LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

1ª edição

Cálculo II

FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

CÁLCULO II

EQUIPE DE ELABORAÇÃO / PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO

Produção Acadêmica

Autor	Abílio Souza Costa Neto
Gerente de Ensino	Jane Freire
Supervisão	Ana Paula Amorim
Coordenador de Curso	Geciara da Silva Carvalho
Revisão Final	Adriano Pedreira Cattai Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.

Produção Técnica

Edição em LaTeX 2ε	Adriano Pedreira Cattai. Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.
Revisão de Texto	Carlos Magno
Coordenação	João Jacomel
Equipe Técnica	Alexandre Ribeiro, Cefas Gomes, Clauder Filho, Delmara Brito, Diego Doria Aragão, Diego Maia, Fábio Gonçalves, Francisco França Júnior, Hermínio Filho, Israel Dantas, Lucas do Vale, Marcio Serafim, Mariucha Ponte, Ruberval Fonseca e Tatiana Coutinho.

Sumário

Apresentação de Disciplina

Caro aluno,

Este material foi produzido com o objetivo de dar suporte aos alunos do curso da disciplina Cálculo Diferencial e Integral II, estudantes dos cursos das áreas de tecnologia e ciências exatas.

O eixo central do curso apresentado é a integração, que será apresentado em quatro principais eixos temáticos.

No Tema 1, estudaremos a integral indefinida, seu conceito e as principais técnicas de integração. São apresentados vários exemplos e exercícios propostos, com intuito de proporcionar uma assimilação gradativa e natural do conteúdo apresentado.

No Tema 2, apresentamos algumas técnicas de integração mais rebuscadas para alguns casos particulares de funções especiais, como as racionais, irracionais e trigonométricas.

No Tema 3, apresentamos ao estudante a integral definida, suas propriedades, interpretação geométrica e aplicações, como o cálculo de áreas e o cálculo do comprimento de arco de uma curva, que representa o gráfico de uma função.

No Tema 4, são calculadas a área de certas regiões e o comprimento de arcos de curvas que possuem equações em coordenadas polares, a área de superfícies de revolução e o volume de sólidos de revolução. Estudaremos, ainda, a integral imprópria e algumas aplicações à Física.

Todo o material foi preparado com bastante capricho, a escolha de cada exemplo, de cada exercício resolvido e proposto, a distribuição dos temas foi cuidadosamente feita com o objetivo de proporcionar ao estudante uma compreensão gradativa e natural dos conteúdos da disciplina, de uma maneira uniforme, suave e prazerosa. No final, uma atividade orientada foi elaborada para que seja resolvida, individualmente, e faça parte de sua de avaliação. Deixo em evidência o meu anseio de que estes propósitos tenham sido atingidos e/ou, ao menos reconhecidos.

Prof. *Abílio Souza Costa Neto.*

bloco temático 1 Integral Indefinida

tema 1 Antidiferenciação e a Integral Indefinida

A Integral Indefinida

Apresentação

Nesta primeira seção, apresentaremos o conceito de integral indefinida, bem como os processos mais básicos da operação de integração, que se apresenta, essencialmente, como a inversa da operação de derivação, já conhecida do estudante ao ter cursado a disciplina de Cálculo I. Para cada processo de integração serão aqui apresentados exemplos e exercícios propostos com o intuito de familiarizar o aluno com este conteúdo que, acredito, constitui uma das peças fundamentais no corpo do estudo do cálculo diferencial e integral.

1.1 A Integral Indefinida

Aqui, apresentaremos, inicialmente, o conceito de *primitiva* de uma função real, proposições que caracterizam, com maior clareza, este conceito e alguns exemplos, para depois introduzir o conceito do objeto principal desta seção, a integral indefinida.

1.1 Definição. Considere uma função $f(x)$. Definimos como uma *primitiva* da função $f(x)$, em um intervalo I, qualquer função $F(x)$ que satisfaça a igualdade $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Se o intervalo I corresponde ao domínio da função f, dizemos, simplesmente, que F é uma primitiva de f.

Por exemplo:

(a) A função $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^4$, pois, $F'(x) = \dfrac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4 = f(x)$.

(b) Mais geralmente, qualquer função da forma $F(x) = \dfrac{x^5}{5} + C$, onde c é uma constante, é uma primitiva de $f(x) = x^4$, uma vez que $F'(x) = \left(\dfrac{x^5}{5} + C\right)' = x^4 = f(x)$.

(c) A função $F(x) = 3 \cdot \cos(x) + C$ é uma primitiva de $f(x) = -3 \cdot \text{sen}(x)$, pois, $F'(x) = (3 \cdot \cos(x) + C)' = (3 \cdot \cos(x) + C)' = -3 \cdot \text{sen}(x) + 0 = -3 \cdot \text{sen}(x) = f(x)$.

> ***Nota* 1.** Uma primitiva de uma função $f(x)$ é comumente chamada de *antiderivada*, já que encontrá-la corresponde à operação inversa da derivação.

Uma generalização do que ocorre no item (b) do exemplo anterior é exposta no Teorema a seguir:

1.2 Teorema. Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Se G é uma outra primitiva de f, então $G(x) = F(x) + C$, para alguma constante arbitrária c e para todo $x \in I$.

Prova: Seja H a função definida por $H(x) = G(x) - F(x)$. Então, para todo $x \in I$, temos que $H'(x) = G'(x) - F'(x)$. Mas, por hipótese, $G'(x) = F'(x), \forall\, x \in I$. Logo, $H'(x) = 0, \forall\, x \in I$. Portanto, H é constante (em I), digamos, $H(x) = c$. Assim, $G(x) = F(x) + C, \forall\, x \in I$. □

O teorema acima afirma, simplesmente, que todas as infinitas primitivas de uma dada função diferem entre si pelo termo constante que aparece nas suas expressões. O Teorema a seguir reforça que não existem outras primitivas para uma função que não tenham esta forma.

1.3 Teorema. Seja F uma primitiva (ou antiderivada) particular de uma função f em um intervalo I. Então, toda primitiva de F em I é da forma $F(x) + C$, onde c é uma constante qualquer e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas atribuindo-se valores a c.

Prova: Vamos representar por G uma primitiva qualquer de f em I. Então, $G'(x) = f(x), \forall\, x \in I$. Como F é também uma primitiva de f em I, então temos $F'(x) = f(x), \forall\, x \in I$. Temos, portanto, $G'(x) = F'(x), \forall\, x \in I$. Pelo Teorema anterior, segue que existe c tal que $G(x) = F(x) + C, \forall\, x \in I$. Como nós indicamos por G qualquer outra primitiva de f em I, vem então que toda primitiva de f tem a forma $F(x) + C$, onde c é constante. □

1.4 Definição (Integral Indefinida)**.** Ao se determinar uma expressão para a família de primitivas de uma dada função $f(x)$, estamos realizando a operação inversa da diferenciação (ou derivação). Esta operação é denominada *antidiferenciação* (ou *integração*). Para indicá-la colocamos o símbolo $\displaystyle\int$ imediatamente antes da função f. Assim, a igualdade

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

nos diz que a integral indefinida de f é a família de funções dada por $F(x) + C$. A função $f(x)$ sobre a qual está sendo feita a operação de integração é denominada *integrando* e a constante c é denominada *constante de integração*.

Nota 2. O símbolo dx, que aparece junto à função f que está sendo "integrada", tem a finalidade de indicar a variável em relação à qual está sendo feita a integração. Se, por exemplo, a variável independente, ao invés de x, fosse t a integral seria escrita $\displaystyle\int f(t)\, dt$.

***Exemplo* 1.1.** Encontre:

(a) $\displaystyle\int 3x^2\, dx$; (b) $\displaystyle\int \cos(t)\, dt$; (c) $\displaystyle\int e^u\, du$; (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx$.

Solução:

(a) $\displaystyle\int 3x^2\, dx = x^3 + C$, pois $(x^3 + C)' = 3x^2$;

(b) $\displaystyle\int \cos(t)\, dt = \mathrm{sen}(t) + C$, pois $(\mathrm{sen}(t) + C)' = \cos(t)$;

(c) $\displaystyle\int e^u\, du = e^u + C$, pois $(e^u + C)' = e^u$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + C$, pois $(\ln(x) + C)' = \frac{1}{x}$.

O próximo teorema evidencia o fato de que a diferenciação e a integração são uma a inversa da outra.

1.5 Teorema. Seja f uma função e c uma constante. Então

i. $\displaystyle\int (D_x f(x))\, dx = f(x) + C$;

ii. $\displaystyle D_x\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)$.

Prova:

i. Óbvio, pela própria definição de integral indefinida.

ii. Suponha que F seja uma primitiva de f, ou seja, $F' = f$. Assim, temos:

$$D_x\left(\int f(x)\,dx\right) = D_x(F(x)+C) = D_x(F(x)) + 0 = f(x).$$

$\square$

Propriedades da Integral Indefinida

1.6 Teorema. Sejam f e g funções com primitivas em um intervalo I e c uma constante. Então,

i. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$ ii. $\displaystyle\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx;$

Prova: i. Sejam $F(x)$ e $G(x)$ primitivas quaisquer das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Então, $F(x) \pm G(x)$ é uma primitiva da função $f(x) \pm g(x)$, pois $(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$. Daí,

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = (F(x) \pm G(x)) + C = (F(x) \pm G(x)) + C_1 + C_2,$$

onde $c = c_1 + C_2$. Assim, temos finalmente

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

ii. Consideremos $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, $c \cdot F(x)$ é uma primitiva de $c \cdot f(x)$, pois $(c \cdot F(x))' = c \cdot F'(x)$. Temos, então

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot F(x) + C = c \cdot F(x) + C \cdot c_1 = c \cdot [F(x) + C_1] = c \cdot \int f(x)\,dx.$$

$\square$

Uma "combinação" entre os itens i e ii, do teorema acima, é dado pelo teorema abaixo, que generaliza cuja prova é deixada ao estudante como um interessante exercício. Os argumentos necessários são completamente análogos aos usados na demonstração do teorema anterior.

1.7 Teorema. Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções definidas em um intervalo I, e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes quaisquer, então

$$\int [c_1 f_1(x) + \ldots + C_n f_n]\,dx = \int c_1 f_1(x)\,dx + \ldots + \int c_n f_n(x)\,dx.$$

Nota 3. Não existe propriedade análoga à esta para o produto de funções, a despeito do que se poderia, erroneamente, imaginar, ou seja, $\displaystyle\int [f(x) \cdot g(x)]\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$.

Tabela de Integrais Imediatas

Uma vez que o processo de integração de uma função é o inverso do processo de diferenciação, podemos, com base nas derivadas das funções elementares, obter uma tabela de integrais - que serão aqui denominadas *integrais imediatas* - apresentada a seguir.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

2. $\displaystyle\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\, n \neq -1$

3. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C;\, 0 < a \neq 1$

4. $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x)\, dx + C$

6. $\displaystyle\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C$

7. $\displaystyle\int \sec^2(x)\, dx = \operatorname{tg}(x) + C$

8. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\, dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$

9. $\displaystyle\int \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x)\, dx = \sec(x)\, dx + C$

10. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}(x)\cdot\operatorname{cotg}(x)\, dx = -\operatorname{cossec}(x) + C$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + C$

14. $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arccotg}(x) + C$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}(x) + C$

16. $\displaystyle\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccossec}(x) + C$

17. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\, dx = \cosh(x) + C$

18. $\displaystyle\int \cosh(x)\, dx = \operatorname{senh}(x) + C$

19. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)\, dx = \operatorname{tgh}(x) + C$

20. $\displaystyle\int \operatorname{cossech}^2(x)\, dx = -\coth(x) + C$

21. $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\cdot\operatorname{tgh}(x)\, dx = -\operatorname{sech}(x) + C$

22. $\displaystyle\int \operatorname{cossech}(x)\cdot\coth(x)\, dx = -\operatorname{cossech}(x) + C$

> ***Nota 4.*** À medida em que prosseguirmos no estudo da integração, surgirão outras integrais imediatas que, no entanto, não são convenientes de serem apresentadas agora. Antes de apresentá-las tornar-se-á necessária a exibição de alguns métodos ou técnicas simples e usuais de integração.

Vejamos alguns casos de aplicação direta das integrais imediatas e/ou das propriedades vistas anteriormente para integrais.

***Exemplo* 1.2.** Calcule:

(a) $\displaystyle\int (7x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 5)\, dx$;

(b) $\displaystyle\int 8\operatorname{sen}(x)\, dx$;

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right)\, dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+1}{x^2}\, dx$.

Solução: (a) $\displaystyle\int (7x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 5)\, dx = \int 7x^4\, dx - \int 5x^3\, dx + \int 2x^2\, dx - \int x\, dx + \int 5\, dx = 7\int x^4\, dx - 5\int x^3\, dx + 2\int x^2\, dx - \int x\, dx + 5\int dx = \frac{7x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + C$;

(b) $\displaystyle\int 8\operatorname{sen}(x)\, dx = 8\cdot\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -8\cos(x) + C$;

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right)\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right)\, dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$. (d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+1}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)\, dx = \int 2x\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx = 2\cdot\int x\, dx + \int x^{-2}\, dx = \frac{2\cdot x^2}{2} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = x^2 - \frac{1}{x} + C$;

(e) $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{cotg}(x) - 3\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\, dx = 2\cdot\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\cdot\operatorname{cotg}(x)\, dx - 3\cdot\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\, dx = 2\cdot\int \operatorname{cossec}(x)\cdot\operatorname{cotg}(x)\, dx - 3\cdot\int \operatorname{sen}(x)\, dx = 2(-\operatorname{cossec}(x)) - 3(-\cos(x)) + C = 3\cos(x) - 2\operatorname{cossec}(x) + C$.

1.1.1 Exercícios Propostos

1.1. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int 2x^7 \, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(c) $\displaystyle\int (3x^4 - 5x^3 + 4) \, dx$

(d) $\displaystyle\int 6t^2 \sqrt[3]{t} dt$

(e) $\displaystyle\int x^4(5 - x^2) \, dx$

(f) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \, dx$

(g) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) \, dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}} dy$

(i) $\displaystyle\int (5\cos(x) - 4\,\text{sen}(x)) \, dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2} \, dx$

(k) $\displaystyle\int (4\,\text{cossec}(x) \cdot \text{cotg}(x) + 2\sec^2(x) \, dx$

(l) $\displaystyle\int \sec^2(x)[\cos^3(x) + 1] \, dx$

(m) $\displaystyle\int (3\,\text{cossec}^2(t) - 5\sec(t) \cdot \text{tg}(t)) \, dt$

(n) $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax)^2 + a^2}; \, a \neq 0.$

1.2. Determinar a função $f(x)$, tal que

$$\int f(x) \, dx = x^3 + \frac{1}{3} \cdot \cos(2x) + C.$$

1.2 Integração e Equações Diferenciais

Em diversas situações ou problemas matemáticos, a solução consiste em encontrar certa(s) função(ões) que atenda a certas exigências, ou satisfaça(m) uma dada condição. Esta condição é expressa por uma equação, que é chamada *equação diferencial*. Ela tem tal nome porque geralmente envolve derivadas da função-incógnita. Encontrar tal função ou tal família de funções é resolver tal equação. Em alguns modelos mais simples de equações diferenciais, uma simples integração é suficiente para encontrar as funções-solução. Quando, além da equação dada, conhecemos algum valor particular que deve acontecer para a solução num certo ponto, podemos determinar explicitamente a função $f(x)$ que atende tal condição (chamada *condição inicial*).

As integrais indefinidas são de muita utilidade na resolução de certas equações diferenciais por que, dada uma derivada de uma função, digamos, $f'(x)$, podemos integrá-la e usar as propriedades já conhecidas da integral indefinida para obter uma equação que simplesmente envolve a incógnita f. Vejamos alguns exemplos:

***Exemplo* 1.3.** Determinar a solução da equação diferencial

$$y' = 6x^2 + x - 5$$

que atende à condição inicial $y(0) = 2$.

Solução: Notemos, primeiramente, que $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Assim, temos a equação $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + x - 5$ e, reescrevendo, podemos colocar

$$dy = (6x^2 + x - 5)\ dx.$$

Integrando-se, finalmente, ambos os membros da igualdade,

$$\int dy = \int (6x^2 + x - 5)\ dx$$

temos $y = 2x^3 + \dfrac{1}{2} \cdot x^2 - 5x + C$. Fazendo $x = 0$ e utilizando a condição inicial $y(0) = 2$, temos, na equação acima,

$$2 = 2 \cdot 0^3 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + C,$$

ou seja, $c = 2$. Isto quer dizer que a equação dada tem como solução, para a condição inicial $y(0) = 2$, a função $y = 2x^3 + \dfrac{1}{2} \cdot x^2 - 5x + 2$.

***Exemplo* 1.4.** Em qualquer ponto (x, y) de uma determinada curva, a reta tangente à mesma tem uma inclinação igual a $4x - 5$. Sabendo que a curva contém o ponto $(3, 7)$, encontre sua equação.

Solução: Uma vez que o valor da inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto é o valor da derivada desta função neste ponto, temos

$$y' = 4x - 5 \Rightarrow y = \int (4x - 5)\ dx \Rightarrow y = 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C \Rightarrow y = 2x^2 - 5x + C.$$

Esta última expressão representa todas as curvas que possuem a inclinação $y = 4x - 5$ no ponto (x, y). Porém, como queremos que a curva contenha o ponto $(3, 7)$, basta então substituirmos, respectivamente, x por 3 e y por 7, e então $7 = 2(3)^2 - 5(3) + C \Rightarrow 7 = 18 - 15 + C$, o que nos dá $c = 4$. Portanto, a equação desejada é $y = 2x^2 - 5x + 4$.

1.2.1 Resolução de Problemas Práticos Ligados às Equações Diferenciais e Integração

Como foi comentado brevemente no início desta seção, resolver integrais indefinidas é de fundamental importância na resolução de equações diferenciais. Estas , por sua vez, aparecem constantemente na resolução de problemas de variados temas associados ao cálculo, como por exemplo, a determinação da expressão da posição de um corpo ao longo do tempo, conhecendo a sua função horária da velocidade, a expressão da relação existente entre duas grandezas, sendo conhecida a taxa de variação de uma em relação à outra, e muitos outros casos de aplicação destas equações.

Vamos, então, a alguns exemplos que ilustram esta aplicabilidade.

***Exemplo* 1.5.** Em qualquer ponto (x, y) de uma determinada curva, a reta tangente à mesma tem uma inclinação igual a $4x - 5$. Sabendo que a curva contém o ponto $(3, 7)$, encontre sua equação.

Solução: Uma vez que o valor da inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto é o valor da derivada desta função neste ponto, temos:

$$y' = 4x - 5 \Rightarrow y = \int (4x-5)dx \Rightarrow y = 4\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + k \Rightarrow y = 2x^2 - 5x + k.$$

Esta última expressão representa todas as curvas que possuem a inclinação $y - 4x - 5$ no ponto (x, y). Porém, como queremos que a curva contenha o ponto $(3, 7)$, basta, então substituirmos, respectivamente, x por 3 e y por 7, e então:

$$7 = 2(3)^2 - 5(3) + k \Rightarrow 7 = 18 - 15 + k,$$

o que nos dá $k = 4$. Portanto, a equação desejada é $y = 2x^2 - 5x + 4$.

***Exemplo* 1.6.** Uma equação da reta tangente à curva C no ponto $(1, 3)$ é $y = x + 2$. Se em qualquer ponto(x, y) da curva se tem $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, encontrar uma equação para a curva C.

Solução: Pela equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 3)$, temos que a sua inclinação neste ponto é $m'(1) = 1$ (que é o coeficiente angular da reta). Então, temos que $\dfrac{dy}{dx}(1) = 1$.
Agora, de $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, lembrando que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy'}{dx}$, integrando em relação à x, obtemos:

$$\int \frac{dy'}{dx}dx = \int 6x\, dx \Longrightarrow y' = 6\frac{x^2}{2} + C \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + C.$$

Como já temos $\dfrac{dy}{dx}(1) = 1$, substituindo na igualdade acima, obtemos:

$$1 = 3\cdot 1^2 + C \Longrightarrow 1 = 3 + C \Longrightarrow C = -2.$$

Daí, temos que $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$. Integrando, mais uma vez, em relação à x, temos:

$$\int \frac{dy}{dx}dx = \int (3x^2 - 2)dx \Longrightarrow y = \frac{3x^3}{3} - 2x + C \Longrightarrow y = x^3 - 2x + C.$$

Uma vez que o ponto$(1, 3)$ pertence à curva, temos que quando$x = 1$, $y = 3$. Portanto, substituindo, temos:

$$3 = 1^3 - 2\cdot 1 + C \Longrightarrow 3 = 1 - 2 + C \Longrightarrow C = 4.$$

Portanto, uma equação para a curva C é $y = x^3 - 2x + 4$.

***Exemplo* 1.7.** Sabemos, do estudo das derivadas e suas aplicações, que a velocidade instantânea de uma partícula é a taxa de variação (derivada) da posição da partícula em relação ao tempo, enquanto que a aceleração do móvel é a taxa temporal de variação da velocidade, ou seja, a taxa de variação (derivada) da velocidade instantânea em relação ao tempo. Mostre que para um movimento em uma reta com aceleração constante a, velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial s_0, o deslocamento do móvel após o instante t é dado por $s = s_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$.

Solução: Como temos que a aceleração $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ do móvel é constante e igual a a, então temos que: $\frac{dv}{dt} = a$, onde a é constante. Integrando os dois membros em relação à t, obtemos

$$\int \frac{dv}{dt}dt = \int a\, dt \Longrightarrow v = a\int dt + C \Longrightarrow v = at + C.$$

Como sabemos que $at = \Delta v = v - v_0$, da equação acima, concluímos que $C = v_0$. Portanto, temos $v = at + v_0$.
Agora, lembrando que $v = \frac{ds}{dt}$, substituindo na igualdade acima e integrando ambos os membros em relação t, obtemos

$$\int \frac{ds}{dt}dt = \int (at + v_0)dt \Longrightarrow s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C'.$$

Lembrando que $vt = \Delta s = s - s_0$ e comparando com a equação obtida acima, concluímos que $C' = s_0$. Portanto, temos que $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

***Exemplo* 1.8.** Um tanque tem o seu volume de água V, em m^3, dado em função da altura h da água no mesmo. Sendo conhecido que a taxa de variação de V em relação a h é $\pi(3h-2)$, e sabendo que quando a altura da água é $1m$, existem no tanque $3\pi\ m^3$ de água, determine o volume de água no tanque quando a altura for de $3m$.

Solução: Lembrando que a taxa de variação do volume V em relação a h é a derivada $\frac{dV}{dh}$, temos que $\frac{dV}{dh} = \pi(3h-2)$. Integrando ambos os membros em relação a h, obtemos

$$\int \frac{dV}{dh}dh = \int \pi(3h-2)dh \Longrightarrow V = 3\pi\int h dh - 2\pi\int dh \Longrightarrow V = \pi\left(\frac{3h^2}{2} - 2h\right) + C.$$

Para $h = 1$, temos $V = 3\pi$. Portanto, substituindo na igualdade acima, obtemos

$$3\pi = \pi(\frac{3\cdot 1^2}{2} - 2\cdot 1) + C \Longrightarrow 3\pi = (\frac{3}{2} - 2)\pi + C \Longrightarrow 3\pi = -\frac{\pi}{2} + C \Longrightarrow C = \frac{7\pi}{2}.$$

Assim, temos que a expressão do volume em função da altura é dada por $V = \pi(\frac{3h^2}{2} - 2h) + \frac{7\pi}{2} = \pi(\frac{3h^2}{2} - 2h + \frac{7}{2})$. Logo, para $h = 3$, o volume é:

$$V = \pi\left(\frac{3\cdot 3^2}{2} - 2\cdot 3 + \frac{7}{2}\right) = 11\pi\ m^3.$$

1.2.2 Exercícios Propostos

1.3. A inclinação da reta tangente num ponto (x, y) qualquer de uma curva é $3\sqrt{x}$. Se o ponto $(9, 4)$ está na curva, ache uma equação para ela.

1.4. Os pontos $(-1, 3)$ e $(0, 2)$ estão numa curva e, em qualquer ponto (x, y) da curva se tem $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Encontre uma equação da curva.

1.5. Em qualquer ponto (x, y) de uma certa curva, tem-se $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$ e uma equação da reta tangente a esta curva no ponto $(1, 1)$ é $y = 2 - x$. Encontre uma equação da curva.

1.6. Um colecionador de arte comprou uma pintura por $R\$1000,00$ de um artista cujos trabalhos aumentam de valor em relação ao tempo, de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = 5t^{3/2} + 10t + 50$, onde V é o valor estimado de uma pintura t anos após a sua compra. Se esta fórmula permanecer válida pelos próximos 6 anos, qual será o valor previsto para a pintura para daqui a 4 anos?

1.7. A eficiência de um operário é dada por uma porcentagem. Por exemplo, se a eficiência de um trabalhador num dado intervalo de tempo for de 70 por cento, então ele está trabalhando com 70 por cento de todo o seu potencial. Suponha que E por cento seja a sua eficiência t horas após começar a trabalhar e que a taxa segundo a qual E varia temporalmente é $(35 - 8t)$ por cento, a cada hora. Se a eficiência após $3h$ de trabalho é de 81, ache sua eficiência após trabalhar $8h$.

1.3 Técnicas de Integração

Neste capítulo nós veremos algumas técnicas para reduzir integrais mais elaboradas às imediatas. Estas técnicas facilitarão bastante a vida do estudante, visto que nem toda integral pode ser calculada de acordo com o uso direto da tabela de integrais imediatas.

1.3.1 Método da Substituição

Este método, que também é chamado de *mudança de variável para integração*, consiste em deixar uma dada integral a ser calculada pronta para a aplicação de uma das fórmulas básicas de integração (ver tabela) após aplicação de uma troca de variável. Este processo se comporta como uma espécie de Regra da Cadeia, só que para integração, e tem a seguinte justificativa matemática:

Suponhamos que F é uma primitiva conhecida da função f, ou seja, $F' = f$, e que g é uma função derivável. Denotando por h a função composta de F com g, então $h(x) = F(g(x))$ e da fórmula $\int D_x[h(x)]\, dx = h(x) + C$, temos:

$$\int D_x[F(g(x))]\, dx = F(g(x)) + C.$$

Agora, aplicando a regra da cadeia no integrando $D_x[F(g(x))]$ vem:

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

e daí, portanto,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C. \tag{1.1}$$

Agora, fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$ e substituindo em 1.1, vem

$$\int f(u)\, du = F(u) + C.$$

Na prática, basta definir uma função $u = g(x)$ de uma maneira que a integral dada recaia em uma mais simples. Assim funciona o método de integração, conhecido como *mudança de variável* ou *da substituição*, e que é descrito formalmente pelo:

1.8 Teorema (Regra da Cadeia para Integração)**.** Se F é uma antiderivada de f, então

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C.$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)\, dx$, então

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Vejamos alguns exemplos:

***Exemplo* 1.9.** Calcular as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\int \operatorname{sen}(3x)\,dx$

(b) $\int \sqrt{4x+1}\,dx$

(c) $\int \operatorname{tg}(x)\,dx$

(d) $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

(e) $\int \frac{du}{u^2+a^2}$, com $a \neq 0$

(f) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$

Solução: (a) Fazendo $u = 3x$, temos $du = 3\,dx$. Daí,

$$\int \operatorname{sen}(3x)\,dx = \int \operatorname{sen}(u)\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int \operatorname{sen}(u)du = \frac{1}{3}\cdot(-\cos(u))+C = -\frac{1}{3}\cdot\cos(u)+C = -\frac{1}{3}\cdot\cos(3x)+C.$$

(b) Fazemos $u = 4x+1$. Daí, temos $du = 4\,dx$ e então

$$\int \sqrt{4x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\cdot\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}\cdot(4x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(c) Temos que $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$. Logo, fazendo a mudança de variável $u = \cos(x)$, temos, consequentemente, que $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$ e então

$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C.$$

(d) Fazendo $u = x^2+1$, temos que $du = 2x\,dx$, e então

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2+1| + C$$

(e) Uma vez que se tem $a \neq 0$, podemos reescrever a integral dada como segue

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \int \frac{\frac{du}{a^2}}{\frac{u^2+a^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{\frac{u^2}{a^2}+1}.$$

Agora, fazendo $w = \dfrac{u}{a}$, de onde temos que $dw = \dfrac{1}{a}\,du$, ou ainda, $du = a\,dw$. Daí,

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dw}{w^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(w) + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

(f) Para aplicar uma substituição conveniente na resolução desta integral, devemos primeiramente "completar um quadrado perfeito" no denominador. Para isto, fazemos então

$$x^2 + 6x + 13 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4$$

Daí, a nossa integral fica $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4}$. Aplicando, agora, a substituição $u = x+3$, temos que $du = dx$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+6x+13} &= \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \int \frac{du}{u^2+4} = \int \frac{du}{u^2+2^2} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + C \text{ (usando o exemplo anterior)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C \end{aligned}$$

1.3.2 Exercícios Propostos

1.8. Utilizando o método da substituição, calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\, dx$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\sec^2(x)\, dx$

(d) $\displaystyle\int 6x^2 \operatorname{sen}(x^3)\, dx$

(e) $\displaystyle\int x^2(x^3-1)^{10}\, dx$

(f) $\displaystyle\int (x + \sec^2(3x))\, dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}(y)}{2\sqrt{1-y^2}} dy$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\, dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{2} t\cos(4t^2)\, dt$

(j) $\displaystyle\int (\operatorname{tg}(2x) + \operatorname{cotg}(2x))^2\, dx$

(k) $\displaystyle\int (e^{2x}+2)^5 e^{2x}\, dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\theta)d\theta}{[5-\cos(\theta)]^3}$

1.3.3 Integração por Partes

Nesta seção, apresentamos a técnica de integração por partes, que também ajuda a reduzir o cálculo de uma integral mais elaborada ao cálculo de uma integral mais simples. Esta técnica resulta quase que diretamente da fórmula da derivada do produto, juntamente com a definição de integral.

Consideremos então duas funções f e g, deriváveis em um intervalo I. Como já sabemos, da derivada do produto, temos que:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),$$

ou ainda,

$$f(x)\cdot g'(x) = [f(x)\cdot g(x)]' - f'(x)\cdot g(x).$$

Integrando-se os dois membros desta igualdade em relação a x, obtemos:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\, dx = \int [f(x)\cdot g(x)]'\, dx - \int f'(x)\cdot g(x)\, dx.$$

Como $\displaystyle\int [f(x)\cdot g(x)]'\, dx = f(x)\cdot g(x)$, a igualdade acima fica

$$\int f(x)\cdot g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\, dx.$$

Nesta última igualdade, fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, de onde nós temos, respectivamente, $du = f'(x)\, dx$ e $dv = g'(x)\, dx$, a fórmula finalmente aparece em sua forma mais simples:

$$\int u\, dv = u\cdot v - \int v\, du.$$

A fórmula acima é a chamada *Integração por Partes*.

> ***Nota* 5.** Observe que, nas integrais que aparecem no desenvolvimento desta fórmula, suprimimos a constante de integração.Isto pôde ser feito porque todas as constantes que aparecem no decorrer do processo podem ser substituídas por uma única, que pode ser acrescida no final do processo de integração.

> ***Nota* 6.** Na resolução de uma dada integral pelo processo de integração por partes, a escolha das partes que "fará o papel" de u e dv deverá ser feita, convenientemente, visto que não é qualquer escolha que torna viável a aplicação da fórmula, podendo inclusive recair em integrais de resolução mais demorada.

***Exemplo* 1.10.** Calcular as seguintes integrais (usando integração por partes):

(a) $\int x \cdot e^{-2x}\, dx$ (b) $\int x^2 \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx$ (c) $\int e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx)\, dx$ (d) $\int \sec^3(x)\, dx$

Solução: (a) Para esta integral devemos escolher $u = x$ e $dv = e^{-2x}\, dx$. Assim, teremos: $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = e^{-2x}\, dx$, de onde, integrando os dois membros da igualdade, obtemos $v = \int e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$. Aplicando, agora, a fórmula de integração por partes, temos:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-2x}\, dx}_{dv} &= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-2x}}_{v} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_{v} \underbrace{dx}_{du} = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \int e^{-2x}\, dx + C \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x} + C = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2x} + C\end{aligned}$$

(b) Neste exemplo, escolhemos $u = x^2$, de onde temos $du = 2x\, dx$ e $dv = \operatorname{sen}(x)\, dx$, o que nos dá, integrando os dois membros, $v = \int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x)$. Daí, aplicando a fórmula da integração por partes, temos:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{dv} &= u \cdot v - \int v\, du = x^2 \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) 2x\, dx \\ &= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\, dx.\end{aligned}$$

Devemos, agora, calcular separadamente a integral $\int x\cos(x)\, dx$, que também é resolvida por partes. Fazendo $u = x$ e $dv = \cos(x)\, dx$, temos, respectivamente, $du = dx$ e $v = \int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x)$ e, portanto,

$$\int x\cos(x)\, dx = uv - \int v\, du = x \cdot \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\, dx = x \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$$

Substituindo, então, no cálculo da integral inicial, temos:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{dv} &= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\, dx = -x^2\cos(x) + 2 \cdot (x \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x)) + C \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + C,\end{aligned}$$

ou ainda, $\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)\, dx}_{dv} = (-x^2 + 2)\cos(x) + 2x\operatorname{sen}(x)$.

Observe que, neste exemplo, a escolha de u e dv foi primordial para recairmos em uma outra integral mais simples e assim realizarmos o cálculo da integral dada. Se tivéssemos escolhido, por exemplo, $u = \text{sen}(x)$ e $dv = x^2\ dx$, a aplicação do método de integração por partes não ajudaria na resolução da integral.

(c) Para esta integral, escolhemos $u = e^{ax}$ e $dv = \text{sen}(bx)\ dx$, de onde temos $du = a \cdot e^{ax}\ dx$ e $v = \int \text{sen}(bx)\ dx = -\frac{1}{b}\cos(bx)$. Daí, aplicando a integração por partes,

$$\begin{aligned} \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx &= uv - \int v du = e^{ax} \cdot \left(-\frac{1}{b}\right)\cos(bx) - \int \left(-\frac{1}{b}\cos(bx)\right) a \cdot e^{ax}\ dx \\ &= -\frac{e^{ax}}{b}\cos(bx) + \frac{a}{b} \cdot \int e^{ax}\cos(bx)\ dx (\maltese) \end{aligned}$$

Resolvendo, agora, $\int e^{ax}\cos(bx)\ dx$ por partes, fazemos $u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}\ dx$ e $dv = \cos(bx)\ dx \Rightarrow v = \int \cos(bx)\ dx = \frac{1}{b}\text{sen}(bx)$ e obtemos então

$$\begin{aligned} \int e^{ax}\cos(bx)\ dx &= e^{ax} \cdot \frac{1}{b} \cdot \text{sen}(bx) - \int \frac{1}{b}\text{sen}(bx) a e^{ax}\ dx \\ &= \frac{e^{ax}}{b}\text{sen}(bx) - \frac{a}{b} \cdot \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em ($\maltese$), obtemos:

$$\begin{aligned} \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx &= -\frac{e^{ax}}{b}\cos(bx) + \frac{a}{b}\left[\frac{e^{ax}}{b}\text{sen}(bx) - \frac{a}{b} \cdot \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\right]\ dx \\ &= -\frac{e^{ax}}{b}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\,\text{sen}(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx \end{aligned}$$

Agora, note que a integral que aparece no segundo membro acima é exatamente a integral que queremos calcular. Portanto, como se fosse o “x” da equação, passemos o termo que a contém para o primeiro membro, a fim de determinar o seu valor. Temos, então:

$$\begin{aligned} \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx + \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\,\text{sen}(bx) &= -\frac{e^{ax}}{b}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\,\text{sen}(bx) \\ \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx &= -\frac{e^{ax}}{b}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\,\text{sen}(bx) \\ \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2}\right) \cdot \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx &= \frac{e^{ax}}{b}\left[-\cos(bx) + \frac{a}{b} \cdot \text{sen}(bx)\right] \\ \left(\frac{a^2 + b^2}{b}\right) \cdot \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx &= e^{ax}\left(-\cos(bx) + \frac{a}{b} \cdot \text{sen}(bx)\right) \\ \int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx &= \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}\left(-\cos(bx) + \frac{a}{b} \cdot \text{sen}(bx)\right) \end{aligned}$$

e, finalmente, temos que

$$\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\ dx = \frac{b \cdot e^{ax}}{a^2 + b^2}\left[-\cos(bx) + \frac{a}{b} \cdot \text{sen}(bx)\right].$$

(d) Para o cálculo desta integral, fazemos $u = \sec(x)$ e $dv = \int \sec^2(x)\ dx = \text{tg}(x)$, de onde obtemos, respectivamente, $du = \text{tg}(x) \cdot \sec(x)\ dx$ e $v = \int \sec^2\ dx = \text{tg}(x)$. Daí, temos:

$$\int \sec^3(x)\ dx = \underbrace{\sec(x)}_{u} \cdot \underbrace{\text{tg}(x)}_{v} - \int \underbrace{\text{tg}(x)}_{v}\underbrace{\text{tg}(x) \cdot \sec(x)\ dx}_{du} = \text{tg}(x) \cdot \sec(x) - \int \text{tg}^2(x)\sec(x)\ dx.$$

Agora, temos que resolver a integral que aparece no segundo membro, para isto, podemos transformá-la usando a relação trigonométrica $\mathrm{tg}^2 = \sec^2(x) - 1$. Assim, teremos:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^2(x)\sec(x)\,dx &= \int [\sec^2(x) - 1)\sec(x)]\,dx = \int [\sec^3(x) - \sec^2(x)]\,dx \\ &= \int \sec^3(x)\,dx - \int \sec(x)\,dx = \int \sec^3(x)\,dx - \ln|\mathrm{tg}(x) + \sec(x)|\end{aligned}$$

Substituindo este resultado no cálculo da integral dada, temos então:

$$\begin{aligned}\int \sec^3(x)\,dx &= \mathrm{tg}(x)\cdot\sec(x) - \left(\int \sec^3(x)\,dx - \ln|\mathrm{tg}(x) + \sec(x)|\right) \\ &= \mathrm{tg}(x)\cdot\sec(x) - \int \sec^3(x)\,dx + \ln|\mathrm{tg}(x) + \sec(x)|\end{aligned}$$

Analogamente à resolução do exemplo anterior, observe que a integral que aparece no segundo membro é a própria que queremos calcular, então, "passando-a para o primeiro membro da igualdade", temos:

$$\begin{aligned}\int \sec^3(x)\,dx + \int \sec^3(x)\,dx &= \mathrm{tg}(x)\cdot\sec(x) + \ln|\mathrm{tg}(x) + \sec(x)| \\ 2\cdot\int \sec^3(x)\,dx &= \mathrm{tg}(x)\cdot\sec(x) + \ln|\mathrm{tg}(x) + \sec(x)| \\ \int \sec^3(x)\,dx &= \frac{1}{2}(\mathrm{tg}(x)\cdot\sec(x) + \ln|\mathrm{tg}(x) + \sec(x)|)\end{aligned}$$

1.3.4 Exercícios Propostos

1.9. Utilizando integração por partes, calcular as integrais:

(a) $\int x\,\mathrm{sen}(5x)\,dx$

(b) $\int \ln(x)\,dx$

(c) $\int (x+1)\cos(2x)\,dx$

(d) $\int e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

(e) $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$

(f) $\int x\,\mathrm{cossec}^2(x)\,dx$

(g) $\int x^2 e^x\,dx$

(h) $\int \mathrm{sen}^3(x)\,dx$

(i) $\int x\cos^2(x)\,dx$

(j) $\int \frac{\ln(ax+b)}{\sqrt{ax+b}}\,dx$

(k) $\int x\,\mathrm{arctg}(x)\,dx$

(l) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

Gabarito

1.1 (a) $\frac{x^8}{4} + C$; (b) $-\frac{1}{2x^2} + C$; (c) $3^{\frac{x^5}{5}} - 5\frac{x^4}{4} + 4x + C$; (d) $\frac{9}{5}t^{\frac{10}{3}} + C$; (e) $x^5 - \frac{x^7}{7} + C$; (f) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$; (g) $-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$; (h) $(\frac{2}{9}y^4 + \frac{4}{5}y^2 - 2)\sqrt{y} + C$; (i) $5\,\mathrm{sen}(x) + 4\cos(x) + C$; (j) $\sec(x) + C$; (k) $-4\,\mathrm{cossec}(x) + 2\,\mathrm{tg}(x) + C$; (l) $\mathrm{sen}(x) + \mathrm{tg}(x) + C$; (m) $-3\,\mathrm{cotg}(t) - 5\sec(t) + C$; (n) $\frac{1}{a^2}\cdot\mathrm{arctg}(x) + C$. 1.2 $f(x) = -\mathrm{sen}(2x) + 2x$. 1.3 $y = 2x\sqrt{x} - 50$. 1.4 $y = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x + 2$. 1.5 $y = -x^4/12 + x^2/2 - 5/3x + 9/4$. 1.6 $R\$1164,00$. 1.7 36% . 1.8 (a) $\frac{5}{8}(x^2-1)^{4/5} + C$; (b) $\frac{\mathrm{sen}^3(x)}{3} + C$; (c) $\frac{\mathrm{tg}^2(x)}{2} + C$; (d) $-2\cos^3(x) + C$; (e) $\frac{(x^3-1)^{11}}{33} + C$; (f) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}(3x) + C$; (g) $\frac{1}{4}\mathrm{arcsen}(y^2) + C$; (h) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x^2+1} + C$; (i) $\frac{1}{16}\mathrm{sen}(4t^2) + C$; (j) $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}(2x) - \mathrm{cotg}(2x) + C$; (k) $\frac{1}{12}(e^{2x}+2)^6 + C$; (l) $\frac{-1}{2(5-\cos(\theta))^2} + C$. 1.9 (a) $-\frac{x}{5}\cos(5x) + \frac{1}{25}\mathrm{sen}(5x) + C$; (b) $x\ln(x)\,dx - x + C$; (c) $\frac{(x+1)}{2}\mathrm{sen}(2x) + 14\cos(2x) + C$; (d) $\frac{2}{5}e^x[\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2})] + C$; (e) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln(x) - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$; (f) $-x\,\mathrm{cotg}(x) + \ln|\mathrm{sen}(x)| + C$; (g) $e^x[x^2 - 2x + 2] + C$; (h) $-\mathrm{sen}^2(x)\cdot\cos(x) - \frac{2}{3}\cos^3(x) + C$; (i) $\frac{1}{4}[x^2 + x\,\mathrm{sen}(2x) + 12\cos(2x)] + C$; (j) $\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}[\ln(ax+b) - 2] + C$; (k) $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x) + C$; (l) $-\frac{x^2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{15}(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2} + C$.

tema 2 Outros Processos Gerais de Integração

Outras Técnicas de Integração

Apresentação

Nesta primeira seção apresentaremos alguns artifícios muito utilizados e recomendados no cálculo de algumas integrais que envolvem funções trigonométricas. Estes artifícios, muitas vezes, são usados para preparar a integral para a aplicação de métodos já corriqueiros, como o da mudança de variável (substituição).

2.1 Integração de Funções Trigonométricas

2.1.1 As Integrais $\int \operatorname{sen}(u)\ du$ e $\int \cos(u)\ du$

Bem, estas integrais já são bem conhecidas do leitor, até por já fazerem parte da nossa tabela de integrais. No entanto vejamos, a título de revisão, que às vezes é necessário aplicarmos uma substituição para que uma dada integral a ser resolvida fique em uma das duas formas acima, já tabeladas.

***Exemplo* 2.1.** Calcular a integral $\int e^{2x} \operatorname{sen}(2x)\ dx$.

Solução: Para que esta integral recaia numa das integrais tabeladas acima, fazemos a substituição $u = e^{2x}$, donde temos

$$du = (e^{2x})'\ dx \Rightarrow du = 2 \cdot e^{2x} \cdot\ dx \Rightarrow\ dx = \frac{du}{2 \cdot e^{2x}}$$

Desta maneira, da integral dada, obtemos uma integral tabelada, como segue:

$$\int e^{2x} \operatorname{sen}(2x)\ dx = \int u \cdot \operatorname{sen}(u) \frac{du}{2 \cdot u} = \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{sen}(u)\ du = \frac{1}{2} \cdot (-\cos(u)) + C = \frac{-\cos(e^{2x})}{2} + C.$$

2.1.2 As Integrais $\int \operatorname{tg}(u)\ du$ e $\int \operatorname{cotg}(u)\ du$

Como já foi visto em forma de exercício na seção de Integração por substituição no primeiro capítulo, estas integrais podem ser facilmente resolvidas (e, com isso, passar a fazer parte das integrais já tabeladas) com a substituição $u = \cos(x)$ (para a integral de $\operatorname{tg}(x)$) ou $u = \operatorname{sen}(x)$ (para a integral de $\operatorname{cotg}(x)$). Diretamente, com estas substituições, obtemos:

$$\int \operatorname{tg}(u)\ du = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C.$$

e

$$\int \operatorname{cotg}(u)\ du = \ln|\operatorname{sen}(x)| + C.$$

Exemplo 2.2. Determinar as integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{\text{tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\text{cotg}(\ln(x))}{x}\ dx.$

Solução: (a) Façamos $u = \sqrt{x}$. Daí vem $du = (\sqrt{x})'\ dx = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\ dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$, ou seja, $dx = 2\sqrt{x}\ dx = 2u du$. Então, temos:

$$\int \frac{\text{tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{\text{tg}(u)}{u}\cdot 2u\ du = 2\int \text{tg}(u)\ du = 2\cdot \ln|sec(u)| + C = 2\cdot \ln|\sec(\sqrt{x})| + C.$$

(b) Para esta, fazemos $u = \ln(x)$. Daí, temos $du = \frac{1}{x}\ dx$ e, portanto, a integral fica:

$$\int \frac{\text{cotg}(\ln(x))}{x}\ dx = \int \text{cotg}(\ln(x))\frac{1}{x}\ dx = \int \text{cotg}(u)\ du = \ln|\text{sen}(u)| + C = \ln|\text{sen}(\ln(x))| + C.$$

2.1.3 As Integrais $\int \sec(u)\ du$ e $\int \text{cossec}(u)\ du$

Também facilmente resolvidas aplicando-se uma substituição simples, estas duas integrais passam assim a fazer parte da tabela de integrais imediatas.

Para a integral $\int \sec(u)\ du$, fazendo-se uma transformação conveniente no integrando (multiplicar e dividir por $\sec(u)+\text{tg}(u)$ e aplicando a substituição $w = \sec(u)+\text{tg}(u)$ (de onde temos $dw = [\text{tg}(u)\cdot\sec(u)+\sec^2(u)]du$), temos:

$$\begin{aligned}\int \sec(u)\ du &= \int \frac{\sec(u)[\text{tg}(u)+\sec(u)]}{\text{tg}(u)+\sec(u)}du = \int \frac{[\text{tg}(u)\cdot\sec(u)+\sec^2(u)]}{\text{tg}(u)+\sec(u)}\ du \\ &= \int \frac{dw}{w} = \ln|w| + C = \ln|\sec(u)+\text{tg}(u)| + C.\end{aligned}$$

Portanto, temos $\int \sec(u)\ du = \ln|\sec(u)+\text{tg}(u)| + C$.

Para a integral $\int \text{cossec}(u)\ du$, o procedimento é completamente análogo ao utilizado para determinar $\int \sec(u)\ du$, só que o fator a ser multiplicado e dividido no integrando agora é $\text{cossec}(u) - \text{cotg}(u)$ e a substituição a ser aplicada é $w = \text{cossec}(u) - \text{cotg}(u)$. Assim, seguindo os mesmos passos, obtemos:

$$\int \text{cossec}(u)\ du = \ln|\text{cossec}(u) - \text{cotg}(u)| + C.$$

Exemplo 2.3. Calcular as integrais:

(a) $\displaystyle\int \sec\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dt}{\text{sen}(3t-\pi)}$

Solução: (a) Fazendo a substituição $u = 4x + \frac{\pi}{3}$, temos $du = 4\ dx$, ou ainda, $dx = \frac{du}{4}$ e, portanto:

$$\begin{aligned}\int \sec\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\ dx &= \int \sec(u)\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\cdot\int \sec(u)\ du = \frac{1}{4}\cdot\ln|\sec(u)+\text{tg}(u)| + C \\ &= \ln\left|\sec\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\right| + C.\end{aligned}$$

(b) Para esta integral, lembremos a relação trigonométrica $\operatorname{cossec}(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$. Fazendo $u = 3t - \pi$, temos $du = 3dt$, ou ainda, $dt = \dfrac{du}{3}$ e daí:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\operatorname{sen}(3t-\pi)} &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \cdot \int \operatorname{cossec}(u)\ du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln|\operatorname{cossec}(u) - \operatorname{cotg}(u)| + C = \frac{1}{3} \cdot \ln|\operatorname{cossec}(3t-\pi) - \operatorname{cotg}(3t-\pi)| + C. \end{aligned}$$

2.2 Integração de Funções que Envolvem Potências de Funções Trigonométricas

2.2.1 Integrais da Forma $\int \operatorname{sen}^n(u)\ du$ e $\int \cos^n(u)\ du$, $n \in \mathbb{N}$

Para o cálculo destes tipos de integrais, deve-se transformar o integrando com o auxílio das relações trigonométricas abaixo, já conhecidas do aluno:

(i) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (ii) $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ (iii) $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

O cálculo com o auxílio destas identidades consiste em fatorar conveniente o integrando para a aplicação de uma delas, deixando o integrando preparado para o método da substituição.

***Nota* 7.** Para n ímpar, é usualmente aplicada a relação (i), enquanto que para n par são mais utilizadas (ii) e (iii).

***Exemplo* 2.4.** Calcular as integrais:

(a) $\int \cos^5(x)\ dx$ (b) $\int \operatorname{sen}^6(4\theta + \pi) d\theta$

Solução: (a) Primeiro, fazemos $\cos^5(x) = (\cos^2(x))^2 \cdot \cos(x) = (1 - \operatorname{sen}^2(x))^2 \cdot \cos(x) = (1 - 2\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}^4(x)) \cdot \cos(x)$, de onde temos finalmente $\cos^5(x) = \cos(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}^4(x) \cdot \cos(x)$. Com esta preparação, reduzimos o cálculo da nossa integral ao cálculo de 3 simples integrais, duas delas facilmente resolvidas por simples substituição. Veja:

$$\begin{aligned} \int \cos^5(x)\ dx &= \int [\cos(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}^4(x) \cdot \cos(x)]\ dx \\ &= \int \cos(x)\ dx - 2 \cdot \int \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos(x)\ dx + \int \operatorname{sen}^4(x) \cdot \cos(x)\ dx \end{aligned}$$

Perceba que a primeira das 3 integrais acima é de resolução direta, enquanto que as duas últimas são facilmente resolvidas utilizando inclusive a mesma substituição, $u = \operatorname{sen}(x)$, que nos dá $du = \cos(x)\ dx$ e, portanto, temos:

$$\begin{aligned} \int \cos^5(x)\ dx &= -\operatorname{sen}(x) - 2 \cdot \int u^2\ du + \int u^4\ du = -\operatorname{sen}(x) - 2 \cdot \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C \\ &= -\operatorname{sen}(x) - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3(x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(x) + C \end{aligned}$$

(b) Neste exemplo, primeiramente, fazemos uma substituição simples, $u = 4\theta + \pi$, de onde temos $du = 4d\theta$, ou ainda, $d\theta = \frac{du}{4}$, a fim de deixar o integrando um pouco mais simples para a sua preparação usando uma das relações trigonométricas já mencionadas. Assim, temos:

$$\int \operatorname{sen}^6(4\theta + \pi)\ d\theta = \int \operatorname{sen}^6(u)\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^6(u)\ du.$$

Para calcular $\int \operatorname{sen}^6(u)du$, utilizamos a relação trigonométrica mais conveniente para este caso (veja que n é par), a fim de preparar o integrando. Temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^6(u) &= [\operatorname{sen}^2(u)]^3 = \left(\frac{1-\cos(2u)}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}[1 - 3\cos(2u) + 3\cos^2(2u) - \cos^3(2u)] \\
&= \frac{1}{8}\left[1 - 3\cos(2u) + 3\left(\frac{1+\cos(4u)}{2}\right) - \cos^3(2u)\right] \\
&= \frac{5}{16} - \frac{3}{8}\cos(2u) + \frac{3}{16}\cos(4u) - \frac{1}{8}\cos^3(2u)
\end{aligned}$$

Assim, para a integral $\int \operatorname{sen}^6(u)\ du$, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\int \operatorname{sen}^6(u)\ du = \frac{5}{16}\int du - \frac{3}{8}\int \cos(2u)du + \frac{3}{16}\int \cos(4u)\ du - \frac{1}{8}\int \cos^3(2u)\ du\diamondsuit$$

Para a resolução da integral que aparece por último na igualdade, primeiramente fazemos $w = 2u$, de onde temos $du = \frac{dw}{2}$, nos dando $\int \cos^3(2u)du = \frac{1}{2}\int \cos^3(w)dw$, e então fazemos:

$$\cos^3(w) = \cos^2(w)\cdot\cos(w) = (1 - \operatorname{sen}^2(w))\cos(w) = \cos(w) - \operatorname{sen}^2(w)\cos(w)$$

obtendo-se, então

$$\int \cos^3(2u)du = \frac{1}{2}\left(\int \cos(w)dw - \int \operatorname{sen}^2(w)\cos(w)\ dw\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(w) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2(w)\cos(w)\ dw$$

Resolvendo esta última integral por uma simples substituição, obtemos $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(w)$ e então, voltando ao cálculo de $\int \cos^3(2u)du$, temos

$$\int \cos^3(2u)du = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(w)\ dw - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(w) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2u) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2u)$$

Voltando finalmente à $\diamondsuit$, obtemos a expressão para a integral inicial (voltando, é claro, à variável u):

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^6(u)\ du &= \frac{5}{16}\int du - \frac{3}{8}\int \cos(2u)du + \frac{3}{16}\int \cos(4u)\ du - \frac{1}{8}\int \cos^3(2u)\ du \\
&= \frac{5}{16}u - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2u) + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4u) - \frac{1}{16}\operatorname{sen}(2u) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2u) \\
&= \frac{5}{16}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2u) + \frac{3}{64}\operatorname{sen}(4u) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2u)
\end{aligned}$$

Finalmente, voltando à variável θ, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^6(4\theta+\pi)\ d\theta &= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{16}(4\theta+\pi) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2(4\theta+\pi)) + \frac{3}{64}\operatorname{sen}(4(4\theta+\pi)) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2(4\theta+\pi))\right) \\
&= \frac{5}{64}(4\theta+\pi) - \frac{1}{16}\operatorname{sen}(8\theta+2\pi) + \frac{3}{256}\operatorname{sen}(16\theta+4\pi) + \frac{1}{192}\operatorname{sen}^3(8\theta+2\pi) \\
&= \frac{5}{64}(4\theta+\pi) - \frac{1}{16}\operatorname{sen}(8\theta) + \frac{3}{256}\operatorname{sen}(16\theta) + \frac{1}{192}\operatorname{sen}^3(8\theta)
\end{aligned}$$

2.2.2 Integrais da Forma $\int \text{sen}^m(u)\cos^n(u)\ du,\ m, n \in \mathbb{N}$

No cálculo destas integrais, devemos usar as relações trigonométricas para preparar o integrando, reduzindo a integral dada a outras facilmente solúveis por substituição.

No caso de pelo menos um dos expoentes m e n ser ímpar, deve ser utilizada a relação (i), enquanto que no caso dos dois serem pares, devem ser usadas as identidades (ii) e (iii), mas em algumas situações usa-se ainda a (i).

No caso particular de m e n serem iguais, sendo pares ou ímpares, também se pode usar a identidade:

(iv) $\text{sen}(x)\cos(x) = \dfrac{\text{sen}(2x)}{2}$.

***Exemplo* 2.5.** Calcular as integrais:

(a) $\int \text{sen}^5(x)\cos^2(x)\ dx$ (b) $\int \text{sen}^4(x)\cos^2(x)\ dx$

Solução: (a) Preparando, inicialmente, o integrando, temos:

$$\begin{aligned}
\text{sen}^5(x)\cos^2(x) &= [\text{sen}^2(x)]^2\cdot\text{sen}(x)\cdot\cos^2(x) = [1-\cos^2(x)]^2\cdot\text{sen}(x)\cdot\cos^2(x)\\
&= [1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)]\cdot\text{sen}(x)\cdot\cos^2(x)\\
&= \cos^2(x)\,\text{sen}(x) - 2\cos^4(x)\,\text{sen}(x)+\cos^6(x)\,\text{sen}(x)
\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^5(x)\cos^2(x)\ dx &= \int [\cos^2(x)\,\text{sen}(x) - 2\cos^4(x)\,\text{sen}(x)+\cos^6(x)\,\text{sen}(x)]\ dx\\
&= \int \cos^2(x)\,\text{sen}(x)\ dx - 2\int \cos^4(x)\,\text{sen}(x)\ dx + \int \cos^6(x)\,\text{sen}(x)\ dx
\end{aligned}$$

Agora, para cada uma das integrais acima, aplicamos a substituição $u = \cos(x)$, de onde temos $du = -\text{sen}(x)\ dx$, ou ainda, $-du = \text{sen}(x)\ dx$, então finalmente temos:

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^5(x)\cos^2(x)\ dx &= -\int u^2du - 2\cdot\left(-\int u^4du\right) - \int u^6du = -\frac{u^3}{3}+2\cdot\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+C\\
&= -\frac{1}{3}\cos^3(x)+\frac{2}{5}\cos^5(x)-\frac{1}{7}\cos^7(x)+C
\end{aligned}$$

(b) Nesta integral percebamos que os dois expoentes são pares, então, na preparação do integrando, fazemos:

$$\begin{aligned}
\text{sen}^4(x)\cos^2(x) &= [\text{sen}^2(x)]^2\cdot\cos^2(x) = \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]^2\cdot\left[\frac{1+\cos(2x)}{2}\right]\\
&= \left[\frac{1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}\right]\cdot\left[\frac{1+\cos(2x)}{2}\right]\\
&= \frac{1}{8}\left[1+\cos(2x)-2\cos(2x)-2\cos^2(2x)+\cos^2(2x)+\cos^3(2x)\right]\\
&= \frac{1}{8}\left[1-\cos(2x)-\cos^2(2x)+\cos^3(2x)\right]\\
&= \frac{1}{8}\left[1-\cos(2x)-\frac{1+\cos(4x)}{2}+(1-\text{sen}^2(2x))\cos(2x)\right]\\
&= \frac{1}{8}\left[1-\cos(2x)-\frac{1}{2}-12\cos(4x)+\cos(2x)-\text{sen}^2(2x)\cos(2x)\right]\\
&= \frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos(4x)-\frac{1}{8}\text{sen}^2(2x)\cos(2x)
\end{aligned}$$

Portanto, para a integral dada, temos:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^2(x)\,dx &= \int \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos(4x) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2(2x)\cos(2x)\right]\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos(4x)\,dx - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2(2x)\cos(2x)\,dx\\ &= \frac{x}{16} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2x) + C\\ &= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x) + C.\end{aligned}$$

2.2.3 Integrais da Forma $\int \operatorname{tg}^n(u)du$ e $\int \operatorname{cotg}^n(u)du$, $n \in \mathbb{N}$

Para o cálculo destas integrais, preparamos o integrando utilizando uma das relações

(v) $\operatorname{tg}^2(u) = \sec^2(u) - 1$

(vi) $\operatorname{cotg}^2(u) = \operatorname{cossec}^2(u) - 1$

e artifícios completamente análogos aos utilizados nos dois casos anteriores. Na integral $\int \operatorname{tg}^n(u)du$, fazemos

$$\operatorname{tg}^n(u) = \operatorname{tg}^{n-2}(u)\cdot\operatorname{tg}^2(u) = \operatorname{tg}^{n-2}(u)\cdot(\sec^2(u) - 1),$$

enquanto que, para a integral $\int \operatorname{cotg}^n(u)\,du$, fazemos:

$$\operatorname{cotg}^n(u) = \operatorname{cotg}^{n-2}(u)\cdot\operatorname{cotg}^2(u) = \operatorname{cotg}^{n-2}(u)\cdot(\operatorname{cossec}^2(u) - 1).$$

***Exemplo* 2.6.** Calcular as integrais:

(a) $\int \operatorname{tg}^3(3\theta)d\theta$

(b) $\int \operatorname{cotg}^4(2x)\,dx$

Solução: (a) Preparando, inicialmente, o integrando, utilizando a relação (v) e a transformação sugerida acima, temos:

$$\operatorname{tg}^3(3\theta) = \operatorname{tg}(3\theta)\cdot\operatorname{tg}^2(3\theta) = \operatorname{tg}(3\theta)\cdot(\sec^2(3\theta) - 1) = \operatorname{tg}(3\theta)\sec^2(3\theta) - \operatorname{tg}(3\theta)$$

Assim, temos:

$$\int \operatorname{tg}^3(3\theta)d\theta = \int \operatorname{tg}(3\theta)\sec^2(3\theta)d\theta - \int \operatorname{tg}(3\theta)d\theta$$

Aplicando a substituição $u = 3\theta$ e, posteriormente, para a primeira integral, fazendo $v = \operatorname{tg}(u)$, obtemos, para o cálculo acima,

$$\int \operatorname{tg}^3(3\theta)d\theta = \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2(3\theta) + \frac{1}{3}\ln|\cos(3\theta)| + C$$

(b) Preparando o integrando, utilizando a relação (vi), temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg}^4(2x) &= \operatorname{cotg}^2(2x)\cdot\operatorname{cotg}^2(2x) = \operatorname{cotg}^2(2x)\cdot(\operatorname{cossec}^2(2x)-1)\\
&= \operatorname{cotg}^2(2x)\operatorname{cossec}^2(2x) - \operatorname{cotg}^2(2x) = \operatorname{cotg}^2(2x)\operatorname{cossec}^2(2x) - (\operatorname{cossec}^2(2x)-1)\\
&= \operatorname{cotg}^2(2x)\operatorname{cossec}^2(2x) - \operatorname{cossec}^2(2x) + 1
\end{aligned}$$

Desta forma, a nossa integral fica:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{cotg}^4(2x)\,dx &= \int (\operatorname{cotg}^2(2x)\operatorname{cossec}^2(2x) - \operatorname{cossec}^2(2x) + 1)\,dx\\
&= \int \operatorname{cotg}^2(2x)\operatorname{cossec}^2(2x)\,dx - \int \operatorname{cossec}^2(2x)\,dx + \int 1\,dx
\end{aligned}$$

Recaímos, então, no cálculo de integrais muito mais simples, duas delas simplesmente aplicando a substituição $u = 2x$ (de onde se tem $du = 2\,dx$) e, posteriormente, para a primeira integral, aplicando $v = \operatorname{cotg}(u)$. Assim, obtemos:

$$\int \operatorname{cotg}^4(2x)\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{cotg}^3(2x) + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}(2x) + x + C.$$

2.2.4 Integrais da Forma $\int \sec^n(u)du$ e $\int \operatorname{cossec}^n(u)du$, $n \in \mathbb{N}$

Para o cálculo destas integrais, devemos considerar, também, os casos para n par ou ímpar. No caso de n ser par devemos utilizar, na preparação do integrando, as identidades (v) e (vi), devidamente ajustadas para a sua substituição (com os termos $\sec^2(u)$ e $\operatorname{cossec}^2(u)$ isolados em algum dos membros). Fazemos, então:

$$\sec^n(u) = \sec^{n-2}(u)\cdot\sec^2(u) = (\sec^2(u))^{\frac{n-2}{2}}\cdot\sec^2(u) = (\operatorname{tg}^2(u)+1)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\sec^2(u)$$

ou

$$\operatorname{cossec}^n(u) = \operatorname{cossec}^{n-2}(u)\cdot\operatorname{cossec}^2(u) = [\operatorname{cossec}^2(u)]^{\frac{n-2}{2}}\cdot\operatorname{cossec}^2(u) = [\operatorname{cotg}^2(u)+1]^{\frac{n-2}{2}}\cdot\operatorname{cossec}^2(u),$$

conforme a integral seja da 1ª ou da 2ª forma acima.

No caso de n ser ímpar, devemos aplicar o método de integração por partes, já visto no tema 1 deste material. Vejamos agora alguns exemplos que ilustram a aplicação destas regras.

***Exemplo* 2.7.** Calcular as seguintes integrais:

(a) $\int \operatorname{cossec}^6(x)\,dx$ (b) $\int \sec^3(x)\,dx$

Solução: (a) Preparando inicialmente o integrando:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossec}^6(x) &= \operatorname{cossec}^4(x)\cdot\operatorname{cossec}^2(x)\\
&= [\operatorname{cossec}^2(u)]^2\cdot\operatorname{cossec}^2(x)\\
&= [\operatorname{cotg}^2(x)+1]^2\cdot\operatorname{cossec}^2(x)\\
&= [(\operatorname{cotg}^4(x)+2\operatorname{cotg}^2(x)+1]\operatorname{cossec}^2(x)\\
&= \operatorname{cotg}^4(x)\operatorname{cossec}^2(x)+2\operatorname{cotg}^2(x)\operatorname{cossec}^2(x)+\operatorname{cossec}^2(x)
\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\int\operatorname{cossec}^6(x)\,dx &= \int(\operatorname{cotg}^4(x)\operatorname{cossec}^2(x)+2\operatorname{cotg}^2(x)\operatorname{cossec}^2(x)+\operatorname{cossec}^2(x))\,dx\\
&= \int\operatorname{cotg}^4(x)\operatorname{cossec}^2(x)\,dx+2\int\operatorname{cotg}^2(x)\operatorname{cossec}^2(x)\,dx+\int\operatorname{cossec}^2(x)\,dx
\end{aligned}$$

As três integrais acima são facilmente solúveis, sendo a terceira delas direta (tabelada) e as duas primeiras através da substituição $u=\operatorname{cotg}(x)$, onde nós obtemos finalmente

$$\int\operatorname{cossec}^6(x)\,dx=-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5(x)-\frac{2}{3}\operatorname{cotg}^3(x)-\operatorname{cotg}(x)+C.$$

(b) No cálculo desta integral, já que n é ímpar, vamos utilizar o método de integração por partes. Fazemos então: $u=\sec(x)\Rightarrow du=\operatorname{tg}(x)\sec(x)\,dx$ e $dv=\sec^2(x)\,dx\Rightarrow v=\int\sec^2(x)\,dx=\operatorname{tg}(x)$ (lembre-se que basta adicionar a constante de integração ao final de todo o processo). Daí, aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int\sec^3(x)\,dx &= \sec(x)\operatorname{tg}(x)-\int\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x)\,dx\\
&= \sec(x)\operatorname{tg}(x)-\int\operatorname{tg}^2(x)\sec(x)\,dx\\
&= \sec(x)\operatorname{tg}(x)-\int(\sec^2(x)-1)\sec(x)\,dx\\
&= \sec(x)\operatorname{tg}(x)-\int\sec^3(x)\,dx+\int\sec(x)\,dx
\end{aligned}$$

Obtivemos, então

$$\int\sec^3(x)\,dx=\sec(x)\operatorname{tg}(x)-\int\sec^3(x)\,dx+\int\sec(x)\,dx$$

onde, isolando-se os termos que contém $\int\sec^3(x)\,dx$ no primeiro membro, obtemos

$$\begin{aligned}
2\int\sec^3(x)\,dx &= \operatorname{tg}(x)\sec(x)+\int\sec(x)\,dx\\
\int\sec^3(x)\,dx &= \frac{1}{2}[\operatorname{tg}(x)\sec(x)+\ln|\operatorname{tg}(x)+\sec(x)|]+C
\end{aligned}$$

2.2.5 Integrais da Forma $\int\operatorname{tg}^m(u)\sec^n(u)du$ e $\int\operatorname{cotg}^m(u)\operatorname{cossec}^n(u)du$, $m,n\in\mathbb{N}$

Nestas integrais, devemos considerar, assim como no caso anterior, os casos conforme a paridade de m e n.

No caso de m ímpar ou n par, devemos usar as relações trigonométricas (v) e (vi) para preparar o integrando para o método da substituição.

No caso de m par e n ímpar, a integral deverá ser resolvida pelo método de integração por partes (pois nestes casos o integrando sempre poderá ser expresso em forma de potências ímpares de secante e cossecante), com o integrando previamente preparado para tal.

***Exemplo* 2.8.** Resolver as integrais:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(x)\sec^3(x)\ dx$

Solução: (a) Nesta integral, percebamos que m é ímpar, um dos casos em que devemos preparar o integrando para a aplicação do método da substituição. Fazemos, então:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x) &= \operatorname{tg}^4(x)\sec^6(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x) = [\operatorname{tg}^2(x)]^2\sec^6(x)[\operatorname{tg}(x)\sec(x)]\\
&= [\sec^2(x)-1]^2\sec^6(x)[\operatorname{tg}(x)\sec(x)]\\
&= [\sec^4(x)-2\sec^2(x)+1]\sec^6(x)[\operatorname{tg}(x)\sec(x)]\\
&= \sec^{10}(x)[\operatorname{tg}(x)\sec(x)]-2\sec^8(x)[\operatorname{tg}(x)\sec(x)]+\sec^6(x)[\operatorname{tg}(x)\sec(x)]
\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
&\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x)\ dx\\
=&\int [\sec^{10}(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x)-2\sec^8(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x)+\sec^6(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x)]\ dx\\
=&\int \sec^{10}(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x)\ dx-2\int \sec^8(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x)\ dx+\int \sec^6(x)\operatorname{tg}(x)\sec(x)\ dx
\end{aligned}$$

Agora, para o cálculo das três integrais acima, por substituição, fazemos $u=\sec(x)$, de onde temos $du=\operatorname{tg}(x)\sec(x)\ dx$ e, finalmente, obtemos

$$\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^7(x)\ dx = \frac{1}{11}\sec^{11}(x)-\frac{2}{9}\sec^9(x)+\frac{1}{7}\sec^7(x)+C.$$

Solução: (b) Observemos que, nesta integral, temos m par, caso que podemos exprimir, com o auxílio de (v), o integrando em potências ímpares de secante, deixando-o pronto para o método de integração por partes. Fazemos então:

$$\operatorname{tg}^2(x)\sec^3(x) = (\sec^2(x)-1)\sec^3(x) = \sec^5(x)-\sec^3(x)$$

Temos então

$$\int \operatorname{tg}^2(x)\sec^3(x)\ dx = \int \sec^5(x)\ dx - \int \sec^3(x)\ dx.$$

Agora, resolvendo as integrais $\displaystyle\int \sec^5(x)\ dx$ e $\displaystyle\int \sec^3(x)\ dx$ por partes (faça como exercício!), finalmente, obtemos:

$$\int \operatorname{tg}^2(x)\sec^3(x)\ dx = \frac{1}{4}\sec^3(x)\operatorname{tg}(x)-\frac{1}{8}\sec(x)\operatorname{tg}(x)-\frac{1}{8}\ln|\operatorname{tg}(x)+\sec(x)|+C.$$

2.2.6 Integração de Funções Envolvendo Seno e Cosseno de Arcos Diferentes

Quando a função a ser integrada envolve seno e cosseno de arcos diferentes, as identidades

(vii) $\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)]$

(viii) $\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

(ix) $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

constituem instrumento importante na preparação do integrando e conseqüente simplificação da integral.

Exemplo **2.9.** Calcular a integral $\int \operatorname{sen}(4x)\cos(2x)\ dx$.

Solução: Com o auxílio da relação (vii), preparemos o integrando:

$$\operatorname{sen}(4x)\cos(2x) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(4x+2x) + \operatorname{sen}(4x-2x)] = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(2x)].$$

Temos, portanto, para a integral dada:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(4x)\cos(2x)\ dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(2x)]\ dx = \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen}(6x)\ dx + \int \operatorname{sen}(2x)\ dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(-\cos(6x)) + \frac{1}{2}[-\cos(2x)]\right\} + C = -\frac{1}{12}\cos(6x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + C\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

2.1. Calcular as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\int \operatorname{sen}^4(x)\cos(x)\ dx$

(b) $\int \cos^3(4x)\operatorname{sen}(4x)\ dx$

(c) $\int \operatorname{sen}^3(x)\ dx$

(d) $\int \cos^2(\frac{x}{2})\ dx$

(e) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\ dx$

(f) $\int \operatorname{sen}^2(3t)\cos^2(3t)dt$

(g) $\int \cos(4x)\cos(3x)\ dx$

(h) $\int \operatorname{tg}^6(3x)\ dx$

(i) $\int \operatorname{cotg}^3(t)dt$

(j) $\int \sec^4(x)\ dx$

(k) $\int \operatorname{cossec}^3(x)\ dx$

(l) $\int \frac{\sec^4(\ln x)}{x}\ dx$

(m) $\int \operatorname{cotg}^2(3x)\operatorname{cossec}^4(3x)\ dx$

(n) $\int (\operatorname{tg}(2x) + \operatorname{cotg}(2x))^2\ dx$

2.2. Prove que $\int \operatorname{cotg}(x)\operatorname{cossec}^n(x)\ dx = -\frac{\operatorname{cossec}^n(x)}{n} + C$, para qualquer $n \neq 0$.

2.3 Integração por Substituições Trigonométricas

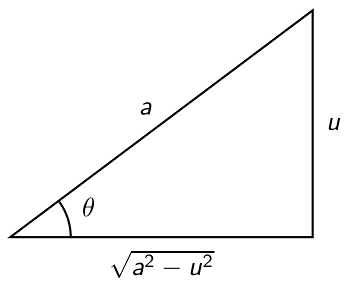
Em muitas integrais, onde em seu integrando aparecem expressões de uma das formas $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$ ou $\sqrt{u^2-a^2}$, onde $a > 0$, podemos reduzir o seu cálculo ao de uma integral trigonométrica de simples resolução (às vezes nem tão simples, mas pelo menos já conhecida). O artifício a ser usado nestes casos chama-se Substituição Trigonométrica e, para cada um dos três casos acima, existe uma substituição trigonométrica conveniente.

Primeiro Caso: O integrando envolve uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Para este caso, devemos usar sempre a substituição $u = a\,\text{sen}(\theta)$. Teremos, com isso, $du = a\cos(\theta)d\theta$ e, supondo que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2(\theta))} = \sqrt{a^2\cos^2(\theta)} = a\cos\theta.$$

O triângulo retângulo da figura ao lado nos dá uma interpretação geométrica bem simples deste artifício. Observemos que a expressão $\sqrt{a^2 - u^2}$ representa, de maneira geral, a medida de um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede a e o outro cateto mede u. Assim, se denotamos por θ um dos ângulos agudos deste triângulo, digamos o ângulo oposto ao cateto u, teremos, pela definição de seno, que $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$.

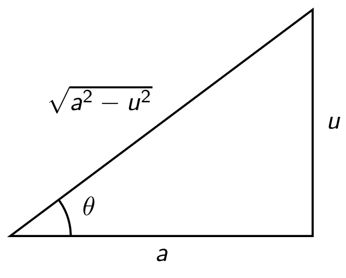


Segundo Caso: O integrando envolve uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$.

Para este caso, a substituição a ser feita é $u = a\,\text{tg}(\theta)$. Temos daí que $du = a\sec^2(\theta)d\theta$ e, supondo também neste caso que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2\,\text{tg}^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1 + \text{tg}^2(\theta))} = \sqrt{a^2\sec^2(\theta)} = a\sec\theta.$$

A figura ao lado nos dá um significado geométrico desta substituição. A expressão $\sqrt{a^2 + u^2}$ pode ser sempre utilizada para representar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem u e a. Assim, denotando por θ um dos ângulos agudos deste triângulo, por exemplo, o adjacente ao cateto de medida a, teremos, diretamente da definição da razão trigonométrica secante, que $\sqrt{a^2 + u^2} = a\sec(\theta)$.

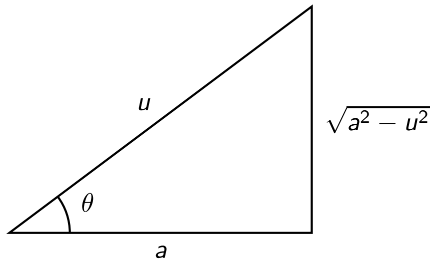


Terceiro Caso: O integrando envolve uma expressão da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$.

Neste último caso de substituição trigonométrica, a substituição a ser feita é $u = a\sec(\theta)$, de onde temos $du = a\,\text{tg}(\theta)\sec(\theta)$. Então, supondo $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$(para $u \geq a$) ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$(para $u \leq -a$), temos o integrando simplificado como segue:

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2(\theta) - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2(\theta) - 1)} = \sqrt{a^2\,\text{tg}^2(\theta)} = a\,\text{tg}(\theta)$$

Analogamente aos dois primeiros casos, uma visualização do significado geométrico deste artifício é dado pela figura abaixo. Note que a expressão $\sqrt{u^2 - a^2}$ denota sempre a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede u e o outro mede a. Desta forma, denotando por θ o ângulo agudo adjacente ao lado de medida a e aplicando a definição da razão trigonométrica Tangente, vemos que $\sqrt{u^2 - a^2} = a\,\mathrm{tg}(\theta)$.



Exemplo **2.10.** Aplicando uma substituição trigonométrica conveniente, calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+5}\,dx$; (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$.

Solução: (a) Observemos que a integral dada ilustra o primeiro caso, pois temos no integrando uma expressão do tipo $\sqrt{a^2-u^2}$, onde $a = 3$ e $u = x$. Assim, fazemos $x = 3\,\mathrm{sen}(\theta)$, de onde se tem $dx = 3\cos(\theta)d\theta$ e, então:

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9\,\mathrm{sen}^2(\theta)} = 3\sqrt{\cos^2(\theta)} = 3\cos(\theta).$$

Substituindo na integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos(\theta)}{9\,\mathrm{sen}^2(\theta)}3\cos(\theta)d\theta = \int \frac{9\cos^2(\theta)}{9\,\mathrm{sen}^2(\theta)}d\theta = \int \mathrm{cotg}^2(\theta)d\theta \\ &= \int [\mathrm{cossec}^2(\theta) - 1]d\theta = \int \mathrm{cossec}^2(\theta)d\theta - \int d\theta = -\,\mathrm{cotg}(\theta) - \theta + C \end{aligned}$$

Para voltarmos à variável original (x), usamos as relações trigonométricas e as funções trigonométricas inversas. De $x = 3\,\mathrm{sen}(\theta)$, obtemos diretamente $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{x}{3}$ e $\theta = \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$. Além disso, de $\sqrt{9-x^2} = 3\cos(\theta)$, temos também que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$. Daí, temos $\mathrm{cotg}(\theta) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. Portanto, voltando à integral, temos, finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \mathrm{arcsen}(\theta) + C.$$

(b) Percebamos, agora, que trata-se de um caso em que o integrando envolve uma expressão da forma $\sqrt{a^2+u^2}$ (2º caso), onde temos $a = \sqrt{5}$ e $u = x$. Então, devemos fazer $x = \sqrt{5}\,\mathrm{tg}(\theta)$, de onde se tem $dx = \sqrt{5}\sec^2(\theta)d\theta$ e então:

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{(\sqrt{5}\,\mathrm{tg}(\theta))^2 + 5} = \sqrt{5\,\mathrm{tg}^2(\theta) + 5} = \sqrt{5(\mathrm{tg}^2(\theta)+1)} = \sqrt{5\sec^2(\theta)} = \sqrt{5}\sec(\theta)$$

Aplicando as substituições na integral, temos:

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \int \sqrt{5}\sec(\theta)\sqrt{5}\sec^2(\theta)d\theta = \int 5\sec^3(\theta)d\theta = 5\int \sec^3(\theta)d\theta$$

Aproveitando o cálculo da integral $\displaystyle\int \sec^3(\theta)d\theta$, já feito no exemplo 2.7 da seção anterior, temos:

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{5}{2}[\mathrm{tg}(\theta)\sec(\theta) + \ln|\,\mathrm{tg}(\theta) + \sec(\theta)|] + C.$$

Agora, para dar a resposta em função de x, utilizemos as relações trigonométricas e as expressões das substituições. De $x = \sqrt{5}\operatorname{tg}(\theta)$, vem $\operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{5}}$ e, de $\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5}\sec(\theta)$, obtemos $\sec(\theta) = \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}$. Substituindo na expressão encontrada para a integral, temos, finalmente,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+5}\,dx &= \frac{5}{2}\Big(\frac{x}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \ln\Big|\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\Big|\Big) + C\\ &= \frac{5}{2}\Big(\frac{x\sqrt{x^2+5}}{5} + \ln\Big|\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\Big|\Big) + C\end{aligned}$$

Poderíamos, ainda, escrever $\displaystyle\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{5}{2}\Big(\frac{x\sqrt{x^2+5}}{5} + \ln|x+\sqrt{x^2+5}| - \ln\sqrt{5}\Big) + C$ e pondo $-\dfrac{5}{2}\ln\sqrt{5} + C$ igual a uma outra constante C_1, teríamos, então

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + C_1.$$

(c) Nesta integral, o integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{u^2-a^2}$, onde $u = x$ e $a = 3$. Devemos então fazer, de onde temos de imediato que $dx = 3\operatorname{tg}(\theta)\sec(\theta)d\theta$. Então:

$$\begin{aligned}x^3\sqrt{x^2-9} &= (3\sec(\theta))^3\sqrt{(3\sec\theta)^2-9} = 27\sec^3(\theta)\sqrt{9\sec^2(\theta)-9} = 27\sec^3(\theta)\sqrt{9(\sec^2(\theta)-1)}\\ &= 27\sec^3(\theta)\sqrt{9\operatorname{tg}^2(\theta)} = 27\sec^3(\theta)3\operatorname{tg}(\theta)\end{aligned}$$

Aplicando na integral, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\operatorname{tg}(\theta)\sec(\theta)\,d\theta}{27\sec^3(\theta)3\operatorname{tg}(\theta)} = \frac{1}{27}\int\frac{d\theta}{\sec^2(\theta)} = \frac{1}{27}\int\cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{27}\int\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta\\ &= \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2}\left[\int d\theta + \int\cos(2\theta)\,d\theta\right] = \frac{1}{54}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right] = \frac{1}{54}[\theta + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)]\end{aligned}$$

Agora, voltemos à variável x. De $x = 3\sec(\theta)$, temos que $\sec(\theta) = \dfrac{x}{3}$ e daí $\theta = \operatorname{arcsec}(\dfrac{x}{3})$. Além disso, de $\sec(\theta) = \dfrac{x}{3}$, temos $\cos(\theta) = \dfrac{3}{x}$ e, juntamente com $x^3\sqrt{x^2-9} = 27\sec^3(\theta)3\operatorname{tg}(\theta)$, concluímos (usando $\operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}$) que $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$. Segue que,

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right] + C = \frac{1}{54}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3\sqrt{x^2-9}}{x^2}\right] + C$$

2.3.1 Exercícios Propostos

2.3. Aplicando uma conveniente substituição, calcular as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$;

(b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$;

(c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$;

(d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$;

(e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$;

(f) $\int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 4)^2}$;

(g) $\int \frac{dx}{(4x^2 - 9)^{3/2}}$;

(h) $\int \frac{2dt}{t\sqrt{t^4 + 25}}$;

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x + x^2}}$;

(j) $\int \frac{\sec^2(x)\, dx}{(4 - \mathrm{tg}^2(x))^{3/2}}$;

(k) $\int \frac{\ln(w)dw}{w\sqrt{\ln(w) - 4}}$.

(l) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 16}}$

2.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nas seções anteriores deste tema e no tema anterior, vimos vários exemplos de integrais cujo integrando consistia em uma função racional, ou seja, uma função f dada por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em $\mathbb{R}$, com $q(x) \neq 0$. Algumas destas integrais, a depender de alguns fatores determinantes como os graus do numerador e do denominador ou a relação existente entre eles, eram facilmente calculáveis por substituição ou por partes, ou até mesmo diretamente, usando propriedades da integral definida.

Em linhas gerais, isso nem sempre ocorre, isto é, na maioria dos casos, a integral que contém em seu integrando uma função racional não é facilmente calculada, ou até mesmo é impossível de ser calculada por um destes métodos, já conhecidos do aluno. Nestes casos, a solução pode ser obtida através de um resultado algébrico conhecido, que é a *decomposição da fração que define a função integrando em frações parciais*.

O método consiste em escrever a fração que aparece no integrando como uma soma de outras frações mais simples, cuja integração é necessariamente mais simples. A decomposição é feita a partir da fatoração do polinômio $q(x)$ (denominador) e associa a cada fator linear ou quadrático irredutível(que não possua raízes reais) que este possuir uma ou mais frações parciais, conforme a multiplicidade do referido fator na fatoração de $q(x)$ seja 1 ou mais que isso.

Para a aplicação da decomposição em frações parciais, dois importantes cuidados devem ser verificados, a fim de que o método possua eficácia:

(i) A fração a ser decomposta deve ser *própria*, ou seja, o grau de $p(x)$ deve ser menor do que o de $q(x)$. Caso isto não ocorra, para a aplicação do método, devemos antes efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$, que transformará a integral numa soma de duas integrais, onde uma delas é a integral simples de uma função polinomial (que pode inclusive ser uma constante) e a outra é a de uma função racional, agora já pronta para a decomposição em frações parciais;

(ii) O coeficiente do termo de maior grau de $p(x)$ deve ser igual a 1. Se o mesmo não ocorrer, providenciamos isto, dividindo ambos os termos da fração por este coeficiente.

O método para determinar as frações parciais em que se decompõe o integrando irá depender sempre da natureza dos fatores que aparecem na fatoração do denominador. Quatro casos são considerados, de acordo com o tipo de fator que aparece e a sua multiplicidade (número de vezes que aparece como fator de $q(x)$.

Primeiro Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares e distintos.

Este é o caso mais simples de decomposição em frações parciais, pois a cada fator linear $a_i x + b_i$ corresponde uma única fração parcial cujo denominador é o próprio fator e cujo numerador é uma constante a ser determinada, por meio de resolução de um sistema simples de equações lineares ou por substituição de valores convenientes de x na identidade a ser encontrada entre os numeradores. De uma maneira prática, se

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \cdot \ldots \cdot (a_nx + b_n),$$

então, temos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \frac{A_3}{a_3x + b_3} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

onde $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo* 2.11*. Calcular a integral $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$.

Solução: Fatorando o denominador, temos:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$$

Observe que na fatoração do denominador apareceram apenas fatores lineares e distintos (todos os fatores só aparecem uma vez cada). A partir daí, podemos escrever, então

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+1}. \tag{2.2}$$

Da igualdade acima, temos, de imediato, $x - 1 = A_1(x-2)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-2)$. Eliminando os parênteses no segundo membro e agrupando os termos de mesmo grau, obtemos:

$$x - 1 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-A_1 + A_2 - 2A_3)x - 2A_1$$

Temos então uma identidade de polinômios na variável x e sabemos que, para que isto ocorra, os coeficientes dos termos de mesmo grau nos dois membros devem ser iguais. Daí, temos:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ -A_1 + A_2 - 2A_3 &= 1 \\ -2A_1 &= -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado por estas equações, onde as incógnitas são A_1, A_2 e A_3, obtemos: $A_1 = \dfrac{1}{2}$, $A_2 = \dfrac{1}{6}$ e $A_3 = -\dfrac{2}{3}$. Substituindo estes valores em 2.2, temos:

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}.$$

Desta forma, podemos escrever a integral dada da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x}\, dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{x-2}\, dx + \int \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1}.$$

Aplicando cálculo direto na primeira e substituições simples (respectivamente $u = x - 2$ e $u = x + 1$) nas duas últimas integrais acima, obtemos, finalmente,

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + C = \frac{1}{6}(3\ln|x| + \ln|x-2| - 4\ln|x+1|) + C.$$

Aplicando propriedades dos logaritmos, obtemos, ainda,

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3(x-2)}{(x+1)^4}\right| + C.$$

***Nota* 8.** Uma outra maneira de determinar as constantes A_1, A_2 e A_3 é, substituindo na identidade $x-1 = A_1(x-2)(x+1)+A_2x(x+1)+A_3x(x-2)$, valores convenientes para x (neste caso, escolheríamos $x=0$, $x=2$ e $x=-1$), já que uma identidade é verdadeira para quaisquer valores de x para os quais ela exista.

Segundo Caso: Os fatores de $q(x)$ são lineares, porém um ou mais deles se repetem.

Neste caso, se um fator $a_ix + b_i$ aparece p vezes na fatoração de $q(x)$, ou seja, possui multiplicidade p, a este fator, ao invés de uma fração parcial, corresponderá uma soma de frações parciais, onde os denominadores são iguais a este fator, com o expoente variando de 1 a p, da primeira à última fração. Por exemplo, se $q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)^p(a_3x+b_3)$, então, temos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{B_1}{a_2x+b_2} + \frac{B_2}{(a_2x+b_2)^2} + \ldots + \frac{B_p}{(a_2x+b_2)^p} + \frac{C_1}{a_3x+b_3}$$

onde $A_1, B_1, B_2, \ldots, B_p, C_1$ são as constantes a determinar.

***Exemplo* 2.12.** Calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2}\,dx$.

Solução: Fatorando o denominador, obtemos $x^4 - 4x^2 = x^2(x+2)(x-2)$, de onde temos que -2 e 2 são raízes simples e 0 é raiz dupla deste polinômio (tem multiplicidade dois). Portanto, na decomposição do integrando em frações parciais, corresponderá a este fator uma soma de 2 frações parciais, com denominador x, com expoentes variando de 1 a 2. Assim, podemos escrever o integrando como segue:

$$\frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Desta igualdade, decorre, de imediato (eliminando os denominadores), que

$$x^3+3x-1 = A_1x(x+2)(x-2) + A_2(x+2)(x-2) + Bx^2(x-2) + Cx^2(x+2).$$

Eliminando os parênteses e, em seguida, agrupando os termos de mesmo grau, obtemos:

$$x^3+3x-1 = (A_1+B+C)x^3 + (A_2-2B+2C)x^2 + (-4A_1)x - 4A_2.$$

Da igualdade acima, comparando os coeficientes dos termos de mesmo grau nos dois membros, temos:

$$\begin{cases} A_1+B+C = 1 \\ A_2-2B+2C = 0 \\ -4A_1 = 3 \\ -4A_2 = -1 \end{cases}$$

Das equações acima, obtemos $A_1 = -\frac{3}{4}$, $A_2 = \frac{1}{4}$, $B = \frac{15}{16}$ e $C = \frac{13}{16}$. Portanto, temos

$$\frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{15}{16}}{x+2} + \frac{\frac{13}{16}}{x-2}$$

Daí, calculando finalmente a integral, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2}\,dx &= \int \frac{-\frac{3}{4}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{15}{16}}{x+2}\,dx + \int \frac{\frac{13}{16}}{x-2}\,dx \\
&= -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{15}{16}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{13}{16}\int \frac{dx}{x-2} \\
&= -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{15}{16}\ln|x+2| + \frac{13}{16}\ln|x-2| + C \\
&= -\frac{3}{4}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{15}{16}\ln|x+2| + \frac{13}{16}\ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

ou ainda, utilizando propriedades dos logaritmos,

$$\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2}\,dx = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{(x+2)^{15}(x-2)^{13}}{x^{12}}\right| - \frac{1}{4x} + C.$$

Terceiro Caso: O denominador $q(x)$ contém fatores lineares e quadráticos (irredutíveis), porém todos os fatores quadráticos são distintos.

Neste caso, a cada fator quadrático irredutível ax^2+bx+c que aparecer na fatoração de $q(x)$ corresponderá uma fração parcial da forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, e as constantes A e B continuam a ser determinadas de modo análogo aos casos anteriores. De forma geral, se $q(x) = (m_1x+n_1)(m_2x+n_2)\cdot\ldots\cdot(m_rx+n_r)(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdot\ldots\cdot(a_sx^2+b_sx+c_s)$, então temos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{m_1x+n_1} + \frac{A_2}{m_2x+n_2} + \ldots + \frac{A_r}{m_rx+n_r} + \frac{B_1x+C_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_2x+C_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \ldots + \frac{B_sx+C_s}{a_sx^2+b_sx+c_s}.$$

O exemplo a seguir ilustra este caso.

***Exemplo* 2.13.** Calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$.

Solução: Observemos que o denominador já está na forma fatorada e que possui um fator linear, $(x-1)$, e outro quadrático irredutível, (x^2+2x+2). Assim, podemos decompor o integrando como:

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+2x+2}.$$

Eliminando os denominadores na igualdade acima, obtemos

$$x^2-2x-3 = A_1(x^2+2x+2) + (B_1x+C_1)(x-1) \qquad (2.3)$$

Vamos agora determinar as constantes, utilizando o método alternativo e prático mencionado ao final do exemplo do caso 1. Substituímos então x por 1 (raiz do fator $(x-1)$ em (2.3)) e obtemos $-4 = 5A_1 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{4}{5}$. Porém, observe que, como o outro fator de $q(x)$ não possui raízes, não temos mais "valores convenientes" a substituir em (2.3), necessitando, portanto, utilizar também o agrupamento dos termos de mesmo grau e a identificação entre os dois membros desta igualdade, para determinar os outros coeficientes. Temos então:

$$x^2-2x-3=(A_1+B_1)x^2+(2A_1-B_1+C_1)x+(2A_1-C_1).$$

Igualando os coeficientes das potências de mesmo grau, temos:

$$\left\{\begin{array}{rcr} A_1+B_1 & = & 1\\ 2A_1-B_1+C_1 & = & -2\\ 2A_1-C_1 & = & -3 \end{array}\right. \quad \overset{A_1=-\frac{4}{5}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcr} -\frac{4}{5}+B_1 & = & 1\\ 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-B_1+C_1 & = & -2\\ 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)A_1-C_1 & = & -3, \end{array}\right.$$

o que simplifica bastante o sistema e nos dá $B_1=\frac{9}{5}$ e $C_1=\frac{7}{5}$. Portanto, o integrando fica decomposto da seguinte forma:

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{-\frac{4}{5}}{x-1}+\frac{\frac{9}{5}x+\frac{7}{5}}{x^2+2x+2}$$

e, voltando finalmente à integral, temos:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx &= \int\frac{-\frac{4}{5}}{x-1}\,dx+\int\frac{\frac{9}{5}x+\frac{7}{5}}{x^2+2x+2}\,dx\\ &= -\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{9}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+2x+2}+\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Agora, para integrar $\int\frac{x\,dx}{x^2+2x+2}$, percebamos que a diferencial do denominador é $2(x+1)\,dx$. Assim, se somarmos e subtrairmos 1 no numerador, obteremos

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Substituindo esta igualdade em (2.4), multiplicando e dividindo por 2 a segunda integral e somando as integrais semelhantes, obtemos então

$$\begin{aligned}&\int\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx\\ &= -\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{9}{5}\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+2}-\frac{9}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}+\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}\\ &= -\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)\,dx}{x^2+2x+2}-\frac{9}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}+\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}\\ &= -\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)\,dx}{x^2+2x+2}-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}\end{aligned}$$

Agora, a segunda integral está pronta para ser resolvida, usando a substituição $u=x^2+2x+2$, enquanto que a terceira necessita apenas de um simples completamento de quadrado no denominador, para então ser resolvida também por uma simples substituição, ou seja, façamos $x^2+2x+2=x^2+2x+1-1+2=(x+1)^2+1$ e então ponhamos $u=x+1$. Finalmente, efetuando os cálculos, obteremos

$$\int\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2|-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{4}{5}\ln|x-1|+C$$

Quarto Caso: O denominador $q(x)$ contém fatores lineares e quadráticos (irredutíveis), e um ou mais fatores quadráticos se repetem.

Neste caso, de uma maneira análoga ao caso em que fatores lineares se repetem (com exceção da forma do numerador, é claro), se um certo fator quadrático irredutível ax^2+bx+c aparece p vezes na fatoração de $q(x)$, então, ao fator quadrático $(ax^2+bx+c)^p$ corresponderá, na decomposição do integrando, uma soma de p frações parciais, onde seus denominadores serão potências deste fator, com os expoentes variando de 1 a p. Ou seja, se

$$q(x) = (m_1x+n_1)(m_2x+n_2)\cdot\ldots\cdot(m_rx+n_r)(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdot\ldots\cdot(a_ix^2+b_ix+c_i)^p\cdot\ldots\cdot(a_sx^2+b_sx+c_s),$$

então

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_1}{m_1x+n_1}+\frac{A_2}{m_2x+n_2}+\ldots+\frac{A_r}{m_rx+n_r}+\frac{B_1x+C_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\ldots+\frac{B_{i1}x+C_{i1}}{a_ix^2+b_ix+c_i}\\ &+ \frac{B_{i2}x+C_{i2}}{(a_ix^2+b_ix+c_i)^2}+\ldots+\frac{B_{ip}x+C_{ip}}{(a_ix^2+b_ix+c_i)^p}+\ldots+\frac{B_sx+C_s}{a_sx^2+b_sx+c_s}.\end{aligned}$$

***Exemplo* 2.14.** Calcular $\displaystyle\int\frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2}$.

Solução: Notemos que o denominador apresenta um fator linear e um fator quadrático irredutível com multiplicidade 2. Assim, podemos decompor o integrando numa soma da forma

$$\frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2} = \frac{A_1}{x}+\frac{B_1x+C_1}{x^2-4x+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Eliminando os denominadores, temos:

$$x-2 = A_1(x^2-4x+5)^2+(B_1x+C_1)x(x^2-4x+5)+(B_2x+C_2)x.$$

Agrupando os termos de mesmo grau no segundo membro e ordenando, temos:

$$x-2 = (A_1+B_1)x^4+(-8A_1-4B_1+C_1)x^3+(26A_1+5B_1-4C_1+B_2)x^2+(-40A_1+5C_1+C_2)x+25A_1.$$

Daí, temos, comparando os termos de mesmo grau nos dois membros,

$$\begin{cases} A_1+B_1 = 0\\ -8A_1-4B_1+C_1 = 0\\ 26A_1+5B_1-4C_1+B_2 = 0\\ -40A_1+5C_1+C_2 = 1\\ 25A_1 = -2\end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações acima, obtemos $A_1 = -\frac{2}{25}$, $B_1 = \frac{2}{25}$, $C_1 = -\frac{8}{25}$, $B_2 = \frac{2}{5}$ e $C_2 = -\frac{3}{5}$.
Substituindo na igualdade inicial, temos:

$$\frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2} = \frac{-\frac{2}{25}}{x}+\frac{\frac{2}{25}x-\frac{8}{25}}{x^2-4x+5}+\frac{\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}}{(x^2-4x+5)^2}$$

Voltando à integral,

$$\begin{aligned}\int\frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2} &= \int\frac{-\frac{2}{25}}{x}\,dx+\int\frac{\frac{2}{25}x-\frac{8}{25}}{x^2-4x+5}\,dx+\int\frac{\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}}{(x^2-4x+5)^2}\,dx\\ &= -\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{25}\int\frac{2x-8}{x^2-4x+5}\,dx+\frac{1}{5}\int\frac{2x-3}{(x^2-4x+5)^2}\,dx \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Vamos, agora, resolver a segunda e a terceira integral acima separadamente. Para a primeira, observe que a diferencial do denominador é $(2x-4)\,dx$. Assim, somando e subtraindo 4 no numerador, obtemos

$$\int \frac{2x-8}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{2x-8+4-4}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{(2x-4)-4}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx - 4\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

Agora, a primeira destas duas últimas integrais acima já está pronta para ser resolvida usando a substituição $u = x^2-4x+5$, pois daí se tem $du = (2x-4)\,dx$ e então obtemos $\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x^2-4x+5| + C_1$. Para a segunda, fazendo um completamento de quadrado no denominador, obtemos:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1}.$$

Fazendo, então, $u = x-2$, de onde se tem $du = dx$, obtemos:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg}(u) + C_2 = \operatorname{arctg}(x-2) + C_2$$

Temos, então, para a segunda integral em (2.5),

$$\int \frac{2x-8}{x^2-4x+5}\,dx = \ln|x^2-4x+5| - 4\operatorname{arctg}(x-2) + C_(3).$$

Resolvendo, agora, a terceira das integrais em (2.5), acrescentamos e subtraímos 1 ao numerador, a fim de deixar a integral ideal para aplicarmos a mesma substituição usada anteriormente, $u = x^2-4x+5$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-3}{(x^2-4x+5)^2}\,dx &= \int \frac{2x-3-1+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx \\
&= \int \frac{(2x-4)+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx \\
&= \int \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2}\,dx + \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}
\end{aligned}$$

Analogamente à primeira das duas integrais resolvidas anteriormente, a primeira destas duas integrais acima já está pronta para ser resolvida usando a substituição $u = x^2-4x+5$, pois daí se tem $du = (2x-4)\,dx$ e então obtemos

$$\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C_4 = -\frac{1}{x^2-4x+5} + C_4.$$

Para a segunda, fazendo inicialmente um completamento de quadrado no denominador, obtemos

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} = \int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2}.$$

Fazendo, então, $x-2 = \operatorname{tg}(\theta)$, de onde se tem $dx = \sec^2(\theta)d\theta$ e, então

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} &= \int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \int \frac{\sec^2(\theta)d\theta}{(\operatorname{tg}^2(\theta)+1)^2} = \int \frac{\sec^2(\theta)d\theta}{(\sec^2(\theta))^2} = \int \frac{\sec^2(\theta)d\theta}{\sec^4\theta} \\
&= \int \frac{d\theta}{\sec^2(\theta)} = \int \cos^2(\theta)d\theta = \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{2}\int \cos(2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta) + C_5 = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + C_5
\end{aligned}$$

Voltando à variável inicial, x, de $x-2=\operatorname{tg}(\theta)$, obtém-se $\theta = \operatorname{arctg}(x-2)$, $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ e $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{1}{2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} + C_5 \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)} + C_5
\end{aligned}$$

Temos, então, para a terceira integral em (2.5),

$$\int \frac{2x-3}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2-4x+5} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)} + C_6.$$

Finalmente, substituindo os cálculos da segunda e da terceira integral em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2} &= -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{1}{25}(\ln|x^2-4x+5| - 4\operatorname{arctg}(x-2)) \\
&\quad +\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{x^2-4x+5} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)}\right) \\
&= -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| \\
&\quad -\frac{4}{25}\operatorname{arctg}(x-2) - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{x-2}{10(x^2-4x+5)} + C \\
&= -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{3}{50}\operatorname{arctg}(x-2) + \frac{x-4}{10(x^2-4x+5)} + C
\end{aligned}$$

***Nota* 9.** Antes de decompor uma função racional em frações parciais, é importante que se tente primeiro simplificá-la, se possível, verificando se numerador e denominador possuem fatores comuns. Isto encurta muito o processo, quando pode ser feita a simplificação.

2.4.1 Exercícios Propostos

2.4. Calcular as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2+x}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+4}{x^2-2x+1}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)^2}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{x^3+4x}$;

(f) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$;

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+8}$;

(h) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^3-1}\,dx$;

(i) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^2}$;

(j) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}\,dx$;

(k) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+2)^2}\,dx$;

(l) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}\,dx$.

2.5. Utilizando a decomposição do integrando em frações parciais, mostre a seguinte fórmula:

$$\frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C.$$

2.5 Integração de Funções Irracionais

Em muitas situações, nos deparamos com integrais que envolvem expressões irracionais, da forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Algumas delas podem ser resolvidas aplicando-se uma simples substituição. Por exemplo, a integral $\int \frac{(6x+3)\,dx}{3x^2+3x-8}$ é resolvida facilmente fazendo $u = 3x^2+3x-8$. Outras podem ser convenientemente adaptadas através de artifícios simples (como a adição e subtração de um mesmo fator numérico) a fim de que recaiam neste primeiro caso.

Em linhas gerais, podemos sempre completar o quadrado do trinômio ax^2+bx+c, para realizarmos então uma substituição mais simples. Vejamos alguns exemplos onde o uso deste artifício leva uma dada integral a uma integral tabelada ou de resolução já conhecida pelos métodos anteriores.

***Exemplo* 2.15.** Calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+15}}$; (b) $\displaystyle\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx$.

Solução: (a) Inicialmente, completamos o quadrado na expressão $x^2+8x+15$:

$$x^2+8x+15 = (x+4)^2 - 16 + 15 = (x+4)^2 - 1.$$

Daí, a substituição mais simples a ser feita é $u = x+4$, de onde se tem de imediato que $du = dx$. Então, para o cálculo da integral, temos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+15}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}.$$

Notemos que esta integral é tabelada e é igual a $\ln|u+\sqrt{u^2-1}|+C$. Então, voltando à variável x, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+15}} = \ln|x+4+\sqrt{(x+4)^2-1}|+C.$$

(b) Para o cálculo desta integral, podemos notar que o completamento de quadrado não é um artifício viável, visto que não recairíamos em uma integral mais simples ou tabelada se o fizéssemos. Neste caso, a substituição mais conveniente é $u=\sqrt{x^2+4}$. Temos então que $u^2 = x^2+4$ e, portanto, $2u\,du = 2x\,dx$, ou ainda, $u\,du = x\,dx$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx &= \int (x^2)^2\sqrt{x^2+4}x\,dx = \int (u^2-4)^2 u\cdot u\,du = \int (u^6-8u^4+16u^2)du \\
&= \frac{1}{7}u^7 - \frac{8}{5}u^5 + \frac{16}{3}u^3 + C \\
&= \frac{1}{7}(\sqrt{x^2+4})^7 - \frac{8}{5}(\sqrt{x^2+4})^5 + \frac{16}{3}(\sqrt{x^2+4})^3 + C \\
&= \frac{1}{7}(x^2+4)^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{5}(x^2+4)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}} + C \\
&= (x^2+4)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{7}(x^2+4)^2 - \frac{8}{5}(x^2+4) + \frac{16}{3}\right] + C
\end{aligned}$$

Podemos notar, a partir dos exemplos acima, que um mesmo tipo de substituição não é aplicável a todos os tipos de integrais contendo expressões irracionais da forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$. No entanto, dependendo dos sinais dos coeficientes a e c ou da existência de zeros para o trinômio ax^2+bx+c, existe um tipo ideal de substituição a ser adotado, como sugerem os casos abaixo:

(i) O trinômio ax^2+bx+c apresenta $a>0$.

Para este caso, podemos sempre fazer $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$.

(ii) O trinômio ax^2+bx+c apresenta $c > 0$.

Neste caso, devemos usar $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.

(iii) O trinômio ax^2+bx+c possui raízes reais.

Para este caso, devemos fatorar o trinômio, a partir do cálculo de suas raízes e então utilizar a substituição $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r)t$, onde $x-r$ é um dos fatores de ax^2+bx+c.

Vejamos, então, alguns exemplos que ilustram estes casos.

***Exemplo* 2.16.** Calcular, utilizando a substituição mais apropriada, as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x-3}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x+9}}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-6}}$

Solução: (a) Observemos que o trinômio que aparece nesta integral apresenta tanto $a > 0$ como também raízes reais. Portanto, podemos aplicar um das duas substituições dos casos (i) e (iii) mencionados acima. Vamos escolher, então, a substituição (i), considerando o sinal positivo de a. Temos, então, $\sqrt{4x^2+x-3} = 2x+t$. Segue que $4x^2+x-3 = (2x+t)^2 \Rightarrow 4x^2+x-3 = 4x^2+4xt+t^2$. Adicionando $-4x^2$ aos dois membros e isolando os termos em x no primeiro membro, obtemos $x-4xt = t^2+3 \Rightarrow x(1-4t) = t^2+3$, de onde temos $x = \dfrac{t^2+3}{1-4t}$ e, então, $dx = \dfrac{-4t^2+2t+12}{(1-4t)^2}dt$. Portanto, temos

$$\sqrt{4x^2+x-3} = 2\cdot\frac{t^2+3}{1-4t} + t = \frac{-2t^2+t+6}{1-4t}$$

Voltando à integral, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x-3}} &= \int \frac{\dfrac{-4t^2+2t+12}{(1-4t)^2}}{\dfrac{t^2+3}{1-4t}\cdot\dfrac{-2t^2+t+6}{1-4t}}dt = \int \frac{\dfrac{2(-2t^2+t+6)}{(1-4t)^2}}{\dfrac{(t^2+3)(-2t^2+t+6)}{(1-4t)^2}}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+3}dt = 2\int\frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

Voltando à variável x, temos, finalmente,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x-3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{4x^2+x-3}-2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(b) Notemos que o trinômio que aparece no integrando possui os sinais de a e c positivos, nos permitindo escolher entre as substituições indicadas para os casos (i) e (ii). Escolhendo a substituição do caso (ii), considerando o sinal positivo do coeficiente $c = 9$, façamos então $\sqrt{x^2+4x+9} = xt+3$. Daí, temos $x^2+4x+9 = (xt+3)^2 \Rightarrow x^2+4x+9 = x^2t^2+6xt+9$. Adicionando 9 aos dois membros e isolando no primeiro membro os termos em x, obtemos: $x^2 - x^2t^2 + 4x - 6xt = 0$. Segue que, $x = \dfrac{6t-4}{1-t^2}$. Daí, $dx = \dfrac{6t^2-8t+6}{(1-t^2)^2}dt$. Logo, voltando à substituição, temos

$$\sqrt{x^2+4x+9} = \frac{6t-4}{1-t^2}\cdot t + 3 = \frac{3t^2-4t+3}{1-t^2}$$

Substituindo estas expressões na integral,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x+9}} &= \int \frac{\dfrac{6t^2-8t+6}{(1-t^2)^2}}{\left(\dfrac{6t-4}{1-t^2}+4\right)\dfrac{3t^2-4t+3}{1-t^2}}dt = \int \frac{\dfrac{6t^2-8t+6}{(1-t^2)^2}}{\left(\dfrac{6t-4t^2}{1-t^2}\right)\left(\dfrac{3t^2-4t+3}{1-t^2}\right)}dt \\ &= \int \frac{\dfrac{2(3t^2-4t+3)}{(1-t^2)^2}}{\dfrac{(6t-4t^2)(3t^2-4t+3)}{(1-t^2)^2}}dt = \int \frac{dt}{-2t^2+3t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}t} \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Temos, agora, uma integral que pode ser facilmente resolvida por frações parciais. Como as raízes de $t^2 - \frac{3}{2}t$ são 0 e $\frac{3}{2}$, temos $t^2-\frac{3}{2}t = t\left(t-\frac{3}{2}\right)$ e, então, podemos escrever

$$\frac{1}{t^2-\frac{3}{2}t} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t-\frac{3}{2}}.$$

ou ainda, eliminando os denominadores, $1 = A_1\left(t-\frac{3}{2}\right) + A_2t$.

A igualdade acima é válida para qualquer valor de t. Escolhendo-se, então, $t=0$ e $t=\frac{3}{2}$ e substituindo, obtemos, respectivamente,

$$\begin{cases} 1 = -\frac{3}{2}A_1 \implies A_1 = -\frac{2}{3} \\ 1 = \frac{3}{2}A_2 \implies A_2 = \frac{2}{3}\end{cases}$$

Portanto, temos

$$\frac{1}{t^2-\frac{3}{2}t} = \frac{-\frac{2}{3}}{t} + \frac{\frac{2}{3}}{t-\frac{3}{2}}$$

e, voltando ao cálculo da integral $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}t}$, temos

$$\int \frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}t} = \int \frac{-\frac{2}{3}}{t}dt + \int \frac{\frac{2}{3}}{t-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t} + \frac{2}{3}\int\frac{dt}{t-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\ln|t| + \frac{2}{3}\ln\left|t-\frac{3}{2}\right| + C_1$$

Substituindo este resultado em (2.6), obtemos

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x+9}} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\ln|t| + \frac{2}{3}\ln\left|t-\frac{3}{2}\right| + C_1\right) = \frac{1}{3}\ln|t| - \frac{1}{3}\ln\left|t-\frac{3}{2}\right| + C,$$

onde $C = -\frac{1}{2}C_1$ e, voltando à variável x, temos, finalmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x+9}} &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+9}-3}{x}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+9}-3}{x} - \frac{3}{2}\right| + C \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+9}-3}{x}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+4x+9}-3x-6}{2x}\right| + C\end{aligned}$$

(c) Notemos que, nesta integral, o trinômio raízes reais, além de possuir $a = 1 > 0$. Podemos então escolher entre as substituições indicadas para os casos (i) e (iii). Escolhendo a substituição para o caso (iii), considerando que 2 é uma das raízes de x^2+x-6 e, portanto, $(x-2)$ é um de seus fatores, fazemos:

$$\sqrt{x^2+x-6} = (x-2)t \Leftrightarrow x^2+x-6 = (x-2)^2t^2 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) = (x-2)^2t^2.$$

Dividindo os dois membros da igualdade acima por $x-2$, obtemos: $x+3 = (x-2)t^2$, donde vem que $x = \frac{2t^2+3}{t^2-1}$ e $dx = \frac{-10t}{(t^2-1)^2}dt$. Temos, então

$$\sqrt{x^2+x-6} = \left(\frac{2t^2+3}{t^2-1} - 2\right)t = \frac{5t}{t^2-1}$$

Substituindo os resultados acima na integral, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-6}} &= \int \frac{\frac{-10t}{(t^2-1)^2}}{\frac{2t^2+3}{t^2-1}\cdot\frac{5t}{t^2-1}}dt = \int \frac{\frac{-10t}{(t^2-1)^2}}{\frac{5t(2t^2+3)}{(t^2-1)^2}}dt = \int \frac{-10t\,dt}{10t^3+15t} = \int \frac{-10t\,dt}{10t(t^2+\frac{3}{2})} \\ &= \int \frac{-dt}{t^2+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C = -\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + C\end{aligned}$$

Voltando à variável x, temos, finalmente:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-6}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x-2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + C.$$

2.5.1 Exercícios Propostos

2.6. Calcular as seguintes integrais de funções irracionais:

(a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x-x^2-6}}$

(b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

(d) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}$

(e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x-4}}$

(f) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

(g) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+12x+5}}$

(h) $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$

(i) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

(j) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Gabarito

2.1 (a) $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(x) + C$; (b) $-\frac{1}{16}\cos^4(4x) + C$; (c) $\frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + C$; (d) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + C$; (e) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(x) + C$; (f) $\frac{1}{8}t - \frac{1}{96}\operatorname{sen}(12t) + C$; (g) $\frac{1}{14}\operatorname{sen}(7x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + C$; (h) $\frac{1}{15}\operatorname{tg}^5(3x) - \frac{1}{9}\operatorname{tg}^3(3x) + \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x) - x + C$; (i) $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2(t) - \ln|\operatorname{sen}(t)| + C$; (j) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(x) + \operatorname{tg}(x) + C$; (k) $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}(x)\operatorname{cossec}(x) + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cossec}(x) - \operatorname{cotg}(x)| + C$; (l) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(\ln(x)) + \operatorname{tg}(\ln(x)) + C$; (m) $-\frac{1}{15}\operatorname{cotg}^5(3x) - \frac{1}{9}\operatorname{cotg}^3(3x) + C$; (n) $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}(2x) - \operatorname{cotg}(2x)) + C$. 2.2 2.3 (a) $\frac{a^2}{2}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right] + C$; (b) $-\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$; (c) $\frac{1}{2}\ln\frac{|}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}x| + C$; (d) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + C$; (e) $\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$; (f) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{x}{2(x^2 - 4)} + C$; (g) $-\frac{x}{9\sqrt{4x^2 + 9}} + C$; (h) $\frac{1}{5}\ln(\frac{\sqrt{t^4 + 25} - 5}{t^2}) + C$; (i) $\ln|x + 2 + \sqrt{4x + x^2}| + C$; (j) $\frac{\operatorname{tg}(x)}{4\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2(x)}} + C$; (k) $\frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}(8 + \ln^2 w) + C$ (l) $\frac{1}{128}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{4}{x^2}\sqrt{x^2 - 16}\right] + C$. 2.4 (a) $x^2 - 2x + 2\ln|x + 1| + C$; (b) $\frac{1}{12}\ln|x - 2| + \frac{2}{3}\ln|x + 1| - \frac{3}{4}\ln|x + 2| + C$; (c) $x + 7\ln|x - 1| - \frac{10}{x - 1} + C$; (d) $3\ln\left|\frac{x - 2}{x - 3}\right| - \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x - 3} + C$; (e) $\frac{5}{4}[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4)] + C$; (f) $\frac{3}{2}\ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}) + C$; (g) $\frac{1}{12}\ln|x + 2| - \frac{1}{24}\ln|x^2 - 2x + 4| + \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{x - 1}{\sqrt{3}}) + C$; (h) $x + \frac{5}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{3}\ln|x^2 + x + 1| + C$; (i) $\frac{1}{4}(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}) + C$; (j) $\ln(\frac{x - 2}{x - 1})^2 + \frac{1}{x - 2} - \frac{5}{2(x - 2)^2} + C$; (k) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2) + \frac{1}{x^2 + 2} + C$; (l) $\frac{2}{5}\ln|x - \frac{1}{2}| + \frac{3}{5}\ln|x + 2| + C$. 2.5 2.6 (a) $-\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{2(3 - x)}{3(x - 2)}}) + C$; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|1 - \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2 + x - x^2} - \sqrt{2})}{x}\right| + C$; (c) $\ln\left|\frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}\right| + C$; (d) $\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} - x + 1}{2}) + C$; (e) $\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{x^2 - 4x - 4} - x}{2}) + C$; (f) $\operatorname{arctg}(2\sqrt{x^2 + x} - 2x - 1) + C$; (g) $-\frac{1}{3}\ln|2 - \sqrt{9x^2 + 12x + 5} + 3x| + C$; (h) $\frac{-1}{\sqrt{2x + x^2} - x} - \frac{1}{\sqrt{2x + x^2} - x - 2} + C$; (i) $-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1} + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + 2x} - x) - 2\ln|\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1| + C$; (j) $-2\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3 - 2x - x^2} - \sqrt{3}}{x}) + C$.

bloco temático 2 Integral Definida

tema 3 Área e Comprimento de Arco

A Integral Definida

Apresentação

Nesta primeira seção, apresentaremos a definição da integral definida como sendo a área de uma certa região plana a ela associada. Em seguida, enunciaremos suas propriedades, que servirão de ferramentas para provar os *teoremas fundamentais do cálculo* que, por sua vez, nos possibilitam avaliar a integral definida através do cálculo da antiderivada. Depois, aplicaremos estes recursos para calcular áreas de regiões planas.

3.1 A Integral Definida

Considere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, não necessariamente eqüidistantes, tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Note que os subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n] \subset [a,b]$. Seja $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ o comprimento do primeiro subintervalo, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ o comprimento do segundo subintervalo, e assim por diante, de modo que o comprimento do i-ésimo subintervalo seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$. O conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$ é chamado de *partição* do intervalo $[a,b]$.

O número $\Delta x = \max\{\Delta x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ é chamado de *norma* da partição do intervalo $[a,b]$.

Agora, escolha $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in [a,b]$, tal que, $\varphi_1 \in [x_0, x_1], \varphi_2 \in [x_1, x_2], \ldots, \varphi_n \in [x_{n-1}, x_n]$, e considere a seguinte soma:

$$f(\varphi_1)(x_1 - x_0) + f(\varphi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\varphi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(\varphi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i.$$

Esta soma é conhecida como *soma de Riemann*, devido ao matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1.826-1.866).

***Exemplo* 3.1.** Ache a soma de Riemann para a função $f(x) = 10 - x^2$ no intervalo $[0,5]$, usando a partição $P = \{0,1,2,3,4,5\}$ e os valores $\varphi_1 = \dfrac{1}{2}$, $\varphi_2 = \dfrac{7}{4}$, $\varphi_3 = \dfrac{9}{4}$, $\varphi_4 = \dfrac{7}{2}$, $\varphi_5 = \dfrac{9}{2}$.

Solução: Temos que a soma de Riemann é dada por:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} f(\varphi_i)\Delta x_i &= f(\varphi_1)\Delta x_1 + f(\varphi_2)\Delta x_2 + f(\varphi_3)\Delta x_3 + f(\varphi_4)\Delta x_4 + f(\varphi_5)\Delta x_5 \\
&= f\left(\frac{1}{2}\right)(1-0) + f\left(\frac{7}{4}\right)(2-1) + f\left(\frac{9}{4}\right)(3-2) + f\left(\frac{7}{2}\right)(4-3) + f\left(\frac{9}{2}\right)(5-4) \\
&= \frac{73}{8}
\end{aligned}$$

3.1 Definição. Seja f uma função cujo o domínio inclui o intervalo $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e $\varphi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Dizemos que a função f é integrável no intervalo $[a, b]$ se existir o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i,$$

e denotamos por

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

(Lê-se: integral de f de x dx de a até b ou integral definida de f de a até b.)

***Nota* 10.** Na notação $\int_a^b f(x)\, dx$, $f(x)$ é chamada de **integrando**, os números reais a e b de **limite inferior** e **limite superior**, respectivamente.

***Exemplo* 3.2.** Achar o valor exato da integral definida $\int_0^1 x\, dx$ e interpretar geometricamente o resultado.

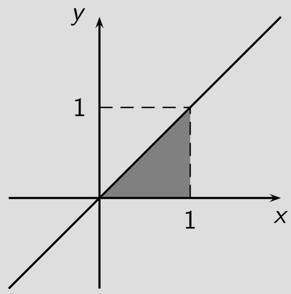
Solução: Considere $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \ldots, n$. É claro que $x_i \in [0, 1], \forall\, i$. Vamos considerar também $\varphi_i \in [x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, tal que $\varphi_i = x_i$. Observe que para $i = 1, \ldots, n$,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n},$$

e que, $\Delta x \to 0$ é o mesmo que $n \to \infty$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \lim_{n\to\infty} i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1 + \ldots + n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Geometricamente, o valor de $\int_0^1 x\, dx$ é a área da região limitada pela reta $y = x$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$ como mostra a Figura ao lado.



Naturalmente, surge a seguinte pergunta: Sob que condições uma função é integrável? A resposta é dada pelo seguinte teorema.

3.2 Teorema. Se uma função f for contínua no intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

A demonstração deste teorema foge ao contexto deste livro, podendo ser encontrado em qualquer texto de Cálculo Avançado.

> ***Nota* 11.** O Teorema anterior não garante que se uma função f for integrável em $[a, b]$ ela será contínua em $[a, b]$. Isto se deve ao fato de que entre as funções descontínuas, existem aquelas que são integráveis.

Na definição da integral definida, o intervalo $[a, b]$ é dado e assim estamos supondo que $a < b$. Para considerar a integral definida de uma funçãof de a até b onde $a > b$ ou $a = b$, temos as definições a seguir.

3.3 Definição. Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx,$$

se $\int_a^b f(x)dx$ existir.

***Exemplo* 3.3.** No exemplo 3.2 mostramos que $\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$. Logo, pela definição 3.3

$$\int_1^0 x\, dx = -\int_0^1 x\, dx = -\frac{1}{2}.$$

3.4 Definição. Se $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

***Exemplo* 3.4.** Da definição 3.4, $\int_1^1 x\, dx = 0.$

Agora, para dar uma interpretação geométrica para a integral definida tomemos a mesma partição P do intervalo $[a, b]$ onde a função $f(x)$ é contínua e que foi utilizada para definir a soma de Riemann para a função f.

Analogamente, para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição, tomemos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e calculemos a soma das áreas de todos os retângulos de base igual a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$, correspondentes a partição. Temos, então,

$$A_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

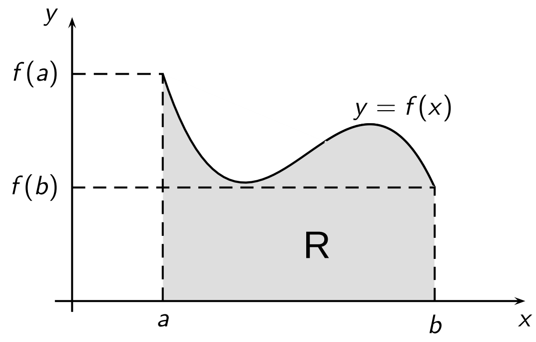
Notemos, agora, que, à medida que fazemos n crescer ilimitadamente (fazendo com que cada $\Delta x_i \to 0$), a soma acima se aproxima cada vez mais do que intuitivamente entendemos como a área limitada pelo gráfico de $f(x)$ e o eixo x de a até b, o que permite a formulação da seguinte definição.

3.5 Definição. Seja $f(x)$ contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$, então a área da região plana compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$, o eixo x e o gráfico de f neste intervalo é dada por

$$A = \lim_{\max \Delta x_i} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

Notando, finalmente, que a soma que aparece ao lado direito da igualdade acima é a soma de Riemann para a função $f(x)$ podemos redefinir a área como uma integral definida como a seguir.

3.6 Definição. Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$, então o número $\int_a^b f(x)\, dx$ é a área da região compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$, o eixo x e o gráfico de f neste intervalo.



3.1.1 Exercícios Propostos

3.1. Ache a soma de Riemann para a função no intervalo, usando a partição P dada e os valores de φ_i dados.

(a) $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 3$; para $P = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 3\right\}$ e $\varphi_1 = \frac{1}{2}, \varphi_2 = 1, \varphi_3 = \frac{3}{2}, \varphi_4 = \frac{5}{2}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 3$; para $P = \left\{1, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{8}{3}, 3\right\}$; e $\varphi_1 = \frac{5}{4}, \varphi_2 = 2, \varphi_3 = \frac{5}{2}, \varphi_4 = \frac{11}{4}$.

(c) $f(x) = x^2 - x + 1, 0 \leq x \leq 1$; para $f_1 = 0,1, \varphi_2 = 0,4, \varphi_3 = 0,6, \varphi_4 = 0,9$.

3.2. Encontre o valor exato das integrais definidas. (Use o método do exemplo 3.2).

(a) $\displaystyle\int_0^1 2x + 1\ dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 x^2\ dx$

3.2 Propriedades da Integral Definida

Como o leitor deve ter percebido, o cálculo da integral definida, a partir da definição é em geral muito trabalhoso e às vezes impossível. Para facilitar o cálculo da integral definida, iremos estabelecer algumas propriedades.

No que se segue, $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ e $\varphi_i \in [x_i, x_{i-1}], i = 1, \ldots, n$.

3.7 Proposição. Seja $f(x) = k$, para todo $a \leq x \leq b$. Então $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = k \cdot (b - a)$.

Prova: Por definição

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b k\ dx &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} k \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} k[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (b - x_{n-1})] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} k \cdot (b - a) \\
&= k \cdot (b - a).
\end{aligned}$$

□

Em particular, se $k = 1$, temos que $\displaystyle\int_a^b dx = b - a$.

***Exemplo* 3.5.** Calcular $\int_{-2}^{3} 3\,dx$.

Solução: Aplicando a proposição 3.7, temos que

$$\int_{-2}^{3} 3\,dx = 3 \cdot [3 - (-2)] = 3 \cdot 5 = 15.$$

3.8 Proposição. Se a função f for integrável no intervalo $[a,b]$ e se k for uma constante qualquer, então

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Prova: $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\varphi_i)\Delta x_i = k \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,dx$ □

***Exemplo* 3.6.** Calcular $\int_0^1 2x\,dx$.

Solução: $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$

3.9 Proposição. Se as funções f e g são integráveis em $[a,b]$, então $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Prova:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx &= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\varphi_i)+g(\varphi_i)]\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\varphi_i)\Delta x_i\right\}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i + \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\varphi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

***Nota* 12.** A proposição 3.9 pode ser generalizada da seguinte forma:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

3.10 Proposição. Se a função f for integrável em $[a,b]$ e c é um número real, tal que $a<c<b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

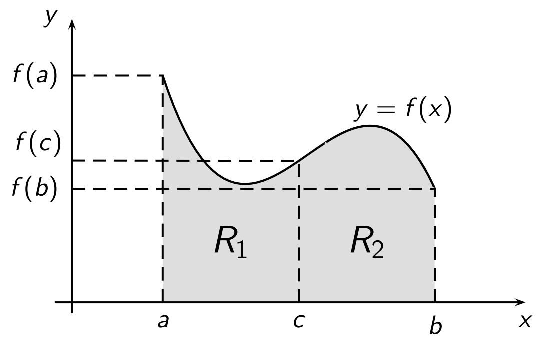
Prova: Seja $P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = c\}$ uma partição de $[a,c]$, $P_2 = \{c = x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_s = b\}$ uma partição de $[c,b]$ e $\varphi_i \in [x_i, x_{i-1}]$, $i = 1,\ldots,s$. Então $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a,b]$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{s} f(\varphi_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i + \sum_{i=n+1}^{s} f(\varphi_i)\Delta x_i\right\}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i + \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=n+1}^{s} f(\varphi_i)\Delta x_i = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Nota 13. Se f é integrável em um intervalo fechado I e $a, b, c \in I$, sem importar a ordem entre eles, então $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$.

Uma interpretação geométrica da proposição 3.10, é mostrada na Figura a seguir, em que $f(x) \geq 0$. A medida da área da região compreendida entre a curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ é igual a soma das áreas das regiões compreendidas entres a curva $y = f(x)$, o eixo x, as retas $x = a$ e $x = c$ e entre a curva $y = f(x)$, o eixo x, as retas $x = c$ e $x = b$.



3.11 Proposição. Se as funções f e g forem integráveis no intervalo $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx.$$

Prova: Por hipótese, temos que $f(\varphi_i) \geq g(\varphi_i)$. Logo,

$$f(\varphi_i)\Delta x_i \geq g(\varphi_i)\Delta x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} g(\varphi_i)\Delta x_i.$$

E isto nos dá que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i \geq \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\varphi_i)\Delta x_i.$$

E, assim,

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx.$$

$\square$

A interpretação geométrica da proposição 3.11, é de que quando $f(x) \geq g(x), \forall\ x \in [a, b]$, a área da região compreendida entre a curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, é maior do que a área compreendida entre a curva $y = g(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$.

3.12 Proposição. Seja f uma função contínua e integrável em $[a, b]$, m e M os valores mínimo e máximo, respectivamente, de f em $[a, b]$. Então,

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M \cdot (b - a).$$

Prova: Como m e M são os valores mínimo e máximo, respectivamente, de f em $[a,b]$, temos que $m \leq f(x) \leq M, \forall \ \in [a,b]$. Pela proposição 3.7, sabemos que

$$\int_a^b m\ dx = m \cdot (b-a) \text{ e } \int_a^b M\ dx = M \cdot (b-a).$$

Como $m \leq f(x)$ e $f(x) \leq M$, pela proposição 3.11, temos que

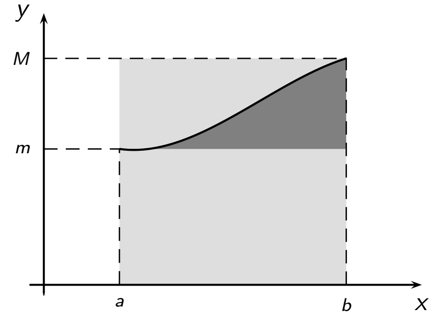
$$m \cdot (b-a) = \int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \text{ e } \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b M\ dx = M \cdot (b-a).$$

E, assim,

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M \cdot (b-a).$$

□

A interpretação geométrica para a proposição 3.11 é dada pela figura a seguir.



3.13 Proposição. Se f é um função contínua em $[a,b]$, então existe $\chi \in [a,b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\chi) \cdot (b-a).$$

Prova: Como f é contínua em $[a,b]$, temos que existe o mínimo absoluto, $m = f(x_m)$, e o máximo absoluto, $M = f(x_M)$, de f em $[a,b]$. Pela proposição 3.12, temos que

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M \cdot (b-a) \Longrightarrow m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} \leq M.$$

Como $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$, então

$$f(x_m) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} \leq f(x_M).$$

Desta última desigualdade e pelo Teorema do Valor Médio para funções, temos que existe $\chi \in [a,b]$, tal que

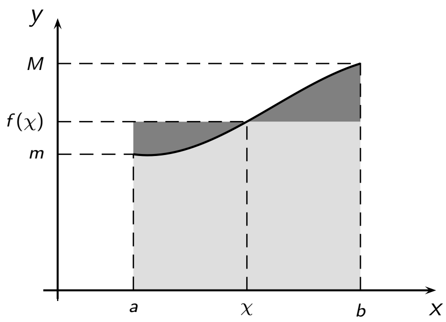
$$f(\chi) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\ dx = f(\chi) \cdot (b-a).$$

□

A proposição 3.13 é conhecida como *Teorema do Valor Médio para Integrais*. O valor $f(\chi)$ é chamado de *valor médio* de f em $[a,b]$.

Sabemos que o número $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ representa a área da região compreendida entre a curva $y = f(x)$, o eixo x, e as retas $x = a$ e $x = b$. A proposição 3.13 nos diz que podemos encontrar um $\chi \in [a,b]$, de modo que o retângulo cujos lados tem comprimentos iguais a $f(\chi)$ e $b-a$, tem área igual a $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

Como ilustra a figura a seguir.



***Exemplo* 3.7.** Sabendo que $\int_0^2 3x^2\,dx = 8$, encontre o valor de χ tal que $\int_0^2 3x^2\,dx = f(\chi)(2-0)$.

Solução: Como $f(x) = 3x^2$, temos que $f(\chi) = 3\chi^2$. Assim,

$$8 = 3\chi^2 \cdot (2-0) \Longrightarrow 4 = 3\chi^2 \Longrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Mas, $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \notin [0,2]$. Logo, $\chi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3.14 Definição. Seja f uma função integrável em $[a,b]$. O valor médio de f em $[a,b]$ é

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

3.2.1 Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

Sabemos que se uma função f for contínua no intervalo $[a,b]$ então ela será integrável nesse mesmo intervalo. Logo, f também será integrável no intervalo $[a,x]$, para $a < x < b$, tendo sentido então escrevermos $\int_a^x f(t)\,dt$, que é um número que depende de x. Logo, $\int_a^x f(t)\,dt$ define uma função F, ou seja, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, cujo domínio é o intervalo $[a,b]$.

3.15 Teorema (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo)**.** Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e seja $x \in [a,b]$. Se F é uma função definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $F'(x) = f(x)$.

Prova: Sejam $x, x + \Delta x \in [a, b]$. Por hipótese, temos que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ e } F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Pela proposição 3.10, sabemos que

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Logo,

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = F(x + \Delta x) - F(x). \quad (3.7)$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe um $\chi \in [x, x + \Delta x]$, tal que

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\chi) \cdot (x + \Delta x - x) = f(\chi) \cdot \Delta x. \quad (3.8)$$

Das equações (3.7) e (3.8), obtemos

$$f(\chi) \cdot \Delta x = F(x + \Delta x) - F(x) \Longrightarrow f(\chi) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Tomando o limite quando $\Delta x \to 0$, na equação acima,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\chi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Como $\chi \in [x, x+\Delta x]$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} x+\Delta x = x$, segue, do Teorema do "Sanduíche" que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi) = \lim\limits_{t \to x} f(\chi) = f(x)$, pois f é contínua. Logo, $F'(x) = f(x)$. □

3.16 Teorema (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo)**.** Se f é contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

em que F é uma primitiva de f.

Prova: Podemos definir F como $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, pois sendo assim, pelo Teorema 3.15, $F'(x) = f(x)$. Sendo assim, temos que $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ e $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Logo,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - 0 = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

De agora em diante, iremos denotar $F(b) - F(a)$ por $F(x)|_a^b$.

***Exemplo* 3.8.** Calcular $\displaystyle\int_1^4 x^3\,dx$.

Solução: Iremos aplicar o Teorema 3.16. Como $f(x) = x^3$, sabemos que a função $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ é uma primitiva para f. Logo,

$$\int_1^4 x^3\,dx = F(4) - F(1) = 64 - \frac{1}{4} = \frac{255}{4}.$$

Exemplo 3.9. Calcular $\int_{-1}^{2}(2x^2-6x+1)\ dx$.

Solução:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(2x^2-6x+1)\ dx &= \int_{-1}^{2}2x^2\ dx-\int_{-1}^{2}6x\ dx+\int_{-1}^{2}dx\\ &= 2\int_{-1}^{2}x^2\ dx-6\int_{-1}^{2}x\ dx+\int_{-1}^{2}dx\\ &= 2\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}\right)-6\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}\right)+3\\ &= 2\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)-6\left(2-\frac{1}{2}\right)+3=0.\end{aligned}$$

Exemplo 3.10. Calcular $\int_{-2}^{1}|x+1|\ dx$.

Solução: Note que

$$|x+1|=\begin{cases}-x-1 & ,\quad \text{se } x\leq -1\\ x+1 & ,\quad \text{se } x\geq -1\end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}|x+1|\ dx &= \int_{-2}^{-1}(-x-1)\ dx+\int_{-1}^{1}(x+1)\ dx\\ &= \left.\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\right|_{-2}^{-1}+\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_{-1}^{1}\\ &= -\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Utilizando os Teoremas Fundamentais do Cálculo, conseguimos outra maneira de calcular integrais definidas. Como mostra o seguinte Teorema:

3.17 Teorema. Seja f contínua no intervalo $[a,b]$ e $g:[c,d]\to[a,b]$ uma função tal que g' seja contínua em $[c,d]$. Se $g(c)=a$ e $g(d)=b$, então

$$\int_a^b f(x)\ dx=\int_c^d f(g(u))\cdot g'(u)du.$$

Prova: Como f é contínua em $[a,b]$, temos que ela é integrável. Logo, f admite uma primitiva. Chamamos essa primitiva de F, ou seja $F'=f$ e

$$\int_a^b f(x)\ dx=F(b)-F(a).$$

Agora note que a função $P(u)=F(g(u))$ é uma primitiva da função $f(g(u))\cdot g'(u)$, pois, $P'(u)=F'(g(u))\cdot g'(u)$. Assim, $F'=f$ e

$$\int_c^d f(g(u))\cdot g'(u)du=P(d)-P(c)=F(g(d))-F(g(c))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\ dx.$$

□

Nota 14. Na prática, resolvemos esses tipos de integrais, fazendo $x=g(u)\Rightarrow\ dx=g'(u)du$ e quando $u=c\Rightarrow x=g(c)=a$ e $u=d\Rightarrow x=g(d)=b$.

Exemplo 3.11. Calcular $\int_0^1(x-1)^{10}\ dx$.

Solução: Chamando $u = x - 1 \Rightarrow du = \ dx$, e quando $x = 0 \Rightarrow u = -1$ e $x = 1 \Rightarrow u = 0$. Logo,

$$\int_0^1 (x-1)^{10}\,dx = \int_{-1}^{0} u^{10} du = \left.\frac{u^{11}}{11}\right|_{-1}^{0} = 0 + 1 = 1.$$

***Exemplo* 3.12.** Calcular $\int_1^2 \sqrt{2x-1}\,dx$.

Solução: Fazendo $u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx$. Logo, quando $x = 1 \Rightarrow u = 1$ e, quando $x = 2 \Rightarrow u = 3$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2x-1}\,dx = \int_1^3 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^3 = \frac{1}{3}\cdot\left.u^{\frac{3}{2}}\right|_1^3 = \frac{1}{3}(1-\sqrt{27}).$$

***Exemplo* 3.13.** Calcular $\int_0^2 e^{3x}\,dx$.

Solução: Chamando $u = 3x \Rightarrow du = 3\,dx$. Assim, quando $x = 0 \Rightarrow u = 0$ e, quando $x = 2 \Rightarrow u = 6$. Logo,

$$\int_0^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^6 e^u\,du = \left.\frac{1}{3}e^u\right|_0^6 = \frac{1}{3}(e^6 - 1) = \frac{e^6-1}{3}.$$

***Exemplo* 3.14.** Calcular $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

Solução: Fazendo $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$. Então, quando $x = 0 \Rightarrow u = 1$ e quando $x = 1 \Rightarrow u = 2$. Logo,

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \left.\frac{1}{2}\ln(u)\right|_1^2 = \frac{1}{2}[\ln(2) - 0] = \frac{\ln(2)}{2}.$$

***Exemplo* 3.15.** Calcular $\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Solução: Chamando $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2\,dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2\,dx$. Então, quando $x = 1 \Rightarrow u = 2$ e quando $x = 2 \Rightarrow u = 9$. Assim,

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_2^9 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\left.\frac{2u^32}{3}\right|_2^9 = \frac{2}{9}\left.\sqrt{u^3}\right|_2^9 = \frac{2}{9}(27 - 2\sqrt{2}).$$

3.2.2 Exercícios Propostos

3.3. Calcule as integrais definidas.

(a) $\int_2^5 3\,dx$ (b) $\int_{-1}^{2} 6\,dx$ (c) $\int_{-2}^{2} \sqrt{5}\,dx$ (d) $\int_5^{-2} 2\,dx$

3.4. Calcule as integrais definidas usando os seguintes resultados: $\int_{-1}^{2} x^2 dx = 3$, $\int_{-1}^{2} dx = \frac{3}{2}$, $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx = 2$, $\int_{-1}^{2} x^2 dx = 3$, $\int_{0}^{\pi} \cos(x) dx = 0$, $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

(a) $\int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5) dx$

(b) $\int_{-1}^{2} \left(2 - 5x + \frac{x^2}{2}\right) dx$

(c) $\int_{2}^{-1} (2x+1)^2 dx$

(d) $\int_{-1}^{-2} (x-1)(2x+3) dx$

(e) $\int_{0}^{\pi} (2\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x) + 1) dx$

(f) $\int_{0}^{\pi} (\cos(x) + 4)^2 dx$

3.5. Encontre o valor médio das funções dadas abaixos, definidas em seus respectivos intervalos. Encontre, também, o valor de x no qual ocorre o valor médio.

(a) $f(x) = x^2$, $[-1, 2]$, sabendo-se que $\int_{-1}^{2} x^2 dx = 3$.

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $[0, \pi]$, sabendo-se que $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x) dx = 2$.

3.6. Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\int_{-1}^{3} 4 dx$

(b) $\int_{0}^{2} (x^3 + 3x - 1) dx$

(c) $\int_{0}^{3} (3x^2 - 4x + 1) dx$

(d) $\int_{3}^{6} (x^2 - 2x) dx$

(e) $\int_{-2}^{5} |x-3| dx$

(f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{sen}(2x) dx$

(g) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$

(h) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx$

(i) $\int_{-1}^{1} e^{2x} dx$

(j) $\int_{1}^{4} (5x + \sqrt{x}) dx$

(k) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1} dx$

(l) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

(m) $\int_{1}^{2} (x-2)^5 dx$

(n) $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{5-x} dx$

(o) $\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1} dx$

(p) $\int_{0}^{1} \frac{1}{(x+1)^5} dx$

(q) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^3} dx$

(r) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$

(s) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) dx$

3.3 Um Pouco da História do Cálculo

Isaac Barrow (1.630-1.677)

Nasceu em outubro de 1.630 em Londres, Inglaterra. Seu pai, Thomas, planejava uma educação impecável para o filho Isaac. Mandou-o para a sua primeira escola, em Charterhouse, onde ofereceu-se a pagar o dobro dos custos estudantis com o intuito de Isaac receber atenção especial.

Infelizmente, Isaac não recebeu a atenção desejada e tornou-se famoso como aluno indisciplinado. Diante desta situação, o pai tirou Isaac de Charterhouse e mandou-o, em 1640, dessa vez, para uma escola - Felstead, Essex - que tinha reputação pela excelência em disciplina. Daí Isaac progrediu rapidamente. Aprendeu Grego, Latim, Hebreu e Lógica, como preparação para a universidade.

Isaac completou sua educação superior no Trinity College, em Cambridge, em 1648. Após um período viajando pela Europa, Barrow voltou à Inglaterra, em 1659. Tornou-se professor titular de Geometria no

Gresham College e, em 1663, foi o primeiro a ocupar a cadeira de Professor Lucasiano, em Cambridge. Posto que seria futuramente ocupado pelo seu discípulo Isaac Newton, em 1669. Isaac Barrow foi uma peça indispensável no começo da carreira do seu estimado aluno, cujas habilidades, superiores às suas, ele reconheceu publicamente.

Seu primeiro trabalho foi a tradução completa de Os Elementos de Euclides, em 1655, para o Latim e, em1660, para o Inglês. Publicou também outras obras de Euclides. Em 1670, publicou sua mais importante obra: Lectiones Geometricae cuja revisão foi feita por Newton. Nesta obra, Barrow apresenta um importante trabalho sobre tangentes que viria a originar o trabalho de Newton no desenvolvimento do Cálculo Diferencial.

Lições em Geometria Barrow publicou, também, algumas obras comentadas de vários outros matemáticos gregos, entre eles Arquimedes. Após 1670, não trabalhou mais com Matemática, dedicando-se então a estudos religiosos. Durante sua vida viajou bastante e teve contato com muitos matemáticos europeus, os quais contribuíram para o desenvolvimento da Matemática na Inglaterra. Dentre eles, destacam-se Viviani e Torricelli.

Em 1.677, Barrow contraiu uma febre malígna. Tentou curar-se através do jejum e do consumo de ópio - estratégia anteriormente utilizada com sucesso em Constantinopla - mas que não evitou o seu falecimento, no dia 4 de maio em Londres.

Isaac Newton, Sir (1.642-1.727)

Newton nasceu no dia 25 de dezembro de 1.642 em Woolsthorpe, Lincolnshire - no interior da Inglaterra, próximo a Cambridge. Herdou o nome de seu pai, falecido em outubro de 1.642, três meses antes de seu nascimento. Newton nasceu tão prematuro que sua mãe temeu que ele não passasse daquele dia. Seu corpo miúdo caberia numa panela de um litro. Mas, ao contrário das aparências, ele viveria até seus 84 anos, tempo suficiente para realizar uma das maiores produções científicas de que se tem conhecimento.

Embora a família de Isaac tivesse terras e criasse animais, o que fazia dos Newton um famíla de razoável poder aquisitivo, seu pai não tinha educação e mal conseguia assinar o próprio nome. Newton teve uma infância simples e sofrida. Aos dois anos de idade sua mãe casou-se com um pastor e mudou-se para North Witham. Isaac foi deixado com sua avó, onde era praticamente tratado como órfão. Morou longe da mãe por um bom tempo, até os dez anos de idade, quando ela ficou viúva mais uma vez, e voltou para Woolsthorpe com três novos filhos. Isaac morou com seus irmãos e sua mãe por dois anos e, em seguida, sua mãe o mandou para uma escola de Gramática em Grantham.

Os seus primeiros anos de escola não revelaram nenhum dom especial mas o futuro que o aguardava iria mudar completamente a sua vida. Newton formou-se na Universidade de Cambridge, em janeiro de 1665, e a partir daí desenvolveu uma vida repleta de descobertas científicas que mudariam para sempre a História da Ciência. Num período de aproximadamente dois anos, Newton haveria de progredir de maneira revolucionária em Matemática, Física, Óptica e Astronomia.

Em fevereiro de 1.665, desenvolveu o Teorema do Binômio que proporcionou uma nova e eficaz maneira de calcular logaritmos com exatidão e trabalhar com números de muitas casas decimais. Em maio desse mesmo ano, Newton teve um insight enquanto observava o movimento de um planeta: acabara de perceber que os planetas se movem de modo que em cada ponto a direção da velocidade é a mesma que a da reta tangente à trajetória naquele ponto. Assim, várias pequenas tangentes poderiam localmente descrever o movimento dos planetas.

A descoberta seguinte seria conseqüência das tangentes e Newton a batizou de fluxões, conhecido hoje como o Cálculo Diferencial. Newton percebeu logo em seguida que a integração de uma função era simplesmente a operação inversa da diferenciação. Essa descoberta levaria ao Cálculo Integral e está intimamente relacionada com o hoje em dia denominado Teorema Fundamental do Cálculo.

Newton desenvolveu métodos analíticos unindo técnicas matemáticas já conhecidas, o que tornou possível a resolução de problemas de diversos tipos, como o de encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas assim como máximos e mínimos de funções. Todas essas descobertas foram feitas anos antes que Leibniz, de forma independente, viesse a desenvolver o Cálculo Diferencial. Recusou-se, durante muito tempo, a divulgar suas descobertas e foi Leibniz quem primeiro publicou. Isto gerou uma disputa muito grande entre os dois matemáticos, sobre quem teria realmente inventado o Cálculo. Apesar de Newton ter desenvolvido antes de Leibniz a notação e a maneira de calcular derivadas, aquela que prevaleceu foi a de Leibniz que mostrou-se muito mais simples e conveniente.

Newton tinha uma habilidade invejável com as mãos e construía seus próprios instrumentos. Construiu suas lentes, telescópios e todo o tipo de aparato que lhe pudesse ser útil. Seguindo o exemplo de Galileo, Newton pôs em prática inúmeros experimentos. Em 1.670, provou que a luz era feita de uma mistura de raios diferentes ao fazer passar por um prisma a luz solar, o que gerou um espectro de cores. Em 1.704, publicou Opticks, um tratado sobre a natureza da luz e fenômenos ópticos.

Influenciado por Galileo e, também, por Kepler, Newton pesquisou sobre o movimento dos planetas durante muitos anos. Diz-se que um certo dia, enquanto refletia sobre esses assuntos embaixo de uma macieira, uma maçã cai exatamente em cima de sua cabeça e ele teve um estalo que deu origem ao seu maior feito em Física e que culminaria na Teoria da Gravitação Universal. Essa teoria, assim como a mecânica do movimento - espaço, velocidade, aceleração, força, momento, etc. - foi desenvolvida graças ao Cálculo Diferencial e Integral que permitiu que várias grandezas físicas se relacionassem entre si de maneira coerente, tornando o desenvolvimento da Mecânica muito frutífero.

As leis físicas que Newton descreveu eram de tal importância para a Astronomia que Halley - importante astrônomo real e amigo de Newton - convenceu-o a finalmente publicar um enorme tratado de Mecânica que deu origem ao que é considerado o maior livro científico jamais escrito: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ou, simplesmente, *Principia*, em 1.687, produzido em apenas 7 meses.

Apesar da grande dedicação científica, Newton também desenvolveu estudos religiosos e metafísicos durante boa parte de sua vida; entretanto, pouco chegou aos dias de hoje. Ao longo de sua vida Newton recebeu muitos méritos, entre eles destacam-se a de Fellow of the Royal Society - maior distinção científica na Inglaterra - e a de Professor Lucasiano de Matemática em Cambridge, posto hoje ocupado pelo físico Stephen Hawking. Ele foi o primeiro cientista da história a receber o título de Knight - Cavaleiro - em 1.705, concedido pela Rainha Anne.

As contribuições de Newton para a ciência são incontáveis e de altíssima envergadura. Ele é considerado ainda hoje, por muitos matemáticos e físicos, o maior cientista de todos os tempos. É praticamente impossível estudar Física ou Cálculo sem citar seu nome.

Newton foi sepultado na Abadia de Westminster, Londres. Sobre seu túmulo foi inscrito em Latim o seguinte epitáfio: “Que os mortais se regozijem por ter existido tamanho ornamento da raça humana”.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1.646-1.716)

Nascido em Leipzig, Alemanha, no dia 1 de julho de 1.646. Ingressou na Universidade aos quinze anos de idade e, aos dezessete, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Para muitos historiadores, Leibniz é tido como o último erudito que possuía conhecimento universal.

Aos vinte anos de idade, já estava preparado para receber o título de doutor em direito. Este lhe foi recusado por ser ele muito jovem. Deixou então Leipzig e foi receber o seu título de doutor na Universidade de Altdorf, em Nuremberg.

A partir daí, Leibniz entrou para a vida diplomática. Como representante governamental influente, ele teve a oportunidade de viajar muito durante toda a sua vida. Em 1.672 foi para Paris onde conheceu Huygens que lhe sugeriu a leitura dos tratados de 1.658 de Blaise Pascal se quisesse tornar-se um matemático. Em 1.673, visitou Londres, onde adquiriu uma cópia do Lectiones Geometricae de Isaac Barrow e tornou-se membro da Royal Society. Foi devido a essa visita a Londres que apareceram rumores de que Leibniz talvez tivesse visto o trabalho de Newton, que, por sua vez, o teria influenciado na descoberta do Cálculo, colocando em dúvida a legitimidade de suas descobertas relacionadas ao assunto.

Sabemos, hoje, que isto não teria sido possível, dado que Leibniz, durante aquela visita a Londres, não possuía conhecimentos de geometria e análise suficientes para compreender o trabalho de Newton.

A partir daí, a Matemática estaria bastante presente nas descobertas de Leibniz. Em outra posterior visita a Londres, ele teria levado uma máquina de calcular, de sua invenção. Uma das inúmeras contribuições de Leibniz à Matemática, foi o estudo da aritmética binária, que segundo ele, havia sido utilizada pelos chineses e estaria presente no livro I Ching.

Como aconteceu com Newton, o estudo de séries infinitas foi muito importante no início de suas descobertas. Relacionando o triângulo de Pascal e o triângulo harmônico, Leibniz percebeu uma maneira de encontrar o resultado de muitas séries infinitas convergentes. A essa altura, ele voltou-se para o trabalho de Blaise Pascal - Traité des sinus du quart de cercle que lhe teria dado um importante insight: a determinação da tangente a uma curva dependia das diferenças das abscissas e ordenadas na medida em que essas se tornassem infinitamente pequenas e que a quadratura, isto é a área, dependia da soma das ordenadas ou retângulos infinitamente finos.

Esse insight levaria Leibniz em 1.676 a chegar às mesmas conclusões a que havia chegado Newton alguns anos antes: ele tinha em mãos um método muito importante devido a sua abrangência. Independente de uma função ser racional ou irracional, algébrica ou transcendente - termo criado por Leibniz - as operações de encontrar "somas" (integrais) ou "diferenças" (diferenciais) poderiam ser sempre aplicadas. O destino havia reservado a Leibniz a tarefa de elaborar uma notação apropriada para estas operações, assim como a nomenclatura - Cálculo Diferencial e Cálculo Integral - ambas utilizadas atualmente.

O primeiro trabalho sobre Cálculo Diferencial foi publicado por Leibniz em 1.684, antes mesmo do que Newton, sob o longo título Nova methodus pro maximis et minimis, item que tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur.

Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes não obstruídas por quantidades irracionais:

$d(xy) = xdy + ydx$ (derivada do produto)

$d(x/y) = (ydx - xdy)/y^2$ (derivada do quociente)

$dx^n = nx^{n-1}$.

Dois anos mais tarde, Leibniz publicaria no periódico Acta Eruditorum, um trabalho sobre o Cálculo Integral. Nesse trabalho, apresenta-se o problema da quadratura como um caso especial do método do inverso das tangentes.

Um periódico fundado por Leibniz e Otto Mencke em 1.682 que teve larga difusão no continente e onde Leibniz publicaria a maioria de seus trabalhos desenvolvidos em Matemática entre 1.682 e 1.692. Além do Cálculo, Leibniz contribuiu para outras áreas da Matemática. Foi ele quem generalizou o teorema do binômio em Teorema do Multinômio, para expansões do tipo $(x + y + z)^n$. A primeira referência do método dos determinantes no mundo ocidental também foi feita por ele. Leibniz reelaborou e desenvolveu o conceito de lógica simbólica. Contribuiu também para a teoria de probabilidades e a análise combinatória.

O peso das descobertas e contribuições de Leibniz para o Cálculo e para a Matemática como um todo é tão grande que outras importantes áreas de atuação freqüentemente são deixadas de lado. Não obstante Leibniz é considerado também um dos sete filósofos modernos mais importantes.

Em Física, Leibniz acabou negando a teoria da gravitação de Newton, pois, acreditava que nenhum corpo podia entrar em movimento "naturalmente", a não ser através do contato com outro corpo que o impulsionaria. Ele também rejeitou os conceitos newtonianos de espaço e tempo absolutos. Junto com Huygens, Leibniz desenvolveu o conceito de energia cinética. Apesar de tudo, as suas contribuições para a ciência foram de certa forma obscurecidas por aquelas de Newton. Isto, entretanto, não o faz menos importante de Newton na descoberta do Cálculo. Na realidade Leibniz e Newton foram os dois maiores protagonistas na descoberta desta poderosa ferramenta matemática, o Cálculo.

É sabido que Leibniz era capaz de ficar sentado na mesma cadeira por vários dias pensando. Era um trabalhador incansável, um correspondente universal - ele tinha mais de 600 correspondentes.

Era patriota, cosmopolita e um dos gênios mais influentes da civilização ocidental. Em julho de 1.716 adoeceu, ficou então de cama até a sua morte, dia 14 de novembro, em Hannover, Alemanha.

3.4 Integração por Partes na Integral Definida

Vimos, no capítulo 1, que a regra da integração por partes da integral indefinida é a seguinte:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

onde fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ temos que $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)\,dx$ e, então, podemos reescrever a regra acima como

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Vejamos agora como fica a regra da integração por partes para a integral definida. Consideremos f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$.

Sabemos que

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x) \text{ em } [a, b].$$

Logo, da equação acima, seque que

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b [f(x)g(x)]'\,dx - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

e assim

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

***Exemplo* 3.16.** Calcular $\int_1^2 x\ln(x)\,dx$.

Solução: Chamando $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, onde podemos, sem perda de generalidade, tomar $C = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)\,dx &= \left[\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = 2\ln(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

***Exemplo* 3.17.** Calcular $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x)\,dx$.

Solução: Fazendo $f(x) = \operatorname{arcsen}(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$, temos que

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x)\,dx = [x\operatorname{arcsen}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(1) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Iremos resolver separadamente a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Chamando $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx \Rightarrow -\dfrac{du}{2} = x\,dx$, temos que quando $x = 0 \Rightarrow u = 1$ e quando $x = 1 \Rightarrow u = 0$. Logo,

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u}\Big|_1^0 = -[0-1] = 1.$$

Assim,

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x)\,dx = \operatorname{arcsen}(1) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(1) - 1.$$

3.4.1 Exercícios Propostos

3.7. Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x dx$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^3e^{x^2}dx$

(f) $\displaystyle\int_1^2 x(\ln(x))^2dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 e^{-2x}\operatorname{sen}(x)dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x^3\cos(x)^2dx$

3.5 Área Limitada por Curvas Coordenadas

Sabemos que o valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é a área da região plana delimitada pela curva $y = f(x)$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo x. Utilizaremos nesta seção as propriedades aprendidas sobre integrais definidas com o objetivo de calcular áreas de regiões planas através de curvas que são gráficos de funções contínuas cuja expressão é dada na forma cartesiana.

Já vimos que se uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$, então a área da região delimitada pelas curvas $x = a, x = b, y = f(x)$ e o eixo Ox é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

***Exemplo* 3.18.** Ache a área da região limitada pela curva $y = x$ pelo eixo Ox e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: Como $f(x) = x \geq 0$ quando x está no intervalo fechado $[0, 1]$,temos que

$$A = \int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Note que a região que queremos calcular a área é um triângulo cuja a base b é 1 e a altura h é 1. Logo, a área também pode ser dada pela fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2}$, o que está de acordo com a integral calculada acima.

***Exemplo* 3.19.** Ache a área da região limitada pela curva $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ pelo eixo Ox e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.

Solução: Como $f(x) \geq 0$ quando x está no intervalo fechado $[-1, 1]$,temos que

$$A = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\, dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right)\right|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 6\right) = \frac{32}{3}.$$

Mas nos perguntamos se $f(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ ou a função f muda de sinal no intervalo $[a, b]$, como calcular a área? A resposta é dada nas definições que seguem.

3.18 Definição. Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ a área da região limitada pelas curvas $x = a, x = b, y = f(x)$ e pelo eixo Ox é dada pela expressão

$$|\int_a^b f(x)dx| = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

***Exemplo* 3.20.** Encontre a área delimitada pelas curvas $y = x^2 - 4x, x = 0, x = 4$ e pelo eixo Ox.

Solução: A função $f(x) = x^2 - 4x \leq 0$, para todo $x \in [0, 4]$. Logo, pela definição anterior, a área é dada por

$$A = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)\, dx\right| = -\int_0^4 (x^2 - 4x)\, dx = -\left.\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\right|_0^4 = -\left(\frac{64}{3} - 32\right) = -\left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

***Exemplo* 3.21.** Encontre a área delimitada pelas curvas $y = 2x - 1, x = -3, x = 0$ e pelo eixo Ox.

Solução: A função $f(x) = 2x - 1 \leq 0$, para todo $x \in [-3, 0]$. Assim, a área é dada por

$$A = \left|\int_{-3}^0 (2x - 1)\, dx\right| = -\int_{-3}^0 (2x - 1)\, dx = -(x^2 - x)\Big|_{-3}^0 = -[0 - (9 + 3)] = -(-12) = 12.$$

3.19 Definição. Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e existem $x_0 \in [a, b]$, tal que $f(x_0) \leq 0$ e $x_1 \in [a, b]$, tal que $f(x_1) \geq 0$, ou seja, o gráfico de f está acima e abaixo do eixo Ox, a área da região delimitada pelas curvas $x = a, x = b, y = f(x)$ e pelo eixo Ox é dada por

$$A = \int_a^c f(x)\, dx + \left|\int_c^b f(x)\, dx\right| = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx,$$

onde $c \in [a, b]$ é tal que f(c)=0.

Exemplo **3.22.** Encontre a área delimitada pelas curvas $y = \text{sen}(x), x = -\dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{\pi}{2}$ e pelo eixo Ox.

Solução: Note que o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ definida no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ está acima e abaixo do eixo Ox, ou seja, possui pontos tal que $f(x) \leq 0$ e pontos tal que $f(x) \geq 0$. Vemos também que $f(0) = 0$. Logo, a área requerida é dada por

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \text{sen}(x)\ dx\right| + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)\ dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \text{sen}(x)\ dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)\ dx \\ &= -[-\cos(x)]|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \cos(x)|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\cos(0) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left\{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - [-\cos(0)]\right\} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Exemplo **3.23.** Encontre a área delimitada pelas curvas $y = x^3 - 3x + 2, x = -1, x = 2$ e pelo eixo Ox.

Solução: Sabemos que o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 2$ está acima e abaixo do eixo Ox no intervalo fechado $[-1, 2]$ e que $f(1) = 0$. Logo, a área a ser calculada é

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x + 2)\ dx + \left|\int_{1}^{2} (x^3 - 3x + 2)\ dx\right| = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x + 2)\ dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 3x + 2)\ dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{1}^{2} \\ &= \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right)\right] - \left[4 - 6 + 4 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right)\right] \\ &= (2 + 2) - \left(2 - \frac{3}{4}\right) = 4 - \frac{5}{4} = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

3.5.1 Exercícios Propostos

3.8. Ache a área limitada pelas curvas dadas abaixo.

(a) $y = x^2 - 2x + 3, x = -2, x = 3$, eixo Ox.

(b) $y = 4x - x^2, x = 1, x = 3$, eixo Ox.

(c) $y = \sqrt{x + 1}, x = 0, x = 8$, eixo Ox.

(d) $y = \text{sen}(x), x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$, eixo Ox.

(e) $y = \sec^2 x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$, eixo Ox.

(f) $y = \sqrt{x} + 1, x = 0, x = 4$, eixo Ox.

(g) $y = 3 + \text{sen}(x), x = 0, x = \frac{\pi}{2}$, eixo Ox.

(h) $y = \frac{1}{1+x^2}, x = 0, x = 1$, eixo Ox.

(i) $y = 4 - x^2, x = -2, x = 2$, eixo Ox.

(j) $y = x^2 + 7, x = 0, x = 3$, eixo Ox.

3.6 Áreas entre Duas Curvas

Na seção anterior apreendemos a calcular área delimitada por uma curva $y = f(x)$ e pelas retas $x = a, x = b$ e eixo Ox. Agora apreenderemos a calcular área delimitada por duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

3.20 Definição. Sejam f e g duas funções reais contínuas, tal que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$, com $a < b$ e $f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$. A área da região compreendida entre os gráficos $y = f(x)$ e $y = g(x)$ é calculada da seguinte maneira:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx.$$

Exemplo **3.24.** Calcular a área da região compreendida entre as curvas $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2 + 4x$.

Solução: Primeiro calculamos quais são os pontos tais que $f(x) = g(x)$, ou seja achamos a solução da equação $x^2 = -x^2 + 4x$, que é $x = 0$ ou $x = 2$. Como no intervalo $[0, 2]$ o gráfico de $g(x)$ está acima do gráfico de $f(x)$, então a área requerida é dada por

$$A = \int_0^1 (g(x)-f(x))dx = \int_0^2 (-x^2+4x-x^2)dx = \int_0^2 (-2x^2+4x)dx = \left(-\frac{2}{3}x^2 + 2x^2\right)\Big|_0^2 = -\frac{16}{3}+8 = \frac{8}{3}.$$

***Exemplo* 3.25.** Calcular á área da região delimitada entre as curvas $x = \dfrac{y^2}{2} + 1$ e $x = y + 5$.

Solução: Vemos nas equações acima que a variável y é a variável independente. Logo, fazemos $f(y) = \dfrac{y^2}{2} + 1$ e $g(y) = y + 5$. Agora encontrando a solução da equação $\dfrac{y^2}{2} + 1 = y + 5$, que é $y = -2$ e $y = 4$. Como no intervalo $[-2, 4]$ o gráfico de $g(y)$ está acima do gráfico de $f(y)$, temos que a área é:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 (g(y) - f(y))\, dy = \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right)\, dy = \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{y^2}{2} + 4y\right)\Big|_{-2}^4 \\ &= -\frac{64}{3} + 8 + 16 - \left(\frac{8}{3} + 2 - 8\right) = \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 6. \end{aligned}$$

***Exemplo* 3.26.** Calcular a área da região delimitada pelas curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ e $g(x) = x^2 - 4x$.

Solução: Resolvendo a equação $x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$, encontramos as seguintes soluções: $x = 0$, $x = 3$ e $x = 4$. Assim, temos duas áreas a serem calculadas, a área compreendida entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[0, 3]$, que chamaremos de A_1 e a área compreendida entre as curvas no intervalo $[3, 4]$, que chamaremos de A_2. A resposta final será $A = A_1 + A_2$.
Primeiro calcularemos A_1. Para isto, note que no intervalo $[0, 3]$ o gráfico de $f(x)$ está acima do gráfico de $g(x)$. Logo,

$$A_1 = \int_0^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)\, dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2\right)\Big|_0^3 = \frac{81}{4} - 63 + 54 - 0 = \frac{45}{4}.$$

Para calcular A_2, note que no intervalo $[3, 4]$ o gráfico de $g(x)$ está acima do gráfico de $f(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_3^4 (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^3 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\, dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - 6x^2\right)\Big|_3^4 \\ &= -64 + \frac{448}{3} - 96 - \left(-\frac{45}{4}\right) = -\frac{32}{3} + \frac{45}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Assim, a área que queremos é

$$A = A_1 + A_2 = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6}.$$

3.6.1 Exercícios Propostos

3.9. Ache a área limitada pelas curvas dadas abaixo.

(a) $y = x$ e $y = x^2$.

(b) $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$.

(c) $y = x^2$ e $y = 2x + 8$.

(d) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

(e) $y = \text{sen}(x)$ e $y = x^2 - \pi x$.

(f) $y = x^2 + 1$ e $y = x + 1$.

(g) $y = 2 - x^2$ e $y = -x$.

(h) $y^2 = x - 1$ e $x = 3$.

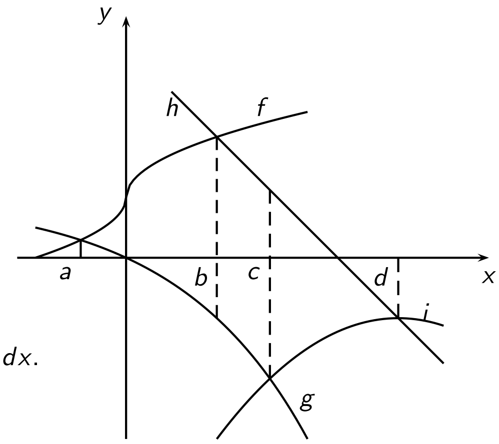
(i) $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$.

(j) $y^3 = x^2$ e $x - 3y + 4 = 0$.

(k) $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$.

3.7 Área da Região Limitada por Mais de Duas Curvas

Considere a seguinte situação ilustrada na figura ao lado.



Neste caso a área delimitada pelas funções acima, pode ser decompostas em áreas limitadas por duas funções e retas paralelas ao eixo Oy (ou eixo Ox) da seguinte forma:

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx+\int_b^c [h(x)-g(x)]\,dx+\int_c^d [h(x)-i(x)]\,dx.$$

***Exemplo* 3.27.** Calcular a área da região limitada pelas curvas $xy=1$, $y=4x$, $4y=x$, para $x\geq 0$.

Solução: Chamando $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=4x$ e $h(x)=\dfrac{x}{4}$, calculemos as intersecções:

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\implies x=\frac{1}{2}\\ f(x)=h(x) &\implies x=2\\ g(x)=h(x) &\implies x=0 \end{aligned}$$

Assim, a região limitada pelas curvas pode ser divida em duasLogo, a área é dada por

$$\begin{aligned} A &= A_1+A_2=\int_0^{\frac{1}{2}}[g(x)-h(x)]\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^2[f(x)-h(x)]\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[4x-\frac{x}{4}\right]\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^2\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right]\,dx\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}4x\,dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{4}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{x}\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{x}{4}\,dx=2x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{8}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\ln(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^2-\frac{x^2}{8}\Big|_{\frac{1}{2}}^2\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{32}+\left[\ln(2)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)=\frac{15}{32}+\ln(4)-\frac{15}{32}=\ln(4). \end{aligned}$$

***Exemplo* 3.28.** Calcular a área da região limitada pelas curvas $y=|x-1|+3$, $y=0$, $x=-2$, $x=4$.

Solução: Chamando $f(x)=|x-1|+3$, temos que:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & , \quad \text{se } x\geq 1\\ -x+4 & , \quad \text{se } x<1 \end{cases}$$

Assim, a área que queremos é dada por: $A=\displaystyle\int_{-2}^1(-x+4)\,dx+\int_1^4(x+2)\,dx=\frac{27}{2}+\frac{27}{2}=27.$

***Exemplo* 3.29.** Ache, por integração, a área do triângulo tendo vértices $(3,4)$, $(2,0)$ e $(0,1)$.

Solução: Primeiro encontraremos as equações das retas que passam pelos pontos dados acima.

- A reta que passa pelos pontos $(3,4)$ e $(2,0)$ tem equação: $f(x) = 4x - 8$;
- A reta que passa pelos pontos $(3,4)$ e $(0,1)$ tem equação: $g(x) = x + 1$;
- A reta que passa pelos pontos $(2,0)$ e $(0,1)$ tem equação: $h(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$.

Acharemos agora as interseções:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\implies x = 3 \\ f(x) = h(x) &\implies x = 2 \\ g(x) = h(x) &\implies x = 0 \end{aligned}$$

Assim, a área é calculada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [g(x) - h(x)]\,dx + \int_2^3 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^2 \frac{3}{2}x\,dx + \int_2^3 (-3x+9)\,dx \\ &= \frac{3}{4}x^2\Big|_0^2 - \left(\left(\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_2^3 + 9x\Big|_2^3 = 3 - \left(\frac{27}{2} - 6\right) + (27-18) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

3.7.1 Exercícios Propostos

3.10. Ache a área limitada pelas curvas dadas abaixo.

(a) $y = x^2 - 2x + 3, x = -2, x = 3$, eixo Ox.

(b) $y = 4x - x^2, x = 1, x = 3$, eixo Ox.

(c) $y = \sqrt{x+1}, x = 0, x = 8$, eixo Ox.

(d) $y = \operatorname{sen} x, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$, eixo Ox.

(e) $y = \sec^2 x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$, eixo Ox.

(f) $y = \sqrt{x} + 1, x = 0, x = 4$, eixo Ox.

(g) $y = 3 + \operatorname{sen}(x), x = 0, x = \frac{\pi}{2}$, eixo Ox.

(h) $y = \frac{1}{1+x^2}, x = 0, x = 1$, eixo Ox.

(i) $y = 4 - x^2, x = -2, x = 2$, eixo Ox.

(j) $y = x^2 + 7, x = 0, x = 3$, eixo Ox.

3.11. Ache a área limitada pelas curvas dadas abaixo.

(a) $y = x$ e $y = x^2$.

(b) $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$.

(c) $y = x^2$ e $y = 2x + 8$.

(d) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

(e) $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = x^2 - \pi x$.

(f) $y = x^2 + 1$ e $y = x + 1$.

(g) $y = 2 - x^2$ e $y = -x$.

(h) $y^2 = x - 1$ e $x = 3$.

(i) $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$.

(j) $y^3 = x^2$ e $x - 3y + 4 = 0$.

(k) $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$.

3.12. Ache a área limitada pelas curvas dadas abaixo.

(a) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ e $4x - y + 12 = 0$.

(b) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ e $y = 4$

(c) $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

3.13. Ache, por integração, a área do triângulo com vértices $A(5,1)$, $B(1,3)$ e $C(-1,2)$.

3.8 Comprimento de Arco de uma Curva Plana dada a sua Equação Cartesiana

Veremos nesta seção mais uma interessante e muito importante aplicação da Integral Definida, que é o cálculo do comprimento de arco de uma curva que é o gráfico de uma função $y = f(x)$, em um intervalo $[a, b]$ do seu domínio, onde esta seja contínua.

Primeiro, vejamos o caso particular em que o gráfico de f em $[a, b]$ é um segmento de reta. A partir daí, utilizaremos o resultado para obter a fórmula para o caso de uma curva qualquer.

O comprimento do segmento de reta que liga os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ do gráfico de f, correspondente ao gráfico de f no intervalo $[a, b]$, é dado pela distância entre estes pontos, ou seja, $s = d(A, B) = \sqrt{(b-a)^2 + [f(b) - f(a)]^2}$.

Agora, para determinar a expressão do comprimento de arco para uma curva qualquer, vamos aproximar tal comprimento pelo comprimento de uma poligonal cujos vértices estarão sobre a curva dada, tomando o limite do comprimento da poligonal para um número muito grande de lados, caso em que este comprimento aproxima-se infinitamente do comprimento da curva.

Consideremos então a curva C, gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ em no intervalo $[a, b]$. Vamos determinar, então a expressão que define o comprimento de C, de A até B. Tomemos então uma partição P do intervalo $[a, b]$, dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Consideremos agora os pontos da curva C correspondentes aos valores da partição (pontos cujas abcissas pertencem à partição). Denotemos estes pontos por $A, P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots, P_{n-1}, B$.

Ligando estes pontos consecutivamente, obtemos a poligonal, cujo comprimento nos dará uma aproximação do arco da curva C, do ponto A ao ponto B.

O comprimento do i-ésimo segmento da poligonal é dado por

$$S_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Então, o comprimento S_n da poligonal é dado por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Agora, aplicando o Teorema do Valor Médio em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (uma vez que f é derivável em $[a, b]$ e, portanto, em cada subintervalo da partição), podemos escrever:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

onde c_i é um certo ponto do intervalo (x_{i-1}, x_i).

Então, voltando à expressão do comprimento da poligonal e aplicando este resultado, obtemos:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i)(x_i - x_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 (1 + [f'(c_i)]^2)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \qquad (3.9) \end{aligned}$$

e, denotando cada $x_i - x_{i-1}$ por Δx_i, podemos reescrever S_n como

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i.$$

Agora, notemos que a expressão acima denota uma soma de Riemann para a função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}$. A aproximação que ocorre entre o comprimento da curva C e o comprimento da poligonal, dado pela fórmula acima, pode ser intuitivamente percebida à medida que fazemos n crescer muito e com isso fazemos cada Δx_i tornar-se muito pequeno, permitindo assim a formulação da seguinte definição.

3.21 Definição. Considere C uma curva, cuja equação cartesiana é dada por $y = f(x)$, com f contínua e derivável e f' contínua em $[a, b]$. O comprimento do arco da curva C, do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é dado pela expressão

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i,$$

se este limite existir.

Notemos que a expressão acima denotada, retrata a definição da Integral Definida da função $g(x)$ dada acima. Assim, podemos ainda escrever

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx.$$

De uma maneira completamente análoga, nós obtemos, para o comprimento de uma curva de equação $x = g(y)$ do ponto $C(g(c), c)$ ao ponto $D(g(d), d)$, onde g é contínua e possui derivada g' contínua, que

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\ dy.$$

***Exemplo* 3.30.** Calcular o comprimento do arco da curva dada por $y = \sqrt[3]{x^2} + 3$, do ponto $A(1, 4)$ ao ponto $B(8, 7)$.

Solução: Calculando primeiramente y', obtemos $y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. Temos então, pela definição acima, que

$$\begin{aligned} s &= \int_1^8 \sqrt{1 + \left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right]^2}\ dx = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}}\ dx = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\ dx \\ &= \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{\frac{2}{3}} + 4}{9x^{\frac{2}{3}}}}\ dx = \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{3x^{\frac{1}{3}}}\ dx = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{x^{\frac{1}{3}}}\ dx \end{aligned}$$

Agora, para calcular esta integral definida, façamos $u = 9x^{\frac{2}{3}} + 4$. Daí, temos $du = 6x^{-\frac{1}{3}}dx$, ou seja $dx = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}du}{6}$. Quanto aos limites de integração na variável u, temos que, para $x = 1$, temos $u = 13$ e, para $x = 8$, $u = 40$. Daí,

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{3}\int_{13}^{40} \frac{\sqrt{u}}{x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{1}{3}}du}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\int_{13}^{40} u^{1}2\ du = \frac{1}{18}\cdot\left[\frac{2}{3}u^{3}2\right]\Big|_{13}^{40} = \frac{1}{18}\cdot\left(\frac{2}{3}40^{3}2 - \frac{2}{3}13^{3}2\right) \\ &= \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}) = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) = \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}\ u.c. \end{aligned}$$

***Exemplo* 3.31.** Calcular o comprimento da mesma curva do exemplo anterior, agora, escrevendo-a como uma curva de equação $x = g(y)$, também do ponto $(1, 4)$ ao ponto $(8, 7)$.

Solução: Da equação $y = x^{\frac{2}{3}} + 3$, obtendo x como função de y, temos $x = g(y) = (y-3)^{\frac{3}{2}}$. Daí, temos $g'(y) = \dfrac{3}{2}(y-3)^{\frac{1}{2}}$. Então, aplicando a fórmula para o comprimento de arco de uma curva $x = g(y)$, obtemos:

$$\begin{aligned} s &= \int_4^7 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}(y-3)^12\right]^2}\,dy = \int_4^7 \sqrt{1 + \left[\frac{9}{4}(y-3)\right]}\,dy = \int_4^7 \sqrt{\frac{9y-23}{4}}\,dy = \int_4^7 \frac{\sqrt{9y-23}}{2}\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_4^7 \sqrt{9y-23}\,dy \end{aligned}$$

Agora, para calcular $\displaystyle\int_4^7 \sqrt{9y-23}dy$, fazemos $u = 9y - 23$. Daí, temos $du = 9dy$, ou $dy = \dfrac{du}{9}$. Para os limites de integração em u, temos que, quando $y = 4$, $u = 13$ e, quando $y = 7$, $u = 40$. Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\int_{13}^{40} \sqrt{u}\frac{dy}{9} = \frac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{\frac{1}{2}}dy = \frac{1}{18}\cdot\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{13}^{40} = \frac{1}{18}\cdot\left(\frac{2}{3}40^32 - \frac{2}{3}13^32\right) \\ &= \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}) = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) = \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}\ u.c. \end{aligned}$$

***Nota* 15.** Numa comparação entre os dois exemplos acima, pudemos perceber que, se uma dada função cujo comprimento de arco queremos conhecer, possui inversa, podemos optar por escrevê-la como função de variável independente x ou y, conforme a simplicidade da integral em uma delas seja maior do que a outra. Nos dois exemplos acima, perceba que a integral que aparece considerando a curva como uma função $x = g(y)$ é razoavelmente mais simples do que a integral resultante ao tomarmos a curva como $y = f(x)$, que também define o comprimento de arco da mesma curva.

3.8.1 Exercícios Propostos

3.14. Calcule o comprimento do segmento da reta $x + 3y = 4$ do ponto $(-2, 2)$ ao ponto $(4, 0)$ por três métodos:

(a) Pela fórmula da distância entre dois pontos;

(b) Usando a fórmula do comprimento de arco de uma curva $y = f(x)$;

(c) Usando a fórmula do comprimento de arco de uma curva $x = g(y)$.

3.15. Encontre o comprimento do arco da curva $9y^2 = 4x^3$ da origem até o ponto $(3, 2\sqrt{3})$.

3.16. Encontre o comprimento do arco da curva $8y = x^4 + 2x^{-2}$ do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 2$.

3.17. Calcular o comprimento de arco das curvas abaixo, nos intervalos mencionados:

(a) $y = x^{2/3} - 1$, em $1 \le x \le 2$;

(b) $y = \dfrac{1}{3}(2 + x^2)^{3/2}$, em $0 \le x \le 3$;

(c) $x = \dfrac{1}{3}y^3 + \dfrac{1}{4y}$, em $1 \le y \le 3$;

(d) $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(1, \dfrac{e + e^{-1}}{2})$;

(e) $y = \ln(x)$, em $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;

(f) $y = 1 - \ln(\operatorname{sen} x)$, em $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.

3.18. Se $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\cos(t)}dt$ ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = \dfrac{\pi}{2}$. (Sugestão: Utilize a identidade trigonométrica $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos(x)}{2}$ e o Teorema Fundamental do Cálculo).

3.9 Comprimento de Arco de uma Curva dada na Forma Paramétrica

Sabemos que uma curva no plano pode ser explicitada analiticamente por meio de sua equação cartesiana $y = f(x)$ (ou $x = g(y)$) mas também por meio de suas equações paramétricas, ou seja, com o ponto genérico (x, y) da curva escrito em função de uma terceira variável t, denominada *parâmetro*, com t variando em um certo intervalo $[t_0, t_1]$, cujos limites dependem da natureza da curva C.

Nesta seção obteremos, a partir da fórmula obtida na seção anterior, uma fórmula para o comprimento de arco de uma curva dada por suas equações paramétricas.

Consideremos então uma curva plana C, dada pelas equações $x = x(t)$ e $y = y(t)$ com $t \in [t_0, t_1]$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas e possuem derivadas contínuas e com $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

É fato conhecido da Geometria Analítica e do estudo de Cálculo I que, eliminando o parâmetro t, a mesma função dada por estas equações tem sua expressão cartesiana $y = f(x)$ (desce que $x(t)$ ou $y(t)$ seja invertível), que possui derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Porém, considerando x e y como funções de t, as expressões de dy e dx são dadas respectivamente por $dy = y'(t)dt$ e $dx = x'(t)dt$, de onde podemos escrever $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Agora, para obter a expressão para o comprimento de arco da curva C, vamos efetuar uma mudança de variável na já conhecida expressão deduzida na seção anterior, ou seja,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Considerando então $x = x(t)$ (de onde se tem $dx = x'(t)dt$) e $y = y(t)$, com $a = x(t_0)$ e $b = x(t_1)$ e substituindo na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + [\frac{y'(t)}{x'(t)}]^2}\, x'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \frac{(y'(t))^2}{(x'(t))^2}}\, x'(t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{(x'(t))^2}}\, x'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{x'(t)}\, x'(t)dt \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\; dt$$

***Nota* 16.** Sempre que não for muito trabalhoso, recomenda-se fazer um esboço gráfico da curva cujo comprimento de arco se deseja conhecer, a fim de verificar possíveis simplificações no seu cálculo com o uso de propriedades de simetria ou outras propriedades da figura dada, que por ventura venham a contribuir com o cálculo.

***Exemplo* 3.32.** Calcular o comprimento do arco da curva C dada pelas equações paramétricas $x = t^3$ e $y = t^2$ para $1 \leq t \leq 3$

Solução: Como queremos o comprimento do arco da referida curva no intervalo $1 \leq t \leq 3$, temos $t_0 = 1$ e $t_1 = 3$. Além disso, das equações paramétricas dadas, temos respectivamente que $x'(t) = 3t^2$ e $y'(t) = 2t$. Então, calculando s, temos

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt \\ &= \int_1^3 \sqrt{t^2(9t^2+4)}\, dt = \int_1^3 t\sqrt{9t^2+4}\, dt \end{aligned}$$

Agora, para calcular a integral $\int_1^3 t\sqrt{9t^2+4}\, dt$, façamos a substituição $u = 9t^2 + 4$, donde $du = 18t\, dt$, ou ainda $t\, dt = \dfrac{du}{18}$. Quanto aos limites de integração em u, temos que, quando $t = 1$, $u = 13$ e, quando $t = 3$, temos $u = 85$. Temos então

$$\begin{aligned} s &= \int_1^3 t\sqrt{9t^2+4}\, dt = \int_{13}^{85} \sqrt{u}\, \frac{du}{18} = \frac{1}{18}\int_{13}^{85} u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_{13}^{85} \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{2}{3}85^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}13^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3}[85\sqrt{85} - 13\sqrt{13}] = \frac{1}{27}[85\sqrt{85} - 13\sqrt{13}]\ u.c. \end{aligned}$$

***Exemplo* 3.33.** Calcular o comprimento da circunferência de raio medindo $3\ cm$.

Solução: As equações paramétricas são $x = 3\cos(t)$ e $y = 3\,\mathrm{sen}(t)$. Observe que neste caso não foi dado o intervalo no qual queremos calcular o comprimento do arco da curva. Isto pode acontecer nos casos em que a curva tem todos os seus pontos com os valores de x com variação limitada, ou seja, para todo ponto $P(x, y)$ pertencente à curva, tem-se $a \leq x \leq b$, onde teremos $a = x(t_0)$ e $b = x(t_1)$.
Pelas equações dadas para esta curva, observe que, como $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ e $-1 \leq \mathrm{sen}(t) \leq 1$, para todo t, então, para qualquer ponto (x, y) da curva, temos $-3 \leq x \leq 3$ e $-3 \leq y \leq 3$.
Sabemos também que a circunferência é simétrica em relação aos eixos x e y. Assim, podemos calcular o comprimento do arco da circunferência que se encontra no 1º quadrante e multiplicá-lo por 4, a fim de obter o comprimento total desejado.
Primeiro, usemos os pontos $(0, 3)$ e $(3, 0)$, que são os pontos extremos deste referido arco de circunferência que iremos calcular, para descobrir os limites de integração.

⋄ Para o ponto $(0, 3)$, temos:

$$\begin{cases} 0 = 3\cos(t) \\ 3 = 3\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos(t) = 0 \\ \mathrm{sen}(t) = 1 \end{cases} \Longrightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$$

⋄ Para o ponto $(3, 0)$, temos:

$$\begin{cases} 3 = 3\cos(t) \\ 0 = 3\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos(t) = 1 \\ \mathrm{sen}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow t_1 = 0$$

Das equações que definem a curva, também obtemos $x'(t) = -3\,\mathrm{sen}(t)$ e $y'(t) = 3\cos(t)$. Portanto, para o comprimento desejado, temos:

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{(-3\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}\, dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{9(\mathrm{sen}^2\, t + \cos^2 t)}\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{9}\, dt = 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} dt = 3(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{3\pi}{2}\ u.c. \end{aligned}$$

3.9.1 Exercícios Propostos

3.19. Calcular o comprimento do arco das seguintes curvas dadas na forma paramétrica:

(a) $\begin{cases} x = -\operatorname{sen}(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

(b) $\begin{cases} x = 2[t - \operatorname{sen}(t)] \\ y = 2[1 - \cos(t)] \end{cases}, t \in [0, \pi]$

(c) $\begin{cases} x = t\operatorname{sen}(t) \\ y = t\cos(t) \end{cases}, t \in [0, \pi]$

(d) $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 1 \end{cases}, t \in [0, 2]$

(e) $\begin{cases} x = e^t\cos(t) \\ y = e^t\operatorname{sen}(t) \end{cases}, 1 \leq t \leq 2$

(f) $\begin{cases} x = 2\cos(t) + 2t\operatorname{sen}(t) \\ y = 2\operatorname{sen}(t) - 2t\cos(t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

3.20. Calcule o comprimento da parte que está no primeiro quadrante da circunferência de equações paramétricas $x = 7\cos\left(\frac{t}{4}\right)$ e $y = 7\operatorname{sen}\left(\frac{t}{4}\right)$.

3.21. Calcule o comprimento da hipociclóide de equações paramétricas $x = 4\operatorname{sen}^3(t)$ e $y = 4\cos^3(t)$, em que $t \in [0, 2\pi]$.

3.22. Mostre que o comprimento da circunferência de raio r é $2 \cdot \pi \cdot r$.

3.10 Áreas de Regiões Planas Associadas a Funções na Forma Paramétrica

Nesta seção apresentaremos, a partir das fórmulas já deduzidas e conhecidas do estudante para áreas sob gráficos de funções dadas por sua expressão cartesiana, as expressões para os mesmos casos já vistos, só que para funções dadas por suas equações paramétricas.

Vamos então aos casos, onde cada um deles terá uma expressão para a área obtida da já conhecida expressão para a forma cartesiana.

1º caso:

Cálculo da área da região plana situada entre o gráfico de f, o eixo dos x e as retas $x = a$ e $x = b$, onde $y = f(x)$ é contínua e $f(x) \geq 0, \forall\, x \in [a, b]$ e f é dada pelas equações

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_0, t_1], com x(t_0) = a \text{ e } x(t_1) = b.$$

Já vimos na seção 3.1 deste tema que, neste caso, sendo f dada por sua expressão cartesiana $y = f(x)$, a área da referida região é dada por

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx.$$

Então, considerando x e y como funções de t, ou seja, sendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$, temos ainda $dx = x'(t)dt$ e, aplicando as substituições na fórmula acima, obtemos

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t)\, dt$$

2º caso:

Cálculo da área da região plana limitada pelos gráficos de duas funções f e g e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a, b]$ e são dadas na forma paramétrica.

Suponha que as funções f e g são dadas em sua forma paramétrica, respectivamente, por

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1(t) \\ y_1 & = & y_1(t) \end{array}\right. ,\ t \in [t_0, t_1] \text{ e } \left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & x_2(t) \\ y_2 & = & y_2(t) \end{array}\right. ,\ t \in [t_2, t_3], \text{ onde } x_1(t_0) = x_2(t_2) = a \text{ e } y_1(t_1) = y_2(t_3) = b.$$

> ***Nota* 17.** Note que, apesar de, com relação à variável x, os limites de integração em x (integral calculada com a função na forma cartesiana) serem os mesmos para as duas funções f e g, os limites de integração na variável t não tem que ser necessariamente iguais, pois $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções diferentes e que, portanto, não assumem, necessariamente, o mesmo valor para um dado valor de t.

Voltando, então, à obtenção da fórmula para este caso, já vimos que a fórmula da área para este caso quando f e g são dadas na sua expressão cartesiana é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx.$$

Agora, considerando as parametrizações $x_1 = x_1(t)$ (de onde temos $dx_1 = x_1'(t)dt$), $y_1 = y_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ (de onde temos $dx_2 = x_2'(t)dt$), $y_2 = y_2(t)$ e, substituindo na fórmula acima, obtemos

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y_1(t) \cdot x_1'(t)\, dt - \int_{t_2}^{t_3} y_2(t) \cdot x_2'(t)\, dt,$$

que é a fórmula desejada para entre duas curvas na forma paramétrica.

***Exemplo* 3.34.** Calcular a área da região limitada pela elipse $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3\cos(t) \\ y & = & 2\,\text{sen}(t) \end{array}\right.$

Solução: Trata-se de uma curva que é simétrica em relação aos eixos x e y e, portanto, para calcular a área pedida, podemos calcular apenas a área A_1 da região da elipse que se encontra no 1^{o} quadrante e multiplicá-la por 4.
Para aplicar a fórmula do 1^{o} caso visto acima, devemos primeiro encontrar os limites de integração. Isto porque foi pedida toda a área limitada pela elipse, que já possui uma variação limitada para x (veja que $-3 \leq x \leq 3$) e para y (veja que $-2 \leq y \leq 2$).
Vamos então usar as equações que definem a elipse e os pontos da curva que limitam o pedaço referente a A_1, ou seja, os pontos $M(0, 2)$ e $N(3, 0)$.
Para o ponto $M(0, 2)$, substituindo nas equações dadas, temos:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & 3\cos(t) \\ 2 & = & 2\,\text{sen}(t) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \cos(t) & = & 0 \\ \text{sen}(t) & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$$

Para o ponto $(3, 0)$, temos:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3 & = & 3\cos(t) \\ 0 & = & 2\,\text{sen}(t) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \cos(t) & = & 1 \\ \text{sen}(t) & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow t_1 = 0$$

Além disso, de $x = 3\cos(t)$, nós temos $x'(t) = -3\,\mathrm{sen}(t)$ e, então, temos:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{t_0}^{t_1} y(t)\cdot x'(t)dt = \int_{\pi/2}^{0} 2\,\mathrm{sen}(t)\cdot(-3\,\mathrm{sen}(t))dt = \int_{\pi/2}^{0} -6\,\mathrm{sen}^2(t)dt = -6\int_{\pi/2}^{0}\mathrm{sen}^2(t)dt\\
&= -6\int_{\pi/2}^{0}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt = -6\int_{\pi/2}^{0}\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]dt = -6(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2t))|_{\pi/2}^{0}\\
&= -6[(\frac{0}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{sen}(0))-(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{sen}(\pi))] = -6[0-\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\cdot 0] = \frac{3\pi}{2}\ u.a.
\end{aligned}$$

Portanto, a área da região total limitada pela elipse dada é: $A = 4\cdot A_1 = 4\cdot\dfrac{3\pi}{2} = 6\pi\ u.a.$

***Exemplo* 3.35.** Calcular a área da região localizada entre as elipses

$$\begin{cases} x &= 2\cos(t)\\ y &= 4\,\mathrm{sen}(t)\end{cases} \text{ e } \begin{cases} x &= 2\cos(t)\\ y &= \mathrm{sen}(t)\end{cases}$$

Solução: Fazendo um esboço das duas curvas, usando as variações de x e y em cada uma, temos uma idéia da região cuja área é procurada. Notemos que, para a primeira elipse, temos $-2\le x\le 2$ e $-4\le y\le 4$, enquanto que para a segunda, temos $-2\le x\le 2$ e $-1\le y\le 1$, o que nos permite perceber propriedade de simetria da região em relação aos eixos.

Observemos agora que as duas curvas possuem a mesma variação para x e são simétricas em relação aos eixos, o que faz com que se encontrem nos pontos $(-2,0)$ e $(2,0)$ e portanto nos dá os limites de integração em x, ou seja, a integração deverá ocorrer de $x=-2$ a $x=2$.

Podemos, portanto, calcular a área da metade superior da elipse (acima do eixo x) e multiplicá-la por 2 para encontrar a área total.

O fato dos limites de integração em x serem justamente nos pontos comuns às duas elipses também fará com que os limites de integração em t coincidam, ou seja:

Quando $x=-2$, para a primeira e a segunda elipse, temos:

$$-2 = 2\cos(t) \Longrightarrow \cos(t) = -1 \Longrightarrow t=\pi.$$

Quando $x=2$, para a primeira e a segunda elipse, temos:

$$2 = 2\cos(t) \Longrightarrow \cos(t) = 1 \Longrightarrow t = 0.$$

Então, temos, para a aplicação da fórmula do 2º caso, $t_0 = t_2 = \pi$ e $t_1 = t_3 = 0$.

Agora, como $x_1(t) = x_2(t) = 2\cos(t)$, temos que $x_1'(t) = x_2'(t) = -2\,\mathrm{sen}(t)$ e, então:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{t_0}^{t_1} y_1(t)\cdot x_1'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y_2(t)\cdot x_2'(t)dt = \int_{\pi}^{0} 4\,\mathrm{sen}(t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}(t))dt - \int_{\pi}^{0}\mathrm{sen}(t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}(t))dt\\
&= \int_{\pi}^{0} -8\,\mathrm{sen}^2(t)dt + \int_{\pi}^{0} 2\,\mathrm{sen}^2(t)dt = \int_{\pi}^{0}[-8\,\mathrm{sen}^2(t)+2\,\mathrm{sen}^2(t)]dt = \int_{\pi}^{0} -6\,\mathrm{sen}^2(t)dt\\
&= -6\int_{\pi}^{0}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt = -6\int_{\pi}^{0}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t))dt = -6[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2t)]|_{\pi}^{0}\\
&= -6[(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}\mathrm{sen}(0))-(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\pi))] = -6[(0-\frac{1}{4}\cdot 0)-(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot 0)]\\
&= -6[-\frac{\pi}{2}] = \frac{6\pi}{2} = 3\pi\ u.a.
\end{aligned}$$

Portanto, a área total entre as duas elipses é dada por

$$A = 2\cdot A_1 = 2\cdot 3\pi = 6\pi\ u.a.$$

3.10.1 Exercícios Propostos

3.23. Calcular a área da região limitada pela elipse $\begin{cases} x &= 3\cos(t) \\ y &= \operatorname{sen}(t) \end{cases}$

3.24. Calcular a área da região limitada à direita pela elipse $\begin{cases} x &= 3\cos(t) \\ y &= 2\operatorname{sen}(t) \end{cases}$ e à esquerda pela reta $x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

3.25. Calcular a área da região limitada pela curva $\begin{cases} x &= 2\cos(t) \\ y &= 2\operatorname{sen}(t) \end{cases}$ que está acima da reta $y = 1$.

3.26. Calcular a área entre o arco da hipociclóide $\begin{cases} x &= 3\cos^3(t) \\ y &= 3\operatorname{sen}^3(t), \end{cases}$ $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e a reta $x + y = 3$.

3.27. Calcular a área da região entre as curvas:

(a) $\begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \operatorname{sen}(t) \end{cases}$ e $\begin{matrix} x &= \cos(t) \\ y &= \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(t) \end{matrix}$

(b) $\begin{cases} x &= 2\cos^3(t) \\ y &= 2\operatorname{sen}^3(t) \end{cases}$ e $\begin{cases} x &= 2\cos(t) \\ y &= 2\operatorname{sen}(t) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1+3t \end{cases}$ e $\begin{cases} x &= t \\ y &= t^2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x &= 4\cos(t) \\ y &= 2\operatorname{sen}(t) \end{cases}$ e $\begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \operatorname{sen}(t) \end{cases}$

Gabarito

3.1 (a) $\frac{247}{32}$; (b) $\frac{1469}{1320}$; (c) $0,835$. 3.2 (a) 2; (b) $\frac{8}{3}$. 3.3 (a) 9; (b) 18; (c) $4\sqrt{5}$; (d) -14 . 3.4 (a) 15; (b) 0; (c) -21; (d) $-\frac{3}{2}$; (e) $4+\pi$; (f) $\frac{33\pi}{2}$. 3.5 (a) 1 e ± 1; (b) $\frac{2}{\pi}$ e $0,69$. 3.6 (a) 16; (b) 8; (c) 12; (d) 36; (e) $\frac{29}{2}$; (f) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$; (g) $\frac{1}{2}$, (h) -1; (i) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})$; (j) $\frac{253}{6}$; (k) $\ln(2)$; (l) 1; (m) $-\frac{1}{6}$; (n) $\frac{45}{4}$; (o) $-\frac{4}{15}$; (p) $\frac{15}{64}$; (q) $\frac{1}{3}\ln(2)$; (r) $\frac{1}{6}$; (s) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 3.7 (a) 1; (b) $2\ln(2)$; (c) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$; (d) $\frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (e) $-\frac{3}{2}e^4$; (f) $2[\ln(2)]^2 - 2\ln(2) - \frac{5}{4}$; (g) $\frac{e^2+1}{4}$; (h) $\frac{e^\pi - 1}{5}$; (i) $\frac{\sqrt{2}(\pi+2)-8}{16}$. 3.8 (a) $\frac{65}{3}$, (b) $\frac{22}{3}$, (c) $\frac{52}{3}$, (d) 1. (e) 1, (f) $\frac{28}{3}$, (g) $\frac{3\pi}{2}+1$, (h) $\frac{\pi}{4}$, (i) $\frac{32}{3}$, (j) 30. . 3.9 (a) $\frac{1}{6}$; (b) $\frac{8}{3}$; (c) 36; (d) $\frac{1}{3}$; (e) $2+\frac{1}{6}\pi^3$; (f) $\frac{1}{6}$; (g) $\frac{9}{2}$; (h) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$; (i) $\frac{5}{12}$; (j) $\frac{27}{10}$; (k) $\frac{64}{3}$. 3.9 (a) $\frac{65}{3}$, (b) $\frac{22}{3}$, (c) $\frac{52}{3}$, (d) 1. (e) 1, (f) $\frac{28}{3}$, (g) $\frac{3\pi}{2}+1$, (h) $\frac{\pi}{4}$, (i) $\frac{32}{3}$, (j) 30. 3.11 (a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{8}{3}$, (c) 36, (d) $\frac{1}{3}$. (e) $2+\frac{1}{6}\pi^3$, (f) $\frac{1}{6}$, (g) $\frac{9}{2}$, (h) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$, (i) $\frac{5}{12}$, (j) $\frac{27}{10}$, (k) $\frac{64}{3}$. 3.12 (a) 64; (b) $2\left[8 - \frac{3}{\ln(2)}\right]$; (c) 22. 3.13 12. 3.14 (a) $2\sqrt{10}$ $u.c.$; (b) $2\sqrt{10}$ $u.c.$; (c) $2\sqrt{10}$ $u.c.$; 3.15 $\frac{14}{3}$ $u.c.$; 3.16 $\frac{33}{16}$ $u.c.$; 3.17 (b) 12 $u.c.$; (c) $\frac{53}{6}$ $u.c.$; (d) senh $1 u.c.$; (e) $1+\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})$ $u.c.$; (f) $\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right|$ $u.c.$ 3.18 2 $u.c.$ 3.19 (a) 2π $u.c$; (b) 8 $u.c$; (c) $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\pi^2} + \frac{1}{2}\ln(\pi + \sqrt{1+\pi^2})\right]$ $u.c$; (d) $2\sqrt{10}$ $u.c$; (e) $\sqrt{2}(e^2 - e)$ $u.c$; (f) $\frac{\pi^2}{4}$ $u.c.$ 3.21 24 $u.c$ 3.22 3.23 3π $u.a$; 3.24 $\left(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ $u.a$; 3.25 $(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3})$ $u.a$; 3.26 $\frac{144-27\pi}{32}$ $u.a$; 3.27 (a) $\frac{\pi}{2}$ $u.a$; (b) $\frac{5\pi}{2}$ $u.a$; (c) $\frac{1}{6}$ $u.a$; (d) 7π $u.a$

tema 4 Outras Aplicações da Integral Definida e as Integrais Impróprias

Aplicações das Integrais Definidas: Áreas e Volumes

Apresentação

Neste capítulo, continuaremos a apreciar, mais um pouco, as aplicações da integral definida, desta vez trabalhando com curvas planas dadas por coordenadas polares, além com áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução, que são figuras espaciais obtidas a partir da rotação de regiões planas em torno de um eixo fixo. Veremos também o caso do cálculo de áreas sob curvas “infinitas”, momento em que se torna imprescindível a definição e as aplicações das Integrais Impróprias.

4.1 Comprimento e Área em Coordenadas Polares

Em Geometria Analítica, o aluno teve a oportunidade de conhecer uma outra maneira de localizar pontos e definir conjuntos de pontos no plano, através de outros dois parâmetros que não envolvem x e y, mas que tem uma relação direta com estas duas coordenadas. Também foi visto como traçar ou esboçar gráficos de curvas dadas em função destes parâmetros, que são denominados Coordenadas Polares. Aqui, vamos usar a integral definida para definir as expressões para a área e para o comprimento de arco de curvas dadas em coordenadas polares.

Para uma melhor familiarização do estudante com este tópico, principalmente no que diz respeito à identificação da curva pela forma de sua equação polar e pelo traçado do seu gráfico, recomendamos uma revisão ao capítulo do módulo de Geometria Analítica referente a este tema.

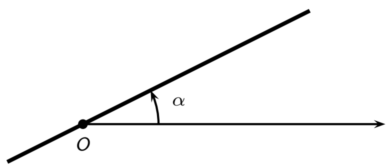
4.1.1 As Principais Curvas dadas em Coordenadas Polares

Algumas curvas dadas em Coordenadas Polares têm propriedades e características muito interessantes no estudo do Cálculo Diferencial e da Geometria Analítica e por isso são estudadas com atenção especial, tendo analisadas estas características e utilizadas na simplificação do esboço dos seus gráficos. São elas:

(i) Retas

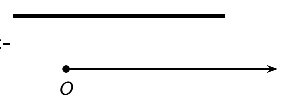
1º tipo: $\theta = \theta_0$ (constante) ou $\theta = \theta_0 \pm n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ambas descrevem a mesma curva, que é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo constante de θ_0 (ou $\theta_0 \pm n\pi$) com o eixo polar.

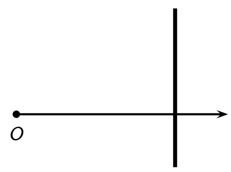


2º tipo: $a = r\,\text{sen}(\theta)$ ou $a = r\cos(\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$.

São as retas paralelas e perpendiculares (respectivamente) ao eixo polar.



$a = r\,\text{sen}(\theta), a \in \mathbb{R}$

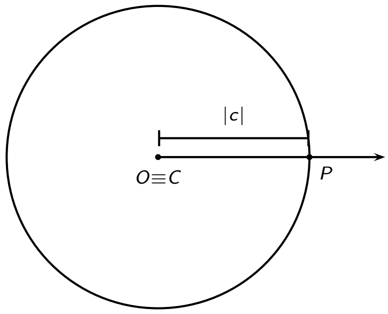


$a = r\cos(\theta), a \in \mathbb{R}$

(ii) Circunferências

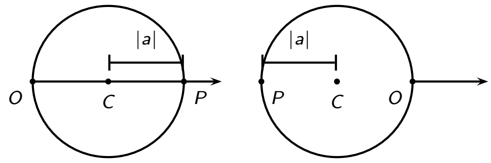
1º tipo: $r = c, c \in \mathbb{R}$.

Trata-se de circunferência com centro no pólo e raio igual a $|c|$.



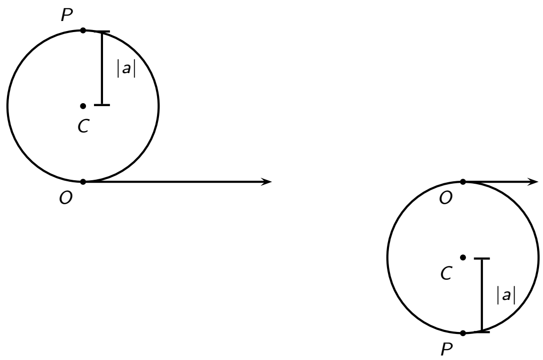
2º tipo: $r = 2a\cos(\theta)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

É a equação polar de uma circunferência com centro sobre o eixo polar, este podendo estar à direita (se $a > 0$) ou à esquerda (se $a < 0$) do pólo, raio de comprimento $|a|$, e que passa pelo pólo, assim, tangencia o eixo $\theta = \pi/2$.



3º tipo: $r = 2a\,\mathrm{sen}(\theta)$, $a \in \mathbb{R}^*$

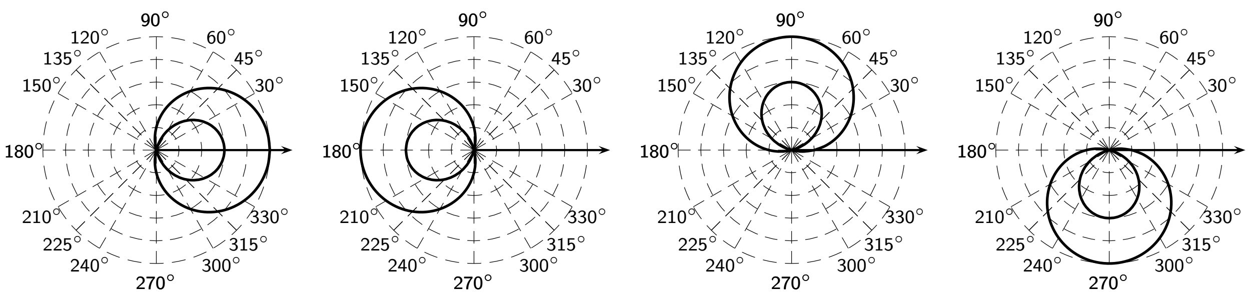
É a equação da circunferência com centro no eixo $\theta = \pi/2$, este podendo estar acima (se $a > 0$) ou abaixo (se $a < 0$) do pólo, raio de comprimento $|a|$ e que passa pelo pólo tangenciando o eixo polar.



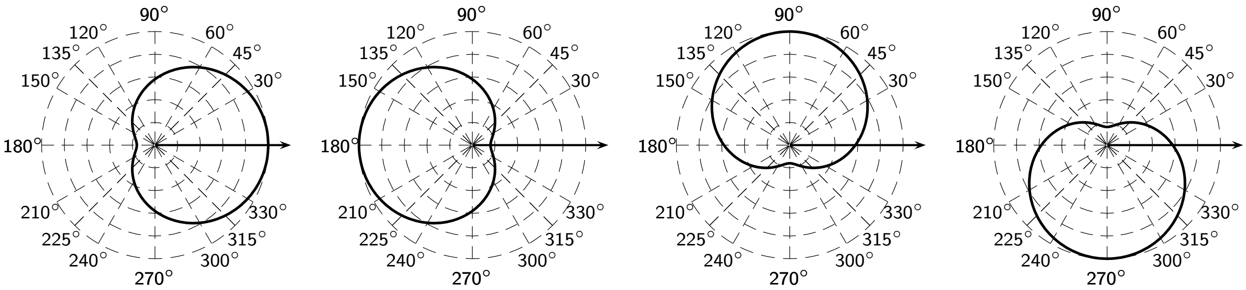
(iii) Limaçons:

$r = a \pm b\cos(\theta)$ ou $r = a \pm b\,\mathrm{sen}(\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*_+$, são as equações que representam as limaçons. Existem 3 classificações para as limaçons que exibimos a seguir.

Limaçons com laço: Quando $b > |a|$

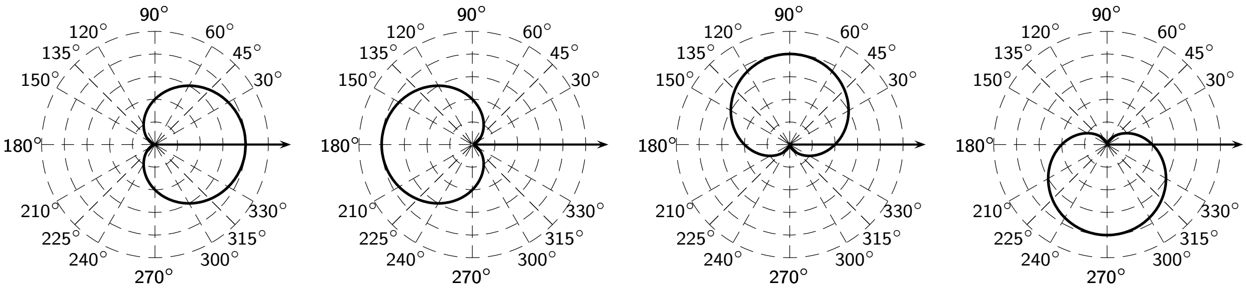


Limaçons sem laço: Quando $b < |a|$**.**



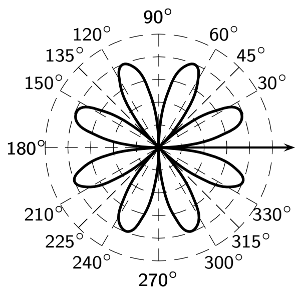
Cardióide: Quando $b = |a|$

Espécie de“limite” entre um limaçon com laço e um sem laço, que tem a forma de um coração, e por isto leva este nome. Veja na figura a seguir.



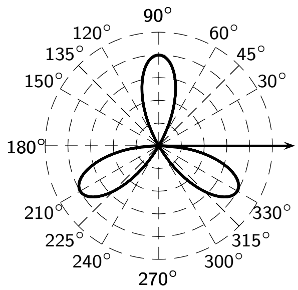
(iv) Rosáceas

$r = a\cos(n\theta)$ ou $r = a\,\text{sen}(n\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$



1º caso: n **é par.**

Neste caso, trata-se de uma rosácea de $2n$ pétalas.

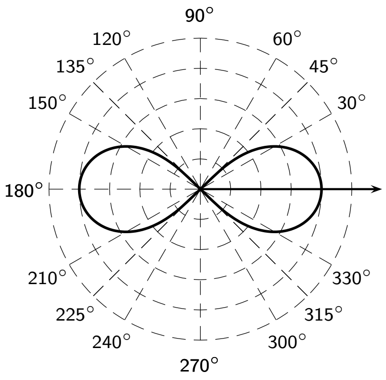


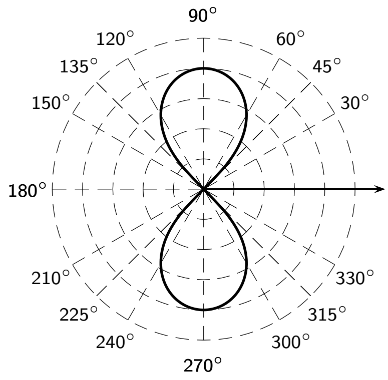
2º caso: n **é ímpar.**

Neste caso, trata-se de uma rosácea de n pétalas.

(v) Lemniscatas

$r^2 = \pm a^2\cos(2\theta)$ ou $r^2 = \pm a^2\,\text{sen}(2\theta)$, $a \in \mathbb{R}^*$, são equações que representam lemniscatas.

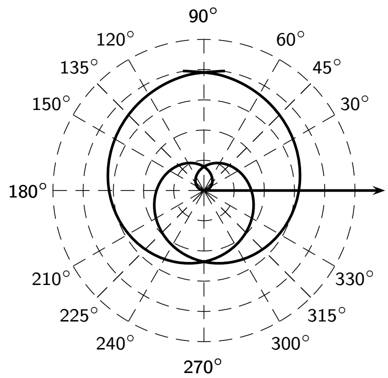




(vi) Espirais

As principais espirais são dadas pelas equações

- $\diamond$ $r\theta = a$, com $a > 0$ (espiral hiperbólica);
- $\diamond$ $r = a\theta$, com $a > 0$ (espiral de Arquimedes);
- $\diamond$ $r = e^{a\theta}$ (espiral logarítmica);
- $\diamond$ $r^2 = \theta$ (espiral parabólica).



Espiral de Arquimedes

4.1.2 Comprimento de Arco de uma Curva Dada em Coordenadas Polares

Vamos obter, agora, uma fórmula para o comprimento de arco de uma curva dada em função de coordenadas polares. O processo é muito simples, considerando θ como um parâmetro em função do qual podemos escrever x e y e utilizando a já conhecida fórmula do comprimento de arco para uma curva dada em equações paramétricas.

Considere então a curva C, dada pela equação polar $r = f(\theta)$.

Lembremos as relações existentes entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares, a saber:

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

Então, reescrevendo as relações acima aplicando a equação polar $r = f(\theta)$, temos

$$\begin{aligned} x &= f(\theta)\cos(\theta) \\ y &= f(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Portanto, temos nestas igualdades equações que podem ser vistas como equações paramétricas da curva C (no parâmetro θ), com $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Derivando-as em relação a θ, temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= f'(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + f(\theta)\cos(\theta) \end{aligned}$$

A fórmula para o comprimento de arco para a curva com equações paramétricas em θ é:

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\, d\theta.$$

Calculemos, então, $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2$:

$$\begin{aligned}
(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 &= \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 \\
&= [f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\operatorname{sen}(\theta)]^2 + [f'(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)]^2 \\
&= [f'(\theta)]^2\cos^2(\theta) - 2f'(\theta)f(\theta)\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + [f(\theta)]^2\operatorname{sen}^2(\theta) \\
&\quad + [f'(\theta)]^2\operatorname{sen}^2(\theta) + 2f'(\theta)f(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + [f(\theta)]^2\cos^2(\theta) \\
&= [f'(\theta)]^2(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) + [f(\theta)]^2(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) \\
&= [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo este resultado na fórmula dada logo acima, obtemos finalmente

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta.$$

***Exemplo* 4.1.** Calcular o comprimento da cardióide $r = 2 + 2\cos(\theta)$.

Solução: Observando a característica de simetria que a curva dada tem em relação ao eixo polar, vamos então calcular o comprimento da metade superior da cardióide (acima do eixo polar), ou seja, para $\theta \in [0, \pi]$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
s &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{[-2\operatorname{sen}(\theta)]^2 + [2 + 2\cos(\theta)]^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta) + 4 + 8\cos(\theta) + 4\cos^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4(\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + 8\cos(\theta) + 4}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{4 + 8\cos(\theta) + 4}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{8(\cos(\theta) + 1)}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 2\sqrt{2(\cos(\theta) + 1)}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4(\frac{\cos(\theta) + 1}{2})}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2(\frac{\theta}{2})}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta \\
&= 2 \cdot \left[2 \cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi} = 2\left[\left(4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(4\operatorname{sen}\left(\frac{0}{2}\right)\right)\right)\right] = 8[1 - 0] = 8
\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

4.1. Calcular o comprimento de arco das curvas abaixo:

(a) $r = e^{\theta}$, entre $\theta = 0$ e $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

(b) $r = 1 + \cos(\theta)$

(c) $r = 2a\operatorname{sen}(\theta)$

(d) $r = 3\theta^2$, de $\theta = 0$ até $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

4.2. Em cada item abaixo, encontrar a integral que dá o comprimento de arco da curva dada:

(a) $r = 3 + 2\cos(\theta)$

(b) $r = 3\operatorname{sen}(3\theta)$

(c) $r = 2 - 3\cos(\theta)$

(d) $r^2 = 9\cos(2\theta)$

(e) $r = 4\cos(4\theta)$

(f) $r = 4 + 2\operatorname{sen}(\theta)$

4.1.3 Áreas de Regiões Planas Limitadas por Curvas em Coordenadas Polares

Nesta seção, vamos determinar a expressão para a área de uma região plana limitada pelo gráfico de uma função dada em coordenadas polares. Intuitivamente o procedimento para a obtenção da fórmula tem a mesma essência do que foi adotado para a obtenção da fórmula da área sob o gráfico de uma função dada na forma cartesiana.

No entanto, ao invés da comparação com a área de retângulos, utilizaremos áreas de setores circulares, uma vez que as figuras em coordenadas polares não são construídas em função de eixos coordenados e sim em função de um ponto e um ângulo.

Vamos então encontrar a área A da região R, limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelo gráfico de $r = f(\theta)$. Para ter uma compreensão melhor da região, veja a figura 4.8

Para isto, devemos supor F como uma função contínua e não negativa em $[\alpha, \beta]$. Consideremos então uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, a saber,

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_i < \theta_{i+1} < \ldots < \theta_n = \beta,$$

como sugere a figura 4.9.

Então, para cada subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ da partição, onde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, consideremos o setor circular cujo raio é $f(\varphi_i)$ è cujo ângulo central é $\Delta\theta_i$, onde $\varphi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ e $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$.

Analogamente ao que acontece com a área dos retângulos no caso da fórmula para a área para funções $y = f(x)$, a área de cada setor circular correspondente à partição será dada por

$$\frac{1}{2}[f(\varphi_i)]^2 \Delta\theta_i.$$

Daí, uma boa aproximação para a área A da região R é dada pela soma das áreas de todos os setores circulares correspondentes à partição, ou seja, a soma

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\varphi_i)]^2 \Delta\theta_i,$$

ou, ainda,

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\varphi_i)]^2 \Delta\theta_i.$$

A identificação entre a área da região R e a soma acima ocorre à medida que tomamos n infinitamente grande fazendo, com isso, com que cada $\Delta\theta_i$ se torne próximo de zero e nos permitindo então escrever

$$A = \lim_{\max \Delta\theta_i \to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\varphi_i)]^2 \Delta\theta_i,$$

ou

$$A = \frac{1}{2}\lim_{\max \Delta\theta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\varphi_i)]^2 \Delta\theta_i$$

Portanto, observando que, no 2º membro da igualdade acima, a expressão $\sum_{i=1}^{n} [f(\varphi_i)]^2 \Delta\theta_i$ denota a Soma de Riemann da função $[f(\theta)]^2$, temos finalmente que

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta,$$

que é, portanto, a fórmula desejada.

***Exemplo* 4.2.** Calcular a área da região limitada pela curva de equação $r = 3 + 2\,\mathrm{sen}(\theta)$.

Solução: Como a equação da curva tem a forma $r = a + b\,\text{sen}(\theta)$, com $b < a$, trata-de um limaçon sem laço, que é simétrico em relação ao eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Portanto, temos apenas que calcular a área A_1 da região limitada pela parte da curva que está à direita deste eixo e multiplicá-la por 2. Os pontos que limitam esta parte da curva são os correspondentes a $\theta = -\frac{\pi}{2}$ e $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Assim, para o cálculo da área A_1, temos:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [3 + 2\,\text{sen}(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [9 + 12\,\text{sen}(\theta) + 4\,\text{sen}^2(\theta)]\; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[9 + 12\,\text{sen}(\theta) + 4\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right]\; d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{9 + 12\,\text{sen}(\theta) + 2[1 - \cos(2\theta)]\}\; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [11 + 12\,\text{sen}(\theta) - 2\cos(2\theta)]\; d\theta = \frac{1}{2}\left[11\theta - 12\cos(\theta) - 2\cdot\frac{1}{2}\,\text{sen}(2\theta)\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\,[11\theta - 12\cos(\theta) - \text{sen}(2\theta)]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(11\cdot\frac{\pi}{2} - 12\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(\pi)\right) - \left(11\cdot\left(\frac{-\pi}{2}\right) - 12\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \text{sen}(-\pi)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{11\pi}{2} - 12\cdot 0 - 0\right) - \left(\frac{-11\pi}{2} - 12\cdot 0 - 0\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{11\pi}{2} + \frac{11\pi}{2}\right) = \frac{11\pi}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, a área total da região limitada pelo limaçon é:

$$A = 2\cdot A_1 = 2\cdot\frac{11\pi}{2} = 11\pi\; u.a.$$

4.1.4 Exercícios Propostos

4.3. Calcular a área das regiões limitadas pelas curvas abaixo:

(a) $4(1 + \cos(\theta))$

(b) $r = \cos(3\theta)$

(c) $r = 3\,\text{sen}(2\theta)$

(d) $r = 3 - 2\cos(\theta)$

(e) $r^2 = 16\cos(2\theta)$

4.4. Encontre a área da região interior ao círculo $r = 10$ e à direita da reta $r\cos(\theta) = 6$.

4.5. Calcular a área da região entre as curvas $2r = 3$ e $r = 3\,\text{sen}(\theta)$

4.6. Encontrar a área da região do primeiro quadrante delimitada pelo primeiro laço da espiral $r = 2\theta$, $\theta \geq 0$ e pelas retas $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$.

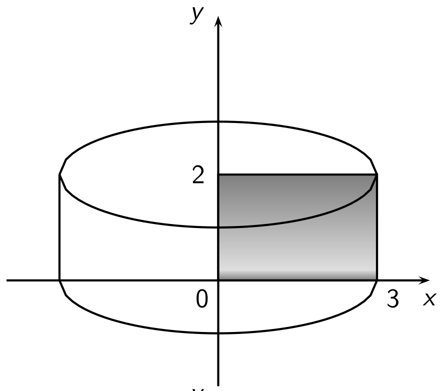
4.2 Sólidos e Superfícies de Revolução

No tema 3 e nas seções anteriores, vimos como a integral definida é utilizada no cálculo de áreas e comprimentos de figuras e regiões planas associadas ao gráficos de funções. Nesta seção, relembraremos o conceito e as propriedades das figuras não-planas (espaciais), porém, obtidas através de um movimento de rotação de uma figura ou região plana, em torno de um eixo fixo, os chamados *Sólidos de Revolução* e as chamadas *Superfícies de Revolução*.

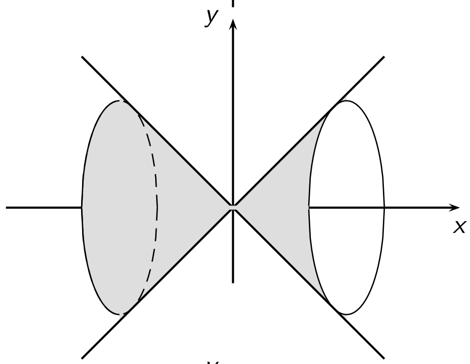
4.1 Definição. Ao fazermos uma região do plano girar em torno de uma reta fixa qualquer do plano, obtemos uma figura espacial, um sólido, denominado *Sólido de Revolução*. A reta fixa em torno da qual ocorre o giro é denominada *Eixo de Revolução*.

Vejamos alguns exemplos destes sólidos:

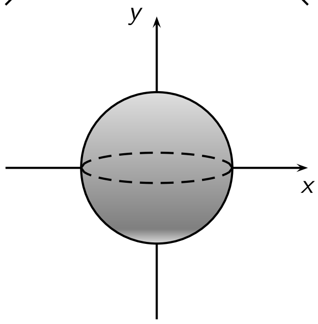
1. Ao fazer o retângulo delimitado pelas retas $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 2$ girar em torno do eixo y, obtemos um cilindro (cilindro de revolução).



2. Ao girarmos em torno do eixo x a reta $y = x$ (ou a reta $y = -x$), obtemos um cone (cone de revolução).



3. Se aplicarmos ao semicírculo limitado pela curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ uma rotação em torno do eixo dos x, obtemos a esfera unitária de centro na origem.



4.2 Definição. Ao fazermos uma curva plana girar em torno de uma reta fixa qualquer do plano, obtemos uma figura bidimendional, denominado *Superfície de Revolução*. A reta fixa em torno da qual ocorre o giro é denominada *Eixo de Revolução*.

4.2.1 Volume de Sólidos de Revolução

Vamos agora a um dos mais interessantes problemas que ligam o Cálculo à Geometria Analítica,que é o de determinar, através da Integral Definida, uma expressão para o volume de um sólido de Revolução associado ao gráfico de uma função $y = f(x)$.

Suponhamos para isso, primeiramente, que $f(x)$ seja uma função contínua e não-negativa no intervalo $[a, b]$. Consideremos então uma partição P deste intervalo $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_0 = n.$$

Denotemos (como nas outras vezes) por Δx_i o comprimento de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição, ou seja, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Agora, para cada um desses subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, vamos considerar o retângulo R_i de base Δx_i e altura igual $f(c_i)$, onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Fazendo este retângulo girar em torno do eixo dos x, obtemos um cilindro de revolução cujo volume é, da conhecida fórmula da Geometria Espacial,

$$V(c_i) = \pi r^2 \cdot h = \pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i.$$

Logo, a soma dos volumes dos n cilindros originados a partir dos n retângulos da partição é dada por

$$\begin{aligned} V_n &= V(c_1) + V(c_2) + \ldots + V(c_n) = \pi[f(c_1)]^2 \Delta x_1 + \pi[f(c_2)]^2 \Delta x_2 + \ldots + \pi[f(c_n)]^2 \Delta x_n \\ &= \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \Delta x_i \end{aligned}$$

e esta soma, analogamente ao que aconteceu no caso do comprimento de arco e da área sob a curva $y = f(x)$, nos dá uma boa aproximação do que na verdade é o volume V do sólido gerado pela rotação desta curva, como ilustra a figura 4.13

À medida em que tomamos n muito grande, o valor da soma dos volumes dos cilindros c_i, dado, pela expressão acima, aproxima-se cada vez mais do volume do referido sólido, o que nos permite então escrever

$$V = \lim_{max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \Delta x_i.$$

Observando, agora, que a expressão $\sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \Delta x_i$ denota uma soma de Riemann para a função $[f(x)]^2$ e lembrando que $f(x)$ é supostamente contínua (o que faz com que exista limite acima), podemos finalmente escrever

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

que é a expressão que define o volume V procurado.

Vejamos alguns outros casos:

1. $f(x)$ é negativa em alguma parte do intervalo $[a, b]$:

A mesma fórmula acima também é usada para o caso de f ser negativa em alguma parte de $[a, b]$. Isto porque o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico de $[f(x)]$ em torno do eixo x é o mesmo volume gerado pela rotação do gráfico de $y = -f(x)$ em torno deste mesmo eixo. Isto pode ser notado geometricamente pela propriedade de "simetria" que o sólido tem em relação a este eixo e analiticamente pela própria expressão que define o volume (observe que $[f(x)]^2 = [-f(x)]^2, \forall\, x$).

2. A região está entre os gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[a, b]$

No caso em que queremos o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região compreendida entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ e entre as retas $x = a$ e $x = b$, usando um raciocínio completamente análogo ao utilizado para se chegar à formula da área entre duas curvas, e supondo $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a, b]$, obtemos facilmente que este volume é dado por

$$V = \pi \int ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

3. A região gira em torno do eixo y

Seja $x = g(y)$ a equação da curva dada. Se queremos a expressão que define o volume do sólido gerado pela rotação da região compreendida entre a curva e o eixo dos y no intervalo $[c, d]$, por um raciocínio completamente análogo, tomando-se uma partição deste vez do intervalo $[c, d]$, obtemos que o referido volume é dado por

$$V = \pi \int ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

4. A região gira em torno de uma reta paralela a um dos eixos

(a) Em torno da reta $y = L$

O procedimento para a obtenção da fórmula do volume acaba sendo essencialmente o mesmo do que foi usado para a rotação em torno do eixo x, apenas tendo o cuidado de retirar (ou "acrescentar", a depender se L for positivo ou negativo) a região compreendida entre esta reta e o eixo x. Assim, a fórmula para este caso é dada por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx.$$

(b) Em torno da reta $x = M$.

Agora, seguindo o mesmo raciocínio usado para a rotação, em torno do eixo y, de uma curva $x = g(y)$, e fazendo as considerações análogas às que foram feitas no item (a), ou seja, retirando do cálculo o pedaço da região compreendida entre a reta $x = M$ e o eixo y (ou acrescentando, a depender do sinal de M), obtemos a fórmula para o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $x = g(y)$, pela reta $x = M$ e pelas retas $y = c$ e $y = d$, em torno de $x = M$, que é dada por:

$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy.$$

***Exemplo* 4.3.** Determinar o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pela curva $y = \frac{1}{2}x^2$, pelo eixo dos x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$.

Solução: Trata-se do caso mais simples e, dado, inicialmente, pois, temos $f(x) \geq 0, \forall\, x \in [1, 4]$. Então, aplicando a fórmula dada, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^4 \left[\frac{1}{2}x^2\right]^2 dx = \pi \frac{1}{4} \int_1^4 x^4 dx \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{4^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1024}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1023\pi}{20}\ u.a. \end{aligned}$$

***Exemplo* 4.4.** Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região limitada pela parábola $y = (x - 2)^2$ e pela reta $y = 2x - 1$.

Solução: Fazendo um esboço gráfico da região, obtemos o que pode ser visto na figura 4.15. Encontrando os pontos de intersecção entre as curvas, que serão os limites de integração, temos:

$$(x - 2)^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0,$$

o que nos dá $x = 5$ e $x = 1$.
Observe também que em $1 \leq x \leq 5$ temos $2x-1 \geq (x-1)^2$. Portanto, aplicando a fórmula apresentada no segundo caso particular mencionado acima, temos:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx = \pi \int_1^5 ([2x - 1]^2 - [(x - 2)^2]^2) dx \\ &= \pi \int_1^5 (4x^2 - 4x + 1 - [x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16]) dx \\ &= \pi \int_1^5 (-x^4 + 8x^3 - 20x^2 + 28x - 15) dx = \pi \left[\left(-\frac{x^5}{5} + 2x^4 - \frac{20x^3}{3} + 14x^2 - 15x\right)\right]\Bigg|_1^5 \\ &= \pi \left[\left(-\frac{5^5}{5} + 2 \cdot 5^4 - \frac{20 \cdot 5^3}{3} + 14 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5\right) - \left(-\frac{1^5}{5} + 2 \cdot 1^4 - \frac{20 \cdot 1^3}{3} + 14 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1\right)\right] \\ &= \pi \left[\left(-625 + 1250 - \frac{2500}{3} + 350 - 75\right) - \left(-\frac{1}{5} + 2 - \frac{20}{3} + 14 - 15\right)\right] = \frac{1448\pi}{15} \end{aligned}$$

***Exemplo* 4.5.** A região limitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo dos y e pela reta $y = 8$ gira em torno do eixo y. Determinar o volume do sólido de revolução obtido.

Solução: Podemos ver um esboço da região mencionada na figura 4.15. Como a rotação agora ocorre em torno do eixo y, devemos escrever a curva como uma função $x = g(y)$. Então temos

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

Além disso, observe que a região é limitada inferiormente pelo eixo dos x, ou seja, a reta $y = 0$ (pois a curva intersecta o eixo y neste valor,"fechando" a região inferiormente). Portanto, como a região é limitada superiormente pela reta $y = 8$, temos, aplicando a fórmula vista para este caso,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy = \pi \int_0^8 [\sqrt[3]{y}]^2 \, dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} \, dy = \pi \left(\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) \Big|_0^8 \\ &= \pi \left[\left(\frac{3}{5} 8^{\frac{5}{3}} \right) - \left(\frac{3}{5} \cdot 0^{\frac{5}{3}} \right) \right] = \frac{3\pi}{5} 8^{5/3} = \frac{96\pi}{5} \; u.v. \end{aligned}$$

4.2.2 Exercícios Propostos

4.7. Em cada item abaixo, encontre o volume do sólido gerado pela região delimitada pelas curvas e retas dadas, em torno do eixo respectivamente dado:

(a) $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ e eixo x ; em torno do eixo x

(b) $y = x^2$ e $y = x^3$; em torno do eixo x

(c) $y = \cos(x)$, $y = \operatorname{sen}(x)$, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{4}$; em torno do eixo x

(d) $y = \ln x$, $y = -1$, $y = 2$ e o eixo y ; em torno do eixo y

(e) $y = x^3$ e $y = x^2$; em torno do eixo y

(f) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $y = 4$ e o eixo y ; em torno do eixo y

(g) $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$; em torno do eixo $y = 2$

4.8. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região entre os gráficos de $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \operatorname{sen}^3(x)$, de $x = 0$ até $x = \dfrac{\pi}{2}$.

4.2.3 Área de uma Superfície de Revolução

Como já foi mencionado no início desta seção, quando, ao invés de girar uma região plana, giramos uma curva plana em torno de um eixo fixo, obtemos o que é denominada Superfície de Revolução.

Vamos agora nos reportar ao problema de determinar a área de uma superfície de Revolução gerada pela rotação de uma curva de equação $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno do eixo dos x. Para tanto, assim como foi feito na dedução da fórmula para volumes de sólidos de revolução, vamos supor inicialmente que $f(x) \geq 0$ no intervalo $[a, b]$ e também que f é uma função derivável no intervalo $[a, b]$.

Analogamente ao que foi feito para as fórmulas de área, comprimento de arco de uma curva e volume de sólidos de revolução, consideremos uma partição P do intervalo $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_0 = x_n = b.$$

Considere agora os pontos P_0, P_1, P_2, $\ldots$, P_n os pontos da curva associados à partição, ou seja, os pontos da curva cujas abcissas são os valores de x tomados na partição. Já sabemos, da seção sobre a fórmula do comprimento de arco de uma curva dada na forma cartesiana, que, unindo-se de maneira consecutiva estes pontos, obtemos uma poligonal cujo comprimento se aproxima cada vez mais do comprimento da curva dada, à medida que tomamos o valor de n cada vez maior.

Agora, se fizermos (intuitivamente) cada segmento da referida poligonal girar em torno do eixo x, obteremos uma superfície de revolução cuja geometria é muito conhecida, dos nossos estudos de Geometria Espacial: o tronco de cone.Sabe-se que a área lateral do tronco de cone é dada por

$$A_{\updownarrow} = \pi(R + r)L,$$

onde R é o raio da base maior, r é o raio da base menor e L é o comprimento da geratriz (segmento de reta que gira dando origem à esta superfície). Ainda pela figura 4.16, podemos perceber que, em relação ao tronco de cone gerado pela rotação do i-ésimo segmento da poligonal, temos que $R = f(x_i)$, $r = f(x_{i-1})$ (isto supondo $f(x_i) > f(x_{i-1})$) e $L = \Delta l_i$ é o comprimento do i-ésimo segmento da poligonal, dado neste caso por

$$\Delta l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Temos, então, que a área lateral do i-ésimo tronco de cone gerado pelo giro da poligonal é dada por

$$A_i = \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})]\Delta l_i.$$

Porém, como f é, por hipótese, contínua no intervalo $[a, b]$ (e, portanto, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição) sabemos, pelo Teorema do Valor Intermediário (Cálculo I), que existe um c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, tal que $f(c_i) = \dfrac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$. Daí, na última igualdade acima, podemos fazer

$$\begin{aligned} A_i &= \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})]\Delta l_i = \pi \cdot 2 \cdot \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\right] \Delta l_i \\ &= 2\pi f(c_i)\Delta l_i \end{aligned} \tag{4.10}$$

Temos, ainda, que, pelo Teorema do Valor Médio, uma vez que f é derivável no intervalo $[a, b]$ e portanto em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, existe um $d_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(d_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Daí, a expressão obtida anteriormente para Δl_i pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Delta l_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(d_i)(x_i - x_{i-1})]^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(d_i)]^2(x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2[1 + (f'(d_i))^2]} = \sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \cdot \Delta x_i, \end{aligned}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Substituindo esta expressão na expressão de A_i, obtemos então:

$$A_i = 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \cdot \Delta x_i.$$

Somando então as áreas laterais dos troncos de cone gerados pela rotação em torno do eixo x de toda a poligonal, obtemos

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \cdot \Delta x_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \cdot \Delta x_i.$$

Analogamente aos casos do volume, área de regiões planas e comprimento de arco, à medida que n cresce muito, fazendo Δx_i muito pequeno, a soma acima aproxima-se cada vez mais da área exata da superfície gerada pela rotação da curva $y = f(x)$, o que sugere a seguinte definição.

4.3 Definição. Considere C uma curva cuja equação cartesiana seja $y = f(x)$, onde f é contínua e derivável no intervalo $[a, b]$, f' é contínua neste intervalo e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. A área A da superfície de revolução gerada pela rotação da curva C, de $x = a$ a $x = b$, em torno do eixo x é dada por

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \cdot \Delta x_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

Porém, o limite que aparece à direita na igualdade acima corresponde à integral definida de a a b da função $2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, o que nos permite redefinir a área da referida superfície como

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

que é a fórmula da área da superfície de revolução mencionada.

Notemos agora que, de uma maneira completamente análoga, usando exatamente a mesma sequência de argumentos, mostra-se facilmente que a área da superfície de revolução gerada pela rotação em torno do eixo y de uma curva C cuja equação cartesiana é dada por $x = g(y)$, com a função g cumprindo as hipóteses análogas às cumpridas pela função f na definição acima, de $y = c$ a $y = d$, é dada por

$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}dy.$$

Exemplo 4.6. Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo dos x, da curva dada por $y = \sqrt{x}$, em $[1, 4]$.

Solução: Sendo $y = \sqrt{x}$, então $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Assim, aplicando a fórmula obtida, temos:

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]^2} dx \\
&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{\frac{4x+1}{4}}dx \\
&= 2\pi \int_1^4 \frac{\sqrt{4x+1}}{2}dx = \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}dx = \frac{1}{4}\pi \left[\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\
&= \frac{\pi}{6}[(4x+1)^{\frac{3}{2}}]\Big|_1^4 = \frac{\pi}{6}\left[(4 \cdot 4 + 1)^{\frac{3}{2}} - (4 \cdot 1 + 1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{6}[17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}] \\
&= \pi \left[\frac{17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}}{6}\right] \ u.a.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.7. Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo y, da curva dada por $y = \sqrt[3]{x}$, com $0 \leq y \leq 1$.

Solução: Bem, primeiramente, já que a rotação ocorre em torno do eixo y, devemos reescrever a equação que define a curva como uma função $x = g(y)$. Assim, temos, de $y = \sqrt[3]{x}$, que $x = y^3$ e dessa última temos $x' = g'(y) = 3y^2$. Então, aplicando a fórmula obtida para este caso, temos:

$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy = 2\pi \int_0^1 y^3\sqrt{1+[3y^2]^2}dy = 2\pi \int_0^1 y^3\sqrt{1+9y^4}dy$$

Calculando a integral indefinida $\int y^3\sqrt{1+9y^4}dy$, fazemos $u = 1+9y^4$, e então temos daí que $du = 36y^3\ dy$, ou ainda $y^3dy = \dfrac{du}{36}$. Assim, a referida integral fica

$$\int y^3\sqrt{1+9y^4}dy = \int \sqrt{u}\frac{du}{36} = \frac{1}{36}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}(1+9y^4)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{54}(1+9y^4)^{\frac{3}{2}} + C$$

Voltando com este resultado ao cálculo da área, temos então

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\left[\frac{1}{54}(1+9y^4)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1 = 2\pi\cdot\frac{1}{54}[(1+9y^4)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{27}[(1+9\cdot 1^4)^{\frac{3}{2}} - (1+9\cdot 0^4)^{\frac{3}{2}}] = \frac{\pi}{27}[10^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}] = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)\ u.a. \end{aligned}$$

4.2.4 Exercícios Propostos

4.9. Calcule, em cada item abaixo, a área da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada, no respectivo intervalo, em torno do eixo indicado:

(a) $y = 2x^3$, $0 \le x \le 2$; em torno do eixo x

(b) $x = \sqrt{y}$, $1 \le y \le 4$; em torno do eixo y

(c) $y = \dfrac{1}{2}x$, $0 \le x \le 4$; em torno do eixo x

(d) $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 1$; em torno do eixo x.

4.10. Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação do arco da parábola $y^2 = 8x$, $1 \le x \le 12$, ao redor do eixo dos x.

4.11. Calcular a área da superfície do cone gerado pela rotação do segmento de reta $y = 4x$, $0 \le x \le 2$:

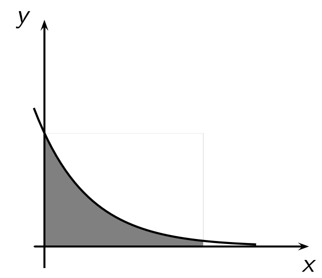
(a) Em torno do eixo x;

(b) Em torno do eixo y.

4.3 Integrais Impróprias

Na definição da Integral Definida de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$, esta função sempre é suposta contínua neste intervalo. Nesta seção, vamos estender este conceito de integral para trabalharmos com integrais em intervalos infinitos, nos quais estas integrais receberão então a nomenclatura de *Integrais Impróprias*.

4.3.1 Integrais Impróprias com Extremos de Integração Infinitos



Consideremos o problema de determinar a área A da região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelo eixo dos x e pelo eixo dos y (veja a região na figura ao lado). Seria muito natural imaginar que, como a região mencionada é infinita, sua área não pode ser avaliada com um valor infinito. Mas tenhamos cuidado com esta idéia.

Vamos, para tentar verificar a veracidade desta idéia, fixar uma outra reta vertical, digamos $x = b$, com $b > 0$, determinar a parte da área da referida região que se encontra entre o eixo y e a reta $x = B$. Da seção 3.4, se denotarmos por A' a área desta parte da região e considerarmos uma partição P do intervalo $[0, b]$, dada por $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, temos:

$$A' = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} e^{-c_i}\Delta x_i = \int_0^b e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]\Big|_0^b = (-e^{-b}) - (-e^0) = 1 - e^{-b}$$

Agora, se fizermos b crescer ilimitadamente, a área que acabamos de calcular se torna cada vez mais próxima daquela área A, que inicialmente imaginávamos ser infinita. Logo, para calcular a referida área, basta tomar o limite da A' quando b "tende" ao infinito, ou seja,

$$A = \lim_{b\to\infty} A' = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

Concluímos com estas igualdades que, não importando o quão grande seja o valor de b, a área limitada pela curva $y = e^{-x}$, o eixo x, o eixo y e a reta $x = b$ não é sempre menor que 1.

Generalizando o raciocínio usado na resolução deste problema, apresentamos a seguinte

4.4 Definição. Seja f é uma função contínua para todo $x \geq a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

se este limite existir.

No caso do limite infinito da integração ser o inferior, ou seja, se estamos integrando uma função f no intervalo $(-\infty, b]$, procedemos num raciocínio completamente idêntico ao anterior, só que agora fixando uma reta $x = a$ e posteriormente tomando o limite com a tendendo a $-\infty$, o que nos leva à próxima definição.

4.5 Definição. Seja f é uma função contínua para todo $x \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

se este limite existir.

Finalmente, no caso em que ambos os limites de integração são infinitos, ou seja, a integração ocorre de $-\infty$ a $+\infty$, juntando os argumentos anteriores e propriedades da integral definida, temos a definição que segue.

4.6 Definição. Seja f é uma função contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ e c é um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\, dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\, dx,$$

se estes limites existirem.

Nota 18. Nas três definições acima, quando os limites à direita nas igualdades existem, dizemos que a integral imprópria é *convergente* (ou que ela converge); caso contrário dizemos que a integral imprópria é *divergente* (ou que ela diverge).

***Exemplo* 4.8.** Calcular a integral $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$, se ela convergir.

Solução: Temos, pela primeira das três definições dadas, que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{4-x}\right]\Bigg|_{a}^{2} = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a}\right) \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right) - \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{4-a}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

***Exemplo* 4.9.** Calcular a integral $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x} dx$, se ela convergir.

Solução: Pela definição apresentada para este tipo de integral, temos

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} xe^{-x}\, dx.$$

Agora, calculando a integral indefinida $\int xe^{-x}\, dx$ por partes, fazemos $u = x$ e $dv = e^{-x}dx$, de onde temos, respectivamente, $du = dx$ e $v = -e^{-x}$ e, portanto, vem

$$\int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Então, voltando ao cálculo da integral imprópria e substituindo este resultado no 2º membro, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx &= \lim_{b\to+\infty} \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} [(-be^{-b} - e^{-b}) - (-0\cdot e^{-0} - e^{-0})] \\
&= \lim_{b\to+\infty} [-be^{-b} - e^{-b} + 1] = -\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} - 0 + 1
\end{aligned}$$

Agora, o limite $\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b}$ pode ser calculado com o auxílio das regras de L'Hospital, já que numerador e denominador tendem ao infinito quando $b \to +\infty$. Desta forma, temos

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} = 0$$

Daí, finalmente, a nossa integral fica

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = -0 + 0 - 1 = 1,$$

que é o valor da integral procurada.

4.3.2 Outras Integrais Impróprias

Consideremos, agora, o problema de determinar a área sob o gráfico de uma função f positiva e contínua no intervalo finito $[a, b)$, porém com uma assíntota vertical em $x = b$. Denotando por S a região ilimitada sob o gráfico de f acima do eixo x, de $x = a$ a $x = b$, a área da parte de S que está entre a e t, para um t com $a \leq t < b$ qualquer é dada por

$$A(t) = \int_a^t f(x)\, dx.$$

Se acontecer da área $A(t)$ tender a um número finito à medida que $t \to b^-$ e denotarmos este número por A, então podemos dizer que a área da região S é A, ou seja:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Esta expressão é usada para definir este outro tipo de integral imprópria, mesmo quando f não é estritamente positiva, e não importando o tipo de descontinuidade que f possua em $x = b$. Este raciocínio para este tipo de situação motiva a formulação da definição a seguir, para este outro tipo de Integral Imprópria.

4.7 Definição. Seja f uma função contínua para todo $x \in [a, b)$ e descontínua em $x = b$. Se $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx,$$

se este limite existir.

No caso da descontinuidade ocorrer no extremo esquerdo do intervalo, ou melhor, no limite superior da integração, um raciocínio essencialmente análogo sob a área sob a curva nos leva a seguinte definição.

4.8 Definição. Seja f uma função contínua para todo $x \in$ (a,b] e descontínua em $x = a$, com $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$. Então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx,$$

se este limite existir.

Analogamente às integrais impróprias do tipo anterior, teremos que, se os limites nos segundos membros das definições acima existirem, diremos que as respectivas integrais *convergem* e em caso contrário, diremos que elas *divergem*.

Agora, no caso da descontinuidade ocorrer em um ponto c tal que $a < c < b$, utilizamos os dois casos anteriores para apresentar a próxima definição.

4.9 Definição. Seja f uma função contínua para todo $x \in [a, b]$ exceto em $x = c$, sendo $a < c < b$, com $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = \pm\infty$. Então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\, dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)\, dx,$$

se estes limites existirem, ou

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$

se as duas integrais à direita convergirem.

***Exemplo* 4.10.** Calcular a integral $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.

Solução: Notemos, primeiramente, que esta integral de fato é imprópria, pois a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ possui uma assíntota vertical (uma descontinuidade) em $x = 2$. Como esta descontinuidade acontece no extremo esquerdo do intervalo, usando a segunda das três definições apresentadas nesta seção, obtemos

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+}\int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \lim_{t\to 2^+}\left[2\sqrt{x-2}\right]\Big|_t^5 = \lim_{t\to 2^+}[2\sqrt{5-2} - 2\sqrt{t-2}] \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2[\sqrt{3} - \sqrt{t-2}] = \lim_{t\to 2^+}(2\sqrt{3}) - \lim_{t\to 2^+}(\sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Portanto, a integral dada é convergente. Além disso, a função integrando é sempre positiva, o que nos permite afirmar que a integral representa a área sob seu gráfico, no intervalo $[2, 5]$.

***Exemplo* 4.11.** Calcular a integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$, se for possível.

Solução: Notemos que a função integrando possui uma assíntota vertical em $x = 1$. Como esta descontinuidade ocorre "no meio"do intervalo de integração, ou seja, entre 0 e 3, usando a fórmula apresentada na terceira das definições desta seção, temos

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

Calculando, primeiramente, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{t\to 1^-}(\ln|x-1|)|_0^t = \lim_{t\to 1^-}(\ln|t-1| - \ln|-1|) = \lim_{t\to 1^-}\ln(1-t) = -\infty\end{aligned}$$

Portanto, a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ diverge. Daí, nós temos que a integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ também diverge (pois teria que as duas integrais em que ela se decompõe convergirem), não precisando avaliar a integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$.

4.3.3 Exercícios Propostos

4.12. Verifique quais das seguintes integrais são impróprias, justificando as que forem:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^4 e^{-x^4} dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec(x) dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2-5x+6} dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2} dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x-1) dx$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$

4.13. Em cada item abaixo, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x \cdot 5^{-x^2} dx$

(c) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$

(d) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3\,dx}{x^2+9}$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1-\text{sen}(y)}$

(g) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3}$

Gabarito

4.1 (a) $\sqrt{2}(e^{\pi/3} - 1)u.c.$; (b) $8u.c.$; (c) $2a\pi u.c.$; (d) $\frac{8}{27}(9 + \pi^2)^{3/2} - 8 \ u.c.$. 4.2 (a) $2\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{13 + 12\cos(\theta)} \ d\theta$; (b) $18\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sqrt{9\cos^2(3\theta) + \text{sen}^2(3\theta)} \ d\theta$; (c) $2\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{13 - 12\cos(\theta)} \ d\theta$; (d) $12\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$; (e) $64\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sqrt{16\,\text{sen}^2(4\theta) + \cos^2(4\theta)} \ d\theta$; (f) $4\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{5 + 4\,\text{sen}(\theta)} \ d\theta$. 4.3 (a) $24\pi \ u.a.$; (b) $\frac{\pi}{4} \ u.a.$; (c) $\frac{9\pi}{2} \ u.a.$; (d) $11\pi \ u.a.$; (e) $16 \ u.a$. 4.4 $(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \ u.a$. 4.5 $(\frac{3\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}) \ u.a$. 4.6 $\frac{37\pi^3}{2592} \ u.a$. 4.7 (a) $\frac{26\pi}{3} \ u.v.$; (b) $\frac{2\pi}{25} \ u.v.$; (c) $\frac{\pi}{2} \ u.v.$; (d) $\frac{\pi}{2}\left(e^4 - \frac{1}{e^2}\right) \ u.v.$; (e) $\frac{\pi}{10} \ u.v.$; (f) $\frac{15\pi}{4} \ u.v.$; (g) $\frac{152\pi}{15} \ u.v$. 4.8 $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi^2}{32}\right) \ u.v$. 4.9 (a) $\frac{\pi}{54}(577\sqrt{577} - 1) \ u.a.$; (b) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \ u.a.$; (c) $4\sqrt{5}\pi \ u.a.$; (d) $4\pi \ u.a$. 4.10 $\frac{8\pi}{3}(28\sqrt{7} - 3\sqrt{6}) \ u.a$. 4.11 (a) $16\sqrt{17}\pi \ u.a.$; (b) $4\sqrt{17}\pi \ u.a$. 4.12 (a) (Intervalo infinito); (b) (Descontinuidade em $x = \pi/2$); (c) (Descontinuidade em $x = 2$); (d) (Intervalo infinito); (e) (Descontinuidade em $x = 1$. 4.13 (a) 1; (b) $\frac{-1}{2\ln 5}$; (c) diverge; (d) $\frac{\pi}{3}$; (e) 2; (f) diverge; (g) diverge .

Atividade Orientada

Etapa 1

5.0.1. Calcular, utilizando as propriedades da integração, as seguintes integrais:

(a) $\int (ax^4 + bx^3 + 3c)dx$ (c) $\int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}}\right) dt$ (e) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(x)}$

(b) $\int x^3\sqrt{x}\, dx$ (d) $\int \frac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4} dx$ (f) $\int \operatorname{tg}^2(x) \operatorname{cossec}^2(x) dx$

5.0.2. Encontre uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, que se anule para $x = 2$.

5.0.3. O ponto $(-1, 4)$ está sobre uma curva e em qualquer ponto (x, y) da curva, a reta tangente à curva tem inclinação igual a $\frac{3x}{2} - 2$. Encontre uma equação para a curva.

5.0.4. O volume de água num tanque é V m^3 quando a profundidade da água é h m. Se a taxa de variação de V em relação a h for $\pi(4h^2 + 12h + 9)$, ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de 3 m. Sugestão: Perceba que quando $h = 0$, o volume $V = 0$.

5.0.5. Aplicando o método da mudança de variável (ou Substituição), calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\int \sqrt[3]{3x - 4}\, dx$ (c) $\int r^2 \sec^2(r^3)\, dr$ (e) $\int \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(\cos(x))\, dx$

(b) $\int x(2x^2 + 1)^6\, dx$ (d) $\int y \operatorname{cossec}(3y^2) \operatorname{cotg}(3y^2)\, dx$ (f) $\int 2 \operatorname{sen}(x)\sqrt[3]{1 + \cos(x)}\, dx$

5.0.6. Aplicando integração por partes, calcule as seguintes integrais:

(a) $\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx$ (c) $\int x \ln(3x)\, dx$ (e) $\int \cos^3(x)\, dx$

(b) $\int te^{4t}\, dt$ (d) $\int x^2 \cos(2x)\, dx$ (f) $\int x^2 e^{2x}\, dx$

Etapa 2

5.0.7. Calcule as seguintes integrais de funções trigonométricas:

(a) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(x)}\, dx$ (c) $\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^4(x)}\, dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^2(2x + 1)\, dx$ (d) $\int \operatorname{sen}^3(2\theta) d\theta$

5.0.8. Calcule as integrais abaixo, preparando o integrando convenientemente com o auxílio das relações trigonométricas.

(a) $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^4(x)\, dx$ (c) $\int \operatorname{sen}^3(1 - 2\theta) \cos^3(1 - 2\theta)\, d\theta$

(b) $\int \operatorname{tg}^4(x)\, dx$ (d) $\int \operatorname{cossec}^4(3 - 2x)\, dx$

5.0.9. Aplicando uma substituição trigonométrica conveniente, resolva as integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

5.0.10. Aplicando a decomposição em frações parciais, calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

5.0.11. Calcule as seguintes integrais envolvendo funções irracionais:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{9-16x-4x^2}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-x+5/4}}$.

Etapa 3

5.0.12. Calcular as seguintes integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^3-4x^2+1)dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1}$

(c) $\displaystyle\int_1^2 x\cdot e^{-x^2+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))^5}dx$

5.0.13. Utilize as propriedades da integral definida para calcular a integral da função dada no intervalo dado e esboçar o gráfico.

(a) $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & , \quad \text{se } -1\le x\le 0 \\ 5 & , \quad \text{se } 0\le x\le 1 \end{cases}$

(b) $f(x)=|\operatorname{sen}(x)|$, em $[-\pi,\pi]$

(c) $f(x)=x-\dfrac{|x|}{2}$, em $-1\le x\le 1$

(d) $f(x)=\operatorname{sen}(x)+|\cos(x)|$ de $-\pi$ a π

5.0.14. Encontre a área da região plana descritas abaixo:

(a) Limitada pela curva $y=x^2-4x$, o eixo dos x e as retas $x=1$ e $x=3$

(b) Limitada pela curva $y=4-x^2$ e o eixo dos x.

(c) Limitada pelas curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$.

(d) Limitada pela parábola $x^2=-y$ e pela reta $y=-4$.

(e) Limitada pela curva $y=\operatorname{tg}^2(x)$, pelo eixo x e pela reta $x=\dfrac{\pi}{4}$.

5.0.15. Calcule o comprimento do segmento da reta $2x+y=6$ tal que $-1\le x\le 2$ por três métodos:

(a) Pela fórmula da distância entre dois pontos;

(b) Usando a fórmula do comprimento de arco de uma curva $y=f(x)$;

(c) Usando a fórmula do comprimento de arco de uma curva $x=g(y)$.

5.0.16. Encontre o comprimento do arco da curva $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{x}(3x-1)$, $x\in[1,4]$.

5.0.17. Mostre, usando a integral definida, que o comprimento de uma circunferência de raio $2a$ é dado por $4a\pi$. Sugestão: Use as equações

$$\begin{cases} x &= 2a\cos(t) \\ y &= 2a\operatorname{sen}(t), \end{cases}$$

que são equações paramétricas desta curva e a fórmula para o comprimento de arco de uma curva dada em equações paramétricas.

5.0.18. Encontre o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y=\operatorname{cotg}(x)$, pela reta $x=\dfrac{\pi}{6}$ e pelo eixo x.

Referências Bibliográficas

[1] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss; **Cálculo A**. 5ª edição. São Paulo: Makron Books, 1992.

[2] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica Vol. I**. 3ª edição. São Paulo: Harbra, 1.990.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton Luis. **Um Curso de Cálculo Vol. 1**. 1ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1.973.

[4] STEWART, James. **Cálculo**. 5ª edição. São Paulo: Pioneira, 2.005.

[5] PISKOUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral Vol. 1 e 2**. 2ª edição. São Paulo: Lopes da Silva, 1.990.

[6] ANTON, Howard. **Cálculo: Um Novo Horizonte, Vol. 1**. 6ª edição. Porto Alegre: Bokmann, 2.000.

[7] SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica Vol. 1 e 2**. 2ª edição. São Paulo: Makron Books, 1.995.

[8] THOMAS, G. B. **Cálculo Vol. 1 e 2**. 2ª edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2.002.

[9] SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica Vol. 1 e 2**. 2ª edição. São Paulo: McGraw-Hill, 1.987.

FTC-EAD
Faculdade de Tecnologia e Ciências – Educação a Distância
Democratizando a educação.
www.ead.ftc.br

FTC
ead
FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

www.ead.ftc.br