos para calcular integrais indefinidas cujos integrandos envolvem:

- *Funções trigonométricas;*
- *Funções com expressões da forma* $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$ *ou* $\sqrt{x^2 - a^2}$, *onde* $a > 0$;
- *Funções racionais – o método das frações parciais, e*
- *Funções racionais de seno e cosseno.*

Para facilitar a leitura do texto, no final deste capítulo incluímos tabelas de derivadas, integrais e identidades trigonométricas.

2.1 Integrais envolvendo funções trigonométricas

2.1.1 Funções trigonométricas

Vamos começar relembrando que as integrais

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c \quad \text{e} \quad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c \quad \text{são imediatas.}$$

A partir dessas integrais e da aplicação do método da substituição, podemos obter as integrais de outras funções trigonométricas.

Exemplo 2.1. Use o método da substituição para mostrar que:

a) $\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\sec x| + c$;

b) $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$.

Solução.

a) $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$.

Aplicando o método da substituição, fazemos

$u = \cos x$. Então $du = -\operatorname{sen} x dx$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\, dx &= -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln|u| + c \\ &= -\ln|\cos x| + c \\ &= \ln|\sec x| + c.\end{aligned}$$

b) Para calcular a integral $\int \sec x\, dx$, escreveremos

$$\sec x = \sec x \frac{(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x)}$$

e aplicaremos o método da substituição. Temos,

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \sec x \frac{(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x)} dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx.\end{aligned}$$

Fazendo $u = \sec x + \operatorname{tg} x$ então $du = (\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \sec^2 x)\, dx$.
Assim,

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + c \\ &= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c.\end{aligned}$$

De modo semelhante ao Exemplo 2.1, calculamos as integrais

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c \quad \text{e} \quad \int \operatorname{cossec} x\, dx = \ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + c.$$

Exemplo 2.2. Calcule as integrais.

a) $\int x \operatorname{tg} x^2\, dx$;

b) $\int \sec\left(\frac{3x+1}{2}\right) dx$.

Solução.

a) Fazendo $u = x^2$ temos $\frac{1}{2}du = x\,dx$. Assim,

$$\int x \operatorname{tg} x^2\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{tg} u\, du$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sec x^2| + c.$$

b) Fazendo $u = \left(\frac{3x+1}{2}\right)$ temos $dx = \frac{2}{3}du$. Então

$$\int \sec\left(\frac{3x+1}{2}\right)dx = \frac{2}{3}\int \sec u\, du$$
$$= \frac{2}{3}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c$$
$$= \frac{2}{3}\ln\left|\sec\left(\frac{3x+1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3x+1}{2}\right)\right| + c.$$

2.1.2 Integrais envolvendo potências de sen$x$ e cos$x$

Para calcular integrais da forma $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ e $\int \cos^n x\, dx$, onde $n \geq 2$ é um número natural, usaremos as identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad (3)$$

e aplicaremos o método da substituição.

Outro processo para calcular as integrais $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ e $\int \cos^n x\, dx$ utiliza fórmulas de recorrência, que são obtidas usando o método da integração por partes (veja Exercício 3 da Seção 1.7.4). Vamos ilustrar essa técnica considerando exemplos que envolvem potências ímpar e par.

Exemplo 2.3. Calcular as integrais abaixo:

a) $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$; b) $\int \cos^4 x\, dx$.

Solução.

a) Temos $\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x$

$$= (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x$$

$$= \operatorname{sen} x - \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x .$$

Assim,

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int (\operatorname{sen} x - \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x) dx$$

$$= \int \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx .$$

A primeira integral é imediata, e para calcular a segunda faremos

$$u = \cos x \text{ e } du = -\operatorname{sen} x\, dx .$$

Portanto,

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\cos x + \int u^2\, du$$

$$= -\cos x + \frac{u^3}{3} + c$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c .$$

O mesmo raciocínio aplicado para resolver este exemplo é válido para obter as integrais $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ ou $\int \cos^n x\, dx$, quando n é ímpar. Note, a ideia é escrever o integrando de forma que apareça somente um fator seno (e o resto da expressão em termos de cosseno) ou apenas um fator cosseno (e o resto da expressão em termos de seno).

b) Neste exemplo n é par e não podemos aplicar a ideia acima. Vamos reescrever o integrando usando a identidade (3).

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$$

$$= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Assim,

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + c.$$

O mesmo raciocínio aplicado para resolver este exemplo é válido para calcular as integrais $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ ou $\int \cos^n x\,dx$ com n par. A ideia é escrever o integrando de forma que apareça potência de ordem 2, e usar as identidades trigonométricas que relacionam ângulo e metade de ângulo.

Para calcular integral que envolve produto de potências de seno e cosseno, ou seja, integral do tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x\,dx$ com m e n inteiros positivos, empregamos as mesmas técnicas usadas anteriormente. Se m e n são números pares, então recorremos às identidades (2) e (3), e aplicamos o método da substituição. No caso em que m ou n é ímpar usamos a identidade (1) e aplicamos o método da mudança de variável.

Exemplo 2.4. Calcular as integrais.

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^5 x\,dx$;

b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\,dx$.

Solução.

a) Neste caso, o cosseno tem potência ímpar. Vamos preparar o integrando, mantendo um fator de cosseno, e usaremos a identidade (1).

$$\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^5 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \cdot \cos^4 x$$

$$= \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x)^2$$

$$= \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2$$

$$= \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x\ (1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x)$$

$$= \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x - 2\operatorname{sen}^4 x \cdot \cos x + \operatorname{sen}^6 x \cdot \cos x\,.$$

Assim,

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^5 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x\, dx - 2\int \operatorname{sen}^4 x \cdot \cos x\, dx + \int \operatorname{sen}^6 x \cdot \cos x\, dx \ \ (u = \operatorname{sen} x)$$

$$= \int u^2\, du - 2\int u^4\, du + \int u^6\, du$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + c\,.$$

b) Neste exemplo m e n são números pares. Então vamos reescrever o integrando usando as identidades (2) e (3).

$$\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\,.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{8}\, dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + c\,.$$

Observação. Às vezes é conveniente usar a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ para calcular integral do tipo $\int \operatorname{sen}^n x \cdot \cos^m x\, dx$, quando $n = m$ e são números pares.

2.1.3 Integrais de potências de tg$x$ e cotg$x$

Para calcular integrais do tipo $\int \operatorname{tg}^n x\, dx$ e $\int \operatorname{cotg}^n x\, dx$, sendo $n \geq 2$ um número natural, vamos usar as identidades

$$\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1 \qquad (4)$$

$$\operatorname{cossec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1\,. \tag{5}$$

No caso do integrando ser potência da tangente, devemos usar (4) e lembrar que se $u = \operatorname{tg} x$ então $du = \sec^2 x\,dx$ para resolver fazendo uma mudança de variável. Se o integrando envolver a cotangente, aplicamos (5) e lembremos que se $u = \operatorname{cotg} x$ então $du = -\operatorname{cossec}^2 x\,dx$.

Exemplo 2.5. Calcule as integrais.

a) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$;

b) $\int \operatorname{cotg}^3 x\,dx$.

Solução.

a) Vamos reescrever o integrando usando a identidade (4). Temos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^4 x &= \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x \\
&= \operatorname{tg}^2 x(-1+\sec^2 x) \\
&= -\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x \\
&= -(-1+\sec^2 x) + \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x \\
&= \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x - \sec^2 x + 1\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x\,dx - \int \sec^2 x\,dx + \int dx\,.$$

Para calcular $\int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x\,dx$ faremos

$$u = \operatorname{tg} x \;\text{ e }\; du = \sec^2 x\,dx\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^4 x\,dx &= \int u^2\,du - \operatorname{tg} x + x \\
&= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + c\,.
\end{aligned}$$

b) Preparando o integrando temos,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg}^3 x &= \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg}^2 x \\
&= \operatorname{cotg} x\,(-1+\operatorname{cossec}^2 x) \\
&= \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cossec}^2 x - \operatorname{cotg} x\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int \cot g^3 x = \int \cot g\, x \cdot \mathrm{cossec}^2\, x\, dx - \int \cot g\, x\, dx\,.$$

Para encontrar a integral $\int \cot g\, x \cdot \mathrm{cossec}^2\, x\, dx$ faremos

$$u = \cot g\, x \;\text{ e }\; du = -\mathrm{cossec}^2\, x\, dx\,.$$

Portanto,

$$\int \cot g^3 x\, dx = -\int u\, du - \ln|\mathrm{sen}\, x|$$
$$= \frac{-\cot g^2 x}{2} + \ln|\mathrm{cossec}\, x| + c\,.$$

2.1.4 Integrais de potências de sec$x$ e cossec$x$

Para calcular integrais do tipo $\int \sec^n x\, dx$ ou $\int \mathrm{cossec}^n x\, dx$, onde n é um número natural maior do que 2, devemos analisar os casos em que n é um número par e n é um número ímpar.

1) Se n é par então devemos expressar o integrando como produto de potências de forma que um fator seja $\sec^2 x$ ou $\mathrm{cossec}^2 x$, usar as identidades (4) ou (5) e aplicar o método da substituição da variável.

2) Se n for ímpar, então devemos aplicar o método da integração por partes.

Exemplo 2.6. Calcule as integrais.

a) $\int \sec^4 x\, dx$;

b) $\int \mathrm{cossec}^3 x\, dx$.

Solução.

a) Temos $\sec^4 x = \sec^2 x \cdot \sec^2 x$

$$= \sec^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x + 1)$$
$$= \sec^2 x \cdot \mathrm{tg}^2 x + \sec^2 x\,.$$

Assim,

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \cdot \mathrm{tg}^2 x\, dx + \int \sec^2 x\, dx\,.$$

Para calcular a integral $\int \sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx$ faremos

$$u = \operatorname{tg} x \;\text{ e }\; du = \sec^2 x\,dx.$$

Portanto,

$$\int \sec^4 x\,dx = \int u^2\,du + \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + c.$$

b) Temos,

$$\int \operatorname{cossec}^3 x\,dx = \int \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cossec}^2 x\,dx.$$

Fazendo

$u = \operatorname{cossec} x$ e $dv = \operatorname{cossec}^2 x\,dx$, temos

$du = -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x\,dx$ e $v = -\operatorname{cotg} x$.

Assim,

$$\int \operatorname{cossec}^3 x\,dx = -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x - \int \operatorname{cotg}^2 x \cdot \operatorname{cossec} x\,dx.$$

Usando a identidade

$$\operatorname{cotg}^2 x = -1 + \operatorname{cossec}^2 x$$

temos,

$$\int \operatorname{cossec}^3 x\,dx = -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x - \int (-1 + \operatorname{cossec}^2 x) \operatorname{cossec} x\,dx$$

$$= -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x + \int \operatorname{cossec} x\,dx - \int \operatorname{cossec}^3 x dx.$$

Portanto,

$$\int \operatorname{cossec}^3 x\,dx = \frac{1}{2}(-\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x + \ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x|) + c.$$

2.1.5 Integrais de produtos de potências de tg$x$ e sec$x$

Vamos considerar integral da forma $\int \operatorname{tg}^m x \cdot \sec^n x dx$, onde m, n são inteiros positivos.

- Se $m = n = 1$, então a integral é imediata.
- Se $n = 2$ e m qualquer usamos o método da substituição.
- Se n for par, $n > 2$ e m qualquer, reescreva apenas $\sec^n x = \sec^2 x \cdot \sec^{n-2} x$, use a identidade (4) para expressar $\sec^{n-2} x$ em termos da $\operatorname{tg} x$, e faça a mudança de variável $u = \operatorname{tg} x$.

- Se m e n forem ímpares, então reescreva o integrando de modo que um fator seja $\operatorname{tg} x \cdot \sec x$, use a identidade (4) para expressar $\operatorname{tg}^{m-1} x$ em termos da $\sec x$ e faça a mudança de variável $u = \sec x$.
- Se m for par e n ímpar, então use a identidade (4) para expressar $\operatorname{tg}^m x$ em termos de $\sec x$. A integral original se transformará numa soma de integrais de potências de $\sec x$. Use a técnica anterior (Seção 2.1.4) para calcular as integrais resultantes.

Exemplo 2.7. Calcule as integrais.

a) $\int \operatorname{tg}^6 x \cdot \sec^4 x \, dx$;

b) $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^5 x \, dx$.

Solução.

a) O expoente da $\sec x$ é par. Assim, vamos preparar o integrando de modo a ter um fator $\sec^2 x$. Temos,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^6 x \cdot \sec^4 x &= \operatorname{tg}^6 x \cdot \sec^2 x \cdot \sec^2 x \\ &= \operatorname{tg}^6 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x \\ &= \operatorname{tg}^8 x \cdot \sec^2 x + \operatorname{tg}^6 x \cdot \sec^2 x .\end{aligned}$$

Assim,

$$\int \operatorname{tg}^6 x \cdot \sec^4 x \, dx = \int \operatorname{tg}^8 x \cdot \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{tg}^6 x \cdot \sec^2 x \, dx .$$

Fazendo

$$u = \operatorname{tg} x \text{ temos } du = \sec^2 x \, dx .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^6 x \cdot \sec^4 x \, dx &= \int u^8 \, du + \int u^6 \, du \\ &= \frac{\operatorname{tg}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + c .\end{aligned}$$

b) O expoente da $\operatorname{tg} x$ é ímpar. Neste caso, vamos preparar o integrando usando a identidade (4) de modo a ter um fator $\operatorname{tg} x \cdot \sec x$. Assim,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^5 x &= \operatorname{tg} x \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^4 x \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \sec x (\sec^2 x - 1) \sec^4 x \\ &= \sec^6 x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec x - \sec^4 x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec x .\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^3 x \sec^5 x\,dx &= \int \sec^6 x\cdot \mathrm{tg}\,x\cdot \sec x\,dx - \int \sec^4 x\cdot \mathrm{tg}\,x\cdot \sec x\,dx\\ &= \int u^6\,du - \int u^4 du\\ &= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + c,\end{aligned}$$

pois se $u = \sec x$ então $du = \sec x\cdot \mathrm{tg}\,x dx$.

De forma semelhante à técnica apresentada acima, podemos obter integrais de produtos de potências $\mathrm{cotg}\,x$ e $\mathrm{cossec}\,x$.

Outro processo para calcular integrais que envolvem potências de funções trigonométricas é dado no teorema abaixo. O processo consiste em expressar a integral que se deseja obter em outra que envolva um expoente menor.

Teorema 2.1. **(Fórmulas de Recorrência).** *Para qualquer inteiro positivo* n, *temos:*

1) $\displaystyle\int \mathrm{sen}^n x\,dx = \frac{-1}{n}\mathrm{sen}^{n-1} x\cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{sen}^{n-2} x\,dx$;

2) $\displaystyle\int \cos^n dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\cdot \mathrm{sen}\,x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$;

3) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1} x - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\,dx,\ n\neq 1$;

4) $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^n x\,dx = -\frac{1}{n-1}\mathrm{cotg}^{n-1} x - \int \mathrm{cotg}^{n-2} x\,dx,\ n\neq 1$;

5) $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x\cdot \mathrm{tg}\,x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx,\ n\neq 1$;

6) $\displaystyle\int \mathrm{cossec}^n x\,dx = \frac{-1}{n-1}\mathrm{cossec}^{n-2} x\cdot \mathrm{cotg}\,x + \frac{n-2}{n-1}\int \mathrm{cossec}^{n-2} x dx,\ n\neq 1.$

Demonstração. Provaremos os itens (3) e (5), os demais serão deixados como exercício.

Para provar o item (3), escreveremos

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^n\,xdx &= \int \mathrm{tg}^2\,x\cdot \mathrm{tg}^{n-2}\,xdx\\ &= \int (-1+\sec^2 x)\,\mathrm{tg}^{n-2}\,xdx\\ &= \int \sec^2 x\cdot \mathrm{tg}^{n-2}\,xdx - \int \mathrm{tg}^{n-2}\,xdx.\end{aligned}$$

Para calcular a primeira integral, faremos a substituição

$$u = \operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad du = \sec^2 x dx .$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^n x dx &= \int u^{n-2} du - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx \\ &= \frac{u^{n-1}}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx , \qquad (n \neq 1) \\ &= \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx .\end{aligned}$$

Agora, provaremos o item (5). Vamos escrever

$$I = \int \sec^n x \, dx = \int \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x \, dx .$$

Para usar integração por partes faremos,

$$u = \sec^{n-2} x \qquad\qquad dv = \sec^2 x \, dx$$

$$du = (n-2) \sec^{n-2} x \cdot \operatorname{tg} x \, dx \qquad v = \operatorname{tg} x .$$

Logo,

$$I = \sec^{n-2} x \cdot \operatorname{tg} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx .$$

Usando a identidade

$$\operatorname{tg}^2 x = -1 + \sec^2 x ,$$

segue que

$$I = \sec^{n-2} x \cdot \operatorname{tg} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx .$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= \sec^{n-2} x \cdot \operatorname{tg} x - (n-2) \int \sec^n x \, dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx \\ &= \sec^{n-2} x \cdot \operatorname{tg} x - (n-2) I + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx ,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(n-1) I = \sec^{n-2} x \cdot \operatorname{tg} x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx .$$

Portanto,

$$I = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx , \; n \neq 1 .$$

■

Exemplo 2.8. Aplique a fórmula de recorrência para calcular a integral $\int \sec^3 x\, dx$.

Solução.

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}(\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|) + c.$$

2.1.6 Integrais de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes

Para calcular integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen} ax \cdot \cos bx\, dx,\ \int \operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} bx\, dx \text{ e } \int \cos ax \cdot \cos bx\, dx,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, devemos usar a identidade correspondente:

$$\operatorname{sen} ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a-b)x + \operatorname{sen}(a+b)x]; \tag{6}$$

$$\operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]; \tag{7}$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]. \tag{8}$$

As integrais acima também podem ser obtidas usando integração por partes.

Exemplo 2.9. Calcular a integral $\int \operatorname{sen} 5x \cdot \cos 2x\, dx$.

Solução. Recorrendo a identidade (6) temos

$$\int \operatorname{sen} 5x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x)\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 7x}{7}\right) + c.$$

2.1.1 Exercícios

1) Calcular as integrais.

a) $\int \operatorname{sen}^5 x dx$;

b) $\int \cos^4 2x\, dx$;

c) $\int e^x \cdot \mathrm{tg}^4 e^x \, dx$;

d) $\int \sec^3(x+2)\, dx$;

e) $\int \mathrm{sen}^3 2x \cdot \cos^4 2x \, dx$;

f) $\int \mathrm{tg}^3 x \cdot \sec^4 x \, dx$;

g) $\int \mathrm{sen}\, 4x \cdot \cos 5x \, dx$;

h) $\int \dfrac{\cos^3 x}{\mathrm{sen}^4 x} dx$.

2) Mostre que

$$\int \mathrm{cossec}^n x\, dx = \frac{-1}{n-1} \mathrm{cossec}^{n-2} x \cdot \mathrm{cotg}\, x + \frac{n-2}{n-1} \int \mathrm{cossec}^{n-2} x\, dx,$$

onde n é um inteiro positivo e $n \neq 1$.

3) Verifique que $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\, mx \cdot \cos nx \, dx = 0$, para $m, n \in \mathbb{Z}$.

2.2 Substituição trigonométrica

Se o integrando envolve uma expressão da forma

$$\sqrt{a^2 - x^2}\ ,\ \sqrt{x^2 + a^2}\ \text{ ou } \sqrt{x^2 - a^2}\ , \text{ com } a > 0,$$

é possível fazer uma mudança de variável (uma substituição trigonométrica) e com o auxílio das identidades,

$$\mathrm{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta,$$

reescrever o integrando sem o radical. Vejamos:

(1) O integrando envolve a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$ com $a > 0$.

Para este caso, vamos fazer a mudança de variável

$$x = a\, \mathrm{sen}\, \theta \ \text{(ver Figura 2.1).}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a\, \mathrm{sen}\, \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \mathrm{sen}^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a\sqrt{\cos^2 \theta} \\ &= a\, |\cos \theta|. \end{aligned}$$

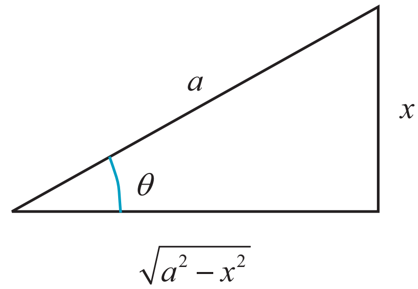


Figura 2.1

Para facilitar os cálculos, vamos supor $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dessa forma, $\cos\theta \geq 0$ e $|\cos\theta| = \cos\theta$, logo $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$.

Exemplo 2.10. Calcular $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

Solução. Vamos fazer a mudança de variável $x = 2\,\text{sen}\,\theta$, então $dx = 2\cos\theta\,d\theta$, e

$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta \text{ com } \theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx &= \int \frac{2\cos\theta \cdot 2\cos\theta\,d\theta}{4\,\text{sen}^2\,\theta} \\
&= \int \frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\text{sen}^2\,\theta} \\
&= \int \text{cotg}^2\theta\,d\theta \\
&= \int (\text{cossec}^2\,\theta - 1)\,d\theta \\
&= -\text{cotg}\,\theta - \theta + c.
\end{aligned}$$

Agora, devemos retornar à variável original x. Temos $x = 2\,\text{sen}\,\theta$ com $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesse intervalo a função seno é inversível, então

$$\theta = \text{arcsen}\,\frac{x}{2}.$$

Para expressar a $\text{cotg}\,\theta$ em termos da variável x, basta observar a Figura 2.2. Logo,

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

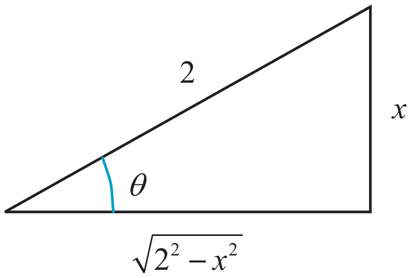


Figura 2.2

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + c\,.$$

Exemplo 2.11. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx$.

Solução. Fazendo $x = 3\operatorname{sen}\theta$ com $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ então

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta \quad \text{e} \quad \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta\cdot 3\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \frac{1}{9}\int \operatorname{cossec}^2\theta\, d\theta \\ &= -\frac{1}{9}\operatorname{cotg}\theta + c\,.\end{aligned}$$

Temos $x = 3\operatorname{sen}\theta$ e $\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$ então, $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.

Portanto,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c\,.$$

Exemplo 2.12. Calcular $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a > 0$.

Solução. Fazendo $x = a\operatorname{sen}\theta$ com $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Então

$$dx = a\cos\theta\, d\theta \quad \text{e} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta\,.$$

Mudando os limites de integração, quando

$x = 0$ temos $\theta = 0$ e quando $x = a$ temos $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta)(a\cos\theta)\, d\theta \\
&= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta\, d\theta\right] \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\text{sen}\,\pi - \text{sen}\, 0)\right] \\
&= \frac{a^2}{4}\pi\,.
\end{aligned}$$

Observe que, nesse exemplo, foi calculado um quarto da área do círculo de raio a.

(2) O integrando envolve a expressão $\sqrt{x^2 + a^2}$ com $a > 0$.

Neste caso, faremos a mudança de variável

$$x = a\,\text{tg}\,\theta \quad (\text{ ver Figura 2.3}).$$

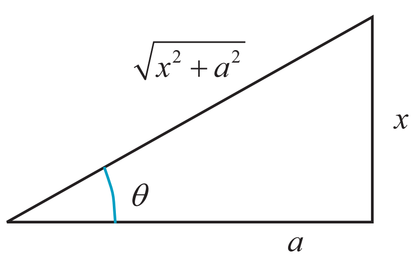


Figura 2.3

Vamos supor que $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Note que com θ neste intervalo, a função tangente é inversível e a função secante é positiva. Então

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+a^2} &= \sqrt{a^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta + a^2}\\ &= \sqrt{a^2(\mathrm{tg}^2\,\theta+1)}\\ &= \sqrt{a^2\sec^2\theta}\\ &= a\,|\sec\theta|\\ &= a\sec\theta\,.\end{aligned}$$

Exemplo 2.13. Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{4}\,dx$.

Solução. Fazendo $x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$ com $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, temos

$$dx = 2\sec^2\theta\,d\theta \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2+4} = 2\sec\theta\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+4}\,dx}{4} &= \frac{1}{4}\int (2\sec\theta)(2\sec^2\theta)\,d\theta\\ &= \int \sec^3\theta\,d\theta\,.\end{aligned}$$

Vamos calcular $\int \sec^3\theta\,d\theta$ usando a fórmula de recorrência (5).

$$\begin{aligned}\int \sec^3\theta\,d\theta &= \frac{1}{2}\sec\theta\cdot\mathrm{tg}\,\theta + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\sec\theta\cdot\mathrm{tg}\,\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\,\theta| + c\,.\end{aligned}$$

Para retornar à variável original x, temos

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{4}\,dx &= \frac{1}{8}x\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right| + c_1\\ &= \frac{1}{8}x\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + c_1\\ &= \frac{1}{8}x\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + c \ \text{ onde } c = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + c_1\,.\end{aligned}$$

Exemplo 2.14.

a) Mostre que $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$, com $a > 0$;

b) Use o item a) para calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$.

Solução.

a) Para calcular a integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, vamos fazer a mudança de variável

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\theta \text{ com } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Então

$$dx = a\sec^2\theta\, d\theta \quad \text{e} \quad \sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta}d\theta \\ &= \int \sec\theta\, d\theta \\ &= \ln|\,\mathrm{tg}\,\theta + \sec\theta\,| + c_1.\end{aligned}$$

Devemos voltar à variável original x. Temos

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\theta \quad \text{e} \quad \sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta \quad \text{então}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{x}{a} \quad \text{e} \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + c_1 \\ &= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + \ln\frac{1}{a} + c_1 \\ &= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c, \text{ onde } c = \ln\frac{1}{a} + c_1.\end{aligned}$$

b) Para calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$, vamos completar quadrados.

Escrevemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+9}}.$$

Fazendo a mudança de variável $t = x+1$, obtemos $dt = dx$. Assim,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+9}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}}$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right|+c \qquad \text{(pelo item a))}$$

$$= \ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+9}\right|+c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}} = \ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+10}\right|+c\,.$$

Exemplo 2.15. Calcule $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{9+4u^2}}$.

Solução. Para calcular a integral $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{9+4u^2}}$ faremos a substituição $x = 2u$ e obtemos $dx = 2du$.

Assim,

$$\int \frac{du}{u\sqrt{9+4u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}\,.$$

Agora, fazendo

$$x = 3\,\mathrm{tg}\,\theta \text{ com } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ então}$$

$$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta \text{ e } \sqrt{9+x^2} = 3\sec\theta\,.$$

Segue que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3\sec^2\theta}{3\,\mathrm{tg}\,\theta\cdot 3\sec\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec\theta}{\mathrm{tg}\,\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \mathrm{cossec}\,\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\mathrm{cossec}\,\theta - \mathrm{cotg}\,\theta\right| + c_1\,.$$

Devemos escrever este resultado em termos da variável original u. Inicialmente, escrevemos em termos da variável x e em seguida de u. Como

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{3} \text{ e } \sec\theta = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} \text{ então}$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{3}{x} \text{ e } \operatorname{cossec}\theta = \frac{\sqrt{9+x^2}}{x}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u\sqrt{9+4u^2}} &= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{cossec}\theta - \operatorname{cotg}\theta\right| + c_1 \\
&= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{x} - \frac{3}{x}\right| + c_1 \\
&= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4u^2}-3}{2u}\right| + c_1 \\
&= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4u^2}-3}{u}\right| + c, \text{ onde } c = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} + c_1.
\end{aligned}$$

(3) O integrando envolve a expressão $\sqrt{x^2 - a^2}$ com $a > 0$.

Neste caso, vamos fazer a mudança de variável

$$x = a\sec\theta \text{ (ver Figura 2.4).}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} \\
&= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} \\
&= a\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} \\
&= a\,|\operatorname{tg}\theta|.
\end{aligned}$$

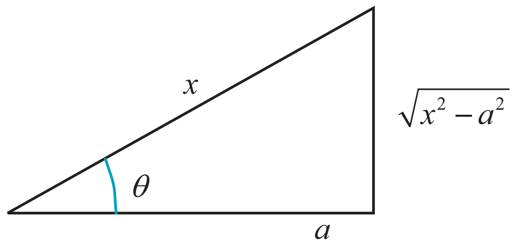


Figura 2.4

Para garantir que $\operatorname{tg}\theta \geq 0$ e que a função secante seja inversível, vamos supor $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Assim,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\,|\operatorname{tg}\theta|$$
$$= a\operatorname{tg}\theta\,.$$

Exemplo 2.16. Calcular as integrais abaixo:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ com $a > 0$;

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 5}}$.

Solução.

a) Para calcular a integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ faremos a mudança de variável

$$x = a\sec\theta \text{ onde } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right).\text{ Então}$$

$$dx = a\operatorname{tg}\theta \cdot \sec\theta\, d\theta \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a\operatorname{tg}\theta\,.$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\operatorname{tg}\theta \cdot \sec\theta\, d\theta}{a\operatorname{tg}\theta}$$
$$= \int \sec\theta\, d\theta$$
$$= \ln|\operatorname{tg}\theta + \sec\theta| + c_1\,.$$

Devemos voltar à variável original x. Temos,

$$x = a\sec\theta \text{ e } \sqrt{x^2 - a^2} = a\operatorname{tg}\theta \text{ então}$$

$$\sec\theta = \frac{x}{a} \text{ e } \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + c_1$$
$$= \ln\left|\sqrt{x^2 - a^2} + x\right| + c,\text{ onde } c = \ln\frac{1}{a} + c_1\,.$$

b) Para calcular a integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 5}}$ faremos a mudança de variável

$$t = 2x \text{ e obtemos } dt = 2dx\,.$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{t^2-5}+t\right| + c \quad \text{(pelo item a))}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2-5}+2x\right| + c\,.$$

Exemplo 2.17. Calcular $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$.

Solução. Fazendo a mudança de variável

$x = 4\sec\theta$, onde $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$, então

$dx = 4\,\mathrm{tg}\,\theta\cdot\sec\theta\, d\theta$ e $\sqrt{x^2-16} = 4\,\mathrm{tg}\,\theta$.

Assim,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}} = \int \frac{4\,\mathrm{tg}\,\theta\cdot\sec\theta}{16\sec^2\theta\cdot 4\,\mathrm{tg}\,\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int\frac{1}{\sec\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\,\mathrm{sen}\,\theta + c\,.$$

Vamos retornar à variável original x. Como,

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{x^2-16}}{4} \text{ e } \sec\theta = \frac{x}{4} \text{ então } \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sec\theta} = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}.$$

Portanto:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}} = \frac{\sqrt{x^2-16}}{16x} + c\,.$$

2.2.1 Exercícios

1) Calcular as integrais.

a) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$;

b) $\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}dx$;

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$;

d) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx$.

2) Avalie as integrais abaixo:

a) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$;

b) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

2.3 Integração de funções racionais: método das frações parciais

Nesta seção estudaremos como calcular a integral de qualquer função racional (quociente de polinômios) usando o método das frações parciais. Este consiste em escrever a função racional como soma de frações mais simples.

Para apresentar o método, vamos considerar uma função racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios. Se o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$, então $f(x)$ é uma função racional *própria*; caso contrário, $f(x)$ é chamada *imprópria*.

Uma função racional imprópria pode ser escrita como soma de um polinômio e uma função racional própria. Por exemplo:

$$\frac{x^3+x}{x-1} = (x^2+x+2) + \frac{2}{x-1}.$$

Para calcular a integral da função $f(x)$, devemos verificar inicialmente se $f(x)$ é **própria** ou **imprópria**. Se $f(x)$ é própria, então devemos escrever a função como soma de frações parciais mais simples (um resultado da álgebra garante que sempre é possível fazer isso), e a partir desta soma encontramos a integral da função $f(x)$. Se $f(x)$ é imprópria, então devemos dividir $p(x)$ por $q(x)$ e teremos $f(x)$ escrita como soma de um polinômio e uma função racional própria. Neste caso para obter a integral da $f(x)$, basta encontrar a integral do polinômio (que se obtém facilmente) e a integral da função racional própria.

A decomposição de uma função racional própria em uma soma de frações parciais mais simples está vinculada ao modo que o polinômio do denominador $q(x)$ se decompõe em fatores lineares (da forma $ax+b$) e quadráticos irredutíveis (da forma ax^2+bx+c, onde $b^2-4ac<0$). Por exemplo:

a) Se $q(x)=2x^4-8x^2$, então $q(x)$ pode ser escrito como $q(x)=2x\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$.

b) Se $q(x)=x^3-2x^2+4x-8$, então $q(x)$ pode ser escrito como $q(x)=(x^2+4)(x-2)$.

Para efetuar a decomposição da função racional própria, devemos decompor $q(x)$ em fatores lineares e quadráticos e considerar os fatores envolvidos na decomposição. Dependendo da natureza dos fatores associamos a cada fator um tipo de fração parcial (as formas das frações parciais são garantidas por resultados da álgebra). Vejamos os quatro casos que ocorrem:

1º Caso: Fatores lineares distintos

Se $q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$, onde nenhum fator linear é repetido, então a função racional própria $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ corresponde a uma soma de n frações parciais da forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes que devem ser determinadas mediante a técnica de coeficientes indeterminados ou a de substituição de valores.

Exemplo 2.18. Calcular $\displaystyle\int\frac{x+8}{x^2+x-2}dx$.

Solução. A função racional $f(x)=\dfrac{x+8}{x^2+x-2}$ é própria.

Decompondo o polinômio do denominador temos

$$q(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

Como $q(x)$ tem fatores lineares distintos, então a função racional corresponde a uma soma de duas frações parciais da forma

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+2}.$$

Para determinar A_1 e A_2, vamos multiplicar ambos os lados da equação acima por $(x-1)(x+2)$, e assim obtemos

$$\begin{aligned} x+8 &= A_1(x+2)+A_2(x-1) \\ &= (A_1+A_2)x+(2A_1-A_2). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, segue que

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ 2A_1-A_2=8 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema temos

$$A_1=3 \text{ e } A_2=-2.$$

Logo, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx &= \int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{-2}{x+2}dx \\ &= 3\ln|x-1|-2\ln|x+2|+c. \end{aligned}$$

O resultado acima também poderia ser obtido através do *software* Maxima com o seguinte comando

```
partfrac ( (x + 8)/(x^2 + x - 2), x)
```

onde o primeiro argumento representa a função a ser decomposta em frações parciais; e o segundo argumento, a variável independente.

Observação: Existe outra maneira prática para determinar os valores das constantes A_1 e A_2. A equação

$x+8=A_1(x+2)+A_2(x-1)$ é satisfeita para todo x real.

Em particular é válida para $x=1$ e $x=-2$. Assim,

para $x=1$ temos $9=3A_1$, e
para $x=-2$ temos $6=-3A_2$.

Logo,

$$A_1 = 3 \text{ e } A_2 = -2.$$

Note que os valores de x considerados são os valores que anulam os denominadores das frações parciais, isto é, são as raízes do denominador $q(x)$.

Exemplo 2.19. Calcular $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}dx$.

Solução. O integrando é uma função racional própria. As raízes da equação $x^3+x^2-4x-4=0$ são

$$x=2, \quad x=-1 \text{ e } x=-2.$$

Assim,

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-4x-4} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{A_3}{(x+2)}.$$

Multiplicando a equação acima por $(x-2)(x+1)(x+2)$, obtemos

$$x-1 = A_1(x+1)(x+2) + A_2(x-2)(x+2) + A_3(x-2)(x+1).$$

Vamos determinar A_1, A_2 e A_3 usando o método prático. Substituindo $x=2$, $x=-1$ e $x=-2$ na equação acima, temos

$$\begin{cases} 1 = 12A_1 \\ -2 = -3A_2, \\ -3 = 4A_3 \end{cases}$$

ou seja,

$$A_1 = \frac{1}{12}, \quad A_2 = \frac{2}{3} \quad e \quad A_3 = -\frac{3}{4}.$$

Logo, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4} = \frac{1}{12(x-2)} + \frac{2}{3(x+1)} - \frac{3}{4(x+2)}.$$

Portanto,

$$\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-x}dx = \frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + c.$$

Exemplo 2.20. Calcular $I = \int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{x^3+x^2-2x}dx$.

Solução. O integrando é uma função racional imprópria. Neste caso, devemos fazer a divisão de polinômios. Temos,

$$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = (x-2) + \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

Assim,

$$I = \int (x-2)\,dx + \int \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx.$$

A primeira integral não apresenta dificuldade. Precisamos calcular a segunda integral, para isso vamos decompor o integrando em frações parciais. Temos,

$$\frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2}.$$

Multiplicando a equação acima por $x(x-1)(x+2)$ obtemos,

$$x^2 - 6x + 2 = A_1(x-1)(x+2) + A_2 x(x+2) + A_3 x(x-1).$$

Agora,

para $x = 0$ temos $2 = -2A_1$,
para $x = 1$ temos $-3 = 3A_2$,
para $x = -2$ temos $18 = 6A_3$,

ou seja,

$$A_1 = -1, \quad A_2 = -1 \quad \text{e} \quad A_3 = 3.$$

Logo,

$$I = \int (x-2)\,dx - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + c.$$

2º Caso: Fatores lineares repetidos

Se um fator linear $(ax+b)$ de $q(x)$ tem multiplicidade k, a esse fator corresponderá uma soma de k frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são constantes a determinar.

Exemplo 2.21. Calcular $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\,dx$.

Solução. A equação $q(x)=x^3-3x^2+3x-1=0$ tem apenas uma raiz real, $x=1$, com multiplicidade 3. Assim,

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}.$$

Multiplicando a equação por $(x-1)^3$, temos

$$x^2+x+1=(x-1)^2A_1+(x-1)A_2+A_3.$$

Substituindo $x=1$, $x=0$ e $x=-1$ na equação acima, obtemos

$$\begin{cases} A_3=3 \\ A_1-A_2+A_3=1 \\ 4A_1-2A_2+A_3=1 \end{cases},$$

ou seja,

$$A_1=1, \quad A_2=3 \quad e \quad A_3=3.$$

Também podemos escolher quaisquer outros valores de x para formar o sistema. Os valores considerados simplificam as contas.

Portanto,

$$\int\frac{x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$=\ln|x-1|-\frac{3}{(x-1)}-\frac{3}{2(x-1)^2}+c.$$

Exemplo 2.22. Calcular $\int\frac{x+1}{x^3+4x^2+4x}dx$.

Solução. As raízes de $q(x)=x^3+4x^2+4x=0$ são $x=0$ e $x=-2$, sendo que $x=-2$ tem multiplicidade 2. Neste caso, o integrando por ser escrito na forma

$$\frac{x+1}{x^3+4x^2+4x}=\frac{A_1}{x-0}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{(x+2)^2}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $x(x+2)^2$, temos

$$x+1=A_1(x+2)^2+A_2x(x+2)+A_3x.$$

Substituindo $x=0$, $x=-2$ e $x=-1$ na equação acima obtemos, respectivamente:

$$\begin{cases} 4A_1 = 1 \\ -2A_3 = -1 \\ A_1 - A_2 - A_3 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema encontramos

$$A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{1}{4} \quad e \quad A_3 = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\int \frac{x+1}{x^3+4x^2+4x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+2| - \frac{1}{2(x+2)} + c.$$

3º Caso: Fatores quadráticos irredutíveis distintos

A cada fator quadrático irredutível ax^2+bx+c que aparece uma vez em $q(x)$, corresponderá a uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

onde A e B são constantes a determinar.

Exemplo 2.23. Calcular $\int \frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2-2}dx$.

Solução. A equação $q(x) = x^3+x^2-2 = 0$ tem somente uma raiz real, $x=1$. Assim, o polinômio $q(x)$ é decomposto como

$$q(x) = (x-1)(x^2+2x+2), \qquad (x^2+2x+2 \text{ é fator irredutível})$$

e o integrando corresponde a uma soma de duas frações parciais da forma

$$\frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}.$$

Multiplicado a equação acima por $(x-1)(x^2+2x+2)$, temos

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1) \\ &= (A+B)x^2+(2A-B+C)x+(2A-C). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B+C=-2 \\ 2A-C=-3 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$A=-\frac{4}{5}, \quad B=\frac{9}{5} \quad \text{e} \quad C=\frac{7}{5}.$$

Logo,

$$\int \frac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-2}\,dx = -\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{1}{5}\int \frac{9x+7}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= -\frac{4}{5}\ln|x-1|+\frac{1}{5}\int \frac{9x+9-2}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= -\frac{4}{5}\ln|x-1|+\frac{9}{5}\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx-\frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Na primeira integral faremos a mudança de variável

$u=x^2+2x+2$ então $du=(2x+2)dx$.

Assim,

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|+c_1.$$

Na segunda integral completamos o quadrado no denominador e obtemos

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$=\operatorname{arctg}(x+1)+c_2.$$

Portanto,

$$\int \frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2-2}\,dx=-\frac{4}{5}\ln|x-1|+\frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2|-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+c.$$

Exemplo 2.24. Calcular $\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx$.

Solução. O polinômio $q(x)=2x^3-x^2+8x-4$ pode ser escrito como

$$q(x)=(2x-1)(x^2+4).$$

Assim, como fator x^2+4 é irredutível, temos

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Multiplicando a equação por $(2x-1)(x^2+4)$, temos

$$\begin{aligned} x^2-x-21 &= A(x^2+4)+(Bx+C)(2x-1) \\ &= (A+2B)x^2+(-B+2C)x+(4A-C) \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, segue

$$\begin{cases} A+2B=1 \\ -B+2C=-1, \\ 4A-C=-21 \end{cases}$$

ou seja,

$$A=-5, \quad B=3 \quad \text{e} \quad C=1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx &= -5\int\frac{dx}{2x-1}+\int\frac{3x+1}{x^2+4}dx \\ &= -\frac{5}{2}\ln|2x-1|+3\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{dx}{x^2+2^2} \\ &= -\frac{5}{2}\ln|2x-1|+\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c. \end{aligned}$$

4º Caso: Fatores quadráticos irredutíveis repetidos

Se um fator quadrático irredutível ax^2+bx+c de $q(x)$ tem multiplicidade k, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_k$ são constantes a determinar.

Exemplo 2.25. Calcular $\displaystyle\int\frac{5x^3-3x^2+7x-3}{x^4+2x^2+1}dx$.

Solução. Decompondo o polinômio do denominador, temos

$$q(x)=x^4+2x^2+1=(x^2+1)(x^2+1).$$

Como $q(x)$ tem um fator quadrático irredutível com multiplicidade 2, então

$$\frac{5x^3-3x^2+7x-3}{x^4+2x^2+1}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}.$$

Multiplicando a equação acima por $(x^2+1)^2$, temos

$$\begin{aligned}5x^3-3x^2+7x-3&=(A_1x+B_1)(x^2+1)+(A_2x+B_2)\\&=A_1x^3+B_1x^2+(A_1+A_2)x+(B_1+B_2).\end{aligned}$$

Equacionando os coeficientes, temos

$$\begin{cases}A_1=5\\B_1=-3\\A_1+A_2=7\\B_1+B_2=-3\end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$A_1=5,\quad B_1=-3,\quad A_2=2 \;\text{ e }\; B_2=0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^3-3x^2+7x-3}{x^4+2x+1}dx&=\int\frac{5x-3}{x^2+1}dx+\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx\\&=5\int\frac{x}{x^2+1}dx-3\int\frac{dx}{x^2+1}+2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx\\&=\frac{5}{2}\ln(x^2+1)-3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x^2+1}+c.\end{aligned}$$

Exemplo 2.26. Calcular $\int\frac{2x^3-5x+7}{(x^2+4)^2}dx$.

Solução. O integrando é uma função racional própria. O polinômio do denominador envolve um fator quadrático irredutível com multiplicidade 2. Assim, o integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{2x^3-5x+7}{(x^2+4)^2}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+4}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+4)^2}.$$

Multiplicando por $(x^2+4)^2$ a equação acima, temos

$$\begin{aligned}2x^3-5x+7&=(A_1x+B_1)(x^2+4)+(A_2x+B_2)\\&=A_1x^3+B_1x^2+(4A_1+A_2)x+(4B_1+B_2).\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos

$$\begin{cases} A_1 = 2 \\ B_1 = 0 \\ 4A_1 + A_2 = -5 \\ 4B_1 + B_2 = 7 \end{cases},$$

ou seja,

$$A_1 = 2, \quad B_1 = 0, \quad A_2 = -13 \quad e \quad B_2 = 7.$$

Logo,

$$\int \frac{2x^3 - 5x + 7}{(x^2+4)^2}dx = \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \int \frac{-13x+7}{(x^2+4)^2}dx$$

$$= \int \frac{2x}{x^2+4}dx - 13\int \frac{x}{(x^2+4)^2}dx + 7\int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx.$$

Para calcular as duas primeiras integrais, faremos a mudança de variável

$u = x^2 + 4$ e obtemos $du = 2x\,dx$.

Assim,

$$\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln(x^2+4) + c_1,$$

e

$$\int \frac{x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}du$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4)} + c_2.$$

Para obter a integral $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$ vamos recorrer a uma substituição trigonométrica.

Fazendo

$x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$, para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, obtemos $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$.

Segue que,

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta}{(4\,\mathrm{tg}^2\,\theta + 4)^2}d\theta$$

$$= \frac{2}{16}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right] + c_3$$

$$= \frac{1}{16}[\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta] + c_3 .$$

Para retornar à variável anterior x, vamos observar a Figura 2.5. Temos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \quad e \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}.$$

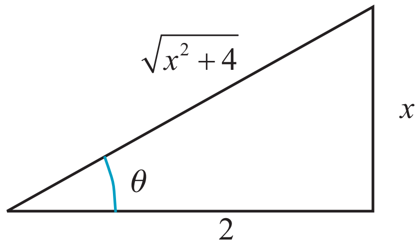


Figura 2.5

Logo,

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+4}\right] + c_3 .$$

Portanto,

$$\int \frac{2x^3-5x+7}{(x^2+4)^2}\, dx = \ln(x^2+4) + \frac{13}{2(x^2+4)} + \frac{7}{16}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+4}\right] + c.$$

2.3.1 Exercícios

1) Escreva as formas de decomposição em frações parciais das funções abaixo:

a) $\dfrac{2x+1}{x^3-2x^2-5x+6}$;

b) $\dfrac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$;

c) $\dfrac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2}$;

d) $\dfrac{2x^2}{x^3-x^2+x+3}$.

2) Calcule as integrais.

a) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$;

b) $\int \frac{2x^3+x}{x-1}\,dx$;

c) $\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,dx$;

d) $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$;

e) $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Sugestão. Veja o Exemplo 2.26.

2.4 Integração de funções racionais de seno e cosseno (substituição universal)

Se o integrando é uma função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, podemos transformá-lo em função racional de u, fazendo a substituição

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,,\ x \in (-\pi, \pi)\,.$$

Vamos expressar $\operatorname{sen} x$ em termos de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, e assim, em termos de u. Usando as relações

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$$

podemos escrever:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}\,.$$

Agora, vamos dividir numerador e denominador por $\cos^2\frac{x}{2}$. Portanto:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2u}{u^2+1}\,.$$

De forma semelhante mostra-se que $\cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1}$.

Note que ao fazermos $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ com $x \in (-\pi, \pi)$, temos $x = 2\operatorname{arctg} u$ e $dx = \frac{2}{u^2+1}\,du$.

Exemplo 2.27. Calcular $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$.

Solução. Fazendo $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ temos

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{u^2+1} \quad \text{e} \quad dx = \frac{2}{u^2+1}du \ .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} &= \int \frac{\frac{2}{u^2+1}}{1+\frac{2u}{u^2+1}}du \\
&= \int \frac{2}{u^2+1} \cdot \frac{u^2+1}{u^2+2u+1}du \\
&= \int \frac{2}{u^2+2u+1}du \\
&= 2\int \frac{du}{(u+1)^2} \\
&= \frac{-2}{(u+1)} + c \qquad \text{(Voltando à variável original)} \\
&= \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + c .
\end{aligned}$$

Exemplo 2.28. Calcular $\int \frac{dx}{7-2\cos x}$.

Solução. Fazendo $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ temos

$$\cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1} \quad \text{e} \quad dx = \frac{2}{u^2+1}du .$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{7-2\cos x} &= \int \frac{\frac{2}{u^2+1}}{7-2\cdot\frac{1-u^2}{u^2+1}}du \\
&= \int \frac{2}{u^2+1} \cdot \frac{u^2+1}{9u^2+5}du \\
&= \int \frac{2}{9u^2+5}du
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{9} \int \frac{1}{u^2 + \frac{5}{9}}\, du$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \text{arc tg} \frac{3u}{\sqrt{5}} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{15} \text{arctg} \frac{3\sqrt{5}}{5} u + c \qquad \text{(Voltando à variável original)}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{15} \text{arctg} \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} \text{tg} \frac{x}{2} \right) + c\,.$$

Exemplo 2.29. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \text{sen}\, x - \cos x}$.

Solução. Fazendo $u = \text{tg} \frac{x}{2}$ temos

$$\text{sen}\, x = \frac{2u}{u^2 + 1}, \qquad \cos x = \frac{1 - u^2}{u^2 + 1} \qquad \text{e} \qquad dx = \frac{2}{u^2 + 1} du\,.$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{1 + \text{sen}\, x - \cos x} = \int \frac{\frac{2}{u^2 + 1}}{1 + \frac{2u}{u^2 + 1} - \frac{1 - u^2}{u^2 + 1}} du$$

$$= \int \frac{2}{2u^2 + 2u} du$$

$$= \int \frac{du}{u(u+1)}$$

$$= \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1}$$

$$= \ln |u| - \ln |u + 1| + c$$

$$= \ln \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| 1 + \text{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

$$= \ln \left| \frac{\text{tg} \frac{x}{2}}{1 + \text{tg} \frac{x}{2}} \right| + c\,.$$

2.4.1 Exercícios

1) Calcular as integrais.

a) $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x} dx$;

b) $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}$.

2) Mostre que $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$.

Exercícios de fixação

1) Calcular as integrais abaixo:

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$;

b) $\int \operatorname{cotg} x \, dx$;

c) $\int \operatorname{cossec} x \, dx$;

d) $\int \cos^5 x \cdot \operatorname{sen}^4 x \, dx$;

e) $\int (1-\operatorname{sen} 2x)^2 dx$;

f) $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \sqrt{\cos x} dx$;

g) $\int \cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^3 x \, dx$;

h) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$;

i) $\int \sec^4 x \, dx$;

j) $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec x \, dx$;

k) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cotg} x} dx$;

l) $\int \operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{sen} 2x \, dx$;

m) $\int \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x} dx$;

n) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x^2-1} \, dx$.

2) Calcule as integrais:

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}^2 x \, dx$

b) $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \, dx$

3) Calcular a área sob o gráfico de $y = \operatorname{sen}^3 x$, de 0 até π.

4) Calcular a área entre as curvas $y = \operatorname{sen}^2 x$ e $y = \cos^2 x$ de $\frac{\pi}{4}$ até $\frac{3\pi}{4}$.

5) Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas

$y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen}^3 x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

6) Mostre que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, \; se \; m \neq n \\ \pi, \; se \; m = n \end{cases}$, onde m e n são inteiros positivos.

7) Calcular as integrais.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$;

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$;

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$;

d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}\, dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$, onde $a, b > 0$;

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\, dx$, onde $a > 0$;

g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$;

h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x-5}}\, dx$,

Sugestão. Escreva $x^2+4x-5=(x+2)^2-9$.

8) Encontre a área limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

9) Use substituição trigonométrica para mostrar que:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$, onde $a > 0$;

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$, onde $a > 0$.

10) Calcule as integrais.

a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\, dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\, dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$;

d) $\displaystyle\int \frac{4x^4}{x^4-x^3-6x^2+4x+8}\, dx$;

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\, dx$;

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\, dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+7x+2}$;

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^3+x^2+2x+1}$.

11) Decomponha a função $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{(x-2)^3(2x+3)(2x^2+5x+7)^2}$

numa soma de frações parciais. Não é necessário determinar os valores numéricos dos coeficientes.

12) Calcule as integrais.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$;

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Sugestão. Substituir $x=u^6$.

13) Calcular a área da região limitada pelas curvas

$$y=\frac{1}{(x-1)(x-4)},\quad y=\frac{1}{(1-x)(x-4)},\quad x=2 \text{ e } x=3.$$

14) Use a substituição $u=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ para transformar o integrando em uma função racional de u e calcule a integral.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x}$;

b) $\displaystyle\int\frac{1}{3\operatorname{sen}x-4\cos x}\,dx$;

c) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$;

d) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\,dx$.

15) Calcule as integrais:

a) $\displaystyle\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;

b) $\displaystyle\int\ln(x^2-x+2)\,dx$.

Sugestão. Use integração por partes.

Resumo

Neste capítulo estudamos métodos para calcular integrais cujos integrandos envolvem:

1) **Funções trigonométricas**

Para calcular uma integral que envolve função trigonométrica, devemos observar se é possível simplificar o integrando e usar identidades trigonométricas;

2) **Funções com expressões da forma $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ e $\sqrt{x^2-a^2}$ com $a>0$.**

- Se o integrando envolve expressão do tipo $\sqrt{a^2-x^2}$, então devemos fazer a mudança de variável $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$;
- Se o integrando envolve expressão do tipo $\sqrt{x^2+a^2}$, então devemos fazer a mudança de variável $x = a\,\mathrm{tg}\,\theta$;
- Se o integrando envolve expressão do tipo $\sqrt{x^2-a^2}$, então devemos fazer a mudança de variável $x = a\sec\theta$.

3) **Funções racionais - Método de Frações Parciais**

Seja $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional própria. Suponhamos $q(x)$ decomposto em fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Se $q(x)$ possuir:

- Fatores lineares distintos, então a cada fator $ax+b$ associamos a fração
$$\frac{A}{ax+b}.$$
- Fatores lineares repetidos, então a cada fator $ax+b$ de multiplicidade de k corresponde à soma de frações
$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}.$$
- Fatores quadráticos irredutíveis distintos, então a cada fator ax^2+bx+c corresponde à fração
$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

- Fatores quadráticos irredutíveis repetidos, então a cada fator (ax^2+bx+c) de multiplicidade k, associamos à soma de frações

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

4) Funções racionais de seno e cosseno

Fazer a substituição $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ com $x\in(-\pi,\pi)$. Assim, $x=2\operatorname{arctg}u$ e $dx=\frac{2}{u^2+1}du$.

Lembrar que $\operatorname{sen}x=\frac{2u}{u^2+1}$ e $\cos x=\frac{1-u^2}{u^2+1}$.

Tabelas

Sejam u e v funções deriváveis de x e n constante.

Tabela de derivadas

1) $y=u^n \quad\Rightarrow\quad y'=n\,u^{n-1}u'$.

2) $y=u\,v \quad\Rightarrow\quad y'=u'v+v'u$.

3) $y=\frac{u}{v} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

4) $y=a^u \quad\Rightarrow\quad y'=a^u(\ln a)\,u'$, $\quad(a>0,\ a\neq 1)$.

5) $y=e^u \quad\Rightarrow\quad y'=e^u\cdot u'$.

6) $y=\log_a u \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{u'}{u}\log_a e$.

7) $y=\ln u \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{u'}{u}$.

8) $y=u^v \quad\Rightarrow\quad y'=v\,u^{v-1}\,u'+u^v(\ln u)\,v' \quad (u>0)$.

9) $y=\operatorname{sen}u \quad\Rightarrow\quad y'=u'\cos u$.

10) $y = \cos u \quad \Rightarrow \quad y' = -u' \text{sen } u$.

11) $y = \text{tg } u \quad \Rightarrow \quad y' = u' \sec^2 u$.

12) $y = \text{cotg } u \quad \Rightarrow \quad y' = -u' \text{cossec}^2 u$.

13) $y = \sec u \quad \Rightarrow \quad y' = u' \sec u \cdot \text{tg } u$.

14) $y = \text{cossec } u \quad \Rightarrow \quad y' = -u' \text{cossec } u \cdot \text{cotg } u$.

15) $y = \text{arcsen } u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

16) $y = \arccos u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

17) $y = \text{arctg } u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

18) $y = \text{arc cotg } u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$.

19) $y = \text{arc sec } u, \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

20) $y = \text{arc cossec } u, \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$.

Tabela de integrais

1) $\int du = u + c$.

2) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$.

3) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$.

4) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

5) $\int e^u du = e^u + c$.

6) $\int \text{sen } u \, du = -\cos u + c$.

7) $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + c$.

8) $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + c$.

9) $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$.

10) $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c$.

11) $\int \operatorname{cossec} u \, du = \ln|\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + c$.

12) $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + c$.

13) $\int \operatorname{cossec} u \cdot \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cossec} u + c$.

14) $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + c$.

15) $\int \operatorname{cossec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + c$.

16) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$.

17) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c.$.

18) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$.

19) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$.

20) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + c, \quad u^2 < a^2$.

21) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec}\left(\frac{u}{a}\right) + c$.

Fórmulas de recorrência

1) $\int \operatorname{sen}^n u \, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cdot \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \, du$

2) $\int \cos^n u \, du = \dfrac{\operatorname{sen} u \cdot \cos^{n-1} u}{n} + \dfrac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du$.

3) $\int \operatorname{tg}^n u \, du = \dfrac{tg^{n-1} u}{(n-1)} - \int \operatorname{tg}^{n-2} u \, du$.

4) $\int \operatorname{cotg}^n u \, du = -\dfrac{\operatorname{cotg}^{n-1} u}{(n-1)} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u \, du$

5) $\int \sec^n u \, du = \dfrac{\sec^{n-2} u \cdot tg\, u}{(n-1)} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$

6) $\int \operatorname{cossec}^n u \, du = -\dfrac{\operatorname{cossec}^{n-2} u \cdot \operatorname{cotg} u}{(n-1)} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cossec}^{n-2} u \, du$

7) $\int \dfrac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \dfrac{u\,(u^2 + a^2)^{1-n}}{2a^2(n-1)} + \dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \dfrac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}}$,

onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Identidades trigonométricas

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

2) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

3) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$.

4) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

6) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

7) $2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)$.

8) $2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$.

9) $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$.

Respostas dos exercícios

2.1.1 Exercícios

1) a) $-\cos x + \dfrac{2\cos^3 x}{3} - \dfrac{\cos^5 x}{5} + c$;

b) $\dfrac{3}{8}x + \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \dfrac{\operatorname{sen} 8x}{64} + c$;

c) $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 e^x - \operatorname{tg} e^x + e^x + c$;

d) $\dfrac{1}{2}[\operatorname{tg}(x+2)\cdot\sec(x+2) + \ln|\sec(x+2) + \operatorname{tg}(x+2)|] + c$

e) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\cos^5 2x}{5} + \dfrac{\cos^7 2x}{7}\right) + c$;

f) $\dfrac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + \dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + c$;

g) $\dfrac{1}{2}\left(\cos x - \dfrac{1}{9}\cos 9x\right) + c$;

h) $\dfrac{-1}{3\operatorname{sen}^3 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} + c$.

2.2.1 Exercícios

1) a) $-\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{3} + c$;

b) $\dfrac{1}{6}x\sqrt{x^2+4} - \dfrac{2}{3}\ln(\sqrt{x^2+4} + x) + c$;

c) $\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln(x^2 + \sqrt{x^2-4}) + c$;

d) $3\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right) + \sqrt{9-4x^2} + c$.

2) a) $\ln(1+\sqrt{2})$; b) $\dfrac{\pi}{6}$;

2.3.1 Exercícios

1) a) $-\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{7}{10(x-3)}-\dfrac{1}{5(x+2)}$;

b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-1}{x^2+4}$;

c) $\dfrac{1}{9x}+\dfrac{1-x}{3(x^2+2x+3)^2}-\dfrac{x+2}{9(x^2+2x+3)}$;

d) $\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{5x-3}{3(x^2-2x+3)}$.

2) a) $-\dfrac{1}{6}\ln|x|+\dfrac{3}{10}\ln|x-2|-\dfrac{2}{15}\ln|x+3|+c$;

b) $\dfrac{2}{3}x^3+x^2+3x+3\ln|x-1|+c$;

c) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+x+1}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$;

d) $\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)+c$;

e) $2\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{x^2+1}+c$.

2.4.1 Exercícios

1) a) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+1\right)+c$

b) $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+3}\right|+c$.

Exercícios de fixação

1) a) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+c$;

b) $\ln|\operatorname{sen} x|+c$;

c) $\ln|\operatorname{cossec} x-\operatorname{cotg} x|+c$;

d) $\dfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x-\dfrac{2}{7}\operatorname{sen}^7 x+\dfrac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x+c$;

e) $\dfrac{3x}{2}+\cos 2x-\dfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x+c$;

f) $\left[\frac{2}{7}\cos^3 x - \frac{2}{3}\cos x\right]\sqrt{\cos x} + c$;

g) $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + c$;

h) $\ln(1+\operatorname{sen} x) + c$;

i) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + c$;

j) $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + c$;

k) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + c$;

l) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x\right] + c$;

m) $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + c$;

n) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{x^2-1} + \ln\left|\cos\sqrt{x^2-1}\right| + c$.

2) a) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; b) 0.

3) $\frac{4}{3}u.a.$ 4) $1u.a.$ 5) $\frac{1}{3}u.a.$

7) a) $\frac{-\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$;

b) $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$;

c) $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sec}\frac{3x}{4} + c$;

d) $\ln(\sqrt{e^{2x}+1} + e^x) + c$;

e) $\frac{1}{b}\ln\left|bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right| + c$;

f) $\frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + c$;

g) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}+2\ln(x+\sqrt{x^2-4})+c$;

h) $\sqrt{x^2+4x-5}-2\ln\left|\sqrt{x^2+4x-5}+(x+2)\right|+c$.

8) $A=\pi ab$

10) a) $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+c$;

b) $\ln\left(\frac{x^2+4}{(x+1)^2}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c$;

c) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+c$;

d) $4x+\frac{4}{9}\ln|x+1|-4\ln|x+2|+\frac{68}{9}\ln|x-2|-\frac{16}{3(x-2)}+c$;

e) $\frac{(1-\ln 2)}{2}$;

f) $x+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right|+c$.

12) a) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+c$.

13) $\frac{4}{3}\ln 2$ *u.a.*

14) a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)+c$;

b) $\frac{1}{5}\left[\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|\right]+c$;

c) $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c$;

d) $\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+c$.

15) a) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}-c$;

b) $x\ln\left|x^2-x+2\right|-2x-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+2\right|+\sqrt{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)+c$.

Capítulo 3

Aplicações de Integral

Capítulo 3

Aplicações de Integral

Neste capítulo você vai:
1. Resolver, utilizando integrais, equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e separáveis;
2. Calcular o comprimento de arco de curvas planas;
3. Calcular o volume de sólidos de revolução;
4. Calcular a área de superfícies de revolução;
5. Calcular as coordenadas do centro de massa de figuras planas;
6. Calcular a área de regiões planas delimitadas por curvas em coordenadas polares.

3.1 Equações diferenciais de primeira ordem com variáveis separáveis

O teorema fundamental do cálculo nos leva à conclusão de que o cálculo integral é, em certo sentido, uma operação inversa do cálculo diferencial. Isso significa que, quando calculamos a integral de uma função f, estamos calculando, de fato, sua antiderivada, ou seja, estamos encontrando uma função F, cuja derivada é a função f. Podemos ainda elaborar questões mais complexas, como, por exemplo: encontrar uma função $y = y(t)$ que satisfaça, junto com sua primeira derivada, uma igualdade do tipo

$$F(t, y, y') = 0 \,. \tag{3.1}$$

Esse tipo de igualdade apresentada na expressão (3.1) denominamos equação diferencial ordinária (EDO).

Definição 3.1. Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma igualdade envolvendo uma função y, de uma variável independente t, e suas derivadas em relação a essa variável independente em um determinado intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Em outras palavras, é uma igualdade do tipo

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad t \in I.$$

A ordem de uma equação diferencial é definida como a derivada de maior ordem da função que ocorre na EDO.

No caso da equação (3.1), a EDO é dita ser de primeira ordem, pois somente envolve a primeira derivada da função, e não derivadas de ordem superior.

Cabe-nos, aqui, uma pequena observação que as EDOs não são as únicas equações diferenciais que podem existir. Também podemos ter equações diferenciais parciais (EDPs) que envolvem funções u, dependentes de duas ou mais variáveis independentes, por exemplo $u = u(x, y, z, t)$, e as derivadas parciais desta função u. As EDPs estão, por enquanto, fora de nosso escopo, por isso, vamos nos ocupar apenas com equações diferenciais ordinárias.

Como exemplos de equações diferenciais, podemos citar:

1) $yy''' - \operatorname{sen} t \cdot y' + e^t = 0,\ \ y = y(t)$, para $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos uma EDO de terceira ordem.
2) $y^{(4)} + ty'' - t^2 y' + 20 = 0$, $y = y(t)$, para $t \in \mathbb{R}$. Neste caso temos uma EDO de quarta ordem.
3) $y'' = \operatorname{sen} y,\ \ y = y(t)$, para $t \in \mathbb{R}$. Neste caso temos uma EDO de segunda ordem.
4) $y' = (1 - y)y$, $y = y(t)$, para $t \in \mathbb{R}$, Neste caso temos uma EDO de primeira ordem.

Como vamos abordar neste capítulo tão somente as EDOs de primeira ordem, vamos primeiramente mostrar alguns problemas motivadores envolvendo esse tipo de EDO, explicitando, assim, algumas de suas aplicações.

Em primeiro lugar, considere uma cultura de bactérias em laboratório. Sabemos que a reprodução das bactérias é assexuada, cada indivíduo se divide em dois ou mais indivíduos idênticos, esse processo denomina-se cissiparidade. Assim, quanto maior a população de bactérias, maior será sua velocidade de reprodução, visto que existem mais indivíduos reproduzindo, ou seja, a taxa de crescimento populacional é proporcional ao número de indivíduos. Vamos supor que cada indivíduo dessa população possui a mesma capacidade reprodutiva. Assim, se denotarmos por $N(t)$ o número de indivíduos em um certo instante de tempo t, então a velocidade de crescimento dessa população será dada pela derivada desta função em relação ao tempo, $N'(t)$. Assim, como supusemos que o crescimento da população era proporcional ao número de indivíduos e que cada indivíduo possuía a mesma capacidade reprodutiva, podemos escrever a lei de crescimento dessa população da seguinte forma

$$N'(t) = \alpha.N(t),$$

onde esta constante α codifica a homogeneidade da capacidade reprodutiva dos indivíduos dessa população. Para descrevermos a função que indica o número de indivíduos dessa população em função do tempo, precisamos encontrar uma função real cuja primeira derivada seja proporcional à própria função. O leitor já deve desconfiar que tal função será uma exponencial. Nesta EDO, a variável independente é a variável t, e a variável dependente é a variável N.

Um problema semelhante ao primeiro é o problema do decaimento radioativo. A resolução exata desse problema possui inúmeras aplicações, como, por exemplo, o cálculo da idade de uma rocha ou então a datação de um fóssil. O fato é que, na natureza, existem certos elementos químicos cujos núcleos atômicos são instáveis e ao longo do tempo eles emitem partículas eletricamente carregadas (núcleos de Hélio, na radiação alfa, ou elétrons, na radiação beta) e com isso mudam o seu número atômico e se tornam outros elementos químicos mais estáveis, denominados descendentes. Ao se examinar uma amostra em uma rocha, pode-se verificar as porcentagens relativas do elemento químico radioativo e seus descendentes. A taxa de decaimento de uma amostra também depende da quantidade do elemento presente na amostra. Tendo em vista que cada átomo individualmente tem a mesma probabilidade de emitir radiação e, portanto, decair em seus elementos descendentes, então se a massa em um determinado momento for igual a $M(t)$, a taxa de decaimento neste instante de tempo será dada por

$$M'(t) = -\kappa.M(t),$$

onde a constante α discrimina as características próprias do elemento radioativo a ser analisado, e o sinal negativo indica que a massa desse elemento é uma função decrescente com o tempo. Novamente, essa EDO tem como variável independente a variável t. Na prática, a constante de decaimento é determinada experimentalmente através da determinação do tempo de meia-vida do elemento. O que se faz é colocar uma amostra de massa M_0 do material e medir com precisão o tempo T que demora para essa amostra decair até o ponto em que se tenha a metade da massa original do elemento radioativo, ou seja, $M(T) = \frac{M_0}{2}$. Então se substitui estes dados na solução da EDO acima com a condição inicial $M(0) = M_0$, ou seja,

$$M(t) = M_0.\exp(-\kappa t) \ .$$

Substituindo na equação os dados obtidos da medida do tempo de meia-vida, temos

$$\frac{M_0}{2} = M_0.\exp(-\kappa t),$$

obtendo, assim

$$-\kappa t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2,$$

e, portanto:

$$\kappa = \frac{\ln 2}{T},$$

onde a função $\ln x$ significa o logaritmo na base e de um número, ou seja, o seu logaritmo natural .

Neste capítulo, vamos tratar apenas de um caso específico de EDO de primeira ordem, as equações separáveis. As duas EDOs apresentadas nos exemplos são deste tipo.

Definição 3.2. Diz-se que uma EDO de primeira ordem é separável se puder ser escrita na seguinte forma

$$f(y)y' = g(x). \qquad (3.2).$$

A solução dessa equação, como veremos, é dada pela função exponencial, que será denotada por $\exp(x)$ na maioria das vezes por questão de clareza na notação. Onde for possível, utilizaremos também a notação e^x para a mesma função. A questão é meramente estética, pois ao denotarmos a função exponencial de uma expressão muito grande, ocorrerá que os caracteres ficarão muito minúsculos se adotarmos a segunda notação como um expoente, de fato. Por isso a necessidade de utilizarmos a primeira notação.

Nosso objetivo é apresentar um método de resolução de EDOs de primeira ordem com variáveis separáveis como exemplo de aplicação do cálculo integral. É claro que o estudo das EDOs não se limita às de primeira ordem e separáveis, existe toda uma área da matemática que se dedica ao estudo. Primeiramente precisamos dizer o que significa resolver uma EDO, ou seja, o que significa uma solução para uma EDO. De agora em diante, tudo o que fizermos será relativo apenas a EDOs de primeira ordem.

Definição 3.3. Uma solução, ou curva integral, da EDO $F(x, y, y') = 0$, é uma função $\varphi = \varphi(x)$ satisfazendo à igualdade

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0,$$

para todo x no domínio da função γ.

Resolver uma EDO envolve o cálculo de uma integral indefinida, então uma constante arbitrária é automaticamente introduzida em sua solução. Isso significa que ao resolvermos uma EDO, não obtemos apenas uma solução individual, mas uma família infinita de soluções à qual denominaremos solução geral da EDO. Essa arbitrariedade somente é fixada ao estabelecermos condições iniciais, isto é, ao dizermos que a solução específica é uma função $y = y(x)$, satisfazendo à condição $y(x_0) = y_0$, para algum x_0 no domínio das funções y. Quando resolvemos uma EDO especificando uma condição inicial, dizemos que resolvemos um problema de valor inicial.

O método de resolução de EDOs de primeira ordem separáveis é simples. Consideremos a forma já separada da EDO

$$f(y)y' = g(x).$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima em relação à variável x, temos

$$\int_{x_0}^{x} f(y(\lambda))y'(\lambda)d\lambda = \int_{x_0}^{x} g(\lambda)d\lambda.$$

Utilizando o método de substituição de variáveis na integral no primeiro membro da igualdade, definindo $u = y(\lambda)$, podemos ainda obter

$$\int_{y_0}^{y(x)} f(u) = \int_{x_0}^{x} g(\lambda) d\lambda .$$

Seja F a função real, tal que $F'(u) = f(u)$ e G a função real tal que $G'(t) = g(t)$, então, pelo teorema fundamental do cálculo, podemos ainda escrever

$$F(y(x)) - F(y_0) = G(x) - G(x_0) ,$$

ou, ainda,

$$F(y(x)) = G(x) + K , \qquad (*)$$

onde $K = F(y_0) - G(x_0)$ é uma constante arbitrária que depende totalmente de condições iniciais. Algumas vezes, a solução geral da EDO tem de ser deixada na forma implícita dada pela fórmula (*), isto é, não é possível isolar a variável y de forma a escrevermos $y = h(x)$.

Exercício resolvido 3.1. Resolva a EDO $y' = y(1-y)$.

> **Solução:** Primeiramente, temos que observar que as funções constantes $y = 0$ e $y = 1$ são soluções da EDO, o método de resolução abaixo será utilizado para determinar as outras soluções desta. Colocando na forma separada, temos
>
> $$\frac{y'}{y(1-y)} = 1 .$$
>
> Integrando-se ambos os membros da igualdade acima, podemos escrever
>
> $$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} dt = \int_{x_0}^{x} dt .$$
>
> Podemos, ainda, efetuar a mudança de variáveis na integral no primeiro membro, obtendo
>
> $$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{u(1-u)} = x - x_0 .$$

A integral acima utiliza o método de frações parciais para ser resolvida, isto é, precisamos encontrar constantes A e B, tais que

$$\frac{1}{u(1-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u}.$$

Multiplicando-se ambos os membros por $u(1-u)$ obtemos

$$A(1-u) + Bu = 1,$$

que é equivalente ao sistema

$$A = 1$$
$$B - A = 0$$

cuja solução é $A = B = 1$. Assim, temos que

$$\frac{1}{u(1-u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}.$$

Voltando à integral, temos

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{u} + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{1-u} = x - x_0,$$

ou seja,

$$\ln y(x) - \ln y_0 - \ln(1-y(x)) + \ln(1-y_0) = x - x_0.$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\ln\left(\frac{y(x)}{1-y(x)}\right) = x - x_0 + \ln\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right) = x + K,$$

ou, ainda,

$$\frac{y(x)}{1-y(x)} = e^{x+K} = Ce^x.$$

A solução está na forma implícita, mas ainda podemos isolar a função $y(x)$, obtendo, finalmente,

$$y(x) = \frac{Ce^x}{1+Ce^x}.$$

A constante C pode ser fixada através de condições iniciais. Por outro lado, se as condições iniciais fossem dadas, elas poderiam ter sido colocadas desde o início nos limites de integração, no lugar de x_0 e y_0. Note que essa solução é válida apenas no subconjunto $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, onde a é o número real tal que $1+Ce^a = 0$.

Exercício resolvido 3.2. Resolva a EDO $y' = \dfrac{x^2}{1+y^2}$.

Solução: Novamente, temos que colocar a EDO na forma separada, obtendo

$$(1+y^2)y' = x^2.$$

Temos que integrar os dois membros em relação à variável x, o que nos resulta em

$$\int_{x_0}^{x} (1+y(t)^2)y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} t^2 dt,$$

ou ainda, depois de uma mudança de variáveis na integral no primeiro membro,

$$\int_{y_0}^{y(x)} (1+u^2)du = \frac{x^3}{3} - \frac{x_0^{\,3}}{3},$$

que nos dá a seguinte igualdade:

$$y(x) + \frac{y(x)^3}{3} - y_0 + \frac{y_0^{\,3}}{3} = \frac{x^3}{3} - \frac{x_0^{\,3}}{3}.$$

Agrupando todas as constantes, finalmente temos

$$y(x) + \frac{y(x)^3}{3} = \frac{x^3}{3} + K,$$

que é a solução na forma implícita. Deixamos para o leitor a tarefa de verificar se é possível escrever a solução na forma explícita em algum subconjunto de $\mathbb{R}$ e, caso seja possível, escrevê-la.

Exercício resolvido 3.3. Resolver a EDO $y' = -y$, com a condição inicial $y(0) = 2$.

Solução: Devido à condição inicial do problema, a solução desejada não é a identicamente nula, assim a EDO pode ser escrita como

$$\frac{y'}{y} = -1,$$

que, integrando na variável x, resulta em

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)} dt = -\int_0^x dt.$$

A mudança de variável de integração na integral do primeiro membro nos fornece o seguinte resultado:

$$\int_{2}^{y(x)} \frac{du}{u} = \ln y(x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{y(x)}{2}\right) = -x .$$

Uma pequena manipulação algébrica nos fornece

$$y(x) = 2e^{-x} .$$

Note que na solução não existem constantes arbitrárias, pois a condição inicial foi dada. Portanto, estamos falando de uma única solução que satisfaz a aquela condição inicial dada. Note também que esta solução está definida em $I = \mathbb{R}$.

3.1.1 Exercícios

1) Resolva as seguintes EDOs separáveis:

a) $yy' = x^2$;

b) $y' = \dfrac{x^2}{y(1+x^2)}$;

c) $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$;

d) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$;

e) $y' = (\cos^2 x)\cdot(\cos^2 2y)$;

f) $xy' = (1-y^2)^{\frac{1}{2}}$;

g) $y' = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$;

h) $y' = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, onde a,b,c,d são constantes;

i) $y' = \dfrac{ay+b}{cy+d}$, onde a,b,c,d são constantes.

2) Resolva as EDOs separáveis a seguir, levando em conta as respectivas condições iniciais.

a) $\operatorname{sen} 2x + (\cos 3y)\cdot y' = 0$, com $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

b) $x + e^{-x} yy' = 0$, com $y(0) = 1$;

c) $y' = \dfrac{2x}{y + x^2 y}$, com $y(0) = -2$;

d) $y' = \dfrac{2x}{1+2y}$, com $y(2) = 0$.

3) Verifique que a EDO

$$y' = \frac{y-4x}{x-y}$$

não é separável, mas que se a variável y for substituída por uma nova variável $u = \dfrac{y}{x}$, então ela se torna separável nas variáveis x e u. Ache a solução da EDO original lembrando que y é função de x assim como u.

3.2 Comprimento de Arco de Curvas Planas

Consideremos uma curva plana γ, dada pelo gráfico da função diferenciável com derivada contínua

$$y = y(x),$$

com $x \in [a,b]$. Vamos utilizar o cálculo integral para calcularmos o comprimento de arco da curva y. Para iso, vamos primeiramente construir uma partição P, do intervalo $[a,b]$, da forma $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$ de tal forma que aproximemos a curva por uma poligonal, cujos vértices são $(t_0, y(t_0))$, $(t_1, y(t_1))$, $(t_2, y(t_2))$, ..., $(t_N, y(t_N))$, conforme nos mostra a figura 3.1 abaixo.

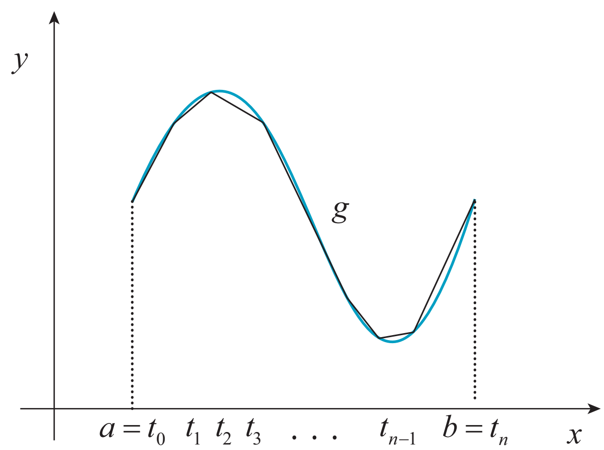


Figura 3.1. Aproximação de uma curva por uma poligonal definida pela partição P, do intervalo $[a,b]$.

Para a partição P, o comprimento da poligonal que aproxima a curva γ é dado por

$$L(\gamma,P)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(y(\eta_i)-y(t_{i-1}))^2}\,.$$

Pelo teorema do valor médio, ainda podemos escrever a expressão acima como

$$L(\gamma,P)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(y'(\eta_i)(t_i-t_{i-1}))^2}\,,$$

onde $\eta_i \in]t_{i-1},t_i[$, isto é possível pois $y=y(x)$ possui derivada contínua. Assim, colocando em evidência o termo $\left(t_i-t_{i-1}\right)^2$ na raiz quadrada, podemos, ainda escrever

$$L(\gamma,P)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+(y'(\eta_i))^2}\,(t_i-t_{i-1})\,.$$

A idéia principal é que, quanto mais refinada for a partição, mais próximo o comprimento da poligonal deve estar daquilo que se espera que seja o comprimento de arco da curva. Assim, o comprimento de arco da curva γ será obtido aplicando-se o limite no qual o número de vértices das poligonais tende a infinito, e o comprimento dos segmentos de cada poligonal tende a 0. Isso equivale a dizer que obtemos o comprimento de arco da curva tomando o limite no qual o comprimento do maior intervalo da partição tende a zero, isto é $|P|\to 0$, assim

$$L(\gamma)=\lim_{|p|\to 0}L(\gamma,P)=\lim_{|p|\to 0}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+(y'(\eta_i))^2}\,(t_i-t_{i-1})\,,$$

mas este limite é, por definição, exatamente igual à integral sobre o intervalo, ou seja,

$$L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx\ .$$

A existência desta integral está garantida pelo fato de $y'(x)$ ser uma função contínua. Essa fórmula pode ser considerada como a definição do comprimento de arco de uma curva.

Definição 3.4. O comprimento de arco de uma curva diferenciável γ, definida pelo gráfico da função diferenciável $y=y(x)$, cuja derivada é uma função contínua, com $x\in[a,b]$, é dado pela expressão

$$L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx\,. \tag{3.3}$$

Vamos tratar alguns exemplos conhecidos, e outros não tão conhecidos do leitor, de comprimentos de arco de curvas.

Exercício resolvido 3.4. Encontre o comprimento de arco da parábola $y = x^2$, no intervalo $[0, X]$, para algum $X > 0$.

Solução: Utilizando a fórmula (3.33), temos

$$L = \int_0^X \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^X \sqrt{1+4x^2}\,dx .$$

Efetuando a substituição $x = \dfrac{\text{tg}\theta}{2}$, teremos os limites de integração entre $\theta = 0$ e $\theta = \text{arctg}2X$, temos também $x'(\theta) = \dfrac{\sec^2\theta}{2}$ e $\sqrt{1+4x^2} = \sqrt{1+\text{tg}^2\theta} = \sec\theta$. Assim, a integral L acima pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\text{arctg}2X} \sec^3\theta \cdot d\theta .$$

A integral de $\sec^3\theta$ foi resolvida no exemplo 2.8, portanto, temos

$$\int_a^b \sec^3\theta = \frac{1}{2}\left(\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,|_a^b + \int_a^b \sec\theta \cdot d\theta\right).$$

Para o cálculo da integral de $\sec\theta$, relembremos o truque padrão:

$$\int_a^b \sec\theta \cdot \text{d}\theta = \int_a^b \sec\theta \frac{\sec\theta + \text{tg}\theta}{\sec\theta + \text{tg}\theta}\text{d}\theta = \int_a^b \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\text{tg}\theta}{\sec\theta + \text{tg}\theta}\text{d}\theta$$

com a substituição de variáveis $u = \sec\theta + \text{tg}\theta$, obtemos

$$\int_a^b \sec\theta \cdot \text{d}\theta = \int_{\sec a + \text{tg}\,a}^{\sec b + \text{tg}\,b} \frac{du}{u} = \ln|u|\Big|_{\sec a+\text{tg}\,a}^{\sec b+\text{tg}\,b} = \ln|\sec b + \text{tg}\,b| - \ln|\sec a + \text{tg}\,a| .$$

Em nosso caso, os limites de integração são $a = 0$ e $b = \text{arctg}2X$. Com esses resultados em mãos, o leitor pode facilmente concluir que o comprimento de arco, L, será dado por

$$L = \frac{1}{4}\left(2X\sqrt{1+4X^2} + \ln\left(2X + \sqrt{1+4X^2}\right)\right) .$$

Exercício resolvido 3.5. Calcule o comprimento da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$.

Solução: Note que não podemos escrever toda a circunferência como o gráfico de uma única função. Mas as semicircunferências superior e inferior podem, respectivamente, ser escritas como os gráficos das funções:

$$y_1 = \sqrt{r^2 - x^2}\text{, e } y_2 = -\sqrt{r^2 - x^2},$$

para $x \in [-r, r]$, e cujas derivadas são, respectivamente,

$$y_1' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\text{, e } y_2' = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Como o comprimento da circunferência é igual à soma dos comprimentos das semicircunferências, temos que

$$L = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (y_1')^2}\,dx + \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (y_2')^2}\,dx = 2\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx.$$

Essa integral pode ser resolvida com a substituição de variáveis $x = r\,\mathrm{sen}\theta$, os limites de integração são $\theta = -\frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, e $x'(\theta) = r\cos\theta$. Também temos que $\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2\mathrm{sen}^2\theta} = r\cos\theta$. Assim, a integral resulta em

$$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cdot r\cos\theta}{r\cos\theta}\,d\theta = 2r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos\theta}{r\cos\theta}\,d\theta = 2r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2r\pi,$$

que é o resultado conhecido do comprimento da circunferência.

Exercício resolvido 3.6. Calcule o comprimento de arco da curva $y = e^x$, entre $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: Utilizando a fórmula do comprimento de arco, temos a integral

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx,$$

que pode ser resolvida facilmente utilizando-se a substituição de variável $u^2 = 1 + e^{2x}$. Nessa substituição, os nossos limites de integração são $u = \sqrt{2}$ e $u = \sqrt{1+e^2}$, também temos que $x'(u) = \dfrac{u}{u^2 - 1}$. Assim, a integral pode ser escrita como

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2}{u^2-1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} du + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{du}{u^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} du + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du,$$

onde, na última igualdade, foi utilizado o método das frações parciais. O cálculo das integrais finalmente resulta em

$$L = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{1+e^2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right),$$

que ainda pode ser escrito na forma abaixo, conforme o leitor poderá verificar facilmente com uma simples manipulação algébrica:

$$L = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{1+e^2} - 1) - 1 - \ln(\sqrt{2} - 1).$$

3.2.1 Exercícios

1) Calcule os comprimentos de arco das seguintes curvas nos intervalos indicados:

a) $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, para $1 \le x \le 2$.

b) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$, para $2 \le x \le 4$.

c) $y = \ln(\cos x)$, para $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.

d) $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, para $0 \le x \le 1$.

e) $y = \sqrt{x}$, para $0 \le x \le 4$ (Dica: Tente fazer $x = x(y)$).

3.3 Sólidos e Superfícies de Revolução

Nesta seção, vamos aprender como utilizar o cálculo integral para obtermos o volume de um sólido de revolução e a área de uma superfície de revolução. Primeiramente, precisamos delimitar bem nosso objeto de estudo. Considere o gráfico de uma função, $y = f(x)$, contínua e não negativa, sendo o plano bidimensional x, y, um dos planos no sistema cartesiano x, y e z, e a coordenada x definida em um intervalo $[a, b]$. Considere também a região do plano x, y delimitada pelo eixo x, pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pelo gráfico da função, conforme indicado na figura 3.2 a seguir.

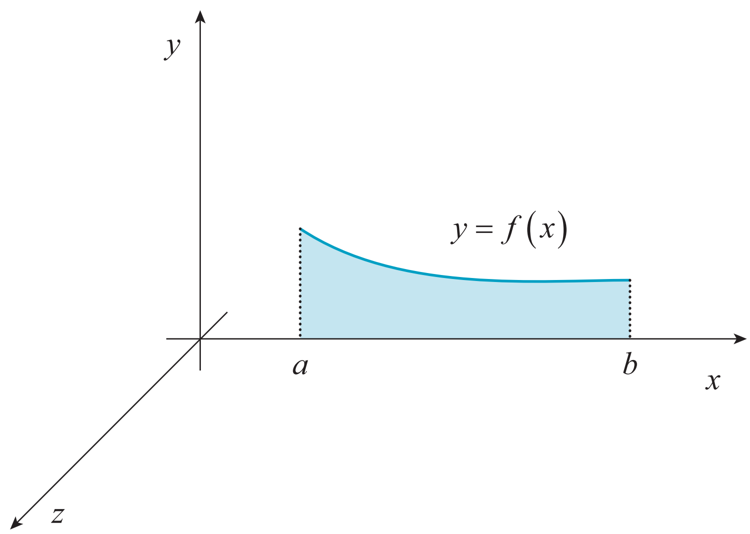


Figura 3.2: O gráfico da função $y = f(x)$ no espaço tridimensional e a região do plano x, y sob este gráfico e acima do eixo x.

Para construirmos o sólido de revolução, temos que efetuar a rotação da região plana ao redor do eixo x. O sólido de revolução está mostrado na figura 3.3.

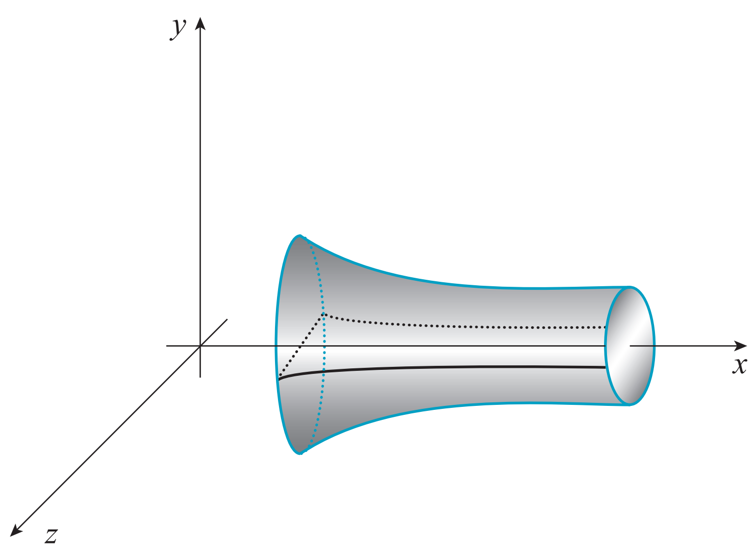


Figura 3.3: Sólido de revolução construído a partir do gráfico da função $y = f(x)$.

Vamos denotar o sólido de revolução assim gerado pela letra Ω, e a superfície de revolução, pela letra Σ. Esta superfície é gerada apenas pela rotação da curva $y = f(x)$, e que portanto não inclui os dois círculos nas extremidades. Nesta seção, vamos mostrar como se resolve o problema de calcular o volume de um sólido de revolução Ω e a área de uma superfície de revolução Σ. Para o cálculo do volume, existem dois métodos alternativos: no primeiro método, a integral é obtida como o limite da soma dos volumes de cilindros obtidos por aproximação através de cortes transversais de Ω determinados por partições do intervalo $[a,b]$ do domínio da função f que está sendo considerado. No segundo método, considera-se a integral obtida como o limite das somas dos volumes de cascas cilíndricas, obtidas através da rotação de retângulos em torno do eixo y.

3.3.1 Método dos Discos

Vamos ilustrar o primeiro método para o cálculo de volumes. Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não negativa. Ao rotacionarmos a região sob o gráfico $y = f(x)$, ao redor do eixo x, obtemos o sólido Ω, conforme ilustrado na figura 3.3. Considere, agora, uma partição P do intervalo $[a,b]$, ou seja, números reais $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$. O volume de Ω pode ser aproximado pela soma dos volumes dos cilindros de raio $f(t_i)$, para $1 \le i \le N$ e de altura $t_i - t_{i-1}$, determinados por esta partição, conforme a figura 3.4 abaixo.

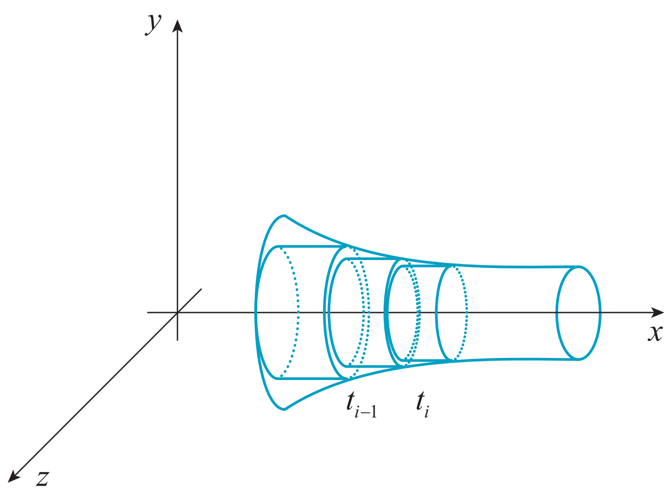


Figura 3.4: Aproximação do volume do sólido de revolução pela soma dos volumes dos cilindros determinados pela partição $P: t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$.

O volume de cada cilindro é dado por

$$V_i = \pi \cdot f(t_i)^2 \cdot (t_i - t_{i-1}) \ ,$$

assim, a soma de todos os volumes dos cilindros determinados pela partição P é dada por

$$V_P = \sum_{i=1}^{N} V_i = \pi \cdot \sum_{i=1}^{N} f(t_i)^2 (t_i - t_{i-1}) \, .$$

Finalmente, o volume do sólido Ω é dado pelo limite quando $|P| \to 0$ sobre todas as partições do intervalo $[a,b]$ destas somas parciais, ou seja,

$$V(\Omega) = \lim_{|P|\to 0} V_P = \lim_{|P|\to 0} \pi \cdot \sum_{i=1}^{N} f(t_i)^2 (t_i - t_{i-1}) = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$

Novamente, essa fórmula pode ser tomada como a definição do volume de um sólido de revolução.

Definição 3.5: O Volume de um sólido de revolução gerado pelo gráfico da função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ao redor do eixo x, é dado pela integral

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx \, . \tag{3.4}$$

Antes de iniciarmos os exemplos resolvidos devemos ainda fazer três observações:

A primeira é que podemos também calcular o volume de um sólido de revolução ao redor do eixo y, para o qual teremos que integrar em relação à variável y, mas para isso devemos ter o gráfico de uma função não negativa $x = g(y)$ e a região delimitada pelo gráfico da função, pelo eixo y e pelas retas $y = a$ e $y = b$ no plano x, y; caso contrário, teremos que dividir a curva em partes.

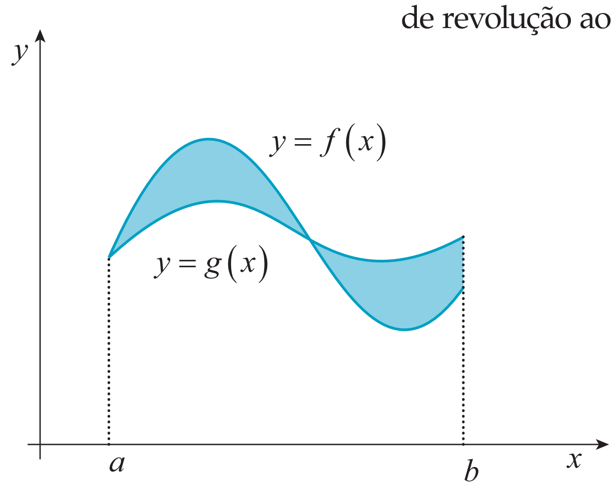


Figura 3.5: Região delimitada pelos gráficos das funções f e g no intervalo $[a,b]$.

A segunda observação diz respeito a sólidos de revolução gerados por regiões que são delimitadas no plano por dois gráficos de funções, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, de modo que a região esteja situada acima do eixo x como nos mostra a figura 3.5 ao lado:

Nesse caso, devemos calcular a diferença entre os volumes gerados separadamente pelos gráficos, tomando, obviamente, o cuidado de observar qual das duas funções assume o maior valor. Isso pode ser feito de duas maneiras: a primeira forma consiste em separar o intervalo em partes (no caso da figura 3.5 acima há duas partes distintas, uma onde os valores $f(x)$ são maiores que os valores $g(x)$ e outra em que ocorre o contrário. A segunda maneira é tomarmos o valor absoluto da diferença entre as duas funções, ou melhor, dos quadrados delas, na fórmula do volume. Assim, a expressão para o cálculo do volume do sólido de revolução delimitado pelos gráficos das funções f e g se escreve como

$$V = \pi \int_a^b \left| (f(x))^2 - (g(x))^2 \right| dx \ .$$

A terceira e última observação é que também é possível calcular o volume do sólido de revolução gerado pelo gráfico da função $y = f(x)$ girando-se ao redor de qualquer eixo horizontal $y = y_0$. Basta transladarmos este eixo horizontal até o eixo x, que tem equação $y = 0$; para isso, teremos que transladar de igual modo o gráfico da função f, subtraindo o valor y_0 em todos os pontos, com isso, teremos que o volume gerado pela função f girada ao redor do eixo horizontal $y = y_0$ será igual ao volume gerado pelo gráfico da função $\overline{f}$, dado

por $\overline{f}(x) = f(x) - y_0$, girado ao redor do eixo x.

Exercício resolvido 3.7: Calcular o volume da esfera sólida de raio r centrado na origem.

Solução: A esfera sólida é a região do espaço dada pela inequação

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 ,$$

e é delimitada pela superfície da esfera cuja equação é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

e pode ser obtida a partir do gráfico da função

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} ,$$

definida no intervalo $[-r, r]$, rotacionando a região entre o gráfico de f e o eixo x ao redor do eixo x, como nos mostram as figuras 3.6 e 3.7 abaixo.

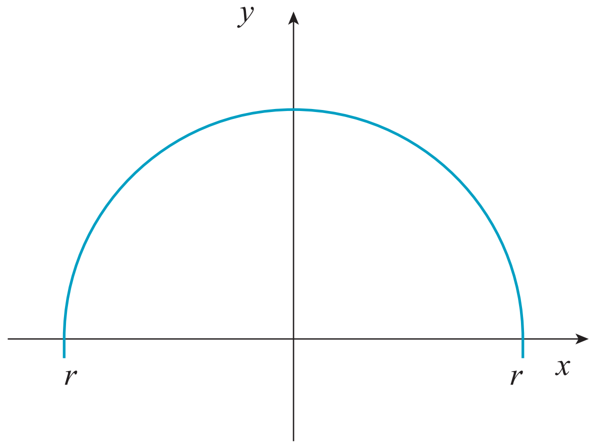


Figura 3.6: Região do plano x, y sob o gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

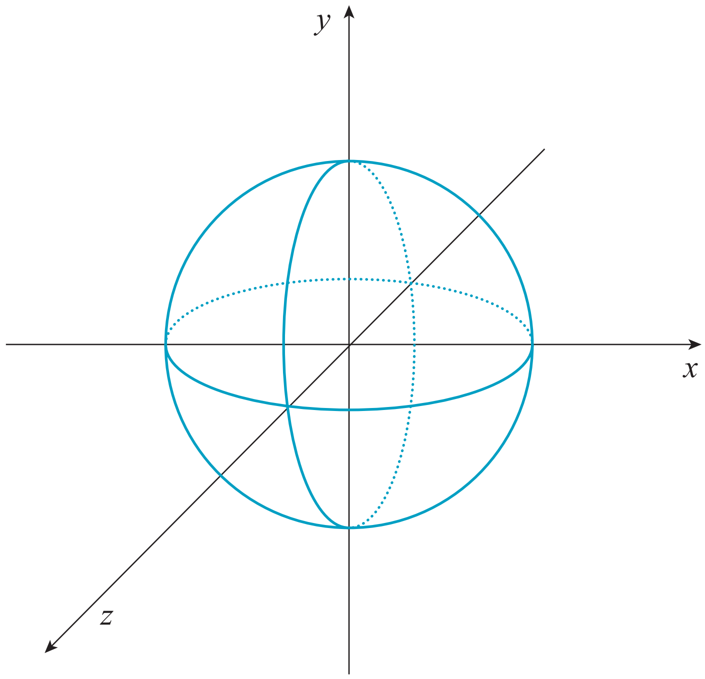


Figura 3.7: Esfera sólida, cuja superfície é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, gerada pela rotação do gráfico acima ao redor do eixo x .

Utilizando a fórmula (3.4) para volumes de sólidos de revolução para a função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, temos que o volume da esfera de revolução Ω será dado por

$$V_\Omega = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-r}^{r} = \pi \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Novamente, o cone é a superfície que delimita o sólido, mas também é comum dizer "volume do cone", para denotar o volume do sólido delimitado pelo cone.

Exercício resolvido 3.8. Calcular o volume de um sólido cônico de raio da base igual a r e altura igual a h .

Solução: Este cone pode ser obtido rotacionando ao redor do eixo x o gráfico da função

$$y = f(x) = -\frac{r}{h}x + r,$$

definida no intervalo $[0,h]$. Para obtermos o sólido, é necessário rotacionar a região do plano sob o gráfico dessa função, conforme nos mostram as figuras 3.8 e 3.9 abaixo.

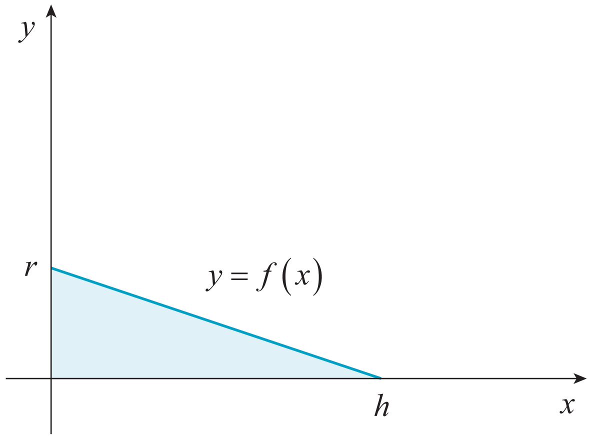


Figura 3.8: Região do plano x, y, sob o gráfico da função $y = f(x) = -\frac{r}{h}x + r$ entre $x = 0$ e $x = h$.

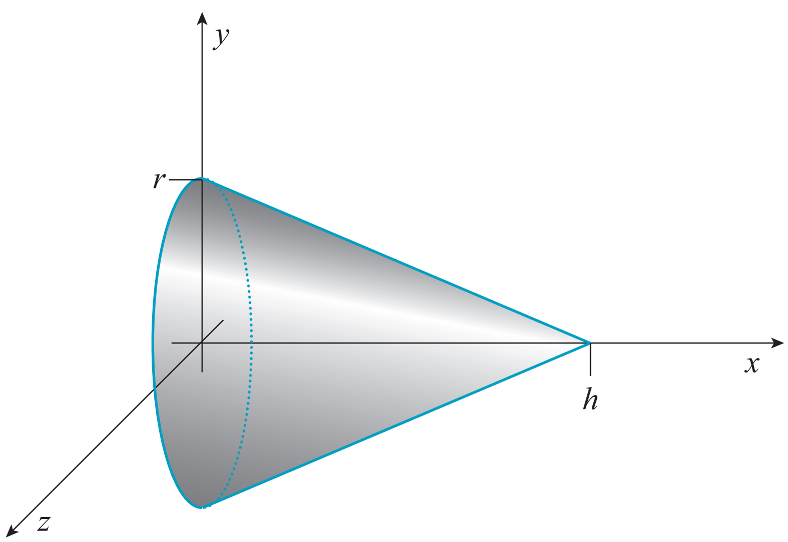


Figura 3.9: Sólido de revolução delimitado pelo cone de base circular de raio r e de altura h.

Então teremos que o volume do sólido de revolução será

$$V_{\Omega} = \pi \int_0^h \left(-\frac{rx}{h} + r \right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r^2x^2}{h^2} - 2\frac{r^2x}{h} + r^2 \right) dx$$

$$\pi\left(\frac{r^2x^3}{3h^2}-\frac{r^2x^2}{h}+r^2x\right)\Bigg|_0^h=\frac{\pi r^2h}{3}.$$

Novamente, o paraboloide é a superfície que delimita o sólido, estritamente falando, é impreciso dizer "volume do paraboloide", porém utiliza-se esta denominação corriqueiramente.

Exercício resolvido 3.9. Calcular o volume do paraboloide gerado pela rotação da região do plano x, y sob o gráfico da função $f(x)=\sqrt{x}$ ao redor do eixo x, a partir do ponto $x=0$ até o ponto $x=h$.

Solução: As figuras 3.10 e 3.11 nos mostram a formação deste sólido de revolução.

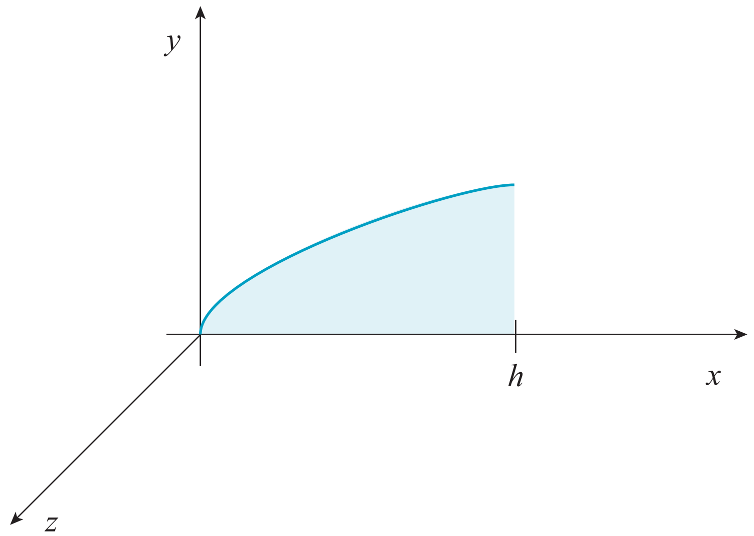


Figura 3.10: Região do plano x, y sob o gráfico da função $y=f(x)=\sqrt{x}$.

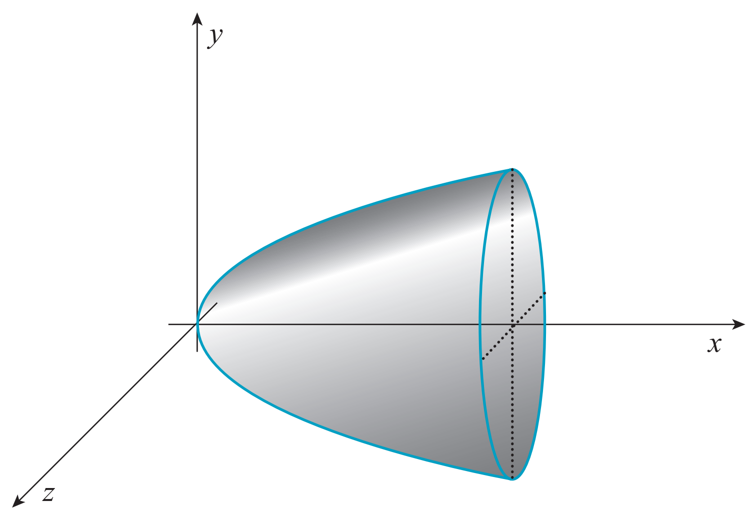


Figura 3.11: Paraboloide de revolução gerado pela região acima entre os pontos $x=0$ e $x=h$.

Novamente, aplicando a fórmula (3.4), para a função $f(x)=\sqrt{x}$, teremos

$$V_{paraboloide}=\pi\int_0^h x\,dx=\frac{\pi h^2}{2}.$$

3.3.1 Exercícios

1) Calcule o volume do elipsoide de revolução gerado pela elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, rodada ao redor do eixo x. (Obs: note que você só precisa rotacionar, de fato, a parte superior da elipse, que é o gráfico de uma função.)

2) Calcule o volume do toro de revolução gerado pela rotação do círculo, delimitado pela circunferência $(x-a)^2+y^2=b^2$, com $a>b>0$, ao redor do eixo y. (Obs: note que aqui você terá que considerar duas funções: $x=f_1(y)$ e $x=f_2(y)$, que correspondem às semicircunferências interna e externa. A integração também tem que ser feita na variável y.)

3) Calcule o volume do sólido de revolução ao redor do eixo x gerado pela rotação da região compreendida entre a parábola $y=x^2$ e pela reta $y=x$, para $0\le x\le 1$.

4) Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela mesma figura do exercício (3) acima girada ao redor do eixo horizontal $y=2$.

5) Calcule o volume do sólido de revolução conhecida como "Trombeta de Gabriel", que consiste na rotação ao redor do eixo x da região do plano sob o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x}$ para $x\ge 1$. (Aqui, o leitor terá que efetuar uma integral imprópria de 1 a ∞. Consulte o capítulo 2 para mais detalhes sobre integrais impróprias.)

6) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região do plano compreendida entre o gráfico da função $y=\operatorname{sen} x$ e o eixo x para $x\in[0,\pi]$.

7) Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação ao redor do eixo x da região sob o gráfico de $y=e^{-x}$ para $x\ge 0$.

3.3.2 Método das Cascas Cilíndricas

O segundo método de cálculo de volumes de sólidos de revolução é através de cascas cilíndricas. Esse método será útil para calcularmos o volume do sólido de revolução gerado pelo gráfico de uma função $y = f(x)$ girado agora em relação ao eixo y. Considere o gráfico da função não negativa e contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ com $a \geq 0$ conforme mostrado na figura 3.12 abaixo.

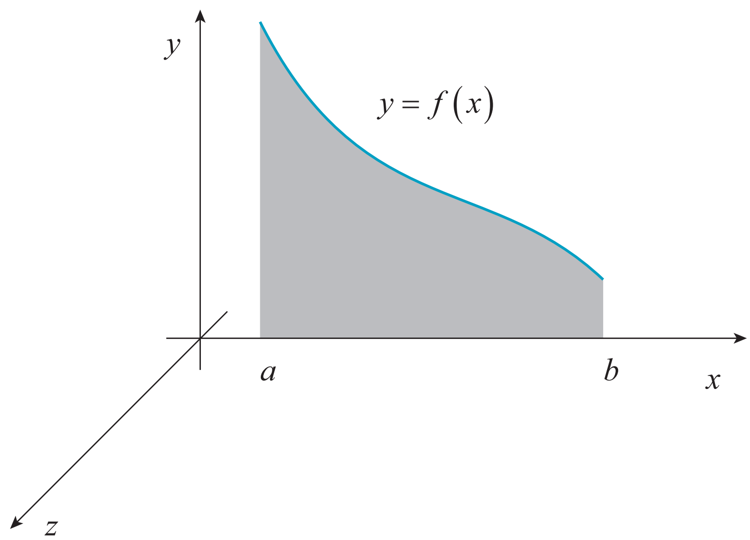


Figura 3.12: Gráfico da função $y = f(x)$ para $x \in [a,b]$.

Ao rotacionarmos a região sob este gráfico e que está acima do eixo x ao redor do eixo y, obtemos o sólido de revolução mostrado na figura 3.13 abaixo.

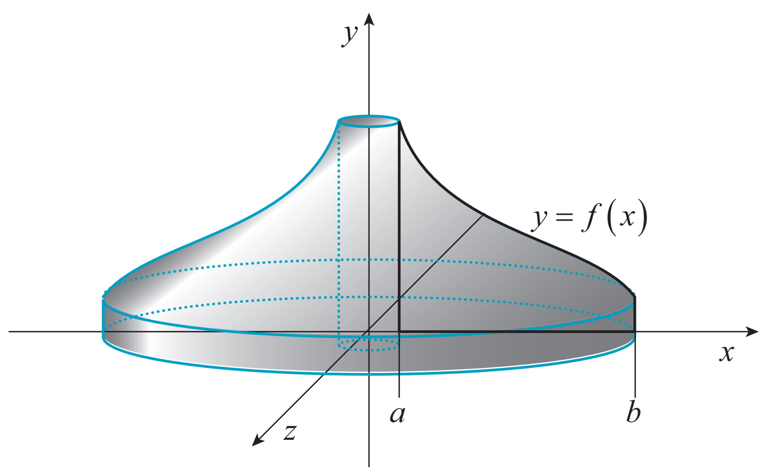


Figura 3.13: Sólido de revolução gerado pelo gráfico de $y = f(x)$, girado ao redor do eixo y.

A ideia é dividirmos esse sólido de revolução em cascas cilíndricas cujo eixo é o eixo de rotação do sólido em questão, o eixo y. Para obtermos essas cascas cilíndricas, definimos uma partição $P: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ no intervalo $[a,b]$ de definição da função f. Uma casca ciclíndrica é obtida ao rotacionarmos o retângulo cuja base está sobre o intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ e que tem altura igual a $f(t_i)$. A espessura desta casca cilíndrica, portanto, é dada pela diferença $t_i - t_{i-1}$ e sua altura é dada por $f(t_i)$, conforme nos mostra a figura 3.14 abaixo.

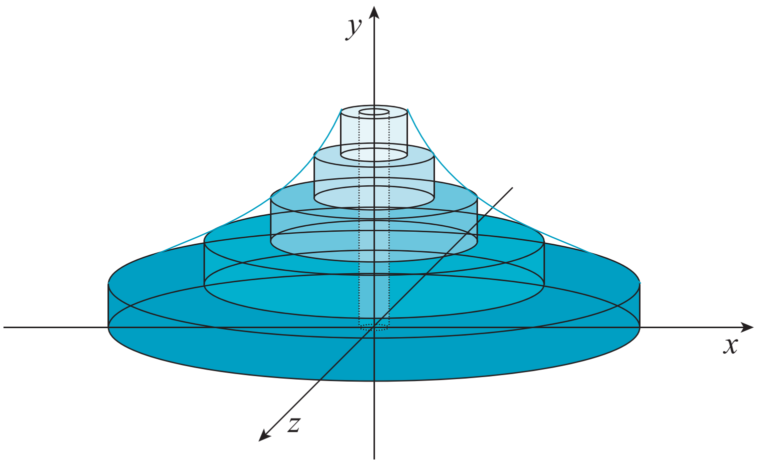


Figura 3.14: Cascas cilíndricas para o sólido de revolução gerado pela rotação da região no plano x, y sob o gráfico de $y = f(x)$, girado ao redor do eixo y.

Assim, o volume do sólido de revolução pode ser calculado pelo limite das somas dos volumes das cascas cilíndricas quando as partições ficam arbitrariamente finas. Para a partição P, o volume de cada casca cilíndrica é a diferença entre o volume do cilindro de raio t_i e altura $f(t_i)$ e o volume do cilindro de raio t_{i-1} e altura $f(t_i)$, logo

$$V_i = \pi\left(t_i^2 - t_{i-1}^2\right) f(t_i),$$

E a soma de todos os volumes das cascas cilíndricas associadas a essa partição pode ser escrita como

$$V_P = \sum_{i=1}^{N} \pi(t_i^2 - t_{i-1}^2) f(t_i) = \sum_{i=1}^{N} 2\pi\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)(t_i - t_{i-1}) f(t_i),$$

Aplicando o limite $|P| \to 0$, no qual as partições ficam cada vez mais finas, podemos ver que a média aritmética

$$\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)$$

pode ser aproximada pelo valor t_i. Assim, obtemos a integral

$$V(\Omega) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx = 2\pi \cdot \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{N} t_i f(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Essa integral pode ser tomada como a definição do volume do sólido de revolução obtido.

Definição 3.6. O volume de um sólido Ω obtido pela rotação ao redor do eixo y da região entre o gráfico da função contínua não negativa $y = f(x)$ definida no intervalo $x \in [a,b]$, com $a \geq 0$, e o eixo x é dado por

$$V(\Omega) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx. \tag{3.5}$$

Exercício resolvido 3.10. Encontre o volume do sólido obtido ao rotacionarmos ao redor do eixo y a região compreendida entre o gráfico da função $y = x(x-1)^2$ e o eixo x.

Solução. Antes de qualquer coisa, observemos que quando nos referimos à região estamos falando de uma região limitada. A região sob o gráfico da função $f(x) = x(x-1)^2$ está entre os pontos que o gráfico cruza ou toca o eixo x, isto é, suas raízes, que são exatamente $x = 0$ e $x = 1$, sendo assim, nosso intervalo de integração será o intervalo $[0,1]$. Portanto, utilizando a fórmula (3.5), temos

Como nos outros exemplos, o toro é a superfície que delimita o sólido. A expressão "volume do toro" é inexata, porém utilizada normalmente.

$$V = 2\pi \int_0^1 x^2(x-1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)dx = 2\pi \left(\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{15}.$$

Exercício resolvido 3.11. Calcular o volume do toro, obtido ao rotacionarmos ao redor do eixo y o círculo cuja circunferência é $(x-R)^2 + y^2 = r^2$, com $0 < r < R$.

Note que a função f_2 é negativa, então o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região compreendida entre seu gráfico e o eixo x é igual ao volume gerado pela função que a cada $x \in [R-r, R+r]$ associa o valor $-y$, ou seja, o volume determinado a partir da função f_1.

Solução. Essa Circunferência pode ser vista como a união dos gráficos das funções $y = f_1(x) = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$ e $y = f_2(x) = -\sqrt{r^2 - (x-R)^2}$, assim, podemos utilizar a simetria da figura e calcular o volume do toro como sendo o dobro do volume do sólido de revolução gerado pelo gráfico mostrado na figura 3.15 a seguir

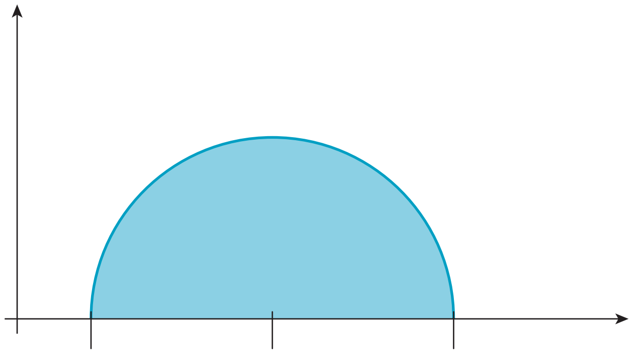


Figura 3.15: Região sob o gráfico da função $y=\sqrt{r^2-(x-R)^2}$.

O intervalo de integração também fica explícito na figura acima, logo podemos calcular o volume do toro:

$$I = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} R\sqrt{r^2-(x-R)^2}\,dx\,.$$

Seja a integral

$$I = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} R\sqrt{r^2-(x-R)^2}\,dx\,.$$

Observe que, somando e subtraindo a integral I na expressão do volume V, obtemos

$$V = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} (x-R)\sqrt{r^2-(x-R)^2}\,dx + 4\pi R \int_{R-r}^{R+r} \sqrt{r^2-(x-R)^2}\,dx\,.$$

Na primeira integral, efetuamos a substituição $u = x - R$, e na segunda integral efetuamos a substituição $x - R = r\cos\theta$. Assim, o leitor é capaz de verificar facilmente que obtemos

$$V = 4\pi \int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2-u^2}\,du + 4\pi R r^2 \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\,.$$

A primeira integral na expressão acima é identicamente nula, pois se trata de uma integral de função ímpar em um intervalo simétrico no que diz respeito à origem. A segunda integral pode ser resolvida facilmente, lembrando-se que $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$, assim a integral resulta em $\frac{\pi}{2}$. Portanto, o volume do toro é igual a

$$V = 2\pi^2 R r^2\,.$$

Note que o volume do toro é igual ao produto do comprimento da circunferência de raio R pela área do círculo de raio r.

Exercício resolvido 3.12. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação ao redor do eixo y da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 1 - x^2$.

Solução. A região em questão está descrita na figura 3.16 ao lado

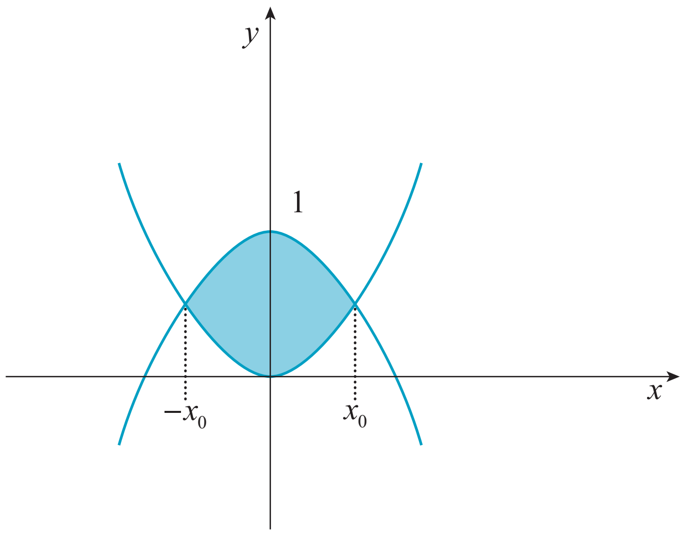


Figura 3.16: Região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 1 - x^2$.

Primeiramente, é necessário que se determine o ponto x_0 de intersecção entre as duas parábolas. Isso é simples, pois $x_0^2 = 1 - x_0^2$, o que nos dá $x_0^2 = \dfrac{1}{2}$ ou ainda $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Note que o volume do sólido de revolução será dado somente pela região considerada pelo intervalo $[0, x_0]$, assim temos que a expressão do volume se escreve como

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x((1-x^2)-x^2)dx = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x(1-2x^2)dx = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x-2x^3)dx\,,$$

de onde resulta

$$V = 2\pi \left(\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4}\,.$$

3.3.2 Exercícios

1) Calcule o volume da esfera de centro na origem e raio r, utilizando o método das cascas cilíndricas.

2) Calcule, utilizando o método das cascas cilíndricas, o volume de um cone vertical reto de base circular com raio r e com altura h (sugestão: coloque os eixos coordenados de maneira apropriada e compare o seu resultado com o exercício resolvido 3.8).

3) Considere dois sólidos esféricos de raios R_1 e R_2, respectivamente (suponha, sem perda de generalidade, que $R_2 > R_1$. Dessas duas esferas, retire dois cilindros sólidos de raios r_1 e r_2, respectivamente, de forma que os anéis resultantes tenham a mesma altura h, conforme ilustrado na 3.17 abaixo (é fácil ver que neste caso $r_2 > r_1$). Qual dos dois anéis tem maior volume?

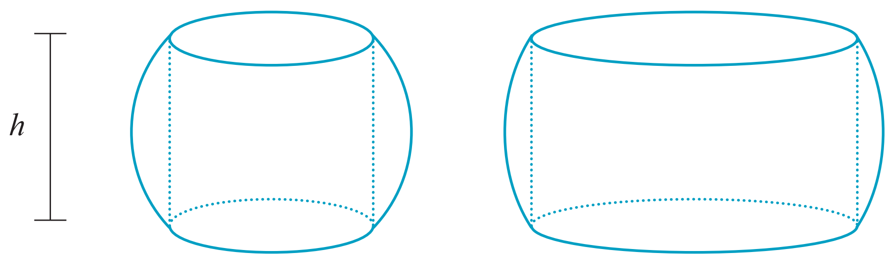


Figura 3.17: Figura para o exercício 3.

4) Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação ao redor do eixo y da região sob a curva $y = \text{sen}(x^2)$ e acima do eixo x, para $x \in [0, \sqrt{\pi}]$.

5) Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação ao redor do eixo y da região entre as curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = 2x$.

6) Utilize o método das cascas cilíndricas para obter o volume do sólido de revolução obtido pela rotação ao redor do eixo y da região entre o gráfico da função $y = e^{-x}$ e o eixo x, para $x \geq 0$.

7) Utilize o método das cascas cilíndricas para obter o volume do sólido de revolução obtido pela rotação ao redor do eixo y da região entre o gráfico da função $y = \text{sen}\, x$ e o eixo x, para $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

3.3.3 Áreas de Superfícies de Revolução

Para finalizarmos esta seção, vamos deduzir o cálculo da área de uma superfície de revolução. Como o leitor já deve ter notado pelo processo de obtenção de fórmulas para o cálculo de volumes de sólidos de revolução, sempre utilizamos aproximações com o auxílio de partições de um intervalo, posteriormente tomamos o limite e obtemos uma integral ao longo do segmento. Adotaremos o mesmo procedimento no cálculo da área de uma superfície de revolução. Considere a rotação ao redor do eixo x do gráfico de uma função diferenciável $y = f(x)$, definida para $x \in [a,b]$, satisfazendo $f(x) \geq 0$, e cuja derivada é uma função contínua neste intervalo. Tomando-se uma partição $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, podemos aproximar a área da superfície pela soma das áreas laterais dos troncos de cones determinados pela rotação dos segmentos unindo os pontos $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ e $\left(x_i, f(x_i)\right)$, conforme ilustrado na figura 3.18.

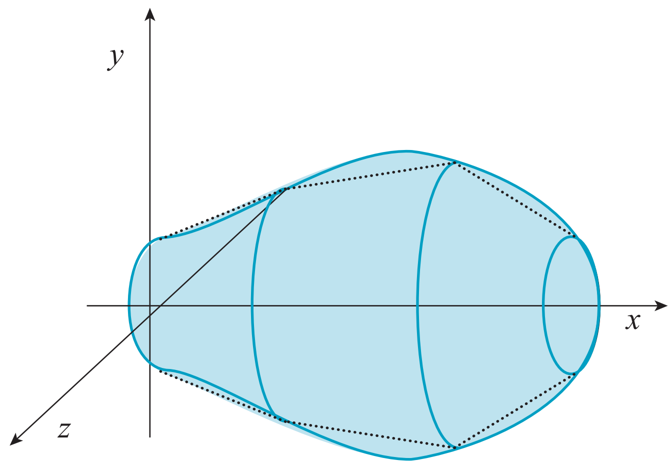


Figura 3.18: Uma superfície de revolução aproximada por troncos de cones determinados pela partição P do segmento $[a,b]$.

De início, temos uma tarefa de geometria elementar, a saber, calcular a área lateral de um tronco de cone de uma maneira apropriada. Primeiramente, vamos calcular a área lateral de um cone circular reto de raio da base igual a r e comprimento da geratriz igual a l. Se planificarmos o cone, cortando-o ao longo de uma geratriz, obtemos um setor circular de raio l e ângulo central $\theta = A\hat{O}B$ conforme ilustrado na figura 3.19.

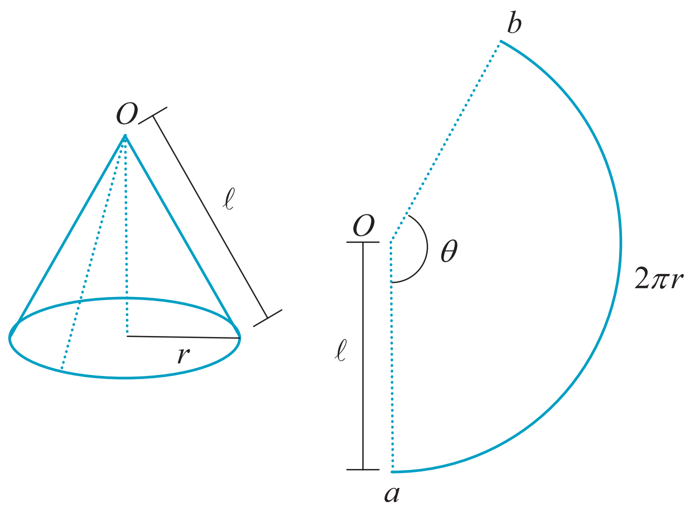


Figura 3.19: Planificação da superfície lateral de um cone circular reto.

Como sabemos que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é igual a $2\theta r$, mas também é igual a $l\theta$, temos então que $\theta = \dfrac{2\pi r}{l}$. A área do setor circular, que é a área lateral do cone, resulta em

$$A = \frac{1}{2}l^2\theta = \frac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi r l\,.$$

Agora, considere um tronco de cone de raio menor r_1, raio maior r_2 e geratriz l. Esse tronco pode ser visto como a diferença entre um cone de raio r_2 e geratriz $l + l_1$ e um cone menor de raio r_1 e geratriz l_1, conforme ilustrado na figura 3.20.

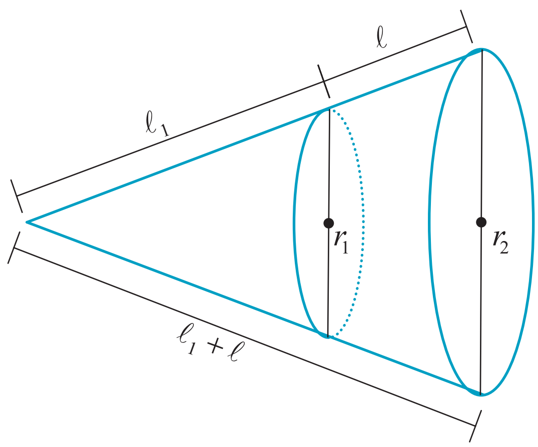


Figura 3.20: Tronco de um cone de raio menor r_1, raio maior r_2 e geratriz l.

A área da superfície lateral do tronco de cone se escreve como

$$A = \pi r_2(l + l_1) - \pi r_1 l_1 = \pi r_2 l + \pi(r_2 - r_1)l_1\,.$$

Podemos eliminar l_1 pela semelhança de triângulos na figura 3.20. O leitor pode verificar facilmente que

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l + l_1}{r_2} \Rightarrow (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l\,.$$

Substituindo na expressão da área, temos finalmente que a área de um tronco de cone é dada por

$$A = \pi(r_1 + r_2)l = 2\pi r l\,.$$

onde $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ é o raio médio.

Utilizando a expressão obtida, podemos escrever a soma das áreas laterais dos troncos de cones determinados pela partição P do intervalo $[a,b]$ e pelo gráfico da função $y = f(x)$. A geratriz l é dada pelo comprimento do segmento unindo os pontos $p_{i-1} = \left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ e $p_i = \left(x_i, f(x_i)\right)$, e o raio médio é dado por $r_i = \dfrac{1}{2}(y_{i-1} + y_i) = \dfrac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))$. Assim, a área total relativa à partição P será dada por

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{i=1}^{N} 2\pi \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{N} 2\pi \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\,(x_i - x_{i-1}) \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^{N} 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\,(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

onde o ponto ξ_i, cuja existência está garantida pelo teorema do valor médio, é tal que $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, e a aproximação da última expressão pode ser feita, pois a função f é contínua. Quando a partição é bem fina, os subintervalos ficam com comprimentos muito pequenos e os valores da função nas extremidades são muito próximos, logo o erro é pequeno ao considerarmos f constante em cada um dos subintervalos. Finalmente, tomando o limite $|P| \to 0$, que é o mesmo que o limite $N \to \infty$, obtemos a seguinte fórmula para a área

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \quad .$$

Novamente, essa fórmula pode ser tomada como a definição da área da superfície de revolução.

Definição 3.7. A área da superfície de revolução gerada pela rotação ao redor do eixo x do gráfico da função diferenciável $y = f(x)$ definida no intervalo $[a,b]$, cuja derivada é uma função contínua e com $f(x) \geq 0$, é igual a

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,. \tag{3.6}$$

Exercício resolvido 3.13. Determine a área da esfera de centro na origem e raio r.

Solução. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ é gerada pela rotação ao redor do eixo x do gráfico da função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, para $x \in [-r, r]$. A derivada de f pode ser facilmente calculada, resultando em

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,.$$

Assim, temos que

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}\,,$$

o que, finalmente, utilizando a fórmula (3.6), nos dá a expressão para a área da esfera:

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2\,.$$

Exercício resolvido 3.14. Determine a área da superfície do toro obtido pela rotação ao redor do eixo y da circunferência $(x - R)^2 + y^2 = r^2$, com $0 < r < R$.

Solução. Para resolvermos esse problema, temos que adaptar a expressão da área de superfícies de revolução para funções do tipo $x = f(y)$, e efetuarmos a integração na variável y. Na verdade, teremos dois gráficos, a saber, $f_1(y) = R + \sqrt{r^2 - y^2}$ e $f_2(y) = R - \sqrt{r^2 - y^2}$, com $y \in [-r, r]$. As derivadas são, respectivamente,

$$f_1'(y) = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}} \text{ e } f_2'(y) = \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}\,.$$

Assim, a área do toro será a soma de duas integrais, resultando em

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - y^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy + 2\pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - y^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = t$$

$$= 4\pi Rr \int_{-r}^{r} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = 4\pi Rr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - r^2\mathrm{sen}^2\theta}} = 4\pi Rr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 4\pi^2 Rr$$

Na penúltima igualdade, efetuamos a mudança de variáveis $y = r\sin\theta$. Note que a área do toro é o produto do comprimento da circunferência de raio R pelo comprimento da circunferência de raio r.

Exercício resolvido 3.15. Calcule a área da superfície de revolução obtida rotacionando-se ao redor do eixo x o gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$, para $x \in [1,4]$.

Solução. A derivada da função f é facilmente obtida, resultando em $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Assim, também obtemos $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}$, e finalmente a área da superfície é

$$A = 2\pi \int_{1}^{4} \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx = \pi \int_{1}^{4} \sqrt{4x+1} dx = \frac{\pi}{4} \int_{5}^{17} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{4}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}).$$

3.3.3 Exercícios

1) Na fórmula (3.6), consideramos somente o caso $f(x) \geq 0$, mostre que, quando f não é, necessariamente positiva, a fórmula correta para a área de superfícies de revolução fica

$$A = 2\pi \int_{a}^{b} |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

2) Encontre a área da superfície de revolução gerada pela rotação ao redor do eixo x do gráfico da função $f(x) = e^{-x}$ para $x \geq 0$.

3) Verifique que a trombeta de Gabriel, que é gerada pela rotação ao redor do eixo x do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$, muito embora o sólido de revolução associado tenha volume finito (como o leitor já calculou em um exercício anterior), possui área infinita.

4) Encontre a área da superfície obtida pela rotação ao redor do eixo y da curva $y = \sqrt[3]{x}$ para $y \in [1,2]$.

5) Encontre a área do elipsoide obtido pela rotação ao redor do eixo x da elipse $2x^2 + y^2 = 1$.

3.4 Centro de massa de regiões planas

Em Física, o estudo de sistemas complexos exige algumas simplificações de forma a tornar os problemas tratáveis do ponto de vista matemático. Para o estudo de corpos extensos ou para o estudo de um sistema de muitas partículas, utiliza-se o recurso do cálculo do centro de massa, ou centroide do sistema. O centroide é um ponto que tem a propriedade simplificadora na qual toda a massa do sistema pode ser vista como se estivesse concentrada naquele ponto. Assim, toda a física do sistema inicial pode ser estudada em duas partes, em geral mais simples: a primeira é o comportamento do centro de massa em relação a algum referencial pré-fixado, e a segunda é o comportamento das partículas do sistema em relação ao centro de massa.

Para o cálculo do centro de massa de um sistema com n partículas no plano, com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ e coordenadas, respectivamente, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, devemos fazer a média ponderada das coordenadas em relação às massas. Assim, as coordenadas do centro de massa serão $(\overline{x}, \overline{y})$, com

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + \cdots + m_n} \text{ e } \overline{y} = \frac{m_1 y_1 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

Nosso objetivo nesta seção é estabelecer fórmulas para o cálculo das coordenadas do centro de massa de certas regiões planas delimitadas por curvas contínuas. O centro de massa dessas regiões também será o centro de gravidade, ou de equilíbrio, dessas figuras, ou seja, se pendurarmos a figura plana exatamente por este ponto, a figura permanecerá em equilíbrio. Uma outra forma de ver o centro de massa é ainda dizer que toda reta que passe pelo centro de massa divide a figura em duas figuras de mesma massa. Tendo em vista as ferramentas matemáticas disponíveis ao leitor até o momento, vamos delimitar um pouco mais o problema: vamos considerar apenas regiões delimitadas por curvas que sejam gráficos de funções reais contínuas de uma variável $y = f(x)$ para x em algum intervalo $[a, b]$.

Outra restrição no tratamento do problema será no sentido de como vamos considerar as massas dos sistemas. O fato é que, ao passarmos de um sistema discreto de partículas, no qual as massas estão localizadas em pontos, para um sistema contínuo, como é o caso das regiões planas, precisamos dizer como a massa do sistema está distribuída. No caso de regiões planas isso é feito através da densidade superficial. Vamos tentar entender este conceito. O leitor deve estar acostumado com o conceito de "densidade" como a "razão entre a massa e o volume". Então, a densidade superficial deve ser a "razão entre a massa total e a área da região plana considerada". Essa será a simplificação que utilizaremos nesta seção. Para que fôssemos mais precisos, teríamos que considerar a densidade superficial como uma função $\rho = \rho(x, y)$ que pudesse variar ponto a ponto; isso descreveria, por exemplo, um material que não estivesse uniformemente distribuído sobre a região, mas o cálculo para regiões com densidade superficial variável só poderá ser feito com o auxílio de integrais duplas, que serão abordadas no Cálculo 3. Assim, todo o nosso tratamento será para regiões de densidade superficial constante $\rho = \rho(x, y) = \text{constante}$.

Considere, portanto, uma região compreendida entre os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para $x \in [a, b]$, com densidade superficial constante ρ. Por simplicidade, podemos considerar ambas as funções positivas, como nos indica a figura 3.21.

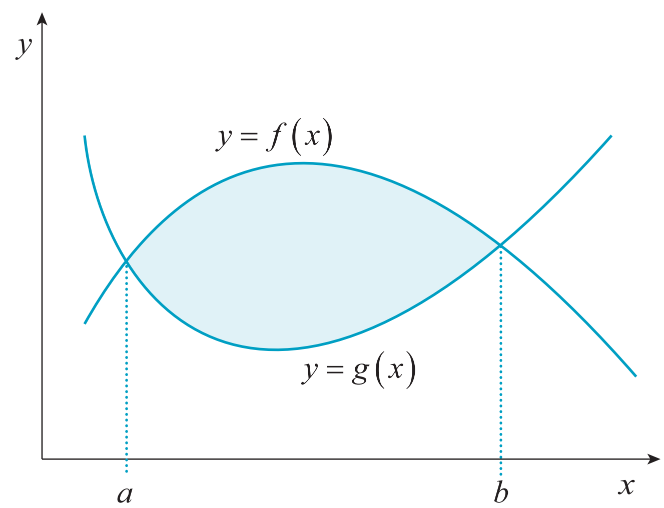


Figura 3.21: Região plana da qual serão calculadas as coordenadas do centro de massa, ou centroide.

Um primeiro cálculo importante é o cálculo da massa total da região, que é igual ao produto da densidade pela área da região. Assim, temos

$$M = \rho \cdot A = \rho \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx .$$

A razão de termos o valor absoluto na integral acima é simplesmente para lidar com casos nos quais os gráficos das duas funções se cruzem no intervalo de integração. A massa total sempre aparecerá no denominador das duas coordenadas do centro de massa da região. Na verdade, como veremos, o denominador será dado apenas pela área da região. Isso se deve ao fato de a densidade ser constante, o que nos permite cancelá-la na expressão do centro de massa.

Seja, agora, uma partição $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, do intervalo $[a, b]$, dividamos a região da figura 3.21 em retângulos e olhemos em detalhes o i-ésimo retângulo, cuja base é o segmento $[t_{i-1}, t_i]$ e a altura é o segmento de comprimento $|f(t_i) - g(t_i)|$, conforme a figura 3.22.

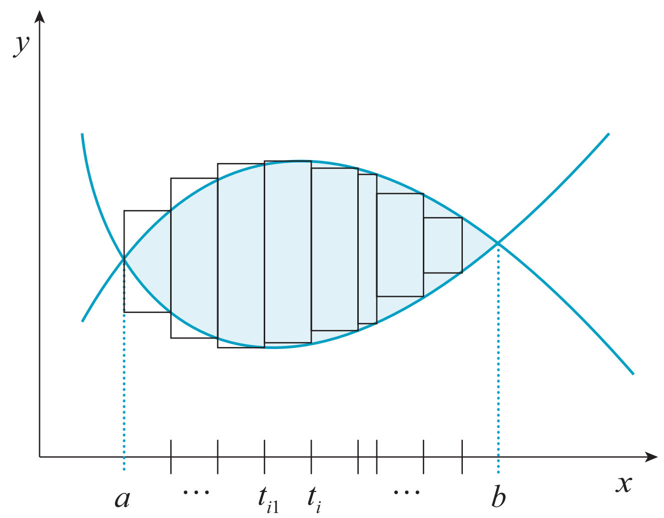


Figura 3.22: Partição para o cálculo do centro de massa.

Da geometria elementar, sabemos que o centroide de um retângulo se encontra no ponto de intersecção das duas diagonais, que coincide com o ponto cujas coordenadas são as coordenadas dos pontos médios dos lados. Assim, as coordenadas do centro de massa do i-ésimo retângulo são

$$\overline{x}_i = \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \quad \text{e} \quad \overline{y}_i = \left(\frac{f(t_i) + g(t_i)}{2} \right),$$

e a massa desse mesmo retângulo é dada por

$$m_i = \rho |f(t_i) - g(t_i)| (t_i - t_{i-1}) = \rho A_i \, ,$$

onde a_i é a área do i-ésimo retângulo da partição.

As coordenadas do centróide da região são dadas pelas médias aritméticas ponderadas das coordenadas dos centróides de cada retângulo, considerando-se que toda a massa dos mesmos esteja concentrada sobre seus centros de massa. Temos, então, que associadas a essa partição as coordenadas aproximadas do centro de massa serão

$$\overline{x_p} = \frac{1}{\sum_i m_i}\left\{\sum_{i=1}^{N} \rho\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)\left|f(t_i) - g(t_i)\right|(t_i - t_{i-1})\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sum_i A_i}\left\{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)\left|f(t_i) - g(t_i)\right|(t_i - t_{i-1})\right\}$$

$$\overline{y_p} = \frac{1}{\sum_i m_i}\left\{\sum_{i=1}^{N} \rho\left(\frac{f(t_i) + g(t_i)}{2}\right)\left|f(t_i) - g(t_i)\right|(t_i - t_{i-1})\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sum_i m_i}\left\{\sum_{i=1}^{N} \rho\frac{\left|(f(t_i))^2 - (g(t_i))^2\right|}{2}(t_i - t_{i-1})\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sum_i A_i}\left\{\sum_{i=1}^{N} \left|(f(t_i))^2 - (g(t_i))^2\right|(t_i - t_{i-1})\right\}$$

A razão de o denominador ficar somente dependente das áreas A_i, nas expressões do centro de massa, é que $m_i = \rho \cdot A_i$, assim a densidade se cancela na expressão. Finalmente, ao tomarmos o limite em que as partições ficam arbitrariamente finas, temos que as coordenadas do centro de massa ficam

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\left|f(x) - g(x)\right|dx \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b \left|(f(x))^2 - (g(x))^2\right|dx.$$

Essas fórmulas podem ser tomadas como a definição das coordenadas do centroide da região plana.

Definição 3.8: As coordenadas do centro de massa da região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para f e g funções positivas e $x \in [a,b]$, são iguais a

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\left|f(x) - g(x)\right|dx \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b \left|(f(x))^2 - (g(x))^2\right|dx. \qquad (3.7)$$

onde A é a área da região.

Exercício resolvido 3.16. Calcular as coordenadas do centro de massa da região delimitada pela semicircunferência $x^2 + y^2 = r^2$, com $y \geq 0$.

Solução: Precisamos primeiramente calcular a área da região Neste caso, o resultado pode ser obtido com matemática elementar, ou então o leitor pode utilizar o cálculo integral, resultando em $A = \dfrac{\pi r^2}{2}$. As funções em questão são $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$, com $x \in [-r, r]$. Assim, temos as coordenadas do centro de massa como

$$\overline{x} = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 0,$$

pois é a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico, e

$$\overline{y} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \frac{1}{\pi r^2} \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-r}^{r} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Exercício resolvido 3.17. Calcular as coordenadas do centro de massa da região sob a parábola $y = 1 - x^2$ com $y \geq 0$.

Solução: Aqui as funções são $f(x) = 1 - x^2$ e $g(x) = 0$, para $x \in [-1, 1]$. Calculemos, em primeiro lugar, a área da região:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Agora, calculando as coordenadas do centro de massa, temos

$$\overline{x} = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} x\left(1 - x^2\right) dx = 0,$$

pela mesma razão do exercício resolvido anterior, e

$$\overline{y} = \frac{3}{8} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = \frac{3}{8} \int_{-1}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx = \frac{3}{8} \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

Exercício resolvido 3.18. Encontre as coordenadas do centro de massa da região compreendida entre a reta $y = x$ e a parábola $y = x^2$.

Solução: Aqui as funções são $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, para. Note que neste intervalo $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Primeiramente, o cálculo da área da região resulta em

$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Finalmente, as coordenadas do centro de massa se calculam como

$$\bar{x} = 6\int_0^1 x\left(x - x^2\right)dx = 6\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2},$$

e

$$\bar{y} = 3\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)dx = 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

3.4.1 Exercícios

1) Encontre as coordenadas do centro de massa da região no primeiro quadrante, compreendida entre a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, e os eixos coordenados.

2) Calcule as coordenadas do centro de massa da região compreendida entre as curvas $y = \mathrm{sen} x$, $y = \cos x$ com $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

3) (Teorema de Pappus) Mostre que o volume de um sólido de revolução obtido pela rotação ao redor do eixo y de uma região plana (sem perda de generalidade, assuma que a figura se encontra totalmente no primeiro quadrante) pode ser obtida pelo produto da área da região pelo comprimento da circunferência, cujo raio á a coordenada $\bar{x}$ do centro de massa, isto é, $V = 2\pi\bar{x}A$. (Sugestão: utilize o método das cascas cilíndricas para o cálculo do volume e identifique no resultado a fórmula da coordenada $\bar{x}$ do centro de massa.)

4) Use o Teorema de Pappus para calcular o volume de uma esfera de raio r (sem perda de generalidade, assuma que está centrada na origem).

5) Verifique, utilizando as fórmulas para as coordenadas do centro de massa, que o centro de massa de um triângulo isósceles está situado sobre a altura relativa à base a uma distância da base de um terço da altura total. (Sugestão: sem perda de generalidade, pode-se colocar a base do triângulo sobre o eixo x e o terceiro vértice do triângulo sobre o eixo y.)

3.5 Curvas e áreas em coordenadas polares

Vamos estudar o cálculo de áreas compreendidas por curvas descritas em coordenadas polares. Como o leitor já deve ter estudado em geometria analítica, o sistema de coordenadas polares é uma outra maneira de descrever os pontos do plano como um par ordenado de números reais. A primeira coordenada de um ponto neste sistema é a distância deste ponto a um ponto fixo no plano, o qual denominamos **polo.** *A segunda coordenada do ponto, é a medida do ângulo formado por duas semi-retas: a semi-reta que une o polo ao ponto e o eixo polar, que é uma semi-reta fixa partindo do polo.* A figura 3.23 abaixo nos ilustra os elementos da representação em coordenadas polares.

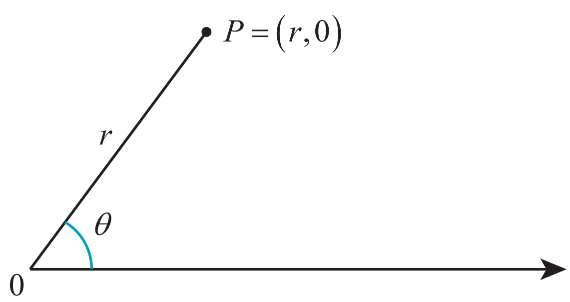


Figura 3.23: Representação de um ponto do plano em coordenadas polares. Na figura, a letra o representa o polo e a semirreta horizontal representa o eixo polar. As coordenadas polares são dadas pelo par ordenado (r,θ).

As coordenadas polares de um ponto P no plano, portanto, são (r,θ). A origem não possui uma representação unívoca em termos de coordenadas polares, uma vez que qualquer ângulo poderia representar a origem. Dissemos que a coordenada r representa uma distância, portanto deveria ser um número real positivo, mas em muitas situações será útil e necessário introduzirmos valores negativos para a coordenada r, que definiremos como $(-r,\theta)=(r,\theta+\pi)$, com $r>0$, conforme nos ilustra a figura 3.24 abaixo:

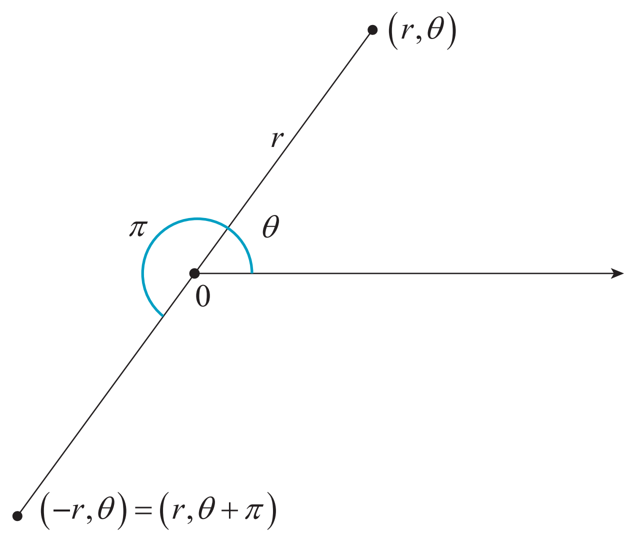


Figura 3.24: Coordenadas polares com raio negativo.

Podemos comparar as coordenadas polares de um ponto no plano com suas coordenadas cartesianas. Por convenção, costuma-se fazer o polo coincidir com a origem do sistema de coordenadas cartesianas e o eixo polar coincidir com o eixo x positivo. As expressões mais importantes que vão nos permitir trabalhar com coordenadas polares são as fórmulas de mudanças de coordenadas, de polares para cartesianas e de cartesianas para polares. A figura 3.25 nos ilustra como obtermos essas transformações.

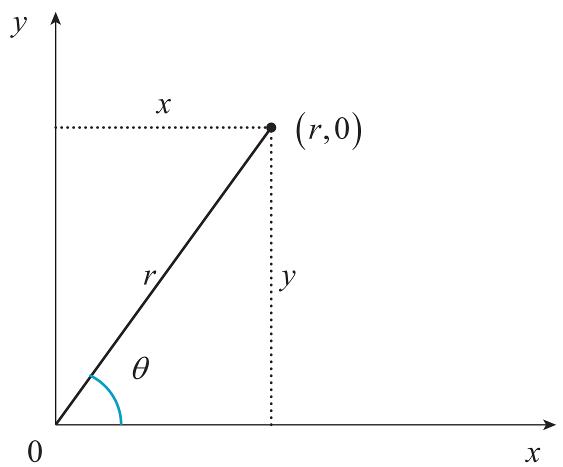


Figura 3.25: Transformações de coordenadas.

Na figura, vemos facilmente que $\cos\theta = \frac{x}{r}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$. Assim, se quisermos expressar as coordenadas cartesianas em termos das coordenadas polares, teremos

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta . \tag{3.8}$$

Similarmente, se quisermos expressar as coordenadas polares em termos das cartesianas, teremos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} . \tag{3.9}$$

O leitor é convidado a verificar que a expressão de θ em termos do arco tangente é válida nos quatro quadrantes, inclusive sendo consistente com os limites laterais quando x tende a zero pela esquerda ou pela direita. Assim, para se determinar o ângulo θ, é necessário levar em conta o quadrante onde está o ponto (x, y).

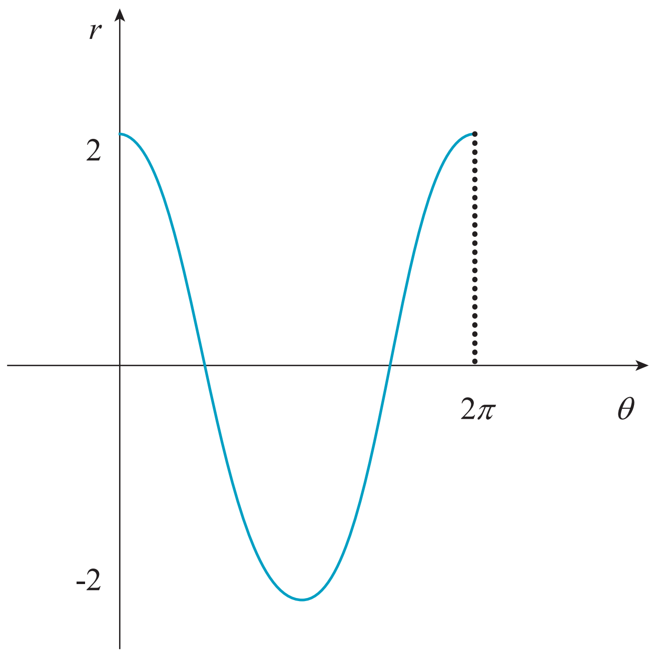
A utilidade das coordenadas polares está na representação de lugares geométricos cujas equações em coordenadas cartesianas podem ser bem complicadas. Um exemplo trivial são as circunferências com centro na origem e de raio R, cuja equação cartesiana conhecemos muito bem, que é $x^2 + y^2 = R^2$, inserindo as fórmulas (3.8) obtemos a igualdade $r = R$. Pode haver casos em que a equação cartesiana seja efetivamente mais simples, como é o caso das retas, com equações $ax + by + c = 0$, cuja substituição por coordenadas polares transforma em uma igualdade do tipo $ar\cos\theta + br\operatorname{sen}\theta + c = 0$, notoriamente mais complicada. Porém, no caso em que tivermos $c = 0$, a reta pode ser escrita como $y = -\frac{a}{b}x$, se $b \neq 0$, ou, $x = 0$ se $b = 0$, no primeiro caso, a equação polar da reta fica $\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{a}{b}\right)$, e no segundo caso, quando $x = 0$, temos a equação $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Vamos apresentar mais alguns exemplos de curvas em coordenadas polares:

Exemplo 3.1. Considere a curva em coordenadas polares dada por $r = 2\operatorname{sen}\theta$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por r, temos

$r^2 = 2r\cos\theta$, que pode ser rapidamente convertido para coordenadas cartesianas como $x^2 + y^2 = 2x$, ou ainda $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Ou seja, trata-se de uma circunferência de centro $(1,0)$ e raio 1.

Antes de passarmos ao próximo exemplo, vamos fazer alguns comentários sobre o método de esboçarmos curvas em coordenadas polares. O leitor vai perceber que a maioria das curvas interessantes poderá ser escrita na forma $r = f(\theta)$. Então, a primeira coisa a fazer é esboçar o gráfico da função f em um plano auxiliar, cujas coordenadas cartesianas são (θ, r) (isso mesmo: a coordenada θ dada pela posição em relação ao eixo horizontal e a coordenada r em relação ao eixo vertical). Neste exemplo, a função seria $f(\theta) = 2\cos\theta$, que é o gráfico da função co-seno a menos de uma mudança de escala na direção vertical. Com este gráfico em mãos, podemos esboçar a curva real, no plano (x, y), utilizando as fórmulas (3.8). Vejamos: o gráfico da função $f(\theta) = 2\cos\theta$ no plano (θ, r) está representado na figura 3.26.



É claro que você poderá também utilizar uma tabela, com valores específicos de θ e r, para esboçar alguns pontos da curva.

Figura 3.26: Gráfico da função $f(\theta) = 2\cos\theta$ no plano com coordenadas cartesianas (θ, r).

A curva pode ser esboçada com o auxílio deste gráfico, lembrando-se que, se um ponto possui a coordenada $r < 0$, significa que devemos efetuar a adição de θ na parte angular das coordenadas do ponto e trabalharmos com a parte radial igual a $-r>0$. Temos, portanto, a curva $r=2\cos\theta$ no plano cartesiano (x,y), ilustrada na figura 3.27. Nesta figura, marcamos alguns pontos, cujas coordenadas polares são, respectivamente, $A=\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$, $B=\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $C=\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$, $0=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $D=\left(-1,\frac{2\pi}{3}\right)$, $E=\left(-\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$, $F=\left(-\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right)$. A representação desta curva no plano polar é um círculo de raio 1 centrado no ponto de coordenadas cartesianas $(1,0)$, conforme a figura 3.27 a seguir.

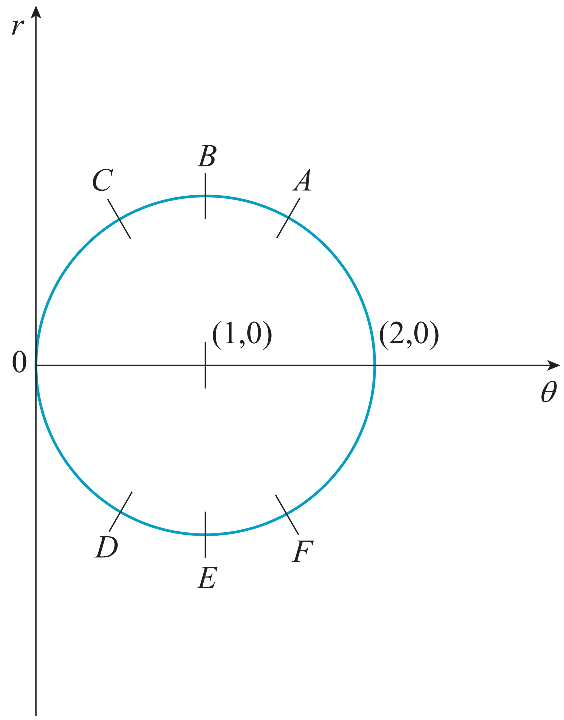


Figura 3.27: Circunferência de equação $r=2\text{sen}\theta$.

Exemplo 3.2. Considere a curva dada em coordenadas polares dada por $r=1+\cos\theta$. Note que a equação em coordenadas cartesianas pode realmente ficar bem complexa neste caso. De fato, multiplicando a igualdade por r, temos $r^2=r+r\cos\theta$, ou seja, $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x$, ou ainda $\left(x(x-1)+y^2\right)^2=x^2+y^2$. Para fazermos o esboço desta curva, novamente precisamos recorrer ao gráfico da função $f(\theta)=1+\cos\theta$ no plano cartesiano (θ,r), conforme nos ilustra a figura 3.28.

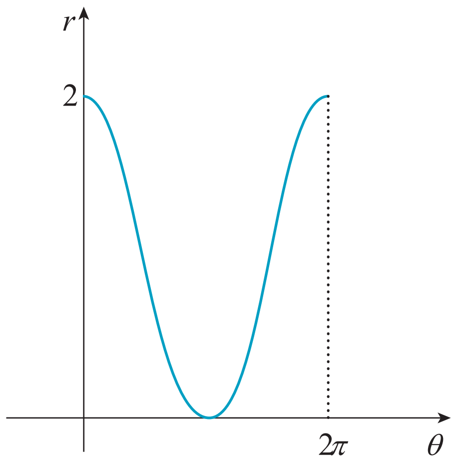


Figura 3.28: Gráfico da função $f(\theta) = 1 + \cos\theta$ no plano com coordenadas cartesianas (θ, r).

Este nome deve-se ao fato de o formato da curva lembrar a forma de um coração.

Com o auxílio deste gráfico, podemos desenhar a curva, que é denominada Cardioide, como nos mostra a figura 3.29.

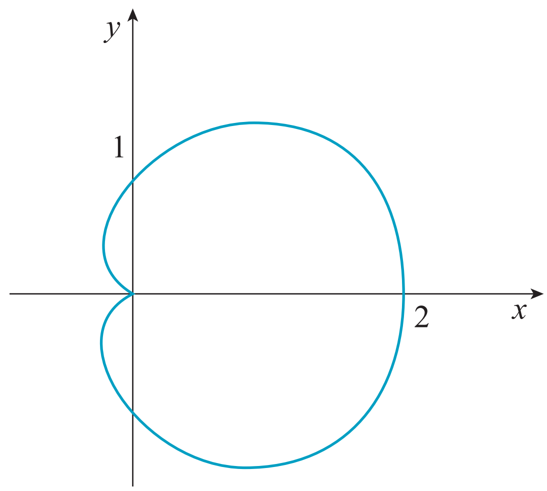


Figura 3.29: Cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

Em 1694, o matemático suíço Jacob Bernoulli (1654-1705) publicou na revista *Acta Eruditorum* um artigo introduzindo uma nova curva que levou originalmente o nome de Lemniscus. Na verdade, a Lemniscata também pode ser vista como um elemento de uma família infinita de curvas chamadas Ovais de Cassini, introduzidas pelo matemático italiano Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) no ano de 1680.

Exemplo 3.3. A Lemniscata de Bernoulli é o lugar geométrico dos pontos cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é uma constante. Para fixarmos um exemplo, considere os pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ (em coordenadas cartesianas) e todos os pontos do plano cujo produto das distâncias a estes dois pontos dados seja igual a a^2. Assim, teremos

$$\left((x-a)^2 + y^2\right)\left((x+a)^2 + y^2\right) = a^4,$$

que após algumas manipulações algébricas resulta na equação cartesiana

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right).$$

A equação acima pode ser colocada em coordenadas polares resultando em

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta .$$

Desafiamos o leitor a obter a expressão em coordenadas polares a partir da equação da curva em coordenadas cartesianas. O esboço da Lemniscata está representado na figura 3.30 abaixo:

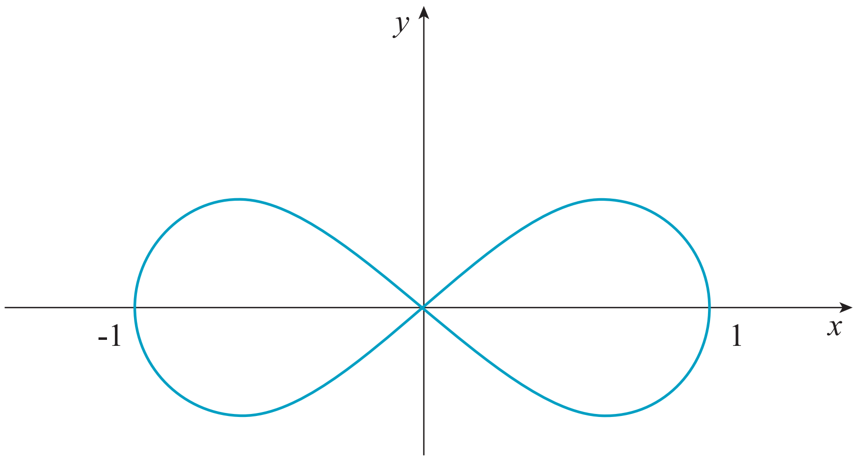


Figura 3.30: Lemniscata de Bernoulli.

3.5.1 Exercícios

1) Esboce a curva $r = 2\text{sen}\theta$, conhecida como rosácea de quatro pétalas. Encontre sua equação em coordenadas cartesianas.

2) Encontre as equações cartesianas das seguintes curvas:

a) $r = 2\text{sen}\theta$.

b) $r = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$.

c) $r = \dfrac{5}{3-4\text{sen}\theta}$.

d) $r^2 = \theta$.

3) Determine as equações polares das seguintes curvas:

a) $2xy = 1$.

b) $x^2 = 4y$.

c) $x^2 - y^2 = 1$.

d) $y = x + 1$.

Nicomedes foi um matemático grego do século III a.C. A Conchoide é uma curva especial construída para auxiliar na solução de dois problemas clássicos de construções geométricas, a saber, a trissecção de ângulos e a duplicação do cubo.

4) Esboce a curva $r = 4 + 2\sec\theta$, conhecida como Conchoide de Nicomedes. (Sugestão: verifique que a reta vertical $x = 2$ é uma assíntota da curva, isto é, verifique que $\lim_{r\to\pm\infty} x = 2$.)

Diocles foi um matemático grego que viveu aproximadamente no período de 240 a.C a 180 a.C. Diocles também tratou do problema clássico de duplicação do cubo e propôs uma solução através da curva especial denominada Cissoide, que tem esse nome em alusão ao nome grego da folha da planta hera.

5) Esboce a curva $r = \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{tg}\theta$, conhecida como Cissoide de Diocles. (Sugestão: verifique que a reta $x = 1$ é assíntota vertical dessa curva. Verifique também que a curva fica restrita à região do plano definida por $0 \le x < 1$.)

Finalmente, como aplicação de integral, vamos calcular a área da região compreendida por uma curva em coordenadas polares. Considere uma curva dada pela equação $r = f(\theta)$. O objetivo é calcular a área da região radial delimitada pela curva entre as retas $\theta = a$ e $\theta = b$, isto é, as semirretas a partir da origem com inclinações dadas pelos ângulos $\theta = a$ e $\theta = b$. Suponha, sem perda de generalidade, que $b > a$ conforme ilustrado na figura 3.31 abaixo:

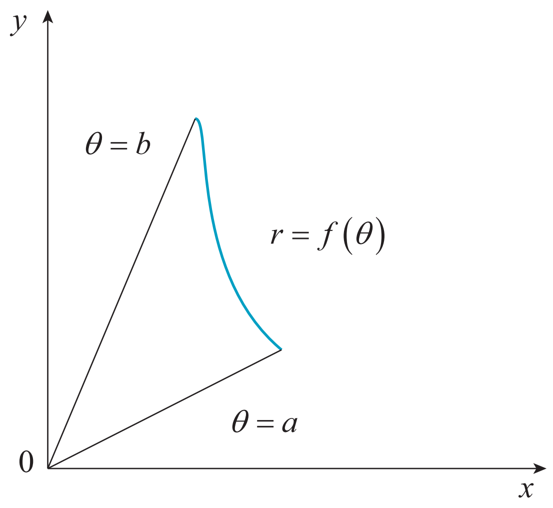


Figura 3.31: Área em coordenadas polares.

Novamente, consideremos uma partição $P: a=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_N=b$ do intervalo $[a,b]$. Entre os ângulos θ_{i-1} e θ_i, considere o ângulo θ_i^*, tal que a área do setor delimitado pela curva compreendido entre θ_{i-1} e θ_i tenha a mesma área que o setor circular de raio $f(\theta_i^*)$ e ângulo central. Assim, a área entre θ_{i-1} e θ_i será dada por $A_i=\frac{1}{2}(f(\theta_i^*))^2(\theta_i-\theta_{i-1})$.Assim, uma aproximação para a área total associada dada por essa partição será

$$A_P=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}(f(\theta_i^*))^2(\theta_i-\theta_{i-1}).$$

Tomando o limite, quando as partições se tornam arbitrariamente finas, obtemos a integral

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2\,d\theta. \qquad (3.10)$$

Exercício resolvido 3.19. Encontre a área da região delimitada por um laço da rosácea de quatro pétalas $r=\cos 2\theta$.

Solução: Aqui, temos $f(\theta)=\cos 2\theta$. Agora, note que a equação nos fornece que $r\left(-\frac{\pi}{4}\right)=r\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, enquanto $r(\theta)>0$ para $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$, logo temos um laço. A área da região delimitada por esse laço será, então,

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\operatorname{sen}4\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

Exercício resolvido 3.20. Determine a área da região interior ao círculo delimitado pela circunferência $r=3\operatorname{sen}\theta$ e exterior ao cardioide $r=1+\operatorname{sen}\theta$.

Solução: Primeiramente, precisamos encontrar os pontos de intersecção das duas curvas, isso é feito igualando-se as duas expressões: $3\operatorname{sen}\theta=1+\operatorname{sen}\theta$, ou seja, $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}$, o que nos dá $\theta=\frac{\pi}{2}$ e $\theta=\frac{5\pi}{6}$.

Assim, a área da região será

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} ((3\text{sen}\theta)^2 - (1+\text{sen}\theta)^2)\,d\theta\,.$$

Podemos ainda explorar a simetria das curvas em relação à reta vertical $x = 0$, ou seja, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, resultando em

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8\text{sen}^2\theta - 1 - 2\text{sen}\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 4\cos 2\theta - 2\text{sen}\theta)\,d\theta = \pi\,.$$

3.5.2 Exercícios

1) Encontre a área da região delimitada por um laço da curva $r = 2\cos 4\theta$.

2) Encontre a área da região dentro da curva $r = 1 - \cos\theta$ e fora da curva $r = \dfrac{3}{2}$.

3) Encontre a área da Lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$.

4) Encontre a área da região interna, simultaneamente, às curvas $r = \text{sen}\,\theta$ e $r = \cos\theta$.

5) Determine a área delimitada pelo eixo polar e pela espiral de Arquimedes, $r = \theta$, para $0 \le \theta \le 2\pi$.

Respostas dos exercícios

3.1.1 Exercícios

1)

a) $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^3}{3} + K$.

b) $\dfrac{y^2}{2} = x - \arctan x + K$.

c) $\dfrac{1}{y} = -\cos x + K$.

d) $\arctan y = x + \dfrac{x^2}{2} + K$.

e) $\tan 2y = x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + K$.

f) $\operatorname{arcsen} y = \ln x + K$.

g) $\dfrac{y^2}{2} + e^y = \dfrac{x^2}{2} + e^{-x} + K$.

h) $y = \dfrac{a}{c}x + \dfrac{1}{c}\left(b - \dfrac{ad}{c}\right)\ln|cx + d| + K$.

i) $\dfrac{c}{a}y + \dfrac{1}{a}\left(d - \dfrac{cb}{a}\right)\ln|ay + b| = x + K$.

2)

a) $\dfrac{1}{3}\sin 3y = \dfrac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \cos^2 x$.

b) $\dfrac{y^2}{2} = (x+1)e^{-x} - \dfrac{1}{2}$.

c) $\dfrac{y^2}{2} = \ln(1 + x^2) - 1$.

d) $y + y^2 = x^2 - 4$.

3) Divida o segundo membro no numerador e denominador por x e note que $y' = xu' + u$, a equação resultante fica $xu' = \dfrac{u^2 - 4}{1 - u}$.

3.2.1 Exercícios

1)

a) $L = \dfrac{17}{12}$.

b) $L = 2 + \dfrac{1}{4}\ln 2$.

c) $L = \ln(1 + \sqrt{2})$.

d) $L = \dfrac{e - e^{-1}}{2}$.

e) $L = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right)$.

3.3.1 Exercícios

1) $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$.

2) $V = 2\pi^2 ab^2$.

3) $V = \frac{8\pi}{15}$.

4) $V = \frac{8\pi}{15}$.

5) $V = \pi$.

6) $V = \frac{\pi^2}{2}$.

7) $A = \frac{\pi}{4}$.

3.3.2 Exercícios

3) Os dois sólidos têm o mesmo volume.

4) $V = 2\pi$.

5) $V = \frac{\pi}{240}$.

6) $V = 2\pi$.

7) $V = 2\pi^2$.

3.3.3 Exercícios

2) $A = \frac{\pi}{4}$.

4) $A = \frac{\pi}{27}(145\sqrt{45} - 10\sqrt{10})$.

5) $A = \sqrt{2}\pi\left(\frac{\sqrt{5}}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$.

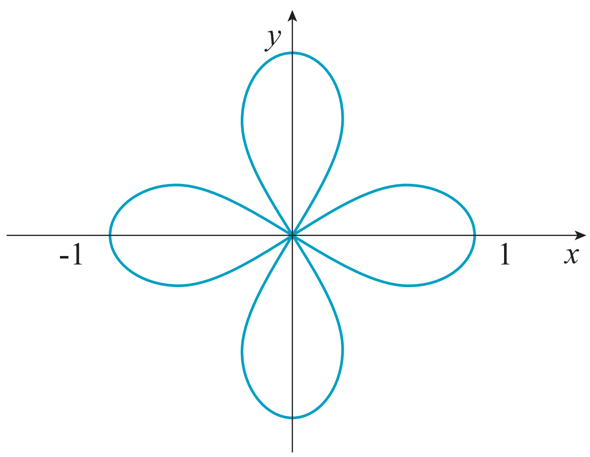
3.4.1 Exercícios

1) $\left(\dfrac{4r}{3\pi}, \dfrac{4r}{3\pi}\right)$.

2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\dfrac{\pi}{4}\sqrt{2}+1\right), \dfrac{1}{4(\sqrt{2}-1)}\right)$.

3.5.1 Exercícios

1)



2) a) $x^1 + (y-1)^2 = 1$ .b) $y^2 = 1 + 2x$ .c) $x^2 + y^2 = \arctan\dfrac{y}{x}$.

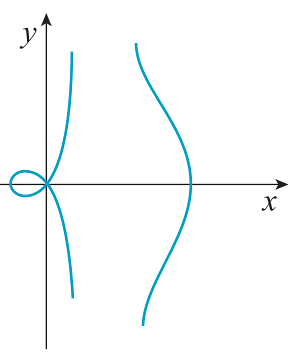
3) a) $r^2 \text{sen} 2\theta = 1$.

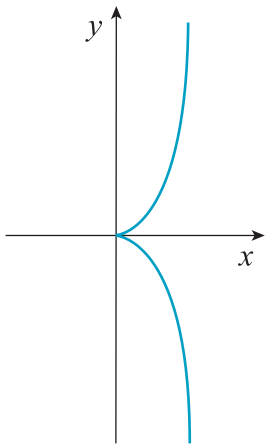
b) $r\cos^2\theta = 4\text{sen}\theta$.

c) $r^2\cos 2\theta = 1$.

d) $r(\text{sen}\theta - \cos\theta) = 1$.

4)



5) 

3.5.2 Exercícios

1) $A = \dfrac{\pi}{4}$.

2) $A = \dfrac{9\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi}{4}$.

3) $A = 2\sqrt{2}$.

4) $A = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$.

5) $A = \dfrac{4\pi^3}{3}$.

Capítulo 4

Séries Numéricas

Capítulo 4

Séries Numéricas

Neste e no próximo capítulo estudaremos séries, denominação das 'somas de infinitos termos'. Começaremos com séries numéricas que formam a base para expressar muitas funções, como 'polinômios infinitos', denominados de séries de potências, que desempenham um papel fundamental no entendimento do Cálculo.

4.1 Introdução

O primeiro significado de *infinito* que encontramos no dicionário é 'não finito' e, entre outras definições, encontramos "ter um tamanho ou valor absoluto que é maior que qualquer número natural, grandeza cujo módulo é arbitrariamente grande". Podemos pensar que o homem "encontrou" o infinito sob a forma de distâncias grandes demais para serem medidas e números grandes demais para serem contados, e a ideia de "somar" infinitos números reais é bem antiga. Pelo menos quatro dos paradoxos de Zenão de Eleia (490-425 a.C.) sobre o movimento envolvem a "soma" de infinitos termos positivos a um número finito. Arquimedes (287-212 a.C.), para suas demonstrações rigorosas das fórmulas de certas áreas e volumes, encontrou várias "somas" que contêm infinitos termos. Ele também utilizou o método de exaustão (argumento sequencial) de Zenão e tentou explicar como somas infinitas poderiam ter resultados finitos, inventando argumentos muito engenhosos que incorporam alguns detalhes técnicos do que hoje chamamos de *limite*. Durante séculos as séries intrigaram matemáticos e muitos contribuíram para seu desenvolvimento. Não possuindo o conceito de limite, propriamente dito, para alcançar resultados esses matemáticos inventavam técnicas, desenvolviam esquemas algébricos complicados ou apelavam para intuição geométrica ou filosófica, em algum ponto crítico. Nicole d'Oresme (1325-1382) realizou estudos usando aproximação sequencial e inventou um argumento para mostrar a divergência da série harmônica. Simon Stevin (1548-1620) somou séries e analisou sequências, mas parou antes de definir ou explicar limites e convergência.

Na metade final do século XVII teve início a investigação de sequências e séries de funções com Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1647-1716), que desenvolveram representações de séries para algumas funções. Leibniz somou e analisou várias sequências geométricas, tentou explicar o conceito de *limite* e descobriu muitos resultados, hoje estudados em cálculo.

O cálculo obteve vários sucessos no século XVIII e se desenvolveu rapidamente, mas pouca atenção foi dada aos seus fundamentos mais teóricos, muito menos às ideias de limite e convergência de sequências e séries. No seu trabalho principal, Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) considerou a *derivada* como o limite do quociente de diferenças e, também, desenvolveu o teste da razão para determinar a convergência de muitas séries. Através do trabalho de d'Alembert a natureza da pesquisa sobre séries estava mudando de cálculos práticos para uma fundamentação mais teórica. No final do século XVIII, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) fez um esforço heroico para tornar o cálculo prioritariamente algébrico, eliminando limites inteiramente. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) produziu o primeiro tratamento estritamente rigoroso da convergência de sequências e séries, embora não tenha usado a terminologia de limites. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi o primeiro a definir por completo as ideias de convergência absoluta de séries infinitas. Ele começou o seu curso de cálculo para estudantes de engenharia na *École Polythechnique*, em Paris, do nada. Ele escreveu as suas próprias notas de aula, essencialmente seus próprios livros, começando com uma definição moderna de *limite* e usando o princípio de limite como base para introduções precisas à continuidade e convergência, a derivada, a integral, e o resto do cálculo.

Como surgem as séries

O primeiro exemplo de como aparecem séries numéricas pode ser dado pelo seguinte paradoxo de Zenão: para um corpo percorrer uma certa distância, ele tem primeiramente de percorrer a primeira metade, antes dessa metade a metade dessa metade, e assim por diante, isso pode ser explicado pela fórmula

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1\ .$$

Na matemática elementar aprendemos que $\frac{1}{3}=0,3333\ldots$, um decimal infinito que pode ser escrito como a série numérica

$$0,333\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots+\frac{3}{10^n}+\ldots=\frac{1}{3}.$$

De modo geral podemos escrever

$$0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\ldots,\ a_i\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9\}.$$

Antes da definição de série é importante ficar claro que *não* podemos interpretar expressões da forma $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ literalmente como uma "soma" de infinitos números reais, ou seja, *não* se trata simplesmente um exemplo envolvendo a adição. Lembremos que a adição é uma operação binária, o que significa que sempre operamos dois números de cada vez. O resultado da operação é um número a que chamamos de *soma*. Quando operamos um número *finito* de números, podemos agrupar os números e, então, adicioná-los dois de cada vez. As propriedades associativa e comutativa garantem que obtenhamos o mesmo resultado, não importando como agrupemos os números e a soma é um *número real*. Entretanto, se a "soma" de infinitos números reais algumas vezes resulta em um número, como no primeiro exemplo acima, já outras vezes teremos expressões como

$$1+2+3+4+\ldots=\infty$$

(Lembre-se que infinito *não* é um número!), e ainda pode ocorrer que seja impossível definir um "resultado":

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

(É zero? É um? Ou não é zero nem um?)

Então, primeiro é preciso definir o que significa a *soma*. Também é preciso provar que valem as operações usuais quando envolvem infinitos termos. Lembramos que, sempre que utilizarmos propriedades relativas às operações com números reais ou às relações de ordem, com as quais estamos habituados, devemos estar bem atentos ao fato que elas são válidas apenas em processos envolvendo um número finito de parcelas.

4.2 Definições

Comecemos analisando as seguintes "somas" de infinitos termos.

A) Para dar um significado à igualdade $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$ é preciso dar um sentido para o primeiro membro da igualdade. Como não podemos somar todas as parcelas do primeiro membro da igualdade de uma vez, comecemos somando os dois primeiros números e, a cada passo, adicionaremos o próximo termo ao resultado obtido. Denotemos por S_i a soma das primeiras i parcelas da sequência: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$, sendo $i \in \mathbb{N}$:

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ ;$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\ ;$$

$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{16}=\frac{7}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}.$$

Observe que os números envolvidos nas somas possuem uma característica: o numerador é sempre 1 e no denominador temos 2^n. Assim,

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

As somas, encontradas acima, também têm uma característica:

$$S_n=\frac{2^n-1}{2^n} \text{ ou } S_n=1-\frac{1}{2^n}.$$

Assim,

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}\ .$$

Antes de prosseguirmos, vamos provar que a fórmula encontrada para S_n vale para qualquer número natural n, usando o Princípio de Indução Matemática.

Indução matemática é um método de prova matemático, usado para demonstrar a verdade de infinitas, porém enumeráveis proposições. A forma mais simples e mais comum de indução matemática para provar que uma propriedade vale para todos os números naturais n e consiste de dois passos:
1) A base: mostrar que o enunciado vale para n = 1.
2) O passo indutivo: mostrar que, se o enunciado vale para n = k, então, o mesmo enunciado valerá para n = k + 1.

(Fundamentos de Matemática I). Para a prova, apesar de não ser uma soma, propriamente dita, denotamos o primeiro termo da "soma" por S_1; $S_1=\frac{1}{2}$.

a) Observe que $\frac{1}{2}$ é o valor de S_n para $n=1$, o que prova que a fórmula vale para $n=1$ e assim temos o primeiro passo da prova.

b) Supondo que o mesmo vale para $n=k$,

$S_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$, provaremos para $n=k+1$;

$$S_{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2^{k+1}}$$

Portanto, a fórmula vale para todos os números naturais.

Outra maneira de chegarmos à mesma expressão para S_n é observar que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $r=\frac{1}{2}$ e lembrarmos que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, da qual o primeiro termo é a e a razão é r, é

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

Obtivemos, assim, uma sequência numérica $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, onde $S_n=1-\frac{1}{2^n}$.

Como já estudamos sequência e sua convergência, sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, o que implica que $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$. Portanto, a igualdade $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$ pode ser escrita como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=1$.

Lembrando do conceito de *limite*, a igualdade significa que, a cada vez que adicionamos uma parcela na soma obtida (o que se faz aumentando o valor de n), mais a "soma" aproxima-se de 1. Assim, ao primeiro membro da igualdade não significa realmente que "adicionamos" infinitos termos um a um (e nem todos. Por quê?). E, é claro, substituindo o valor de n na fórmula de S_n, que a soma de qualquer número finito de termos não é 1.

Uma "prova geométrica" da igualdade: considere um quadrado unitário e "divida-o infinitamente ao meio", conforme a Figura 4.1 a seguir. A soma das áreas dos retângulos "é igual a um".

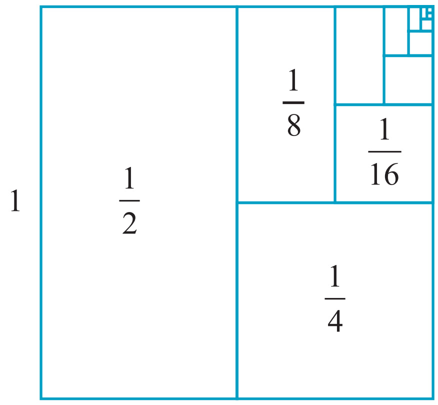


Figura 4.1

B) Outro exemplo é a "soma" de todos os números naturais, que você, já deve ter visto: $1+2+3+4+\ldots+n+\ldots$.

A soma dos n primeiros números naturais é calculada pela seguinte fórmula:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(1+n)}{2}.$$

(Você já viu a prova dessa fórmula em *Fundamentos da Matemática I*, Capítulo 5, mas, se desejar, é fácil provar usando novamente o Princípio de Indução Matemática).

Note que $S_n=\dfrac{n(1+n)}{2}$ é muito grande quando n é grande e, quanto maior n, maior é a soma.

Nos exemplos **A)** e **B)** apresentados até aqui é possível notarmos que a base teórica de séries é a convergência de sequências e a "soma" de infinitos termos é definida usando a noção de limite.

Definição 4.1. Seja (a_n) uma sequência de números reais. Uma expressão da forma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ é denominada **série numérica** ou simplesmente **série**. O número a_n é denominado o *enésimo termo* ou *termo geral da série*.

A partir da sequência (a_n) formamos uma nova sequência (S_n), cujos elementos são as seguintes somas:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
&S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Essas somas são denominadas *somas parciais* ou *reduzidas da série* e são números reais porque, para cada n natural, S_n é soma de um número finito de números reais.

Se existir o limite $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, dizemos que a série é convergente e o limite S é definido como a soma da série. Nesse caso, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$. Caso contrário, ou seja, se o limite não existir ou tender a infinito, dizemos que a série é divergente.

Nota: Rigorosamente, uma série infinita $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ é apenas um sinal para indicar que você deve calcular a sequência $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n \ldots$ das somas parciais e verificar se ela é convergente ou divergente.

Notação: Em qualquer caso, convergente ou divergente, usamos a notação sigma para série: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.
Assim, a soma parcial $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Outras notações: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ etc., ou simplesmente $\sum a_n$, quando estiver claro que $n = 1, 2, 3, \ldots$

Às vezes é conveniente considerarmos séries que começam em a_0, em vez de a_1 e, nesse caso, escrevemos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Exemplo 4.1. Seja a série $\frac{1}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{3}{4.5}+\ldots$. Para escrever a série usando a notação *sigma* precisamos da expressão do termo geral. Observe que

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{(1+1)(1+2)}$$
$$\frac{2}{3.4}=\frac{2}{(2+1)(2+2)}$$
$$\frac{3}{4.5}=\frac{3}{(3+1)(3+2)}.$$

Concluímos que $a_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)}$, e escrevemos

$$\frac{1}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{3}{4.5}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}.$$

Exemplo 4.2. No processo inverso, escrevemos os primeiros termos de uma série:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-\frac{1}{2})^n+\ldots .$$

(Note que essa série começa com a_0).

Exemplo 4.3. A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e sua soma é fácil de calcular. É conhecida como **Série Telescópica**.

Antes de calcularmos as somas parciais, note que o termo geral da série $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ pode ser escrito como $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Assim,

$$S_1=a_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$$
$$S_2=a_1+a_2=s_1+a_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3=s_2+a_3=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4}$$

e a soma parcial S_n é

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Note que a expressão encontrada vale para todo n. (Por quê?)

Como o $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, temos, então, que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Observação 4.1. Exemplos de séries convergentes e de que a soma é fácil de calcularmos, como a série do Exemplo 4.3 anterior, não são frequentes. Nos exemplos vistos até agora, temos uma expressão para a soma parcial S_n, o que nem sempre acontece.

Exemplo 4.4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ é divergente.

Teorema estudado em Cálculo I: Se $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, então toda subsequência de (x_n) converge para o limite l.

De fato, as somas parciais S_n de ordem ímpar, S_{2k-1}, são iguais a 1 e as de ordem par S_{2k} são iguais a zero (Verifique!). Como duas subsequências, (S_{2k}) e (S_{2k-1}), convergem para limites diferentes, a sequência (S_n) não é convergente. Logo, a série dada é divergente.

Nota: Voltamos à questão de notação: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é apenas um símbolo. Se não tomarmos cuidado, podemos facilmente chegar a conclusões erradas. Na história da Matemática, até mesmo grandes matemáticos cometeram equívocos.

No Exemplo 4.4 visto há pouco, se tivéssemos o direito de considerar a soma S dessa série, $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, teríamos $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots)$ e $S = 1 - S$, o que implica $S = \frac{1}{2}$, o que não é verdade, porque a série é divergente!

Na introdução deste Capítulo lembramos você de que as propriedades da adição são válidas quando se trata de número finito de parcelas. A série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ não pode ser substituída por $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$, que é convergente para zero!

Exemplo Especial. Séries Geométricas.

Provavelmente, o primeiro exemplo de uma série convergente que você estudou (e, talvez, não exatamente dessa maneira) foi a série geométrica. Ela, também, é um dos processos infinitos sobre os quais os matemáticos estavam relativamente seguros antes do surgimento do Cálculo. Na verdade, é uma classe de séries, muito útil, como veremos no desenvolvimento da teoria; para as séries geométricas sabemos tudo sobre a convergência e divergência e, para as séries convergentes, a fórmula para a soma é conhecida.

Numa série geométrica, cada termo é obtido multiplicando-se o seu termo precedente pelo mesmo número, $r \neq 0$, conhecido como razão. Assim, uma série geométrica é da forma

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

onde a e r são números reais fixos, diferentes de zero.

Atenção! Se $r = 0$, a expressão à esquerda da igualdade é igual a a, porém temos um problema na notação sigma à direita. Observemos que a potência de r é $n-1$, pois o primeiro termo é $a = ar^0$, mas 0^0 *não é um número* (Não é igual a um! É uma "indeterminação exponencial". Veja em Cálculo I ou disciplinas anteriores.). Estabelecendo que $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a$ quando $r = 0$, usaremos a notação também nesse caso, sem comprometer a matemática!

Antes da análise da série observemos que não há restrição sobre o número r, que pode ser positivo ou negativo.

Vamos deduzir aqui a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica que é a enésima soma parcial da série:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}.$$

Multiplicando-se os dois membros da igualdade por r obtemos:

$$rS_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Subtraindo-se rS_n de S_n obtemos:

$$S_n - rS_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} - ar - ar^2 - \ldots - ar^{n-1} - ar^n = a - ar^n,$$

ou $(1-r)S_n = a(1-r^n)$.

Para $r \neq 1$ (Por quê?) temos: $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Usando resultados para limites de sequências (Cálculo I), temos:

i) Se $-1 < r < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$.

ii) Se $r \leq -1$ ou $r > 1$ (lembre-se que $r \neq 1$), a sequência (S_n) é divergente e, portanto, a série geométrica é divergente para tais r.

iii) Para $r = 1$, a soma parcial $S_n = a + a + a + \ldots + a = na$ e, também, nesse caso a sequência (S_n) é divergente. Logo, a série geométrica é divergente para $r = 1$.

Conclusão: A série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} ar^n$ é convergente se $|r| < 1$ e a soma é $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$. Se $|r| \geq 1$ a série geométrica é divergente.

Tarefa: Siga as etapas a partir da soma parcial da série para mostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^n = \dfrac{ar}{1-r}$, se $|r| < 1$. (Lembre-se que a propriedade distributiva só vale para um número finito de parcelas).

Exercícios resolvidos

1) Verifique se cada série é convergente ou divergente. No caso de ser convergente, encontre a soma da série.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $r = \dfrac{2}{5}$ e $a = 3$.
Sendo $0 < r < 1$, a série é convergente e, pela fórmula da soma, $S = \dfrac{3}{1-\dfrac{2}{5}} = 5$. Assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} = 5$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\ldots$, do Exemplo 4.2 anterior, é uma série geométrica. Como $a=1$ e $r=-\frac{1}{2}$ que está no intervalo de convergência, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

(Note que a potência é n e a série começa em a_0).

c) $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{8}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ é uma série divergente, pois é uma série geométrica de razão maior que 1.

2) Escreva o número 1,232323... como uma razão de dois números inteiros.

Resolução: $1,232323\ldots = 1+\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\ldots$

$$= 1+\frac{23}{10^2}+\frac{23}{10^4}+\frac{23}{10^6}+\ldots$$

$$= 1+\frac{23}{10^2}+\frac{23}{10^2}\frac{1}{10^2}+\frac{23}{10^2}\frac{1}{10^4}+\ldots$$

Observe que $\frac{23}{10^2}.1+\frac{23}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)+\frac{23}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^2+\ldots$ é a série geométrica de razão $r=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$ e $a=\frac{23}{10^2}$. Usando-se a fórmula da soma, obteos $S=\frac{23}{99}$, e concluímos que $1,232323\ldots = 1+\frac{23}{99}=\frac{122}{99}$.

3) Escreva a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, onde $-1<x<1$.

Solução: Basta você observar que a série é a série geométrica, com $r = x$, $a=1$ e que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, pois $|x|<1$.

Nota: Se efetuarmos a divisão do polinômio constante, $p(x)=1$, pelo polinômio $q(x)=1-x$, obtemos $1+x+x^2+x^3+\ldots$, que é a série dada. Verifique!

4.2.1 Exercícios

1) Qual o termo geral das séries a seguir?

a) $\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+\frac{3}{625}+\ldots$;

b) $x+x^2+\frac{x^3}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3}+\ldots$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $r+\frac{r^2}{2^{10}}+\frac{r^3}{3^{10}}+\frac{r^4}{4^{10}}+\ldots$, $r \in \mathbb{R}$.

2) Escreva a série $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, cujo termo geral é:

a) $a_n=(-1)^{n-1}3^{n-1}$;

b) $a_n=\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$.

3) Encontre uma fórmula para a enésima soma parcial de cada série e use-a para encontrar a soma, se a série for convergente.

a) $7+\frac{7}{2}+\frac{7}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{7}{2^{n-1}}+\ldots$

b) $1-2+4-8+\ldots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\ldots$

c) $\frac{5}{2.3}+\frac{5}{3.4}+\frac{5}{4.5}+\ldots+\frac{5}{(n+1)(n+2)}+\ldots$

4) Escreva os primeiros termos de cada série geométrica e calcule sua soma, se a série for convergente.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{7^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{3^{n-1}}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{4^n}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\pi^n$.

5) Encontre os valores de x para os quais a série dada é convergente. Para esses valores de x escreva a soma como uma função de x.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 4(x-3)^n$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$.

6) Uma bola é jogada de uma altura de a metros, sobre uma superfície plana. Cada vez que a bola atinge a sutperfície depois de cair de uma distância a, ela rebate a uma distância ra, onde r é um valor positivo, mas menor que 1 (um). A distância vertical total percorrida pela bola pulando para cima e para baixo é (veja a Figura 4.2):

$$S = a \ + 2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \ldots .$$

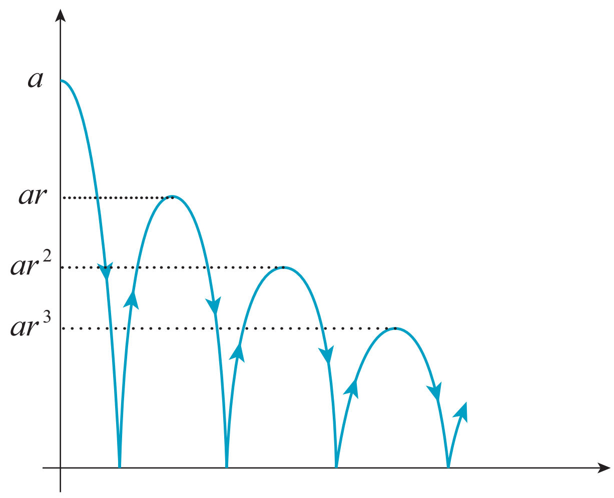


Figura 4.2:

a) Mostre que $S = a\frac{1+r}{1-r}$.

b) Calcule S se $a = 4m$ e $ar = 3m$.

7) Encontre uma série infinita de termos diferentes de zero cuja soma seja:

a) igual a 1;

b) igual a -3;

c) igual a zero.

8) Encontre o valor de t para o qual $1+e^t+e^{2t}+e^{3t}+\ldots=5$.

4.3 Condições de convergência e divergência

O problema principal da teoria das séries é determinar se uma série é convergente ou não. Nesta seção, estabeleceremos alguns critérios de convergência de uma série que, em geral, são consequências dos resultados referentes à convergência das sequências (Cálculo I), a começar do teorema a seguir.

Teorema 4.1. *Critério de Cauchy para séries*

A demonstração pode ser encontrada em Lima, 1989 (Ver Bibliografia Complementar, p. 307).

O enunciado do teorema é equivalente a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, para cada $\varepsilon>0$, existir $N\in\mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$, quaisquer que sejam $n>N$ e $p\in\mathbb{N}$.

Nota: No critério de Cauchy temos uma condição necessária e suficiente para convergência de uma série. Como comentamos na Observação 4.1, nem sempre é fácil encontrar uma expressão para as somas parciais, então, para a prática é muito útil reconhecer se uma série é convergente ou não a partir do comportamento dos seus termos a_n, sem passar pelo cálculo das somas parciais.

Teorema 4.2. *Condição necessária de convergência.*

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

Demonstração: A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então, pelo Teorema 4.1, dado $\varepsilon>0$, se existir $N\in\mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$, para quaisquer $n > N$ e $p \in \mathbb{N}$. Em particular, para $m = n+1$ e $n > N$ qualquer, vale $|a_m| < \varepsilon$. Assim, $|a_n - 0| < \varepsilon$, qualquer $n > N+1$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

■

Demonstração alternativa: Seja S a soma da série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Então, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, onde (S_n) é a sequência das somas parciais, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. É claro que, também $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Observe que $S_n - S_{n-1} = a_n$ e assim, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

■

Observação 4.2. No teorema temos uma condição necessária para convergência de uma série, ou seja, se uma série é convergente, então o termo geral converge a zero. Mas, o problema principal da teoria das séries é justamente determinarmos se uma série é convergente ou não! Por outro lado, a forma negativa do teorema é muito útil e a enunciamos como um teste de divergência. Para isso, apesar de óbvio, vale a pena você lembrar de que o limite de uma sequência ou de uma função pode existir (é um número) ou não.

Teorema 4.3. *Teste do termo geral para divergência*

Se o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou o $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

De fato, se a série fosse convergente, então o limite do termo geral seria zero.

Observação 4.3. O Teorema 4.3, a forma negativa do Teorema 4.2, constitui uma condição suficiente para uma série ser divergente. Por outro lado, a recíproca do Teorema 4.2 não é verdadeira, ou seja, a condição $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ não é suficiente para (não garante) uma série ser convergente.

O exemplo clássico de série, onde o termo geral converge a zero e é divergente, é a ***série harmônica*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$.

Note que o $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, e vamos mostrar que a série é divergente.

De fato, na sequência das somas parciais (S_n) consideremos os termos de índices $n = 2^k (S_2, S_4, S_8, \ldots)$.

$$S_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)$$

Assim, $S_{2^k}>1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}$

ou seja, $S_{2^k}>1+k\frac{1}{2}$.

Note que o $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k}=+\infty$. Como (S_{2^k}) é uma subsequência de (S_n), então a sequência de (S_n) não é convergente (mesmo teorema do Cálculo I citado no Exemplo 4.4). Logo, a série harmônica é divergente.

Exemplo 4.6. Aplicação do teste do termo geral

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ é divergente, como já vimos, porque o $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ não existe;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+5}$ é divergente, pois o $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+5}=\frac{1}{2}\neq 0$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n}$ é divergente porque $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n}=-1$.

4.3.1 Exercícios

1) Analise, justificando, quais séries são convergentes e quais são divergentes.

a) $\frac{1}{10}-\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{10000}+\ldots$;

b) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}+\ldots$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$;

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos(nx)}$.

4.4 Operações sobre séries

Das propriedades aritméticas do limite de sequências resultam as seguintes propriedades:

Teorema 4.4. Propriedades de séries convergent es

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, então:

i) a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$ (Regra da adição).

ii) para todo $k \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ é convergente e
$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = kA$ (Regra da multiplicação por constante).

Note que i) e ii) (com $k = -1$) implicam a regra da diferença $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$.

Demonstração:

i) Sejam $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Então, as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ são:

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \\ &= A_n + B_n \end{aligned}$$

Como o $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ e o $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, então o $\lim_{n\to\infty} S_n = A + B$.

ii) As somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ são:

$$\begin{aligned} S_n &= (ka_1) + (ka_2) + \ldots + (ka_n) \\ &= k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= kA_n \end{aligned}$$

Assim, o $\lim_{n\to\infty} S_n = kA$.

■

Exercício resolvido

1) Encontre a soma das seguintes séries:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$.

Solução: Observe que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ é a série geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e $a=1$.

Então, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Também, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$,

pois é a série geométrica de razão $\frac{-1}{5}$. Assim, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)=\frac{17}{6}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2.2^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^n=2\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=6$, porque $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ é a serie geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

Atenção! As propriedades são válidas para séries convergentes. Para as duas séries $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergentes *não* podemos concluir, em geral, que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ é convergente ou divergente. Por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\ldots$ é divergente, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+\ldots$ também será divergente, por outro lado a série $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}+(-1)^n]=0+0+0+\ldots$ será convergente.

No entanto, temos as seguintes propriedades:

i′) Se uma das séries, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, é convergente e a outra é divergente, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ são divergentes.

ii′) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n$ é divergente, para todo $k\in\mathbb{R}$.

Adição ou subtração de termos

Podemos aumentar ou diminuir um número finito de termos de uma série sem alterar o fato de a série ser convergente ou divergente, ou seja, a série convergente continua sendo convergente e a divergente continua sendo divergente. No caso da convergência isso, de modo geral, muda a soma da série.

Proposição 4.1. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ for convergente para $n_0 \in \mathbb{N}$ qualquer, porém fixo. Nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \,.$$

A prova é fácil. Basta notarmos que, se as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ são S_n, as somas parciais de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ são $T_n = S_n - S_{n_0-1}$.

Exemplo 4.7. No Exemplo A, no início da Seção 4.2, vimos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$, ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$. Por outro lado, a série geométrica de razão $r=\frac{1}{2}$, com $a=1$, é $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Reindexação

Podemos *re*-indexar qualquer série, na notação sigma, sem alterar sua convergência, desde que a ordem de seus termos seja mantida.

Para aumentar o valor inicial do índice n em h unidades, substituímos n, na fórmula para o termo geral a_n, por $n-h$ (aumentamos o valor de n, logo diminuímos em a_n).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

(Note que a série não é, e nem pode ser, alterada!)

Para diminuir, substituímos n por $n+h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Exemplo 4.8. Na notação da série geométrica, diminuímos o índice $n=1$ em $h=1$ unidade: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1-1}^{\infty} ar^{n-1+1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^{n}$.

No Exemplo 4.5 visto anteriormente, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \neq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Também, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} = \sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

4.4.1 Exercícios

1) Encontre a soma das seguintes séries:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5^n} - \frac{1}{2^n}\right)$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{4^n}\right)$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Sugestão para c): Calcule a enésima soma parcial e use-a para calcular a soma.

4.5 Séries de termos positivos ou nulos

Na teoria das sequências um importante critério de convergência é o de que toda sequência monótona limitada é convergente.

Apesar de ter sido estudado recentemente, no Cálculo I, vamos recordar que denominamos de sequências monótonas: as sequências crescentes ($x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, ou seja, $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$), não decrescentes ($x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$), decrescentes ($x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$), e não crescentes ($x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$).

Uma sequência (x_n) é limitada se existirem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se temos $x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será limitada superiormente e, se $a \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será limitada inferiormente. Uma sequência não decrescente será sempre limitada inferiormente, por exemplo, pelo seu primeiro termo. Analogamente, uma sequência não crescente será sempre limitada superiormente.

A restrição às séries de termos positivos ou nulos se deve ao fato de que, nesse caso, as somas parciais são sempre não decrescentes: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, e de $a_{n+1} \geq 0$ segue que

$S_{n+1} \geq S_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \ldots$.

Teorema 4.5. Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente se a sequência de suas somas parciais (S_n) for limitada superiormente.

Demonstração: Os termos da série são positivos ou nulos então pelo que vimos acima, a sequência das somas parciais é não-decrescente e limitada inferiormente. Por hipótese, a sequência é limitada superiormente, então limitada e assim concluímos que ela é convergente. Logo, a série é convergente.

■

Nota: Do mesmo modo que o Teorema de Cauchy, o Teorema 4.5 é base para os testes práticos que permitem determinar se uma série é convergente ou divergente.

Teste da integral

Antes de enunciarmos o teste, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.9.
Considere a série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$.

É fácil vermos que o $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, mas isso não nos garante que a série seja convergente. Para mostrar que é convergente consideremos a soma parcial $S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+..+\frac{1}{n^2}$.

Não conhecemos uma fórmula simples para S_n, mas usando os conhecimentos de cálculo já adquiridos, poderemos "pensar" nos termos da série como valores da função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ para $x=n\in\mathbb{N}$.

Assim, $S_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

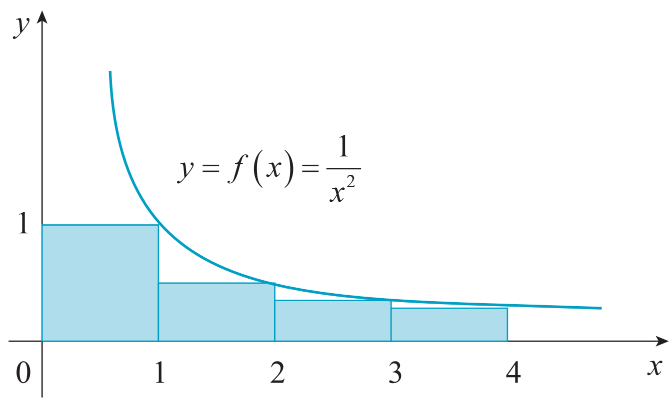


Figura 4.3: Retângulos de base com comprimento 1 e altura $f(n)$ sob o gráfico de $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

Interpretando os valores $\frac{1}{n^2}, n\in\mathbb{N}$, como áreas dos retângulos de base de comprimento 1 e altura de comprimento $\frac{1}{n^2}$, como a Figura 4.3, temos:

$$S_n=1.f(1)+\ 1.f(2)+\ldots+1.f(n)<1+\int_1^n\frac{1}{x^2}dx<1+\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx\,.$$

Observe que $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ é uma integral imprópria que calculamos no Capítulo 2:

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{b}+1\right)=1\,.$$

Logo, $S_n<1+1=2$, para todo $n\in\mathbb{N}$, o que significa que a sequência das somas parciais é limitada superiormente por 2. Pelo Teorema 4.5, a série é convergente. (Na verdade, Leonhard Euler (1707-1783) mostrou que a soma é $\frac{\pi^2}{6}\approx 1,64493$).

Proposição 4.2. *Teste da integral*

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Suponha que $a_n = f(n)$, onde f é uma função de x contínua, positiva e decrescente, para todo $x \geq N$ (para algum $N \in \mathbb{N}$ fixo).

i) Se a integral imprópria $\int_N^{\infty} f(x)dx$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente.

ii) Se a integral imprópria $\int_N^{\infty} f(x)dx$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente.

Demonstração: Vamos provar para $N = 1$ porque a prova para N qualquer é análoga.

Com as características dadas da função temos ideia do seu gráfico $y = f(x)$ e de $x \geq 1$, segue que o intervalo $[1, \infty)$ está no domínio de f. Aproximemos a área da região abaixo do gráfico e acima do eixo x, entre as retas verticais $x = 1$ e $x = n$, pela soma das áreas de retângulos de base de comprimento 1 e alturas de comprimentos $f(n) = a_n$ ou $f(n+1) = a_{n+1}$. Veja as figuras a seguir.

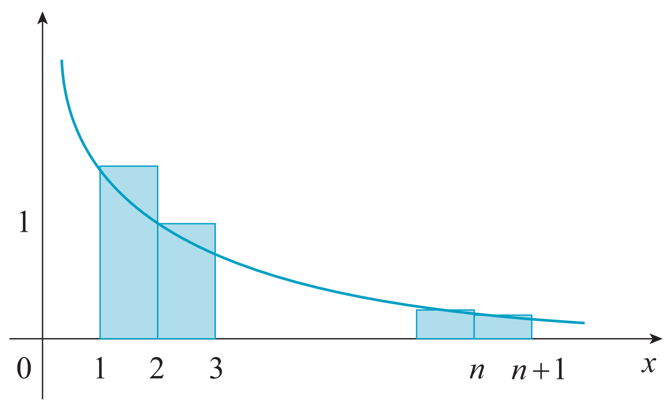


Figura 4.4: a) Retângulo de base de comprimento 1 e altura de comprimento $f(n) = a_n$.

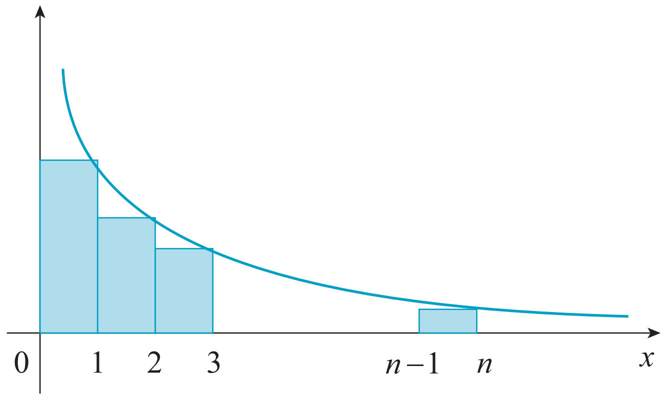


Figura 4.4: b) Retângulo de base de comprimento 1 e altura de comprimento

$$f(n+1) = a_{n+1}$$

Então, $\int_1^n f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ e $a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx$,

ou $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ e $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$,

e, assim, $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$.

i) Se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente, basta a desigualdade do lado direito para mostrar que as somas parciais são limitadas superiormente por $M = a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx$ e, pelo Teorema 4.5 a série é convergente.

ii) Se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for divergente, usamos o lado esquerdo da desigualdade para concluir que a série é divergente.

■

Exercício resolvido

2) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ é convergente.

De fato, observe que $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = f(n)$, onde $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, que será uma função de x, contínua, positiva e decrescente se $x \geq 1$ Para usar o teste da integral, calculamos a integral imprópria

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{b}} + 2\right) = 2$. Logo, a série é convergente.

Atenção! A convergência da integral imprópria apenas garante que a série é convergente. O valor encontrado não é a soma da série (veja o Exemplo 4.9).

2) Analise a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Resolução: Observe que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, mas isso não garante que a série seja convergente. Note que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = f(n)$, onde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ é uma função de x, contínua, positiva e decrescente se $x \geq 1$. Assim,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(2\sqrt{x}-2) = +\infty.$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Aplicação do teste da integral: Série p ou p -Série

A série do Exemplo 4.9 e as dos Exercícios resolvidos 2) e 3) são da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (sendo p uma constante), denominadas **séries** p ou p **-séries**. Essa é uma classe de séries (as séries geométricas são outra) das quais sabemos tudo sobre a convergência e divergência.

Proposição 4.3. A p -série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, sendo p uma constante real, é convergente se $p > 1$, e divergente se $p \leq 1$.

De fato, primeiro lembremo-nos de um teste fácil de aplicar: o teste do termo geral. Para isso, o $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 0, p > 0 \\ +\infty, p < 0 \end{cases}$.

E, para $p = 0$, temos que $\frac{1}{n^0} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a série é divergente.

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente se $p \leq 0$.

Para $p > 0$, o $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, mas, somente com isso, não podemos concluir nada sobre a série.

Observe que $a_n = f(n)$, onde $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, que para $x \geq 1$ é função contínua, positiva e decrescente, pois $p > 0$. Para aplicar o teste da integral, vamos calcular a integral imprópria para $p \neq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, p>1\\ +\infty, p<1\end{cases}.$$

Para $p = 1$, temos $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, a série harmônica que sabemos que é divergente. Esse fato também pode ser provado pelo teste da integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln b) = +\infty .$$

Portanto, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ é divergente se $p \leq 1$, e convergente se $p > 1$.

Nota: O teste da integral permite verificar a convergência ou não de "soma de infinitos" valores $f(n)$, $n = 1,2,3,4,\ldots$ para funções f, diferentes das usadas na p-série.

Exercícios resolvidos

1) Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente.

Resolução: Aplicando o teste do termo geral temos: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{1} = 0$. Então, nada a concluir.

Observe que $a_n = \dfrac{\ln n}{n} = f(n)$, para $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, x > 0$, em particular $x \geq 1$. A função f é contínua, positiva e, para verificar que é decrescente, usamos o teste da derivada primeira (Cálculo I).

De $f'(x) = \dfrac{(1/x).x - 1.\ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$, para $x > e$, concluímos que f é decrescente em $[e, +\infty)$ (veja cálculo I). Assim, podemos aplicar o teste da integral e, para tal, vamos calcular a integral imprópria $\int_3^\infty \dfrac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \dfrac{\ln x}{x}dx$, pois $3 > e$.

No Capítulo 1 de integração encontramos $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$, usando integração por partes ou pelo método de substituição $(u = \ln x)$.

Usando uma primitiva na integral definida obteremos:

$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}\right) = +\infty$. Sendo a integral imprópria divergente, a série dada é divergente.

2) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$ é convergente.

De fato, observe que $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{2e^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2e^n} = 0$, condição necessária, mas não suficiente, para concluir que a série dada é convergente.

Seja $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, contínua, positiva em $\mathbb{R}$ e $f(n) = a_n$. A derivada de f,

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{2x}) - e^x 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} < 0,$$

para $x \geq 1$ (porque $e^x > 0$,para todo x e $2 < e < 3$), então concluímos que f é decrescente em $[1,+\infty)$. Com as condições do teste da integral satisfeitas, vamos calcular a integral imprópria.

De $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \operatorname{arctg}(e^x) + c$ (ver no Capítulo 1 Tabela de integrais), segue que $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}(e^b) - \operatorname{arctg}(e)) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(e)$.

Mostramos, assim, que a série dada é convergente.

Estimativa da soma de uma série convergente

Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série convergente (o problema é encontrar uma fórmula para a soma parcial S_n). Uma maneira eficaz de calcular somas de certas séries é através do desenvolvimento de funções conhecidas em séries, o qual será estudado no próximo capítulo. O teste da integral nos dá pelo menos uma estimativa da soma.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente, cuja convergência pode ser verificada pelo teste da integral. Se $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, denotaremos por R_n o erro cometido se usarmos a soma parcial S_n como uma aproximação para a soma total S, ou seja, $R_n = S - S_n$.

Na prova do teste da integral encontramos as seguintes desigualdades:

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \text{ e } a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)dx.$$

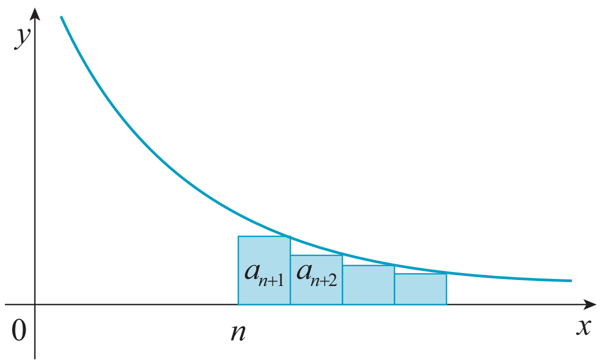


Figura 4.5: a)

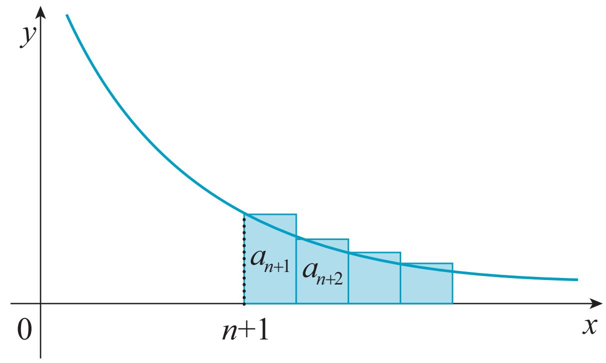


Figura 4.5: b)

Das Figuras 4.5 a) e b) concluímos que $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = R_n$

e $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \le \int_n^{\infty} f(x)dx$. Logo, $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le R_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx$ é uma estimativa do resto para o teste da integral.

Somando S_n em cada lado das desigualdades e usando $R_n + S_n = S$ obtemos: $S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le S \le S_n + \int_n^{\infty} f(x)dx$.

Exercício resolvido

6) Seja a p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

a) Faça uma aproximação da soma S da série usando a soma parcial S_{10};

b) Faça uma estimativa do erro envolvido na aproximação feita em a).

c) Faça uma estimativa da soma S da série usando S_{10};

d) Quantos termos serão necessários para garantir que a soma tenha precisão de 0,0005?

Resolução:

a) Com o auxílio de uma calculadora encontramos

$$S_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{10^3} \cong 1{,}197532$$

($\cong$ "aproximadamente igual a").

Então, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cong 1{,}197532$.

b) Para fazer a estimativa do erro R_n, vamos calcular a $\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ para n qualquer:

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_n^b x^{-3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{-2}}{-2} \bigg|_n^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2b^2} \right) = \frac{1}{2n^2}.$$

Pela estimativa do resto para o teste da integral temos que, para $n = 10$, $R_{10} \leq \frac{1}{2.10^2} = \frac{1}{200} = 0{,}005$. Assim, o erro cometido é menor ou igual a 0,005.

c) Usando os resultados encontrados nos itens anteriores, concluímos que:

$$S = R_{10} + S_{10} \leq 1{,}197532 + 0{,}005 = 1{,}202532.$$

Também, podemos encontrar um limitante inferior usando $\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(n+1)^2}$.

Então, $\int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(11)^2} = \frac{1}{242}$, e de $S_{10} + \frac{1}{242} \leq S \leq S_{10} + \frac{1}{200}$

obtemos que $1{,}201664 \leq S \leq 1{,}202532$.

d) Temos de encontrar n tal que $R_n \leq 0{,}0005 = \frac{1}{2000}$.

Usando o item b), temos que $\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2000}$, o que implica $n^2 \geq 10^3$ ou $n \geq \sqrt{1000} \cong 31{,}6$.

Como n é número natural, tomamos $n = 32$. Assim, a partir de 32 termos, temos uma aproximação de S com precisão menor que 0,0005.

Observação 4.4. A escolha de $n = 10$ é para facilitar o cálculo da soma parcial. É claro que a estimativa da soma S poderá ser melhorada se n for maior. Mesmo a aproximação de S por S_{10} pode ser melhorada com melhor aproximação se S_{10}. Por outro lado, podemos ter uma estimativa de S_{10}, sem utilizar calculadora usando $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$, para $n = 10$, obtemos

$$S_{10} \leq 1 + \int_1^{10} \frac{1}{x^3} dx = 1 + \left(\frac{-1}{2.10^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{200} = 1,495.$$

Observação 4.5. As desigualdades

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

valem para todo $n \in \mathbb{N}$ (n é finito). Então, mesmo para séries divergentes, é possível fazer uma estimativa das somas parciais S_n.

Exercício resolvido

7) Seja a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

a) Faça uma estimativa para a soma parcial S_{10}.

b) Quantos termos serão necessários para formar uma soma parcial maior que 20?

Resolução: Na prova da Proposição 4.3 vimos que $a_n = f(n)$, onde $f(x) = \frac{1}{x}$, a qual, para $x \geq 1$, é função contínua, positiva e decrescente.

Então, $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq S_n \leq a_1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$, sendo $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

De $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ segue que $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$.

a) $\ln 11 \leq S_{10} \leq 1+\ln 10$ ou $2{,}397895 \leq S_{10} \leq 2{,}302585$.

b) Como queremos $S_n > 20$, então $20 < S_n \leq 1+\ln n$ ou $20 < 1+\ln n$.

Assim, $\ln n > 19$, e como a função exponencial é crescente, temos $n > e^{19}$.

Usando uma calculadora encontramos $e^{19} = 178.482.301 = N$, ou seja, é preciso pelo menos esse número de termos para formar uma soma parcial da série harmônica que seja maior que 20.

Nota: O valor encontrado mostra a lentidão com que as somas parciais da série harmônica crescem. Lembre-se de que a série é divergente e, sendo os termos positivos, as somas parciais são crescentes e tendem ao infinito.

*Resumo do que estudamos até agora

Listamos abaixo as séries que estudamos até agora e sabemos sobre convergência ou divergência.

Tabela 4.1:

Séries convergentes	Soma	Séries divergentes
		$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qualquer que $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe ou é $\neq 0$;
Série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, com $\|r\|<1$;	$S = \dfrac{a}{1-r}$;	Série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, com $\|r\| \geq 1$;
Série telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$;	$S=1$	Série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$;
p-Série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, com $p>1$.		p-Série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, com $p \leq 1$.

Proposição 4.4. *Teste de comparação*

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos. Suponhamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \le b_n$, para todo $n > N$.

a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

Demonstração: Sejam $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ e $B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$ as enésimas somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

De $a_n \le b_n$, para todo $n > N$,
$A_n \le a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N + b_{N+1} + b_{N+2} + \ldots + b_n$ se $n > N$.

a) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então suas somas parciais são limitadas. Logo, existe um $K > 0$ tal que
$b_{N+1} + b_{N+2} + \ldots + b_n \le b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n \le K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, $A_n \le a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N + K = L$, para todo $n > N$. Também, para $n \le N$ vale $A_n \le L$, porque $A_1 \le A_2 \le \ldots \le A_N \le A_{N+1} \le \ldots$, já que os termos da série são não negativos. Assim, mostramos que a sequência das somas parciais (A_n) é limitada superiormente e, pelo Teorema 4.5, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja divergente. Para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, vamos mostrar que suas somas parciais não são limitadas superiormente, usando o método de prova por contradição.

Suponhamos que as somas parciais B_n são limitadas superiormente. Como $a_n \le b_n$, para todo $n > N$ as somas parciais A_n também serão limitadas superiormente. Sendo uma série de termos positivos ou nulos, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. Mas, isso contradiz a hipótese! Logo, as somas parciais B_n não podem ser limitadas superiormente, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

■

Observação 4.6 Podemos aplicar o teste da comparação para séries com termos não negativos a partir de uma certa ordem n_0, porque um número finito de termos não altera a convergência ou divergência de uma série (volte à Seção 4.7 - Operações sobre séries). Por outro lado, é preciso incluir todos os termos da série a partir dessa ordem.

Na prática, apenas uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dada para analisar. Para aplicar o teste da comparação, a outra série deve ser escolhida, adequadamente, entre as conhecidas (da Tabela 4.1 ou de uma tabela mais completa).

Exercício resolvido

Aplicação do teste da comparação

8) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$ é convergente.

Resolução: Lembrando que $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$, observe que $1! = 1$, assim:

$$2! = 2.1 = 2$$
$$3! = 3.2! > 2.2 = 2^2$$
$$4! = 4.3! > 2.2^2 = 2^3$$
$$\vdots$$
$$n! > 2^{n-1}$$

Vamos mostrar que a desigualdade vale para todo $n > 2$.

De fato, supondo válido, para n, que $n! > 2^{n-1}$, vamos mostrar para $n+1$.

$(n+1)! = (n+1)n! > 2.2^{n-1} = 2^n$ ($n > 2$ implica que $n+1 > 2$).

Incluindo $n = 1$ e $n = 2$, $n! \geq 2^{n-1}$ ou $2^{n-1} \leq n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, para todo n. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é uma série geométrica convergente, pelo teste da comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente.

Nota: O fato de a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ser convergente significa que sua soma s é um número real. Adicionando uma unidade, $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$, temos a **série** e (e o número real conhecido como número de Euler). Note que $e > 2$, e como a série geométrica tem soma 2, teremos que $2 < e < 3$.

Sabemos - e é possível provar - que ***e*** é um número irracional. O valor de ***e***, correto até a quinta casa decimal, é 2,71828 e será calculado no Capítulo 5 (Série de Taylor). Pelo que veremos, você poderá calcular o valor com quantas casas decimais desejar (ou saberá "o que está por trás da calculadora")! $(e \cong 2,7182818284590452\ldots)$.

Observação 4.7. O teste da comparação se aplica a séries com termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tal que $a_n \leq b_n$, para todo $n > N$, $N \in \mathbb{N}$.

a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente (A série dos termos maiores convergente implica que a série dos termos menores é convergente.);

a') $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente não implica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente;

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente (A série dos termos menores divergente implica que a série dos termos maiores é divergente.)

b') $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergente não implica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente.

Por exemplo, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e a p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente $(p = 2)$.

No próximo teste de comparação, a condição $a_n \leq b_n$ é "substituída" pelo limite do quociente de a_n por b_n.

Proposição 4.5. *Teste de comparação no limite*

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos. Calculemos o $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

a) Se o $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\in\mathbb{R}$ e $0<l<\infty$, então as séries dadas (as duas) são ao mesmo tempo convergentes ou divergentes.

a$_1$) Se o limite $l=0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ convergente implica a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ convergente.

b) Se o $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergente implica a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergente.

Demonstração:

a) Usando a definição de limite, dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que, para todo $n>N$ temos $\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon$ ou $-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-l<\varepsilon$, ou ainda, $l-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<l+\varepsilon$. Para $\varepsilon<l$, em particular, temos $l-\varepsilon>0$, e, como $b_n>0$, resulta que $0<(l-\varepsilon)b_n<a_n<(l+\varepsilon)b_n$, para todo $n>N$. Se $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ é convergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)b_n$ é convergente (veja o Teorema 4.4), então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é convergente. Se $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ é divergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é divergente.

a$_1$) Se $l=0$ temos $\left|\frac{a_n}{b_n}\right|<\varepsilon$ ou $-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\varepsilon$, para todo $n>N$. De $b_n>0$ segue que $-\varepsilon b_n<a_n<\varepsilon b_n$, para todo $n>N$. Como o teste de comparação se aplica a séries com temos não negativos, podemos apenas concluir que se $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ é convergente, então a série é $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ convergente.

b) Pela definição de limite infinito, dado $M>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{a_n}{b_n}>M$, para todo $n>N$. Isso implica $a_n>Mb_n$ e, pelo teorema da comparação, se $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é divergente.

Exercício resolvido

Aplicação do teste da comparação no limite.

9) Verifique se a série é convergente ou divergente usando o teste da comparação:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

A série dada é convergente porque $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ é convergente e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+1}\frac{2^n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}=1.$$

Note que $2^n+1>2^n$, para todo n, assim, $\dfrac{1}{2^n+1}<\dfrac{1}{2^n}$ e, também, podemos usar o teste de comparação anterior para concluir que a série dada é convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

Essa série é "parecida" com a anterior: $n+1>n$ implica $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$, para todo n.

Mas, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente, não é possível aplicar o primeiro teste de comparação para concluir que a série dada é divergente.

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, pelo Teorema de comparação no limite podemos concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ é divergente.

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ (note que $n\geq 2$).

Seja $a_n=\dfrac{1}{\ln n}$, $n=2,3,4,\ldots$. Para "descobrir" b_n observe que $\ln e=1$ e $\ln n>1$ para $n>3$. Assim, para $b_n=\dfrac{1}{n}$, calculemos $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1/n)}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente, então a série dada é divergente.

Os próximos critérios de convergência de uma série não são de comparação com uma outra série conhecida. As regras envolvem apenas os termos da série, mas a base dos resultados ainda é uma série conhecida: a série geométrica.

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ é convergente se $|r|<1$, e divergente se $|r|\geq 1$, ou seja, a convergência ou não depende da razão r. Observe que $r=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, constante, para todo n, onde $a_n = ar^n$ é o termo geral da série. Mas, nem sempre a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante. Por exemplo, para $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ temos $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{n!}{1}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$.
Uma extensão do resultado válido para a série geométrica é o Teste da Razão.

Proposição 4.6. *Teste da Razão (Critério de L'Alembert)*

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos ($a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$).

1) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$, então a série é convergente.

2) Se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$, então a série é divergente.

Observação 4.9. Se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ nada se pode concluir,ou seja, a série pode ser convergente ou divergente. Por exemplo: Seja a p-série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Para qualquer p temos $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^p}\frac{n^p}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$. Mostramos na Proposição 4.3 que a p-série é convergente para $p>1$ e divergente para $p\leq 1$.

Demonstração da proposição:

Se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, então dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon$ ou $-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-l<\varepsilon$ para todo $n\geq N$.

1) Supondo $l<1$ seja r um número tal que $l<r<1$. (Pergunta: Existe um tal número r? Dê um exemplo!) Para $\varepsilon = r-l>0$, vale $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<r-1$, em particular, $\frac{a_{n+1}}{a_n}-l<r-l$, para todo n a partir de algum N. Então $\frac{a_{n+1}}{a_n}<r$, quando $n \geq N$ e assim,

$$
\begin{aligned}
&a_{N+1} < ra_N \\
&a_{N+2} < ra_{N+1} < rra_N = r^2 a_N \\
&a_{N+3} < ra_{N+2} < rr^2 a_N = r^3 a_N \\
&\vdots \\
&a_{N+m} < ra_{N+m-1} < rr^{m-1} a_N = r^m a_N
\end{aligned}
$$

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, onde $b_n = a_n$ para $n=1,2,\ldots,N$ e $b_{N+1} = ra_N, b_{N+2} = r^2 a_N, \ldots, b_{N+m} = r^m a_N, \ldots,$ ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N + ra_N + r^2 a_N + \ldots + r^m a_N + \ldots$.

A série geométrica $\sum_{m=1}^{\infty} a_N r^m$ é convergente porque $r<1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

Como $a_n \leq b_n$, para todo n, pelo Teste da Comparação (Proposição 4.6.3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2) Se $l>1, l-1>0$ e de modo análogo à primeira parte, concluímos que $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ a partir de algum índice N.
A mesma desigualdade $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, para todo $n \geq N$, $N \in \mathbb{N}$, vale se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

De $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, para todo $n \geq N$, segue que $a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \ldots$.
Logo, $\lim_{n\to\infty} a_n$ não pode ser zero e pelo Teste do enésimo termo (Teorema 4.3), a série é divergente.

■

Exemplo 4.10. Aplicação do Teste da Razão

Usamos, acima, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ para mostrar que o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}$ não é constante.

Como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$, a série é convergente, o que está de acordo com que mostramos usando o Teste da Comparação.

Exercício resolvido

10) Analise as seguintes séries.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n!}{(2n)!}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^n}$, $x>0$.

Resolução:

a) Seja $a_n=\frac{n!n!}{(2n)!}$ e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{(n+1)n!(n+1)n!(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n!}=\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Então, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{2(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2(2+1/n)}=\frac{1}{4}<1$.

Logo, pelo Teste da Razão a série dada é convergente.

b) Para $x>0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{(n+1)+1}}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{x^{n+1}}=\frac{x^{n+1}x3^n}{3^n3x^{n+1}}=\frac{x}{3}$, para todo n. Então, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{3}$.

Pelo Teste da Razão, a série é convergente se $\frac{x}{3}<1$ ou $x<3$ e divergente se $x>3$.

Se $x=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}3=3+3+3+\dots$, divergente.

Pelos exemplos acima é possível notar que o Teste da Razão é eficaz quando nos termos de uma série aparecem fatoriais ou expressões elevados à enésima potência. O mesmo acontece com o próximo critério e ambos podem fornecer a solução do problema de convergência de uma série, quando a aplicação dos teoremas gerais é difícil.

Proposição 4.7. *Teste da Raiz (Critério de Cauchy)*

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série com $a_n \geq 0$, para $n \geq N$, para algum $N \in \mathbb{N}$.

1) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$, então a série é convergente.

2) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, então a série é divergente.

Observação 4.9. Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ não se pode concluir que a série é convergente ou divergente.

Omitimos a prova do Teste da Raiz porque é análoga à prova do Teste da Razão.

Nota: Existe ainda o critério $n^r a_n$, que não colocaremos aqui, que pode fornecer um resultado para a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no caso que os Testes da Razão e da Raiz falham, isto é, quando o limite é igual a um. Mas é claro que isso não resolve totalmente o problema de convergência de séries com termos positivos.

Tarefa: Pesquise e encontre exemplo de série que ainda não se sabe se é convergente ou divergente!

Exercício resolvido

11) Decida se as séries são convergentes ou divergentes, aplicando o Teste da Raiz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+1} \right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$

Resolução:

a) Seja $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{4n+1}\right)^n$ (quociente elevado à potência n).

Então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{4n+1} = \dfrac{3}{4} < 1$ e assim pelo Teste da Raiz, a série dada é convergente.

b) No caso $a_n = \dfrac{n^3}{3^n}$, temos o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^3}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{3}{n}}}{3}$.

Para calcular o limite calculemos primeiro,

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(n^{3/n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\ln n = \lim_{n\to\infty} 3\frac{1/n}{1} = 0,$$

o que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} = e^0 = 1$.

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{3} < 1$, e pelo Teste da Raiz a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$ é convergente.

c) Agora $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^{\frac{3}{n}}} = 3 > 1$. Então pelo Teste da Raiz a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^3}$ é divergente.

4.5.1 Exercícios

1) Use o Teste da Integral para mostrar que as seguintes séries são convergentes:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$

2) Obtenha uma estimativa do resto R_n na forma $|R_n| \leq \ldots$, para cada uma das seguintes séries convergentes:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1,1}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2}$

3) Use um dos testes de comparação para determinar quais das séries são convergentes e quais são divergentes.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(2n-1)}{n^2}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

4) Use o Teste da Razão ou da Raiz para determinar quais séries são convergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

5) Mostre que nem o Teste da Razão nem o Teste da Raiz fornecem informações sobre a convergência da p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

4.6 Séries alternadas e séries absolutamente convergentes

Na seção anterior estudamos alguns testes de convergência que podem ser aplicados apenas às séries com termos não-negativos. Agora, vamos estabelecer alguns critérios de convergência para lidar com séries sem essa restrição.

Já vimos exemplos de séries que tem termos negativos:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+\ldots$, divergente.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$, série geométrica de razão $r = -\frac{1}{2} < 0$, convergente, com soma $S = \frac{2}{3}$.

Essas séries pertencem a uma classe importante que estudaremos a seguir.

4.6.1. Séries alternadas

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ na qual os termos a_n são alternadamente positivos e negativos é denominada **série alternada**.

Mais exemplos:

3) **Série harmônica alternada**: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

4) $1-2+3-4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$

5) $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$

Notação: Observe que $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=(-1)^{n-1}b_n$, (com $b_n>0$ no Exemplo 3).

$a_n=(-1)^{n+1}n=(-1)^{n+1}b_n$, (com $b_n>0$ no Exemplo 4).

$a_n=(-1)^{n}\frac{n}{n+1}=(-1)^{n}b_n$, (com $b_n>0$ no Exemplo 5).

Usamos a potência $n-1$ (ou $n+1$) se $a_1>0$ e n se $a_1<0$.

Mas lembrando que um número finito de termos não altera a convergência ou não de uma série, adotamos a notação $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$, onde $b_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, para uma série alternada.

Teorema 4.6. *Teste da Série Alternada (Critério de Leibniz)*

A série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n=b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots,\ b_n>0$, é convergente se satisfaz as duas seguintes condições:

i) $b_n\geq b_{n+1}$, para todo n, ou seja, (b_n) é uma sequência decrescente e

ii) $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

Nota: O teste continua válido se a sequência (b_n) é decrescente a partir de um certo termo de índice N (grande).

Demonstração. As somas parciais da série alternada são:

$S_1 = b_1$, $S_2 = b_1 - b_2$, $S_3 = b_1 - b_2 + b_3$, $S_4 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4$,

$S_5 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5$, $S_6 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6$, etc...

Usando a propriedade associativa (para soma de finitos termos), as somas parciais de ordem par, $n = 2k$, são $S_{2k} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_{2k-1} - b_{2k})$ e as de ordem ímpar, $n = 2k+1$, são $S_{2k+1} = S_{2k} + b_{2k+1}$.

Analisemos a subsequência (S_{2k}). Da condição i) $b_n \geq b_{n+1}$ ou $b_n - b_{n+1} \geq 0$, para todo n, segue que $S_{2k} \geq 0$ e que $S_{2(k+1)} = S_{2k+2} \geq S_{2k}$. Assim, (S_{2k}) é uma sequência de termos positivos e crescente. Por outro lado, usando novamente a propriedade associativa, $S_{2k} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \ldots - (b_{2k-2} - b_{2k-1}) - b_{2k}$, o que mostra que $S_{2k} \leq b_1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e assim a sequência é limitada superiormente. Logo, a sequência (S_{2k}) é convergente e seja $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}$.

Para a sequência (S_{2k+1}), da condição ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}(S_{2k} + b_{2k+1}) = S + 0 = S$.

Se não foi provado em Cálculo I, não é difícil provar que se $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$ e $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = S$ então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. (Prove como exercício!). Portanto, a série alternada é convergente.

■

Esboço do comportamento das somas parciais na reta real:

$S_1 = b_1 > 0$

$S_2 = b_1 - b_2 \geq 0$ pois, $b_1 \geq b_2$ e $S_2 = S_1 - b_2 < S_1$ (S_2 fica à esquerda de S_1)

$S_3 = b_1 - b_2 + b_3 = S_2 + b_3$, então $S_3 \geq 0$ e $S_3 \geq S_2$ (S_3 à direita de S_2). Assim, por diante.

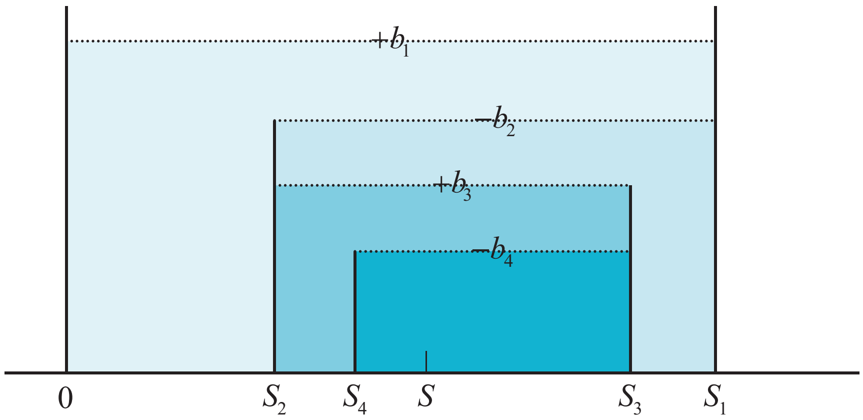


Figura 4.6: As somas parciais da série alternada que satisfaz as condições do teste.

Como $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S$ e $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S$, S está "entre" as somas parciais de ordem par e as de ordem ímpar (S_{2k} à esquerda de S e S_{2k+1} à direita). A cada etapa a distância entre S_n e S_{n+1} fica menor porque $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Observação 4.10. A condição ii) é necessária para a série alternada ser convergente, mas a condição i) não é, como mostra o seguinte exemplo:

$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\ldots$ não satisfaz a condição i).

Mostre!

Mas a série é convergente e sua soma $S=-\frac{1}{2}$.

Mostre!

Exemplo 4.11. Aplicação do Teste da Série Alternada

A série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é convergente.

De fato, para todo n, $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, com $b_n = \frac{1}{n} > 0$.

De $n < n+1$ temos $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, ou seja, $b_n > b_{n+1}$, para todo n.

Além disso, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Então, como as condições do teste estão satisfeitas, a série harmônica alternada é convergente.

Nota: Veremos mais tarde que a soma da série harmônica alternada é $\ln 2$ (logaritmo natural de dois).

Mais geral: p **-Séries Alternadas**

A p-série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots$ é convergente se $p > 0$.

A prova é análoga. Note que se $p = 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ é divergente e se $p < 0$, a p-série é divergente pelo Teorema do enésimo termo.

Exercício resolvido

12) Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{3n-1}$ é convergente ou não.

Resolução: A série dada é alternada e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{3n-1} = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{3n-1}\right), \text{onde } b_n = \frac{2n}{3n-1} > 0, \text{para todo } n.$$

O limite $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0$.

Então a condição ii) do Teste da Série Alternada não está satisfeita.

Analisaremos a convergência ou não da série, calculando o limite do n-ésimo termo da série:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 2n}{3n-1}.$$

O limite não existe, assim pelo teste do termo geral, a série é divergente.

Estimativas de Séries Alternadas

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, convergente pelo Teste da Série Alternada.

As somas parciais $S_{2k+1} = S_{2k} + b_{2k+1}$ e $S_{2k} = S_{2k-1} - b_{2k}$ podem ser escritas como $S_{n+1} = S_n \pm b_{n+1}$. Como $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ está entre S_n e S_{n+1} então, $|S - S_n| \leq b_{n+1}$.

Exemplo 4.12. Vamos testar a desigualdade $|S - S_n| \leq b_{n+1}$ em uma série cuja soma conhecemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \ldots$$

Usando uma calculadora $S_8 = 0,6640625$. Sabemos que $S = \frac{2}{3}$. Então

$$|S - S_8| = \left|\frac{2}{3} - 0,6640625\right| = 0,002604166.$$

Pela estimativa acima, $|S - S_8| \leq b_9 = \frac{1}{256} = 0,00390625$.

Exercício Resolvido

13) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ é convergente e encontre a soma com precisão de três casas.

Resolução:

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = -\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ..\right) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right)$$

sendo $b_n = \frac{1}{n!} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Primeiro vamos mostrar que a série éconvergente.

i) $(n+1)! = (n+1)\cdot n! > n!$, implica que $\frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!}$. Logo, $b_n > b_{n+1}$ para todo n.

ii) $0 < b_n = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$, pois $n! > n$. Como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ então $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$.

Então pelo Teste da Série Alternada a série dada é convergente.

Seja $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ e seja $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ a enésima soma parcial. Queremos encontrar n tal que $\left|S - S_n\right| \leq b_{n+1} \leq 0,0001$.

$$b_1 = 1,\ b_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = 0{,}5,\ b_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{3\cdot 2!} = \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots,$$

$$b_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0{,}04166\ldots,\ b_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0{,}00833\ldots,$$

$$b_6 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} = 0{,}001388\ldots,\ b_7 = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} = 0{,}00019841\ldots$$

Então, $n+1=7$ e $n=6$. Assim,

$$S_6 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = -0{,}6318$$

aproxima S com precisão de três casas decimais.

4.6.2 Séries absolutamente convergentes

Continuamos considerando séries que têm termos negativos, mas agora a troca dos sinais algébricos é irregular.

Exemplo 4.12 Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \ldots$.

Lembremos que $\cos\theta > 0$ se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$ e $\cos\theta < 0$ se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$. Como $n^2 > 0$, para todo n, $a_n = \frac{\cos n}{n^2} < 0$ para alguns índices n, mas não de modo alternado.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, uma série qualquer (sem restrição de sinais algébricos nos termos a_n) e consideremos a série cujos termos são os valores absolutos dos termos desta série, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots$.

Definição 4.2. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **absolutamente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

Exemplo 4.13.

a) É claro que, toda série de termos não-negativos convergente é absolutamente convergente.

b) A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$, com $-1 < r < 1$, é absolutamente convergente (na verdade é convergente).

Por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ é absolutamente convergente porque a série dos valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ é convergente.

A convergência absoluta é importante por dois motivos: primeiro porque como $|a_n|\geq 0$, para todo n, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ é uma série de termos positivos para o qual temos testes eficazes para verificar sua convergência. O segundo motivo é dado pelo próximo teste.

Proposição 4.8. *Teste da Convergência Absoluta*

Se uma série é absolutamente convergente então ela é convergente, ou seja, se $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é convergente.

Demonstração: Se a série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ é convergente então pelo Critério de Cauchy (Teorema 4.1), dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$\big||a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+p}|\big|<\varepsilon$, quaisquer que seja $n>N$, e $p\in\mathbb{N}$.

De $|a_n|\geq 0$, para todo n,

$\big||a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+p}|\big|=|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+p}|\geq a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}$

e temos $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$, quaisquer que seja $n>N$, e $p\in\mathbb{N}$. Logo, pelo mesmo critério a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é convergente.

■

Observação 4.11. A recíproca do teste é falsa: nem toda série convergente é absolutamente convergente.

Exemplo 4.14. "clássico" A série harmônica alternada é convergente, com mostramos no Exemplo 4.11 (acima), mas ela não é absolutamente convergente porque a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ não é convergente.

Nota: Se uma série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é convergente, mas não é absolutamente convergente, dizemos que ela é **condicionalmente convergente**.

Exercício Resolvido

14) Analise a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n_2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \ldots$

Resolução. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ a série dos valores absolutos dos termos. De $|\cos n| \leq 1$ segue que $a_n = \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Como $a_n > 0$ e $b_n = \frac{1}{n^2} > 0$, para todo n, podemos usar o Teorema da Comparação e do fato de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ser convergente, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ é convergente. Assim, a série dada é absolutamente convergente e pelo Teste da Convergência Absoluta ela é convergente.

Exemplo 4.15. p-Série Alternada

Abaixo do Exemplo 4.10, observamos que a p-série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ é convergente se $p > 0$ e divergente se $p \leq 0$. Como a $a_n \leq b_n$ p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ é absolutamente convergente se $p > 1$ e condicionalmente convergente se $0 < p \leq 1$.

Por exemplo;

$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/2}}$ é condicionalmente convergente.

$1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$ é absolutamente convergente.

Nota: Pelo Teste da Convergência Absoluta, para provar que uma série é convergente, basta demonstrar que é absolutamente convergente. Para isso, podemos usar os critérios de convergência para séries com termos positivos porque todo critério de convergência para séries com termos positivos é um critério de convergência absoluta. Por exemplo,

Proposição 4.6′. Teste da Razão (Critério de L'Alembert)

Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n \neq 0$, para todo.

1) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$, então a série é absolutamente convergente e portanto convergente.

2) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1$ ou $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, então a série é divergente.

3) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, nada se pode concluir.

Proposição 4.7′. Teste da Raiz (Critério de Cauchy)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série qualquer.

1) Se $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$, então a série é absolutamente convergente e portanto convergente.

2) Se $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$ ou $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, então a série é divergente.

3) Se $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o teste falha.

Exemplo 4.16. Podemos generalizar o Exercício resolvido 4.12 b) do seguinte modo: seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^r c^n$, onde c e r são números reais quaisquer porém fixos. Calculando o limite $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^r c^n} = \lim_{n\to\infty}|c|n^{\frac{r}{n}} = |c|$ ($\lim_{n\to\infty} n^{\frac{r}{n}} = 1$, calculado no referido exercício para $r = 3$). Então pelo Teste da Raiz a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^r c^n$ é (absolutamente) convergente quando $|c| < 1$. É claro que , se $|c| \geq 1$, a série é divergente porque o termo geral não a tende a zero.

Nota: Aplicamos o Teste da Raiz, mas obteríamos o mesmo resultado usando o Teste da Razão. Em geral é mais fácil calcular o limite da razão do que o da raiz porque, quando efetuamos o quociente quase sempre fazemos simplificações, mas o Teste da Raiz é mais eficaz do que o da Razão. A última afirmação é comprovada pelo fato que se $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe então $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ existe e os dois limites são iguais. Também há exemplos que comprovam a afirmação, mas deixamos para o leitor pesquisar.

4.6.1 Exercícios

1) Use o Teste da Série Alternada para verificar se as séries são convergentes ou não.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$

2) Verifique se as séries são absolutamente convergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n^5+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2+n}{3+n}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^{2n-1}}{(2n-1)!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$

3) Quais das séries convergentes no Exercício 16) não são absolutamente convergentes, ou seja, são condicionalmente convergentes? Justifique sua resposta.

4) Analise, justificando, quais das séries são convergentes e quais são divergentes. (Lembre-se de que pode existir mais de uma justificativa.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{arctg} n}{1+n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} n \,\text{sen} \frac{1}{n}$

Respostas dos exercícios

4.2.1 Exercícios

1) a) $a_{n=}\dfrac{3}{5^n}$; b) $a_n = \dfrac{x^n}{(n+1)!}$; c) $a_n = \dfrac{r^n}{n^{10}}$

3) a) $S_n = \dfrac{7(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$, $S = 14$

b) $S_n = \dfrac{1+(-1)^{n-1}2^n}{3}$, divergente

c) $S_n = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{n+2}$, $S = \dfrac{5}{2}$

4) a) $S = \dfrac{7}{10}$; b) $S = \dfrac{21}{2}$; c) divergente; d) $S = \dfrac{\pi}{1+\pi}$

5) a) x no intervalo $]2, 4[$, $S = \dfrac{4}{4-x}$;

b) x tal que $-1 < x < 1$, $S = \dfrac{1}{1-x^2}$;

c) x em $]-3, 1[$, $S = \dfrac{2}{1-x}$;

d) x tal que $-\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{1}{5} < x < \dfrac{1}{5}$, $S = \dfrac{1}{1-5x}$.

6) 28m

8) $t = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$

4.3.1 Exercícios

1) a) convergente; b) divergente; c) divergente; d) convergente ;
e) convergente; f) divergente ; g) divergente .

4.4.1 Exercícios

1) a) $S = \frac{1}{2}$; b) $S = \frac{23}{10}$; c) $S = 1$.

4.5.1 Exercícios

2) a) $|R_n| \leq \frac{10}{n^{0,1}}$; b) $|R_n| \leq \frac{1}{n}$

3) a) convergente (comparação com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$);

b) convergente (comparação: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$);

c) divergente (comparação com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$);

d) convergente (comparação com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

4) a) convergente , $l = \frac{1}{3}$; b) convergente , $l = \frac{1}{e}$;

c) e d) divergentes , $l = +\infty$.

4.6.1 Exercícios

1) a) convergente; b) divergente; c) convergente; d) convergente;
e) convergente.

2) a) absolutamente convergente (compare com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$);

b) divergente $(\lim_{n \to \infty} a_n = 1)$; c) divergente (Teste da Integral) ;

d) absolutamente convergente (compare com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$);

e) absolutamente convergente (Teste da Razão: $l = 0$) ;

f) absolutamente convergente $\left(|a_n| = \frac{1}{n^{3/2}} ;\ p - \text{série convergente} \right)$

3) a) ; d) e e)

4) a) convergente (série geométrica, $r = \dfrac{1}{\pi}$) ;

b) divergente (p-série , $p = \dfrac{1}{2}$) ;

c) divergente desde que $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 1}} \geq \dfrac{1}{2n^{2/3}}$;

d) divergente ($a_n > \dfrac{1}{2n}$) ;

e) convergente (compare a_n com $\dfrac{1}{n^2}$) ; f) convergente ($l = 0$) ;

g) convergente (Teste da Integral) ; h) convergente , $\ell = \dfrac{1}{e}$;

i) convergente ($l = 0$) ; j) divergente (Teste do enésimo termo).

Capítulo 5

Séries de Potências

Capítulo 5

Séries de Potência

No resumo da história das séries, mencionamos que a investigação das sequências e séries de funções teve início na segunda metade do século XVII, com Newton e Leibniz, que desenvolveram representações de séries de algumas funções. Em 1669, Newton, com menos de 30 anos, descobriu que a função $(1+x)^c$*, com* c *real arbitrário, pode ser escrita como uma série de potências de* x.

As séries de Taylor e de Maclaurin não foram inventadas por, respectivamente, Brook Taylor (1685-1731) e Colin Maclaurin (1698-1746). James Gregory (1638-1675) já tinha trabalhado com a série de Taylor e publicado a série de Maclaurin para muitas funções trigonométricas antes deles terem nascido. Taylor desenvolveu, sem conhecer o trabalho de Gregory, um método baseado em cálculo para gerar representações de funções em séries. O livro que Maclaurin escreveu em 1742 popularizou as representações de funções em séries e, embora ele nunca tenha afirmado que as tinha descoberto, a série de Taylor centrada em zero ficou conhecida como a série de Maclaurin.

5.1 Introdução

No Exercício 3 de aplicação da série geométrica vimos que

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}, \text{ se } -1<x<1. \tag{1}$$

Considerando x variável, a expressão à esquerda da igualdade (1) define a função

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \text{ cujo domínio é } \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

A correspondência $x \to 1+x+x^2+x^3+\ldots$ define uma função real no intervalo $]-1,1[$, pois para cada x nesse intervalo a série é convergente, ou seja, $1+x+x^2+x^3+\ldots=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x+...+x^n)$ existe e é um número real e sabemos que se o limite existe ele é único.

A igualdade acima (1), ou a igualdade das duas funções, é válida apenas no intervalo $]-1,1[$ e nesse domínio a série de potências de x representa a função $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Reescrevendo a igualdade (1) acima, trocando de lado as expressões, podemos escrever a função $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ como uma série de potências de x:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \text{, se } -1<x<1.$$

Note que evitamos a notação sigma $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ para lembrar mais uma vez a observação feita quando estudamos as séries geométricas. A série geométrica $a+ax+ax^2+ax^3+\ldots$ é convergente, para todo x tal que $|x|<1$, em particular, para $x=0$ converge para o valor a. Quando usamos a notação sigma $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$, para $x=0$ e $n=0$ temos 0^0, que **não é um número!** Para evitar isso, podemos colocar $x\neq 0$ e analisar quando $x=0$ ou escrever $a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}ax^n$. Mas como $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$ é apenas notação e a série é $a+ax+ax^2+ax^3+\ldots$, estabelecemos que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$ é igual a a, quando $x=0$ (e não é resultado da substituição de x por 0), e usamos a notação $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$, sendo x tal que $-1<x<1$.

Primeiro estudaremos as séries do tipo $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ e depois aprenderemos a representar certas funções como séries de potências de x.

5.2 Série de potências e convergência

Antes da definição, voltemos ao Exemplo $1+x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$, se $-1<x<1$. Por definição $1+x+x^2+x^3+\ldots=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x+...+x^n)$.

Note que as somas parciais $S_n=1+x+x^2+\ldots+x^n$ são polinômios. Mas, do mesmo modo que a série numérica não é uma "soma infinita", a série de potências de x não é um "polinômio infinito". Lembre-se que pela definição de polinômio as potências das variáveis são números inteiros não negativos, portanto finito. A forma geral de um polinômio a uma só variável é dada por $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$, em que os c_i são números reais constantes. Além disso, o domínio de qualquer função polinomial é todo $\mathbb{R}$ e no exemplo acima o domínio do "polinômio infinito" é $-1 < x < 1$.

Definição 5.1. Uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots$$

é denominada **série de potências em** $(x-a)$ ou **série de potências centrada em** a (ou **ao redor de** a). Os números reais $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ são os **coeficientes da série**.

O caso particular $a = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$ é denominada simplesmente **série de potências**.

Observação 5.1. O caso geral se reduz ao caso particular $a = 0$ pela mudança de variável

$$y = x - a: \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_ny^n.$$

(E resultados obtidos para $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ são facilmente adaptadas para as séries centradas em $a \neq 0$).

Exemplo 5.1

a) O exemplo da introdução $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ é uma série de potências (centrada em $a = 0$), com coeficientes $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \ldots = 1$.

b) A série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \ldots$$

está centrada em $a = 3$ e os coeficientes são $c_0 = 1$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $\ldots$, $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $\ldots$

c) A série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

é uma série de potências (centrada em $a=0$) e os coeficientes são $c_0=1$ ($0!=1$, por definição), $c_1=1$, $c_2=\frac{1}{2!}$, $c_3=\frac{1}{3!}$, $\dots$, $c_n=\frac{1}{n!}$, $\dots$

A primeira questão é saber para quais valores de x uma série de potências é convergente. Note que para $x=a$, $(x-a)^n=0$, para todo $n\geq 1$ e então qualquer série de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ é convergente quando $x=a$. Assim, toda série de potências sempre é convergente pelo menos quando x é o centro.

Como para cada valor $x=k$ temos uma série numérica, utilizamos os resultados do capítulo anterior para estudar a convergência das séries de potências.

Exemplo 5.2. O exemplo da introdução $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ é convergente se $|x|<1$ e divergente se $|x|\geq 1$.

De modo geral, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}c(x-a)^n$, com coeficientes $c_n=c, \forall n,$ é convergente se $|x-a|<1$ $(a-1<x<a+1)$ e divergente se $|x-a|\geq 1$ $(x\geq a+1 \text{ ou } x\leq a-1)$.

Observação 5.2. A série geométrica é base do Exemplo 5.2. Associamos a uma série de potências dado uma série geométrica se $c_n=c$, constante, para todo n. Lembremos que a série geométrica é uma série especial de que temos informação completa em relação à convergência e à divergência.

Exemplo 5.3. Seja a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$.

Para o centro $x=0$ a série é convergente. Seja $a_n=\frac{x^n}{n!}$, para cada $x\neq 0$ (positivo ou negativo), e calculemos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right|=\left|\frac{x}{n+1}\right|=\frac{|x|}{n+1}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{n+1}=0$ independentemente do valor de x, pelo Teste de Razão a série numérica é convergente, qualquer que seja $x\in\mathbb{R}$. Logo, a série de potências dada é convergente para todos os números reais.

Exemplo 5.4. Consideremos agora a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$$

Para cada x, escrevemos $a_n = n!x^n$, e assim,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x|,\ x\neq 0.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, se $x\neq 0$, resultado que pelo Teste da Razão implica que a série é divergente, qualquer que seja $x\neq 0$. Então a série de potências é convergente apenas quando $x=0$.

Nota. Nos dois últimos exemplos aplicamos o Teste da Razão, mas devemos estar atentos porque os dois testes, da Razão e da Raiz, falham quando o limite é igual a um!

Exemplo 5.5. Encontrar todos valores de x para os quais a série de potências $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$ é convergente.

Resolução. Sabemos que a série de potências é convergente quando $x=2$. Para $x\neq 2$, o termo geral é $a_n = \dfrac{(x-2)^n}{n}$ e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{(x-2)^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x-2|.$$

Como, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}|x-2| = |x-2|$ pelo Teste da Razão, a série é absolutamente convergente, portanto convergente se x satisfaz $|x-2|<1$, e é divergente se $|x-2|>1$. O teste falha quando $|x-2|=1$, ou seja, quando $x=1$ ou $x=3$. Lembre-se que queremos encontrar todos os valores de x para os quais a série de potências é convergente.

Para $x = 1$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que é a série harmônica alternada, portanto convergente. E se $x = 3$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

a série harmônica que é divergente.

De $|x-2| < 1$ temos $-1 < x-2 < 1$, ou $1 < x < 3$. Assim, a série de potências é convergente quando x é tal que $1 \leq x < 3$.

Nos exemplos acima, encontramos três diferentes conjuntos de valores de x para os quais as séries de potências são convergentes: um intervalo finito (Exemplos 5.2 e 5.5), todo o conjunto dos números reais (Exemplo 5.3) e o conjunto unitário cujo elemento é o centro da série (Exemplo 5.4). Essas são as únicas possibilidades e resultam do Teste da Razão ou da Raiz.

Teorema 5.1. (Teorema da convergência para séries de potências)
Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ dada, existem apenas três possibilidades:

i) Existe um número real $R > 0$ tal que a série é convergente quando x é tal que $|x-a| < R$ e é divergente quando $|x-a| > R$.

ii) A série é convergente qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

iii) A série é convergente apenas quando $x = a$.

Observação 5.3. Se $|x-a| = R$, a série pode ser convergente ou divergente. Então, para $x = a + R$ e $x = a - R$, as séries devem ser checadas com algum teste.

O número R é denominado **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, $R = +\infty$ no caso ii) e $R = 0$ no caso iii).
O conjunto de todos os valores de x para os quais a série é convergente é o **intervalo de convergência**.

Do item i) do Teorema 5.1 e da Observação 5.3 resultam que o intervalo de convergência pode ser:

- aberto: $]a-R, a+R[$,
- semiaberto: $]a-R, a+R]$ ou $[a-R, a+R[$,
- fechado: $[a-R, a+R]$.

ii) O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser representado por $]-\infty, +\infty[$.

Nos exemplos acima temos,

Séries	Raio de convergência	Intervalo de convergência
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (série geométrica)	$R=1$	$]-1,1[$
$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$	$R=0$	$\{0\}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R=+\infty$	$]-\infty,+\infty[$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$	$R=1$	$[1,\ 3[$

Da Observação 5.1, segue que

Séries	Raio de convergência	Intervalo de convergência
$\sum_{n=0}^{\infty} c(x-a)^n$ (série geométrica)	$R=1$	$]a-1,a+1[$
$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-a)^n$	$R=0$	$\{a\}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$	$R=+\infty$	$]-\infty,+\infty[$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$	$R=1$	$[a-1,a+1[$

Resumo para encontrar o intervalo de convergência

1º Passo. Aplique o Teste da Razão (ou da Raiz) para encontrar o intervalo I em que a série é (absolutamente) convergente. Obtemos, $I =]a-R, a+R[$ ou $I =]-\infty, +\infty[$ ou $I = \{a\}$.

2º Passo. Se o intervalo de convergência é $I =]-\infty, +\infty[$ ou $I = \{a\}$, ele está completamente determinado.

3º Passo. Se $I =]a-R, a+R[$, devemos verificar se a série é convergente ou divergente quando x é um dos extremos do intervalo, ou seja, $x = a+R$ e $x = a - \mathrm{R}$. Para isso usamos os outros testes; da comparação, da integral ou da série alternada.

Exercício resolvido

1) Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

Resolução.

a) Seja $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$. Então,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{(n+1)-1} x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1} \frac{2n-1}{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}\right| = \left|\frac{(-1)(2n-1)}{2n+1} x^2\right| = \frac{2n-1}{2n+1} x^2 \ , \ n \geq 1.$$

Logo, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} x^2 = x^2$.

Pelo Teste da Razão, a série é absolutamente convergente quando $x^2 < 1$ e divergente quando $x^2 > 1$. Note que $x^2 < 1$ vale se $-1 < x < 1$. Assim, a série absolutamente convergente, logo convergente, para x tal que $-1 < x < 1$ e divergente para $x > 1$ ou $x < -1$. Então podemos concluir que o raio de convergência é $R = 1$. Para encontrar todo o intervalo de convergência, precisamos verificar a convergência nos extremos do intervalo.

Para $x=1$ e $x=-1$, temos as seguintes séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}.$$

As duas são séries alternadas com $b_n=\dfrac{1}{2n-1}>0$ (uma série é oposta à outra).

Note que, para todo n, $2(n+1)-1=2n+1>2n-1$, o que implica

$$\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2(n+1)-1},$$

ou seja, $b_n>b_{n+1}$. Isso mostra que a sequência (b_n) é decrescente. Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0,$$

pelo Teste da Série Alternada as duas séries são convergentes.

Assim, a série de potências é convergente para todo x tal que $-1\le x\le 1$ (ou $x\in[-1,1]$).

b) Podemos escrever $a_n=\dfrac{(-3x)^n}{\sqrt{n+1}}$ como $a_n=\dfrac{(-1)^n(3x)^n}{\sqrt{n+1}}$. Assim,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}(3x)^{n+1}}{\sqrt{n+1+1}}\frac{\sqrt{n+1}}{(-1)^n(3x)^n}\right|=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}3|x| \text{ e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}3|x|=3|x|.$$

Pelo Teste da Razão, a série é absolutamente convergente se $3|x|<1$, ou $|x|<\dfrac{1}{3}$, e divergente se $|x|>\dfrac{1}{3}$.

Para $x=\dfrac{1}{3}$ temos a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ que é convergente (veja Exercício proposto 15) ou prove como no item a)).

Se $x=-\dfrac{1}{3}$, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ é uma p-série com $p=\dfrac{1}{2}$, logo é divergente.

Conclusão: a série de potências é convergente quando $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$

Pelo Teste da Razão, a série é absolutamente convergente se $3|x|<1$ ou $|x|<\frac{1}{3}$ e divergente se $|x|>\frac{1}{3}$. Logo o raio de convergência é $R=\frac{1}{3}$.

5.2.1 Exercícios

1) Encontre o raio e determine o intervalo de convergência das seguintes série de potências.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{10^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+8}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$

j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$

5.3 Representação de funções como séries de potências

Na introdução do capítulo vimos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é convergente e sua soma é $f(x)=\frac{1}{1-x}$ no domínio de convergência $]-1,1[$ e dizemos que a série representa a função f em $]-1,1[$.

Para cada x no domínio de convergência, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ é um número real e, assim, a correspondência $x \to \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ define uma função real cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

Do mesmo modo que raras vezes encontramos a soma exata de uma série numérica convergente, determinamos o intervalo de convergência de certas séries de potências, mas não encontramos uma expressão para a função soma. No caso particular da série geométrica, temos uma expressão para a função soma, então representaremos algumas funções como séries de potências pela manipulação dessa série ou utilizando diferenciação e integração de séries de potências.

De outro lado vamos expressar funções conhecidas como "polinômios infinitos". Isso é útil para, por exemplo:

1) Integrar funções que não possuem primitivas elementares. Um exemplo clássico é a função $f(x)=e^{-x^2}$;

2) Resolver equações diferenciais;

3) Produzir aproximações polinomiais. (As aproximações simplificam as expressões e são eficazes, pois os erros são pequenos, para representar funções em calculadoras e computadores).

Primeiros exemplos: Funções representadas como séries de potências pela manipulação de séries geométricas

1) A função $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in\,]-1,1[$ foi escrita como a seguinte série de potências:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

no intervalo de convergência $]-1,1[$.

Geometricamente

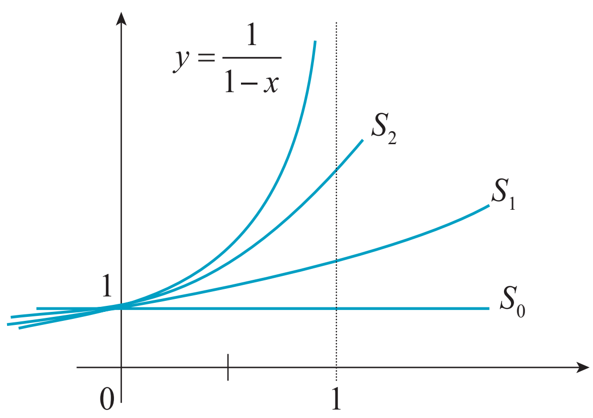


Figura 5.1: Aproximações de $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ por $S_0, S_1, S_2, \ldots$, no intervalo $[0,1[$.

Observe que

$$S_0 = 1$$
$$S_1 = 1 + x$$
$$S_2 = 1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$
$$S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$$

2) Substituindo x por $-x$ na série de potências em 1), obtemos:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \,,$$

no intervalo de convergência $]-1,1[$ (note que $|-x| = |x| < 1$).

3) Agora, substituindo x por x^2 na série resultante em 2), obtemos:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},\ 0 \le x^2 < 1,$$

o que implica $-1 < x < 1$.

4) Para $a > 0$, seja a função $f(x) = \dfrac{1}{a+x}$, $x \in I$, intervalo que determinaremos abaixo.

De $\dfrac{1}{a+x} = \dfrac{1}{a\left(1 + \dfrac{x}{a}\right)} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{a}}$,

substituindo x por $\dfrac{x}{a}$ na igualdade em 2), obtemos

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{a}\right)^n,$$

para $\left|\dfrac{x}{a}\right| < 1$ ou $|x| < a$. Assim, no intervalo de convergência

$-a < x < a$ temos $\dfrac{1}{a+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} x^n$.

Diferenciação e integração de séries de potências

Sejam $f_i, i = 1,2,3,\ldots$, funções de x. Sabemos que se f_1 e f_2 são funções diferenciáveis (deriváveis), então a soma $f_1 + f_2$ também é diferenciável e vale

$$[f_1 + f_2]'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$

De modo geral, a propriedade vale para um número finito n de funções diferenciáveis e

$$[f_1 + f_2 + \ldots + f_n]'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

O mesmo acontece para as funções integráveis, ou seja, se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções integráveis, então a soma é integrável e

$$\int\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)dx = \sum_{i=1}^{n}\left(\int f_i(x)dx\right), \text{ para } n \text{ finito.}$$

Para uma "soma infinita" não é muito simples. O caso geral poderá ser estudado em um curso mais avançado e nos restringiremos ao caso particular e especial das funções potências $f_n(x) = c_n(x-a)^n$, n inteiro positivo. Assim, por falta de conceitos específicos (por exemplo, convergência uniforme), o teorema seguinte será enunciado sem demonstração.

Teorema 5.2. Derivação e integração termo a termo.

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ uma série de potências com intervalo de convergência $]a-\mathrm{R}, a+\mathrm{R}[$. Seja f a função definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, para $x \in]a-\mathrm{R}, a+\mathrm{R}[$. Então,

i) A função f é diferenciável (e portanto contínua) em cada $x \in]a-\mathrm{R}, a+\mathrm{R}[$, e a derivada pode ser obtida por meio da derivação da série inicial termo a termo

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}[c_n(x-a)^n]' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}.$$

A série das derivadas é convergente para todo ponto interior do mesmo intervalo de convergência da série inicial, ou seja, o raio de convergência é o mesmo.

ii) A função f também é integrável e temos

$$\int f(x)dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(\int c_n(x-a)^n\,dx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

para cada x no interior do intervalo de convergência da série inicial, em que a série resultante das integrais também é convergente.

Observação 5.4. No teorema temos que tanto a série derivada como a integrada de uma série de potências são convergentes quando x pertence ao intervalo (aberto) de convergência da série inicial. Se x é um dos extremos do intervalo, a série pode ser convergente ou divergente, portanto no teorema temos apenas a garantia de que o raio de convergência é o mesmo.

Nota. Como mencionamos antes do enunciado do Teorema 5.2. acima, a derivação e integração termo a termo pode não valer para séries de outros tipos de funções. Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(n!x)}{n^2}$ é convergente para todo x, mas se derivamos termo a termo obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ que é divergente.

Exemplo 5.6. Represente cada uma das funções dadas como séries de potências, pela diferenciação ou integração de série de potências dos primeiros exemplos acima, e determine seu raio de convergência.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Observe que $\dfrac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$ e lembre-se que

$$[(1-x)^{-1}]' = -1(1-x)^{-2}(-1),\text{ ou seja, }\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'.$$

Da série geométrica $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para x tal que $|x|<1$ segue que,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\text{ para } x \text{ tal que } |x|<1.$$

(Note que se $n=0$, $x^0=1$ e a derivada da função constante 1 é a função nula).

Logo, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ e o raio de convergência é $R = 1$.

b) $g(x) = \ln|1+x|$

Do capítulo de integrais temos que $\int \dfrac{1}{1+x}dx = \ln|1+x| + c, c \in \mathbb{R}$, e do Exemplo 2) acima,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{, para } x \text{ tal que } |x| < 1. \text{ Então,}$$

$$\ln|1+x| + c = \int \frac{1}{1+x}dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\int x^n dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

para x tal que $|x| < 1$.

A igualdade tem que valer para todo x tal que $-1 < x < 1$, em particular para $x = 0$. Assim,

$$\ln|1+0| + c = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{0^{n+1}}{n+1} = 0,$$

o que implica $c = 0$. Portanto,

$$\ln|1+x| = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

e o raio de convergência é $R = 1$.

Exercício resolvido

2) Encontre uma representação da função $f(x) = \operatorname{arctg} x$ em série de potências.

Resolução. Lembre-se (ou veja numa tabela de derivadas) que

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\int x^{2n}dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c,$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

No Exemplo 3) acima, $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, para x tal que $|x| < 1$.

Então, para x tal que $|x|<1$.

Para $x=0$ temos, $\text{arctg}0=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{0^{n+1}}{n+1}+c$. Como $\text{arctg}\,0=0$, então $c=0$. Portanto,

$$\text{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\text{ , para } x \text{ tal que} |x|<1.$$

5.3.1 Exercícios

2) Encontre uma representação em série de potências para cada função e determine o intervalo de convergência.

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{9+x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$

e) $f(x)=\ln|4-x|$

f) $f(x)=\text{arctg}\left(\dfrac{x}{5}\right)$

3) Seja $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$. Calcule a série para $f''(x)$ e verifique que $f''(x)=-f(x)$.

(Isso deve ser verdade, porque $f(x)=\cos x$, como veremos mais adiante).

5.4 Série de Taylor e série de Maclaurin

Até agora utilizamos a função $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, que pode ser escrita como a série geométrica, no intervalo de convergência, para escrever outras funções como série de potências. É claro que essas outras funções estão relacionadas, de alguma forma, com a função f acima, seja por manipulação algébrica, diferenciação ou integração. Agora, nosso objetivo é escrever mais funções como séries de potências, utilizando uma técnica mais geral para a construção das séries.

5.4.1 Definições

Inicialmente faremos duas considerações baseadas no que estudamos na seção anterior.

1) Obviamente não podemos escrever a função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ como uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, num intervalo aberto contendo 0 (zero) porque a série é convergente se $x=0$, mas a função não é nem definida em $x=0$.

   Por outro lado, sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}, |x|<1$. Então se fizermos $y=1+x$ temos $x=y-1$ e a igualdade acima toma a forma $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (y-1)^n = \dfrac{1}{y}, |y-1|<1$, ou seja,

$$f(x)=\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x-1)^n \text{, para } x \text{ tal que } |x-1|<1.$$

   Isso significa que uma função pode não ser representada como uma série de potências com centro em $a=0$, mas pode ser escrita como uma série de potências com centro em $a\neq 0$.

2) O resultado do Teorema 5.2. é que, se uma função é definida por uma série de potências,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots,$$

   para $x\in]a-R, a+R[$, então a função é diferenciável e a derivada de f pode ser dada pela série derivada

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\ldots+nc_n(x-a)^{n-1}+\ldots,$$

   no mesmo intervalo de convergência $]a-R, a+R[$.

   Aplicando o mesmo teorema à função derivada f', obtemos a derivada segunda

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n (x-a)^{n-2}$$
$$= 2.1c_2 + 3.2c_3(x-a)+4.3c_4(x-a)^2+\ldots+n.(n-1)c_n(x-a)^{n-2}+\ldots$$

a série sendo convergente para cada x no interior do intervalo $]a-R, a+R[$.

A derivada terceira

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}$$
$$= 3.2.1c_3 + 4.3.2c_4(x-a) + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \ldots$$

para $x \in]a-R, a+R[$.

Assim por diante, a função f tem derivadas de todas as ordens e as séries derivadas, obtidas por derivação termo a termo, são convergentes no mesmo intervalo de convergência.

Note que a derivada de ordem n é
$f^{(n)}(x) = n!c_n + [(n+1)n(n-1)...2]c_{n+1}(x-a) + \ldots$, com
todas as demais parcelas contendo potências de $(x-a)$.

Para $x = a$, temos $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $f''(a) = 2.1c_2 = 2!c_2$, $f'''(a) = 3.2.1c_3 = 3!c_3$, e em geral, $f^{(n)}(a) = n!c_n$.

Se adotarmos $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$, então $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
e mostramos o seguinte teorema.

Teorema 5.3. Se uma função f tem representação (ou expansão) em série de potências ao redor de a (ou em a), isto é, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, |x-a| < R$, então os coeficientes da série são da forma $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Assim, se uma função f tiver uma expansão em série de potências em a, então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

para $|x-a| < R$.

Observação 5.5. No teorema temos uma condição necessária para uma função f ser representada por uma série de potências ao redor de a. Se f pode ser representada por uma série de potências ao redor de a, só pode ser pela série com coeficientes da forma

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Exemplo 5.7. Sabemos que $\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, para x tal que $|x|<1$ (Exemplo 5.6). Note que $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, para $n \geq 1$ e $c_0 = 0$.

Escrevendo $f(x) = \ln|1+x|$, temos $f(0) = \ln 1 = 0 = c_0$. De

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-2)(-1)(1+x)^{-3} = 2.1(1+x)^{-3}$$

$$f''''(x) = (-3)2.1(1+x)^{-4} = (-1)3.2.1(1+x)^{-4}$$

concluímos que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, para $n \geq 1$.

Para o centro da série $a=0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Então,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

que está de acordo com o teorema.

Tarefa. Faça o mesmo para $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x|<1$.

A primeira condição para escrever uma função arbitrária como uma série de potências centrada em a é que a função tem que ter derivadas de todas as ordens nos números de um intervalo I, centrado em a.

Definição 5.2. Seja $f: D \to \mathbb{R}$, onde o domínio D é um intervalo da reta e $a \in D$. Se $I \subset D$, a função f tem derivadas de todas as ordens em algum intervalo aberto I contendo a, então a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

é denominada **série de Taylor gerada pela função f em a** (ou ao redor de a ou centrada em a).

Caso especial de série de Taylor gerada por f em $a=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$

é denominada **série de Maclaurin gerada por** f.

Observação 5.6. Definimos uma série de potências especial, com os valores dos coeficientes determinados pelas derivadas de uma função f, num ponto a. Note que não igualamos, e nem podemos igualar, a série à função f porque não sabemos nem se a série é convergente. Como para qualquer série de potências temos que determinar o intervalo de convergência. No intervalo de convergência, nem sempre é possível encontrar a soma da série convergente, como já sabemos. Mesmo sendo gerada por uma função f, a soma pode ser diferente da função f, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 5.8. A função $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & se\ x \neq 0 \\ 0 \quad , & se\ x = 0 \end{cases}$ tem derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$.

De fato, para $x \neq 0$, $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Vamos calcular $f'(0)$ por definição de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

(lembre-se que $h \neq 0$).

Como $\lim\limits_{h \to 0} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0$, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Note (logo acima) que a derivada de $e^{-\frac{1}{h^2}}$ fica mais "complicada". Então escrevemos o quociente de outra maneira:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{h^2}}{-\frac{2}{h^3} e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{2e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{2} \frac{1}{e^{\frac{1}{h^2}}} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Assim, $f'(0) = 0$.

(Outra maneira de calcular $f'(0)$ é fazendo a mudança de

variável $\frac{1}{h} = y$ e lembrando que $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty$, $\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} = -\infty$,
$f_+ '(0) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0$ e também $f_- '(0) = 0$.).

Se $x \neq 0$,

$$f''(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Assim, $f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4}$. Escrevendo o quociente de outra maneira e aplicando a Regra de L'Hôpital duas vezes concluímos que $f''(0) = 0$.

De modo geral, $f^{(n)}(0) = \lim_{h\to 0} p\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h^2}}$, em que p é um polinômio, e mostramos que $f^{(n)}(0) = 0$, para todo n. Então a série de Maclaurin gerada por f em $a = 0$ é escrita como

$$0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

que é convergente para zero, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Logo, a soma da série de potências é a função nula e como $f(x) \neq 0$, para todo $x \neq 0$, f não pode ser representada pela série, ao redor do zero.

Conclusão. A toda função infinitamente num intervalo aberto I, podemos associar sempre uma série de Taylor em $a \in I$. Mas isso não é suficiente para essa série representar a função numa vizinhança de a.

Exercício resolvido

3) Encontre a série de Taylor gerada por $f(x) = \frac{1}{x}$ em $a = 2$. Verifique se a série é convergente e se a função soma é f em algum intervalo.

Resolução. No início deste item (5.4.1. Definições) representamos essa função, como série de potências ao redor de $a = 1$, a partir da série geométrica:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n,$$

para x tal que $|x-1|<1$. Agora vamos usar a definição da série de Taylor.

a) A série de Taylor gerada por f em $a=2$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\ldots$$

De $f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$, temos

$$f'(x)=-1x^{-2}$$

$$f''(x)=(-1)(-2)x^{-3}=2!x^{-3}$$

$$f'''(x)=2!(-3)x^{-4}=-3!x^{-4}.$$

E concluímos que $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-(n+1)}$ ou $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}$.

Assim, $f(2)=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{f'(2)}{1!}=\dfrac{-1}{2^2}$, $\dfrac{f''(2)}{2!}=\dfrac{1}{2^3}$, $\dfrac{f'''(2)}{3!}=\dfrac{-1}{2^4}$, ...,

$$\frac{f^{(n)}(2)}{n!}=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+\frac{1}{2^3}(x-2)^2-\frac{1}{2^4}(x-2)^3+\ldots$$

b) Note que a série é geométrica com $a=\dfrac{1}{2}$ e $r=-\dfrac{1}{2}(x-2)$.

Então ela é absolutamente convergente se $\left|-\dfrac{1}{2}(x-2)\right|<1$ ou $|x-2|<2$ e, para cada x nesse intervalo, a soma é

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}(x-2)}=\frac{1}{2+x-2}=\frac{1}{x}.$$

c) Portanto, mostramos que a série de Taylor gerada pela função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ em $a=2$ é convergente e

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+\frac{1}{2^3}(x-2)^2-\frac{1}{2^4}(x-2)^3+\ldots,$$

para x tal que $|x-2|<2$ ou $0<x<4$.

5.4.2 Caso que a série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ tem como soma a função $f(x)$

Seja f diferenciável (derivável) em a. Pela definição de derivada de f em a, $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, segue que $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+R_a(x)$, onde o "resto" $R_a(x)$ satisfaz $\lim_{x\to a}\frac{R_a(x)}{x-a}=0$. Denotamos por $P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$, polinômio de grau um (aproximação linear de f em a) e escrevemos $f(x)=P_1(x)+R_a(x)$. Nesse caso dizemos que P_1 aproxima f, na vizinhança de a, a menos de um infinitésimo de ordem maior que um.

Vamos generalizar esse resultado e para isso lembremos que uma função f é n-vezes diferenciável (derivável) em $x=a$, se existe um intervalo aberto I (contido no domínio de f), $a\in I$, tal que f é $(n-1)-$vezes diferenciável em I (ou seja, em cada $x\in I$) e, além disso, existe $f^{(n)}(a)$.

Definição 5.3. Seja f uma função com derivadas de ordem n em $a\in I$, I intervalo aberto da reta. O **polinômio de Taylor de ordem n gerado por f em a** é o polinômio

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Observação 5.7. Na definição escrevemos polinômio de Taylor de *ordem* n em vez de *grau* n porque $f^{(n)}(a)$ pode ser zero (veja definição de grau de polinômio).

Por exemplo, se $f'(a)=0$, então $P_1(x)=f(a)$, polinômio de primeira ordem e grau zero (ordem se refere à ordem da derivada).

Exemplo 5.9. Seja $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$. Sabemos que f tem derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$ e que $f^{(n)}(x)=e^x$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Para $x=0$, temos $f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1$. Então o polinômio de Taylor de ordem n gerado por f em $a=0$ é $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.

Para $n=1$, $P_1(x)=1+x$

$$n=2,\ P_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}=1+x+\frac{x^2}{2}$$

$$n=3,\ P_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},\ \text{etc.}$$

Exemplo 5.10. Para $f(x)=\cos x$ temos, para todo $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=-\text{sen}x$ $\qquad$ $f''(x)=-\cos x$

$f'''(x)=\text{sen}x$ $\qquad$ $f''''(x)=\cos x$ (e voltamos à função inicial).

Assim, $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\text{sen}x$ $\qquad$ $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$

Se $x=0$, então $\text{sen}0=0$ e $\cos 0=1$. Assim, $f^{(2k+1)}(0)=0$ e $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$ e os polinômios de Taylor de ordem $n=2k$ ou $n=2k+1$ são idênticos $P_{2k}(x)=P_{2k+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Teorema 5.4. Fórmula de Taylor infinitesimal

Seja f uma função n vezes derivável em $a\in I$, I intervalo aberto. Então, para todo x próximo de a ($x=a+h$, para h pequeno), tem-se

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n,a}(x),$$

sendo que o *resto* $R_{n,a}(x)$ satisfaz $\lim\limits_{x\to a}\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0$.

Além disso, o polinômio de Taylor

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é o único polinômio de ordem menor ou igual a n $(\le n)$ tal que $f(x)=P_n(x)+R_{n,a}(x)$ com $\lim\limits_{x\to a}\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0$.

Nota. Omitimos a prova do teorema não porque é difícil (utiliza o Teorema de Rolle), mas porque é muito extensa.

Observação 5.8. Do teorema segue que uma função f derivável até a ordem n em $x=a$, pode ser aproximada pelo polinômio de Taylor $P_n(x)$ $(f(x)=P_n(x)+R_{n,a}(x)$ ou $f(x)-P_n(x)=R_{n,a}(x))$, numa vizinhança de a, a menos de um infinitésimo de ordem superior a n, em relação a x $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0\right)$.

Exemplo 5.11. Seja p um polinômio de grau n. Dado $a \in \mathbb{R}$, a fórmula de Taylor infinitesimal nos dá

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x).$$

Note que $R_{n,a}(x)$ é um polinômio de ordem $\leq n$ e todas as suas derivadas, desde a ordem zero até n, se anulam em a, então $R_{n,a}(x) = 0$ para todo x e temos

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Uma maneira de estimar o resto $R_{n,a}(x)$ é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 5.5. Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Se f uma função derivável até a ordem $n+1$ em um intervalo aberto I, $a \in I$, então para todo $x \in I$ existe um número c entre x e a tal que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ou seja, $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Demonstração. Consideremos $x > a$. Para $x < a$, a prova é análoga. Por hipótese, as funções derivadas, até a ordem $n+1$, são definidas em $[a, x]$, para cada $x \in I$. Definimos

$\varphi : [a, x] \to \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{K}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

em que K é uma constante escolhida de modo que $\varphi(a) = 0$.

Como f é derivável até a ordem $n+1$, então φ é contínua em $[a, x]$ e derivável em $]a, x[$. Note que $\varphi(x) = 0$. Assim, pelo Teorema de Rolle (Cálculo I), existe $c \in]a, x[$ tal que $\varphi'(c) = 0$.

Calculando a derivada

$$\varphi'(t) = 0 - f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} + \frac{K}{(n)!}(x-t)^n =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{K}{n!}(x-t)^n = \frac{K - f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Segue que $\dfrac{K - f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = 0$. Portanto, $K = f^{(n+1)}(c)$ e provamos o teorema.

■

Nota. Se $f^{(n+1)}$ é integrável em $[a, x]$ ou $[x, a]$, então $R_{n,a}(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$ (Fórmula de Taylor com resto integral).

Estimativa do Resto

Se existe uma constante $M_n > 0$ tal que $\left|f^{(n+1)}(\mathrm{t})\right| \le M_n$, para todo t entre a e x, inclusive, então o resto $R_{n,a}(x)$ na Fórmula de Taylor satisfaz a desigualdade

$$\left|R_{n,a}(x)\right| \le \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Finalmente, se f é uma função que tem derivadas de todas as ordens em um intervalo aberto I, $a \in I$, então podemos escrever para todo $n \in \mathbb{N}$,

$f(x) = P_n(x) + R_{n,a}(x)$ onde $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, c_x entre a e x

(para cada n aplicamos o Teorema 5.5 e para cada x, existe c).

O valor absoluto $\left|R_{n,a}(x)\right| = \left|f(x) - P_n(x)\right|$ é denominado o **erro** associado à aproximação.

Se as condições para a estimativa do resto, acima, forem válidas para todo n, então $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$ e $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, ou seja, a função f é igual à soma da série de Taylor gerada por ela em a, para x numa vizinhança de a.

(No Teorema 5.4, o n é fixo e o limite é quando $x \to a$. Aqui, x é fixo e o limite é quando $n \to +\infty$.)

Exemplo 5.12. No Exemplo 5.9 encontramos o polinômio de Taylor de ordem n, gerado por $f(x) = e^x$ em $a = 0$: $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

A função f tem derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$ e $f^{(n)}(x) = e^x$, qualquer n.

De $f^{(n)}(0) = 1$ para todo n, a série de Taylor gerada por f em $a = 0$ (ou série de Maclaurin gerada por f) é

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

No Exemplo 5.3 mostramos que a série é convergente, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Resta mostrar que para cada x a soma da série é $f(x) = e^x$.

De fato, como a função satisfaz as condições do Teorema 5.5 para todo n e em todo $\mathbb{R}$, então para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um número c_x entre x e $a = 0$ tal que

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n,0}(x)$, onde $R_{n,0}(x) = \frac{e^{c_x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, para todo n. Para cada n e para cada x existe um c_x. (Não usamos $c_{n,x}$ para não "carregar" mais na notação.) Agora vamos encontrar uma estimativa para o resto e para isso usamos o fato de que $f^{(n+1)}(t) = e^t$ é uma função crescente.

Fixemos x, que pode ser maior que zero $(x>0)$ ou menor $(x<0)$.

i) Se $x<0$, então $x<c_x<0$ e, assim, $|R_{n,0}(x)|<\dfrac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, para todo n.

ii) Se $x>0$, $x>c_x>0$ e temos, $|R_{n,0}(x)|<\dfrac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, para todo n.

Seja M o maior entre 1 e e^x. Então $M>0$ (neste exemplo M não depende de n, somente de x) e $0\le |R_{n,0}(x)|<\dfrac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ para todo n.

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$, pois a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$ é convergente (Exemplo 5.3. Também pode ser calculado o limite.), para todo x, pelo Teorema do Confronto $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,a}(x)=0$.

Portanto, a soma da série é e^x, ou seja,

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots,\text{ para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Cálculo de e

Para $x=1$ na expressão de e^x acima temos $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$, que já vimos no Exercício resolvido 4.8, e denominamos **série** e. Agora vamos calcular o valor de e correto até a quinta casa decimal. Para isso usamos a aproximação pelo polinômio de Taylor

$e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+R_{n,0}(1)$, onde $R_{n,0}(1)=\dfrac{e^c}{(n+1)!}$, para algum c entre 0 e 1.

Sabemos que $1<e^c<e$ e que $e<3$ (veja o Exercício resolvido 4.8). Então

$\dfrac{1}{(n+1)!}<R_{n,0}(1)<\dfrac{3}{(n+1)!}$ e queremos que o erro seja menor que 10^{-5}.

Precisamos descobrir o n de $(n+1)!$ que satisfaça $3[(n+1)!]^{-1}<10^{-5}$.

Note que $10!=3628800$, $9!=362880$ e $8!=40320$, assim, $3[9!]^{-1}<10^{-5}$, mas $3[8!]^{-1}>10^{-5}$. Portanto, $(n+1)$ deve ser no mínimo 9 ou n no mínimo 8. Logo, com erro menor que 10^{-5}

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{8!}\approx 2{,}71828.$$

Exemplo 5.13. Os polinômios de Taylor de ordem $2k$ (n par) e $2k+1$ (n ímpar) gerados por $f(x)=\cos x$ em $a=0$ são idênticos:

$$P_{2k}(x)=P_{2k+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{(Exemplo 5.10).}$$

A função cosseno tem derivadas de todas as ordens em todo $x\in\mathbb{R}$ e $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$, $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\operatorname{sen} x$. Como $f^{(2k+1)}(0)=0$ e $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$, então a série de Maclaurin (pois o centro é zero) gerado por $f(x)=\cos x$ é

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$
$$=1+0x-\frac{1}{2!}x^2+0x^3+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+0x^{2k-1}+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\ldots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$

Pelo Teorema 5.5, para cada $x\in\mathbb{R}$,

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+R_{n,0}(x),$$

onde $R_{n,0}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum c_x entre x e 0.

Isso vale para cada n (n par ou ímpar). Como tanto $|\operatorname{sen}(t)|\le 1$ como $|\cos(t)|\le 1$, qualquer $t\in\mathbb{R}$, então $0\le |R_{n,0}(x)|\le \dfrac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ para todo n.

De $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ (o mesmo limite do exemplo anterior) segue que $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,a}(x)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Portanto,

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \text{ ou}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \text{ para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Exercício resolvido

Encontre a série de Maclaurin gerada por $f(x)=\operatorname{sen}x$ e mostre que a série é convergente para $f(x)=\operatorname{sen}x$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Resolução. Sabemos que $f(x)=\operatorname{sen}x$ tem derivadas de todas as ordens, para todo $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=\cos x$ $\qquad$ $f''(x)=-\operatorname{sen}x$

$f'''(x)=-\cos x$ $\qquad$ $f''''(x)=\operatorname{sen}x$ (e voltamos à função inicial)

$\dots$ $\qquad$ $\dots$

$f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$ $\qquad$ $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\operatorname{sen}x$

Assim, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$ e $f^{(2k)}(0)=0$. Logo, a série de Maclaurin tem apenas termos de ordem ímpar e é

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1},\quad x\in\mathbb{R}$$

(você pode encontrar expressão com $2k-1$ no lugar de $2k+1$. Nesse caso, os valores de k começam com $k=1$ em vez de $k=0$).

Usando o mesmo argumento do exemplo anterior, para a função cosseno, concluímos que

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Outro método de resolução:

Como $\operatorname{sen}x=(-\cos x)'$, usamos a representação de $f(x)=\cos x$ pela sua série de Maclaurin e a diferenciação (derivação) termo a termo para obter:

$$\operatorname{sen}x=\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2n)x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

Se fazemos $n-1=k$, então $n=k+1$. Assim, $2n-1=2(k+1)-1=2k+1$ e $n+1=k+2$. Também $n=1$ implica $k=0$. (Reindexação, Capítulo 4, 4.3.)

Logo, $\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, para todo $x\in\mathbb{R}$ (aqui só mudamos a letra k por n).

Nota. Para simplificar os enunciados:

- Série de Taylor gerada por f em a significará apenas a série.
- Série de Taylor para f em a significará que a série representa a função f, numa vizinhança de a, ou seja, além de a série ser gerada pela função, a série é convergente para $f(x)$, para cada x numa vizinhança de a.

Exercício resolvido

Encontre a série de Taylor para $f(x)=e^x$ em $a=2$.

Resolução. Como já vimos no Exemplo 5.12, a derivada de ordem n de $f(x)=e^x$ é $f^{(n)}(x)=e^x$, para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $x\in\mathbb{R}$.

Para $x=2$ temos $f^{(n)}(2)=e^2$, para todo n, logo, a série de Taylor de f em $a=2$ é $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$. O termo geral da série é $a_n=\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$,

então $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{e^2(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{e^2(x-2)^n}\right|=\frac{|x-2|}{n+1}$ e $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$, para todo x.

Daí, pelo Teste da Razão, a série é convergente para todo $x\in\mathbb{R}$, ou seja, o raio de convergência da série é $R=+\infty$.

Para cada n,

$e^x=e^2+\frac{e^2}{1!}(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\ldots+\frac{e^2}{n!}(x-2)^n+R_{n,2}(x)$, onde

$R_{n,2}(x)=\frac{e^{c_x}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}$, para algum c_x entre x e 2.

Como a função exponencial é crescente e^{c_x} está entre e^x e e^2. Seja M o maior entre os dois (e^x e e^2) e temos $0\le|R_{n,2}(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-2|^{n+1}$.

De $\lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ (já usamos esse limite duas vezes, com pequena variação), segue pelo Teorema do Confronto, que $\lim_{n\to\infty}R_{n,2}=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Portanto, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

Observação 5.9. Representamos a função $f(x)=e^x$ de duas maneiras. A série de Maclaurin é $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, para todo $x\in\mathbb{R}$, e a série de Taylor ao redor de $a=2$ é $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Para x próximo de zero, a melhor aproximação de e^x é dada pela série de Maclaurin e, se x é número próximo de a, pela série de Taylor ao redor de a.

Exercício resolvido

6) Encontre a série de Taylor para $f(x)=\operatorname{sen} x$ em $a=\frac{\pi}{3}$.

Resolução. O valor do seno em a é $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Utilizando as derivadas calculadas no Exercício resolvido 5.4, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$,

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, ... ,

$f^{(2k+1)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=(-1)^k\frac{1}{2}$ e $f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=(-1)^k\frac{\sqrt{3}}{2}$, para todo k.

Assim, a série de Taylor gerada por f ao redor de $a=\frac{\pi}{3}$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k}+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}\right]$$

(para cada valor de k temos duas parcelas consecutivas).

Na Fórmula de Taylor (Teorema 5.5) o resto, nesse caso, é $R_{n,\frac{\pi}{3}}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$, para algum c_x entre x e $\frac{\pi}{3}$. Como $\left|f^{(n+1)}(c_x)\right|\le 1$, qualquer que seja n (par ou ímpar), pois $|\operatorname{sen}(x)|\le 1$ e $|\cos(x)|\le 1$, qualquer que seja x, então $0\le\left|R_{n,\frac{\pi}{3}}(x)\right|\le\frac{1}{(n+1)!}\left|x-\frac{\pi}{3}\right|^{n+1}$ e nesse caso também, $\lim_{n\to\infty}R_{n,\frac{\pi}{3}}=0$. Assim,

$$\operatorname{sen} x=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k}+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}\right].$$

Observação 5.10. No item 5.2 representamos algumas funções como soma de séries de potências, pela manipulação de séries geométricas, pela diferenciação ou integração de séries obtidas antes. Pelo Teorema 5.3, se uma função f tiver uma representação por séries de potências em a, então seus coeficientes são da forma $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Logo, as séries de potências obtidas por métodos indiretos são realmente as séries de Taylor (ou Maclaurin no caso $a=0$) para tais funções.

O cálculo das derivadas sucessivas $f^{(n)}(x)$ na maioria das vezes é maçante e para funções simples como $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ é quase que impraticável. Por isso, costuma-se utilizar outros métodos, entre os quais os do item 5.2 e o que veremos abaixo, para obter a série de Taylor para uma dada função.

Combinações de séries de Taylor

Na interseção dos seus intervalos de convergência;

1) A série de Taylor para $f(x)+g(x)(f(x)-g(x))$ é a soma (diferença) da série de Taylor para $f(x)$ e a série de Taylor para $g(x)$.

2) Multiplicações por constantes e por potências de x de séries de Taylor resultam em séries de Taylor.

3) Também podemos fazer substituições, por exemplo, x por x^2, como fizemos nas séries geométricas em 5.2.

Exemplo 5.14. A série de Maclaurin para $f(x)=x\operatorname{sen}x$ é

$$x\operatorname{sen}x = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2(n+1)}}{(2n+1)!}, \text{ para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Exemplo 5.15. A série de Maclaurin para $f(x)=\cos(2x)$ é

$$\cos(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}, \text{ para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Tarefa. Sendo $\operatorname{sen}y=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}y^{2n+1}$ para todo $y\in\mathbb{R}$, trocar y por $x-\dfrac{\pi}{3}$ para obter a série de Taylor de $f(x)=\operatorname{sen}x$ em $a=\dfrac{\pi}{3}$, encontrada no exercício resolvido 6 (use a fórmula de adição de ângulos para $\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$).

5.4.1 Exercícios

1) Encontre o polinômio de Taylor de ordem n gerado por f em a.
   a) $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $n = 5$.
   b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 4$.
   c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $n = 3$.

2) Encontre a série de Taylor gerada por f com centro em a dado. Prove que a série obtida representa a função f, no intervalo de convergência.
   a) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $a = 2$.
   b) $f(x) = e^x$, a qualquer.
   c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \dfrac{\pi}{4}$.
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 1$.

3) Ache por qualquer método a série de Maclaurin para as funções.
   a) $f(x) = x^2 e^{-x}$
   b) $f(x) = \cosh x \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
   c) $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
   d) $f(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$
   e) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (sugestão: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos 2x]$)

5.5 Aplicações

5.5.1 Aplicações de Polinômios de Taylor.

Seja $f(x)$ igual à soma de sua série de Taylor; $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, x numa vizinhança de a. Se P_n é o polinômio de Taylor de ordem n, então $f(x) = P_n(x) + R_{n,a}(x)$ com $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$ e, assim, P_n pode ser usado como uma aproximação de f (denotamos por $f(x) \approx P_n(x)$).

A precisão da aproximação é obtida com a estimativa do resto $|R_{n,2}(x)| \le \dfrac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ se $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$. Utilizando essa mesma fórmula de estimativa, é possível decidir a ordem do polinômio que aproxima uma função para um dado erro.

Exemplo 5.16. Encontramos a série de Maclaurin para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$:

$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, sendo x qualquer número real.

Note que os coeficientes de índices pares são iguais a zero. Então a aproximação, por exemplo, $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ é a mesma que $\operatorname{sen} x \approx x + 0 \cdot x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot x^4 + \frac{x^5}{5!} + 0 \cdot x^6$.

A melhor estimativa do erro é dada por $|R_6(x)| \leq \frac{1}{7!}|x|^7$ (veja Exercício resolvido 5.4). Para x próximo de zero, por exemplo, $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$, ou $|x| < \frac{1}{5}$ temos, $|R_6(x)| \leq \frac{1}{7!}\left(\frac{1}{5}\right)^7 = \frac{1}{393750000}$.

Podemos usar essa aproximação para calcular, por exemplo, $\operatorname{sen} 10^\circ$. Para isso primeiro precisamos converter 10° em radianos:

180° ______ π

10° ______ α

o que implica $\alpha = \frac{\pi}{18}$ (que é menor que $\frac{1}{5}$).

Então, $\operatorname{sen} 10^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 \approx 0{,}17364817$ e com precisão de seis casas decimais $\operatorname{sen} 10^\circ \approx 0{,}173648$.

Por outro lado, se queremos os valores de x para os quais a aproximação tem precisão de 0,00005, resolvemos a desigualdade $\frac{1}{7!}|x|^7 = \frac{1}{5040}|x|^7 < 0{,}00005$.

De $|x|^7 < 0{,}252$ segue que $|x| < (0{,}252)^{\frac{1}{7}} \approx 0{,}82$.

Assim, a aproximação $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ tem precisão de 0,00005 quando $|x| < 0{,}82$.

Observação 5.11. Outra aplicação é o cálculo do número real e, visto depois do Exemplo 5.12.

5.5.2 Série binominal

A expansão $(a+b)^m$, onde o expoente m é um número inteiro, era conhecido pelos matemáticos chineses muitos séculos antes da época de Newton.

Teorema Binomial. Se a e b são números reais quaisquer e m é um número inteiro positivo, então

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}a^{m-k}b^k + \ldots + mab^{m-1} + b^m$$

O coeficiente de $a^{m-k}b^k$ pode ser escrito como $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Observe que a fórmula $\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$ não funciona para $k = 0$.

Mas como $0! = 1$, por definição, $\binom{m}{0} = 1$ e, assim escrevemos, $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k$.

No caso particular, $a = 1$ e $b = x$ temos $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k$.

Você deve conhecer essa expansão e a demonstração é por indução ou é uma consequência do resultado mais geral que veremos a seguir.

Queremos encontrar uma fórmula para $(a+b)^r$, onde r é um número real qualquer. Antes, algumas observações elementares:

i) Para $r = 0$, temos $(a+b)^0 = 1$ e o problema está resolvido. Então, vamos supor $r \neq 0$.

ii) A exponencial c^x é definida somente para $c > 0$. Portanto, temos que supor $a + b > 0$.

iii) Se $a = b$, então $(a+a)^r = 2^r a^r$ e o problema também está resolvido. Então, vamos supor $a \neq b$.

iv) Como a e b são dois números reais qualquer, podemos supor $a > b$ (se $a < b$, basta mudar para $b + a$ que é igual a $a + b$). Escrevendo $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ (note que $a \neq 0$) e fazendo $x = \frac{b}{a}$, obtemos $a + b = a(1+x)$.

Note que $|x|<1$, pois $|x|\geq 1$, isto é, $\left|\frac{b}{a}\right|\geq 1$ implica $\frac{b}{a}\geq 1$ ou $\frac{b}{a}\leq -1$. Daí $b\geq a$ ou $b\leq -a$, que contradizem $a>b$, acima, e $a+b>0$ (ii).

Conclusão: Basta achar uma fórmula para $(1+x)^r$, $r\neq 0$ e $|x|<1$.

Como comentamos na introdução deste capítulo, Newton foi o primeiro a estender a expansão de $(1+x)^r$, para o caso onde o expoente r não é inteiro positivo. Nesse caso, a expressão não é mais uma soma finita, e sim uma série de potências centrada em zero. Pelo Teorema 5.3, a série é de Maclaurin de $f(x)=(1+x)^r$ que vamos construir calculando as derivadas em $x=0$. Note que $f(0)=1$.

$$f'(x)=r(1+x)^{r-1} \qquad f'(0)=r$$

$$f''(x)=r(r-1)(1+x)^{r-2} \qquad f''(0)=r(r-1)$$

$$f'''(x)=r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3} \qquad f'''(0)=r(r-1)(r-2)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x)=r(r-1)\ldots(r-n+1)(1+x)^{r-n} \qquad f^{(n)}(0)=r(r-1)\ldots(r-n+1)$$

Portanto, a série de Maclaurin gerada por $f(x)=(1+x)^r$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n.$$

Aqui cabe uma observação: para $r=m$, inteiro positivo, sabemos que o quociente $\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$, mas se r não é inteiro positivo o fatorial $r!$ não é definido. Por outro lado, $\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}$ tem significado para qualquer número real r e qualquer inteiro $n\geq 1$. Então, para simplificar a notação podemos definir $\binom{r}{n}=\frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}$, qualquer número real r e qualquer inteiro $n\geq 1$.

Por exemplo, $\binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}=\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{3!2^3}=\frac{1}{2^4}$.

Observe que $\binom{r}{1}=r$, e definimos $\binom{r}{0}=1$. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n.$$

Para verificar a convergência da série, seja $a_n=\dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n$ e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{r(r-1)\ldots(r-n)}{(n+1)!}\frac{n!}{r(r-1)\ldots(r-n+1)}\right|=\frac{|r-n||x|}{n+1}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|r-n|}{n+1}|x|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\frac{r}{n}-1\right|}{1+\frac{1}{n}}|x|=|x|$, pelo Teste da Razão, a série é convergente quando $|x|<1$ e divergente quando $|x|>1$. Falta mostrar que o resto $R_{n,0}(x)$ tende a zero quando n tende a infinito. Isso é possível, mas é um pouco difícil, por isso apresentamos uma prova alternativa de que a função soma é $f(x)=(1+x)^r$, $|x|<1$. Para isso, como a série é convergente, seja $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$, para $|x|<1$. Temos que mostrar que $g(x)=(1+x)^r$.

Consideremos $h(x)=(1+x)^{-r}g(x)$ e primeiro vamos mostrar que $h'(x)=0$.

Derivando a série termo a termo, obtemos $g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}nx^{n-1}$.

Para reindexar a série fazemos $n-1=k$ e assim,

$$g'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k+1}(k+1)x^k.$$

Note que

$$\binom{r}{k+1}(k+1)=\frac{r(r-1)(r-2)...(r-(k-1))(r-k)}{(k+1)!}(k+1)$$
$$=\frac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!}(r-k)=\binom{r}{k}(r-k).$$

Logo,

$$g'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}(r-k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}rx^k-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}kx^k$$
$$=rg(x)-x\sum_{k=1}^{\infty}\binom{r}{k}kx^{k-1}$$
$$=rg(x)-xg'(x) \text{ ou } (1+x)g'(x)=rg(x).$$

Usando essa igualdade na derivada

$$h'(x)=-r(1+x)^{-r-1}g(x)+(1+x)^{-r}g'(x)$$

obtemos $h'(x)=-(1+x)^{-r-1}(1+x)\,g'(x)+(1+x)^{-r}g'(x)=0$. Então, $h(x)=c$, c constante, para $|x|<1$. Em particular, $h(0)=c$ e como $h(0)=g(0)=1$, concluímos que $h(x)=1$ e portanto, $g(x)=(1+x)^r$, como queríamos provar.

A Série Binominal: Para qualquer número real r e $|x|<1$, temos $(1+x)^r=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$, onde $\binom{r}{0}=1$ e $\binom{r}{n}=\dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}$, $n\geq 1$.

Exemplo 5.19. Usando a série binominal vamos representar a função $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ como uma série de potências.

Note que $\dfrac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}$, $r=-2$ na fórmula da série binominal e, assim, quando $|x|<1$, temos $\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n$.

Como

$$\binom{-2}{n}=\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)\ldots(-2-n+1)}{n!}$$
$$=\frac{(-1)^n 2.3.4\ldots(n+1)}{n!}$$
$$=\frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}$$
$$=(-1)^n(n+1)$$

então

$$\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n,\ |x|<1.$$

Exemplo 5.20. A série de Maclaurin para a função $f(x)=\sqrt{1+x}$ pode ser obtida usando a série binominal, pois $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Assim, para $|x|<1$,

$$\sqrt{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}x^4+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3\cdot 2}x^3+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4\cdot 3\cdot 2}x^4+\ldots$$

Logo, $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^3}x^2+\frac{1}{2^4}x^3-\frac{5}{2^7}x^4+\ldots, |x|<1$.

Note que $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$, *aproximação linear.*

$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^3}x^2$, *aproximação quadrática.*

Observação 5.11. A substituição de x dá outras aproximações:

$$\sqrt{1-x^2}\approx 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2^3}x^4, |x^2|<1 \text{ ou } |x|<1.$$
$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}\approx 1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2^3x^2}, \left|\frac{1}{x}\right|<1 \text{ ou } |x|>1.$$

5.5.3 Cálculo de integrais aproximadas.

Algumas funções são muito difíceis de integrar pelas técnicas estudadas, mas podemos usar a ideia de Isaac Newton e representar funções como séries de potências para depois integrar a série termo a termo.

Exemplo 5.21. A função $f(x)=\frac{1}{1+x^7}$ é um exemplo de função difícil de integrar. Então vamos representá-la como uma série de potências substituindo x por x^7 na série $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x|<1$ (série geométrica. Primeiros exemplos de 5.2): $\frac{1}{1+x^7}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{7n}=1-x^7+x^{14}-x^{21}+\ldots, |x|<1$. Integrando a série termo a termo, obtemos a integral indefinida da função dada como série de potências,

$$\int \frac{1}{1+x^7}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{7n} dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int x^{7n} dx$$
$$= c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{7n+1}}{7n+1}$$
$$= c + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \ldots$$

(c constante de integração), para $|x^7| < 1$ ou $|x| < 1$.

Exercício resolvido

a) Encontre uma série de potências para a integral indefinida $\int e^{-x^2} dx$.

b) Calcule a integral definida $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ com precisão de $10^{-3} (= 0,001)$.

Resolução.

a) Obtemos a série de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$ pela substituição $-x^2$ na série de Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Então integramos termo a termo a série resultante:

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots\right) dx$$
$$= c + x - \frac{x^3}{1!.3} + \frac{x^5}{2!.5} - \frac{x^7}{3!.7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots$$
$$= c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

para todo x (c constante de integração).

b) Para calcular a integral definida, usamos uma função primitiva (função F tal que $F' = f$), então podemos tomar $c = 0$.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots \Bigg|_0^1$$
$$= 1 - \frac{1}{1!\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} + \ldots$$

Note que a série é alternada, então o erro da aproximação da série pela soma parcial S_n é menor que 0,001 se n satisfaz $\frac{1}{n!(2n+1)} < \frac{1}{10^3}$ (Estimativa de séries alternadas 4.5.1).

Então, $n!(2n+1) > 10^3$ e calculando, por exemplo,

$4!\cdot 9 = 216, \quad 5!\cdot 11 = 1320$,

concluímos que devemos ter $n = 4$ $(n+1=5)$, no mínimo. Assim,

$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,7475$ (com precisão de $0,001$).

5.5.1 Exercícios

1) Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

a) Encontre a linearização (polinômio de Taylor de ordem 1) de f em $x = 0$.

b) A aproximação quadrática (ordem 2) de f em $x = 0$.

2) Determine a precisão da aproximação linear $\text{sen}x \approx x$ quando $|x| < 10^{-3}$.

3) Ache uma série para cada uma das seguintes funções e determine o intervalo (aberto) de convergência.

a) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$

b) $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^{10}}\,dt$

c) $f(x) = \sqrt[3]{2+x}$

d) $f(x) = (2+x^2)^r,\ r \neq 0$.

4)

a) Encontre uma série de potências para $\int \text{sen}(x^2)\,dx$.

b) Calcule a integral definida $\int_0^1 \text{sen}(x^2)\,dx$ com precisão de $10^{-3}(=0,001)$.

Respostas dos exercícios

5.2.1 Exercícios

1) a) $R = 1, \quad I =]-1, 1[$;

b) $R=1$, $I=[-1,\ 1]$;

c) $R=10$, $I=]-9,\ 11[$;

d) $R=0$, $x=0$;

e) $R=+\infty$, $I=]-\infty,\ +\infty[$;

f) $R=1$, $I=[-1,\ 1[$;

g) $R=\dfrac{1}{2}$, $I=[-2,\ -1]$;

h) $R=\dfrac{1}{5}$, $I=\left[0,\dfrac{2}{5}\right[$;

i) $R=2$, $I=]-4,\ 0]$;

j) $R=1$, $I=[-1,\ 1[$.

5.3.1 Exercícios

1) a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$ $I=]-1,\ 1[$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{9^{n+1}}$, $I=]-3,\ 3[$;

c) $-1+\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $I=]-1,\ 1[$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$, $I=]-1,\ 1[$;

e) $2\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n2^{2n}}$, $I=[-4,\ 4[$;

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\dfrac{x}{5}\right)^{2n+1}$, $I=]-5,\ 5]$.

5.4.1 Exercícios

1) a) $P_5(x)=(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3-\dfrac{1}{4}(x-1)^4+\dfrac{1}{5}(x-1)^5$

b)

$$P_4(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

c) $P_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3$.

2) a) $f(x) = 15 + 17(x-2) + 7(x-2)^2 + (x-2)^3$, para todo x.

b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n$, para todo x.

c) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} \right]$, para todo x.

d) $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$, $R = 1$.

3) a) $x^2 e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2}$, para todo x;

b) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para todo x;

c) $\operatorname{senh} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para todo x;

d) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, para todo x;

e) $\operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, para todo x.

5.5.1 Exercícios

1) a) $L(x) = 1$;

b) $Q(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$

2) a) erro $< \frac{(0,1)^9}{6}$;

b) erro $< \frac{(0,1)^3}{6} < 1,67 \times 40^{-4}$.

3) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{n+2}$, em $]-1, 1[$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{(10n+1)} x^{10n+1}$, em $]-1, 1[$;

c) $\sqrt[3]{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}$, em $]-2,\ 2[$;

d) $2^{r}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}\left(\frac{x^{2}}{2}\right)^{n}$, em $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

4) a) $c+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$;

b) 0,310 .

Bibliografia básica

STEWART, J. **Cálculo.** v. 2. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

THOMAS, G.B. *et all*. **Cálculo**. v. 2. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

Bibliografia complementar

LIMA, E.L. **Curso de Análise**. v. 1. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.

KONGUETSOF, L. **Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1974.