

Lições de Cálculo Integral em Várias Variáveis

Dan Avritzer
Mário Jorge Dias Carneiro

Lições de Cálculo Integral em Várias Variáveis

Belo Horizonte
CAED-UFMG
2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Profº Clélio Campolina Diniz

Reitor

Profª Rocksane de Carvalho Norton

Vice-Reitoria

Profª Antônia Vitória Soares Aranha

Pró Reitora de Graduação

Profº André Luiz dos Santos Cabral

Pró Reitor Adjunto de Graduação

CENTRO DE APOIO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA

Profº Fernando Selmar Rocha Fidalgo

Diretor de Educação a Distância

Profº Wagner José Corradi Barbosa

Coordenador da UAB/UFMG

Profº Hormindo Pereira de Souza Junior

Coordenador Adjunto da UAB/UFMG

EDITORA CAED-UFMG

Profº Fernando Selmar Rocha Fidalgo

CONSELHO EDITORIAL

Profª. Ângela Imaculada Loureiro de Freitas Dalben

Profº. Dan Avritzer

Profª. Eliane Novato Silva

Profº. Hormindo Pereira de Souza

Profª. Paulina Maria Maia Barbosa

Profª. Simone de Fátima Barbosa Tófani

Profª. Vilma Lúcia Macagnan Carvalho

Profº. Vito Modesto de Bellis

Profº. Wagner José Corradi Barbosa

COLEÇÃO EAD – MATEMÁTICA

Coordenador: Dan Avritzer

LIVRO: Lições de Cálculo Integral em Várias Variáveis

Autores: Dan Avritzer e Mário Jorge Dias Carneiro

Revisão: Jussara Maria Frizzera

Projeto Gráfico: Laboratório de Arte e Tecnologia
para Educação/EBA/UFMG

Formatação: Sérgio Luz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

(Luciana de Oliveira M. Cunha, CRB-6/2725)

Avritzer, Dan
A963l Lições de cálculo integral em várias variáveis / Dan Avritzer, Mário
Jorge Dias Carneiro. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2012.
99 p. ; 27 cm.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-64724-19-8

1. Cálculo integral. 2. Variáveis (Matemática). 3. Geometria
riemaniana. 4. Ensino a distância. I. Carneiro, Mário Jorge Dias. II.
Universidade Federal de Minas Gerais. III. Título.

CDD 515.4
CDU 515.3

SUMÁRIO

Apresentação	7
Nota do Editor	9
Aula 1 - Integral Dupla	11
1.1 Introdução	11
1.2 Integral Iterada	12
1.2.1 Integral Iterada em regiões mais gerais	14
1.3 Integral dupla em retângulos	14
1.4 A integral dupla em regiões mais gerais	17
1.4.1 Propriedades da Integral Dupla	19
1.5 Mudança na ordem de Integração	20
1.6 Exercícios	22
Aula 2 - Mudança de variáveis e aplicações da integral dupla	25
2.1 Mudança de variáveis em integral dupla	25
2.1.1 O determinante como área	26
2.1.2 Integral dupla em Coordenadas Polares	27
2.1.3 Fórmula da mudança de variáveis em Integral dupla	29
2.2 Aplicações da Integral Dupla	31
2.2.1 Área de figuras planas	31
2.2.2 Volume de sólidos limitados por gráficos de funções	31
2.2.3 Massa de placas planas	33
2.2.4 Área de superfícies parametrizadas	33
2.3 Exercícios	40
Aula 3 - Integral tripla	43
3.1 Integral Tripla em um bloco retangular e o Teorema de Fubini	43
3.2 Coordenadas cilíndricas	47
3.3 Coordenadas esféricas	49
3.4 Exercícios	52
Aula 4 - Integral Curvilínea	55
4.1 Introdução	55
4.2 Curvas regulares	56
4.3 Integral Curvilínea de uma função escalar	58
4.4 Campo de vetores	61
4.5 Integral Curvilínea de um campo vetorial	58
4.6 Teorema de Green	67
4.7 Campos Conservativos no Plano	71
4.8 Exercícios	74

Aula 5 - Teorema de Stokes	77
5.1 Integral de superfície de funções escalares	77
5.1 Integral de superfície de campos vetoriais	78
5.3 Teorema de Stokes	80
5.4 Campos conservativos no espaço	85
5.5 Exercícios	88
Aula 6 - Teorema da Divergência (Gauss)	91
6.1 Divergência de um campo	91
6.2 Teorema da Divergência de Gauss	92
6.3 Teorema da Divergência de Gauss em regiões mais gerais	95
6.4 Exercícios	97
Referências Bibliográficas	99

APRESENTAÇÃO

Estas notas tratam do cálculo integral de funções de várias variáveis.

Aprendemos no curso de cálculo de uma variável que o conceito de primitiva de uma função contínua e positiva está ligado à noção de área da região limitada pelo seu gráfico e o eixo Ox . Por definição, a área é igual à integral de Riemann da função e a conexão mencionada acima se dá por meio do *Teorema Fundamental do Cálculo*.

O objetivo deste curso é generalizar a integral de Riemann para várias variáveis (duas ou três). No caso de várias variáveis veremos que o conceito de *integral dupla* está relacionado ao *volume* de uma região do espaço tridimensional limitada pelo gráfico de funções.

A *integral tripla* é usada para a obtenção do volume e massa de sólidos mais gerais.

Veremos que para efetuar o cálculo da integral dupla ou tripla usa-se um procedimento semelhante ao “Princípio de Cavalieri” estudado na Geometria Espacial. Para calcular um volume de um determinado sólido, a ideia é subdividi-lo em fatias e calcular a área de cada fatia. Em seguida, calcula-se a integral (ou “soma”) da área das fatias. Este é, descrevendo de modo bastante simplificado, o significado do *Teorema de Fubini*, que diz que o cálculo da integral dupla (ou tripla) se faz por meio da integral repetida.

Há também outras maneiras de generalizar o cálculo integral.

A primeira delas é calcular a integral de funções definidas em objetos mais gerais no espaço.

Por exemplo, suponhamos que um pedaço de arame, feito de um material cuja densidade não é constante é descrito como uma curva no espaço tridimensional. Qual é a massa do objeto? Para resolver este tipo de problema é desenvolvido o conceito de *integral curvilínea*.

Analogamente, se tivermos uma placa que tem a forma de uma superfície não plana, (por exemplo, um pedaço de um cilindro) feita de um material de densidade variável, qual é a massa desta placa?

Aqui a generalização se faz com o desenvolvimento do conceito de integral de superfície. Em particular, se considerarmos a densidade igual a um estamos calculando a área da superfície. Por exemplo, iremos aprender como encontrar a área de uma calota esférica.

Ao final iremos estudar as várias generalizações do Teorema Fundamental do Cálculo em diversos contextos.

O primeiro contexto relaciona o cálculo da integral curvilínea sobre uma curva fechada com o cálculo da integral de superfície na região delimitada pela curva. (*Teorema de Green e Teorema de Stokes*).

O segundo relaciona o cálculo da integral de superfície em uma superfície fechada e limitada com o cálculo da integral tripla na região delimitada pela superfície. *Teorema de Gauss ou da Divergência*.

Estas notas foram escritas para ser utilizadas em um curso a distância. Para isto elas se dividem em aulas. Cada aula se abre com uma lista de objetivos que o aluno deve ter em mente ao estudar o material. Alguns exercícios simples, presentes no texto, têm o objetivo de testar se o material exposto está sendo assimilado. No final de cada aula, uma lista de exercícios mais elaborada e complexa tem o objetivo de ajudar o aluno a absorver melhor os conceitos expostos e aprender a operar com eles.

Belo Horizonte, março de 2012.

NOTA DO EDITOR

A Universidade Federal de Minas Gerais atua em diversos projetos de Educação a Distância, que incluem atividades de ensino, pesquisa e extensão. Dentre elas, destacam-se as ações vinculadas ao Centro de Apoio à Educação a Distância (CAED), que iniciou suas atividades em 2003, credenciando a UFMG junto ao Ministério da Educação para a oferta de cursos a distância.

O CAED-UFMG (Centro de Apoio à Educação a Distância da Universidade Federal de Minas Gerais), Unidade Administrativa da Pró-Reitoria de Graduação, tem por objetivo administrar, coordenar e assessorar o desenvolvimento de cursos de graduação, de pós-graduação e de extensão na modalidade a distância, desenvolver estudos e pesquisas sobre educação a distância, promover a articulação da UFMG com os polos de apoio presencial, como também produzir e editar livros acadêmicos e/ou didáticos, impressos e digitais, bem como a produção de outros materiais pedagógicos sobre EAD.

Em 2007, diante do objetivo de formação inicial de professores em serviço, foi criado o Programa Pró-Licenciatura com a criação dos cursos de graduação a distância e, em 2008, com a necessidade de expansão da educação superior pública, foi criado pelo Ministério da Educação o Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB. A UFMG integrou-se a esses programas, visando apoiar a formação de professores em Minas Gerais, além de desenvolver um ensino superior de qualidade em municípios brasileiros desprovidos de instituições de ensino superior.

Atualmente, a UFMG oferece, através do Pró-licenciatura e da UAB, cinco cursos de graduação, quatro cursos de pós-graduação *lato sensu*, sete cursos de aperfeiçoamento e um de atualização.

Como um passo importante e decisivo, o CAED-UFMG decidiu, neste ano de 2011, criar a Editora CAED-UFMG como forma de potencializar a produção do material didático a ser disponibilizado para os cursos em funcionamento.

Fernando Selmar Rocha Fidalgo
Editor

1

Integral dupla

AULA 1: INTEGRAL DUPLA

Objetivos 1.1 Os objetivos desta Aula são:

- introduzir o conceito de integral iterada;
- calcular integrais iteradas em regiões planas limitadas por gráficos;
- introduzir o conceito de integral dupla;
- usar o Teorema de Fubini para calcular a integral dupla por meio da integral iterada;

1.1 Introdução

Dois problemas fundamentais são estudados no curso de Cálculo em uma variável:

1. calcular a área de uma figura plana
2. encontrar uma primitiva para uma função contínua. Isto é: dada uma função contínua $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar uma função F tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

Um dos mais belos e úteis resultados que se aprende naquele curso é o Teorema Fundamental do Cálculo (ver [4]), que relaciona esses dois problemas. A área da região plana limitada pelo gráfico de uma função contínua e positiva $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, o eixo Ox e as duas retas verticais $x = a$ e $x = b$ é calculada do seguinte modo: Primeiramente encontra-se uma primitiva $F(x)$ de $f(x)$, em seguida, calcula-se a diferença $F(b) - F(a)$. Em símbolos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \text{área}(R)$$

Com esta ferramenta em mãos obtemos várias aplicações importantes. O objetivo deste curso é generalizar estas ideias para várias variáveis.

Neste capítulo apresentamos os conceitos de Integral Iterada (ou repetida), de integral dupla e as técnicas de integração em duas variáveis.

De modo análogo ao caso de uma variável, veremos que as integrais duplas são úteis em várias situações, entre elas citamos:

1. cálculo da área de figuras planas mais gerais;
2. cálculo da área de uma superfície;
3. obtenção da massa de uma placa plana feita de um material que possui densidade variável;
4. cálculo do volume de uma região do espaço tri-dimensional limitada pelo gráfico de uma função positiva de duas variáveis, pelo plano xOy e por planos verticais.

Veremos que para efetuar o cálculo integral em várias variáveis é fundamental o domínio das técnicas de integração em uma variável. Recomenda-se, portanto, que seja feita uma breve revisão da integral em uma variável e também de geometria analítica.

1.2 Integral Iterada

O procedimento utilizado para o cálculo da integral dupla é a integral iterada que, por ser conceitualmente mais simples, é o nosso ponto de partida. Antes, porém, vamos recordar o conceito de *soma de Riemann* de uma função real:

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real, então uma partição, denotada por \mathcal{P} , do intervalo $[a, b]$ é uma escolha de um número finito de pontos no intervalo: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ escolhamos um ponto arbitrário, $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ e calculamos a sua imagem $f(x_i^*)$. A *soma de Riemann* de f com respeito à partição \mathcal{P} é definida por $s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i)$.

Se denotamos por $|\mathcal{P}| = \max\{x_{i+1} - x_i\}$ o tamanho da partição, então, para uma função contínua f temos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} s(f, \mathcal{P})$$

Este resultado será usado com frequência nas próximas seções. Um ponto a ser destacado é que não importa o ponto que escolhamos x_i^* no sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ para formarmos a soma de Riemann, o limite existe e é igual à integral de Riemann.

Passemos agora ao conceito de integral iterada: Considere uma função contínua $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $x \in [a, b]$ fixo, definimos a função contínua de uma variável (y), $f^x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f^x(y) = f(x, y)$. f^x é a *restrição* de f ao segmento vertical $\{x\} \times [c, d]$. Segue, portanto, que f^x é uma função contínua. Assim sendo, podemos calcular a integral definida: $A(x) = \int_c^d f^x(y)dy$ para obtermos uma função contínua que depende apenas da variável x . Logo, existe a integral $\int_a^b A(x)dx$.

Definição 1.2 Chama-se Integral Iterada a seguinte integral $\int_a^b \left\{ \int_c^d f^x(y)dy \right\} dx$

Exemplo 1.3 Calcule a seguinte integral iterada:

$$\int_0^1 \left[\int_2^3 xy^2 dy \right] dx$$

Solução: Observe que, como está indicado, primeiramente integramos em relação a y . A variável x é, portanto, mantida constante. Logo

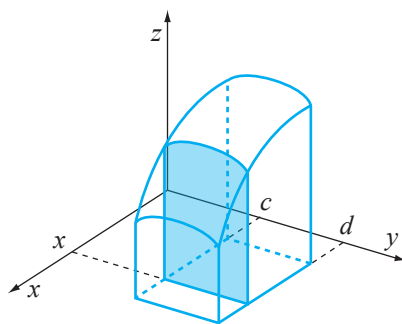
$$\int_2^3 xy^2 dy = \frac{xy^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{27x}{3} - \frac{8x}{3} = \frac{19x}{3}$$

Como foi dito acima, esta é uma função de x . Calculemos agora a integral de $\frac{19x}{3}$ em relação a x para obter:

$$\int_0^1 \left[\frac{19x}{3} \right] dx = \frac{19}{3} \int_0^1 x dx = \frac{19}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{19}{6}$$

Observação 1.4 Interpretação Geométrica da integral iterada:

Suponhamos que a função f seja positiva no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, de acordo com o que foi visto no Cálculo em Uma Variável, fixado $x \in [a, b]$, a função $A(x)$ é igual à área da região plana limitada pelo gráfico de f^x e o eixo horizontal entre as retas $y = c$ e $y = d$, conforme a figura a seguir.



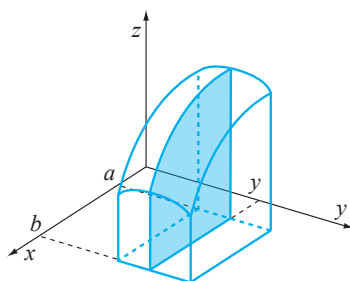
A integral iterada é a integral da função área $A(x)$ entre os extremos $x = a$ e $x = b$. O próximo exercício será útil para que se compreenda bem a idéia de Integral Iterada:

Exercício 1.5 Calcule a integral iterada $\int_0^1 [\int_2^3 3x + 4y^2 dy] dx$

Procedendo de modo análogo, definimos a integral iterada

$$\int_c^d [\int_a^b f^y(x) dx] dy.$$

Primeiramente fixamos $y \in [c, d]$ para obter uma função de x . A integral $B(y) = \int_a^b f^y(x) dx$ define uma função que depende apenas da variável y . Em seguida, integramos $B(y)$ para obter um número: $\int_c^d B(y) dy$



Exemplo 1.6 Calcule a seguinte integral iterada:

$$\int_2^3 [\int_0^1 xy^2 dx] dy$$

Solução: Primeiramente calculamos $\int_0^1 xy^2 dx = \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{y^2}{2}$ Em seguida, calculamos

$$\int_2^3 \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^3}{6} \Big|_2^3 = \frac{27}{6} - \frac{8}{6} = \frac{19}{6}.$$

1.2.1 Integral iterada em regiões mais gerais

Até agora calculamos a integral iterada em retângulos $[a, b] \times [c, d]$. Porém, procedendo da mesma forma como acima, podemos calcular a integral iterada em regiões mais gerais do plano. Por exemplo, se $g(x)$ e $h(x)$ são funções contínuas definidas num intervalo $[a, b]$ tais que $g(x) < h(x)$ em (a, b) , podendo haver igualdade nas extremidades do intervalo, então faz sentido calcular a seguinte integral

$$\int_{g(x)}^{h(x)} [f^x(y)] dy,$$

para obter $A(x)$ uma função apenas da variável x . Em seguida, podemos calcular $\int_a^b A(x) dx$ para obter um número. Este é o significado da integral iterada

$$\int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f^x(y) dy \right] dx$$

Observe a *ordem* em que calculamos a integral. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.7 Calcular a seguinte integral iterada:

$$\int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} xy \, dy \right] dx.$$

Solução: Observe que no intervalo $(0, 1)$ temos $x^3 < x^2$ com igualdade nos pontos extremos do intervalo. Primeiramente integramos em relação a y :

$$\int_{x^3}^{x^2} xy \, dy = \frac{x}{2} (y^2 \Big|_{x^3}^{x^2}) = \frac{x}{2} (x^4 - x^6) = \frac{1}{2} (x^5 - x^7).$$

Em seguida, calculamos

$$\int_0^1 \frac{1}{2} [x^5 - x^7] dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}.$$

Exercício 1.8 Calcule a seguinte integral iterada $\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + 2y^3) dy dx$.

Exercício 1.9 Faça um esboço da região plana R descrita pelas desigualdades:

$$1 \leq x \leq 2, \quad 1 - x \leq y \leq 1 + x$$

1.3 A Integral dupla em retângulos

Considere uma função contínua $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. A maneira de definir a integral dupla que adotaremos é inteiramente análoga ao caso uni-dimensional.

Iniciamos com partições $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ e $c = c_0 < c_1 < \dots < c_m = d$ de cada um dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, para obter uma partição do retângulo R em sub-retângulos

$R_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, para $i = 0, \dots, n-1$ e $j = 0, \dots, m-1$. Esta partição será denotada por \mathcal{P} . Escolhendo um ponto arbitrário $z_{ij} = (x_i, y_j) \in R_{ij}$ em cada um dos sub-retângulos podemos formar a soma dupla:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(z_{ij})(a_{i+1} - a_i)(b_{j+1} - b_j)$$

Se denotarmos por $\Delta x_i = (a_{i+1} - a_i)$ e $\Delta y_j = (b_{j+1} - b_j)$, então a soma dupla acima pode ser escrita na forma:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(z_{ij})\Delta x_i\Delta y_j.$$

Seja $|\mathcal{P}| = \max\{\Delta x_i, \Delta y_j\}$, onde *max* significa que estamos tomando o valor máximo entre todos os $i = 0, \dots, n-1$ e $j = 0, \dots, m-1$.

A *Integral Dupla* de f no retângulo R é definida, como no caso da integral de Riemann na reta:

$$\int \int_R f(x, y)dA = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} s(f, \mathcal{P}).$$

Observação 1.10 Para entender o significado do símbolo dA , que chamamos o *elemento de área* em coordenadas cartesianas, basta verificar que para a função constante $f(x, y) = 1$ a integral dupla é igual à área do retângulo R . Isto porque, para cada partição \mathcal{P} , a soma $s(f, \mathcal{P})$ é constante e igual à soma das áreas dos sub-retângulos R_{ij} . Sendo assim, temos:

$$\int \int_R dA = (b - a)(d - c)$$

Vejam mais um exemplo :

Exemplo 1.11 Calcular $\int \int_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y)dA$ para g e h funções contínuas. Para uma partição \mathcal{P} qualquer dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, se tomarmos pontos (x_i, y_j) no interior de cada sub-retângulo, teremos $f(x_i, y_j) = g(x_i)h(y_j)$. Logo a soma $s(f, \mathcal{P})$ se escreve:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} g(x_i)h(y_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Esta soma pode se escrita como o produto de duas somas de Riemann em uma variável:

$$s(f, \mathcal{P}) = \left[\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)(x_{i+1} - x_i) \right] \left[\sum_{j=0}^{m-1} h(y_j)(y_{j+1} - y_j) \right].$$

Tomar partições de tamanho cada vez menores (isto é com $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$) significa introduzir mais sub-intervalos cujos comprimentos tendem a zero ou seja, cada fator $(x_{i+1} - x_i)$ e $(y_{j+1} - y_j)$ tende a 0.

Portanto, usando a definição de integral de Riemann em uma variável, encontramos:

$$\int \int_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y)dA = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} s(f, \mathcal{P}) = \left[\int_a^b g(x)dx \right] \left[\int_c^d h(y)dy \right]$$

Por outro lado,

$$\left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right] = \int_a^b \left[\int_c^d g(x) h(y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b g(x) h(y) dx \right] dy$$

Conclui-se assim que, para o caso particular em que a função f é um produto de duas funções contínuas, uma $g(x)$ que depende apenas da variável x e outra $h(y)$ que depende apenas da variável y , o cálculo da integral dupla *coincide* com a integral repetida. Mais ainda, *não importa a ordem de integração*.

Exemplo 1.12 Vejamos um caso particular do exemplo acima:

$$\int \int_{[1,2] \times [0,1]} x y \, dA = \int_1^2 \int_0^1 x y \, dy dx = \frac{x^2}{2} \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Será que o fato observado acima pode ser generalizado? Ou seja: é sempre verdade que o cálculo da integral dupla de uma **função contínua** é realizado por meio de uma integral repetida, *em qualquer ordem*? A resposta a esta pergunta é sim! (ao menos para funções contínuas). No caso em que a região R é um retângulo é o que nos diz o

Teorema 1.3.1 (Fubini) Se $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então

$$\int \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy$$

Temos assim um poderoso instrumento para a calcular integrais duplas: O cálculo da integral dupla é feito calculando-se a integral repetida. Mais ainda, podemos escolher a *ordem de itegração* de acordo com a nossa conveniência.

Exemplo 1.13 Encontre a integral $\int \int_R \frac{x}{y} \, dA$ para R limitada pelas retas: $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$ e $y = 2$.

Solução: Pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int \int_R \frac{x}{y} \, dA &= \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{x}{y} \, dx \right] dy \\ \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{x}{y} \, dx \right] dy &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2y} \right]_1^2 dy \\ \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{x}{y} \, dx \right] dy &= \int_1^2 \frac{4-1}{2y} dy \\ \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{x}{y} \, dx \right] dy &= \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \frac{3}{2} \ln(y) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

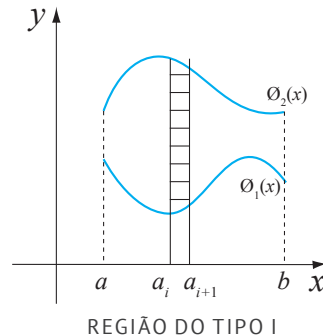
1.4 A integral dupla em regiões mais gerais

Suponha agora que R seja uma região compreendida entre o gráfico de duas funções contínuas isto é:

$$R = \{a \leq x \leq b; \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}.$$

Uma região R deste tipo é chamada **região de tipo I**.

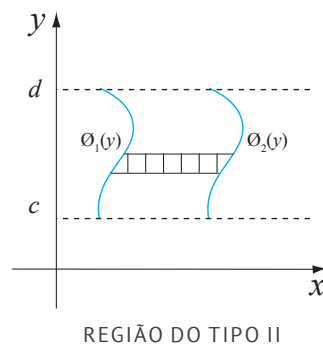
Neste caso, para cada partição $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ do intervalo $[a, b]$, obtemos uma subdivisão do conjunto R em faixas, denotadas por R_i limitadas por trechos dos gráficos de $\phi_1(x)$ e de $\phi_2(x)$.



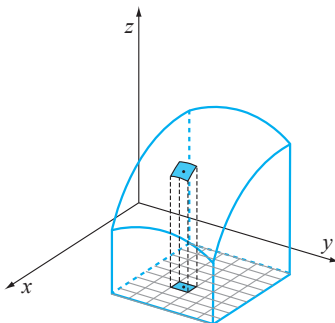
Cada uma dessas faixas pode ser subdividida em sub-regiões R_{ij} limitadas ou por segmentos horizontais que correspondem a valores $y = b_j$ ou pelos gráficos de $\phi_1(x)$ e de $\phi_2(x)$. De qualquer modo, sabemos calcular a área, denotada por Δ_{ij} , de cada uma dessas regiões R_{ij} . Escolhendo, em seguida, pontos $(x_i, y_j) \in R_{ij}$ formamos a soma $s(f, \mathcal{Q}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) \Delta_{ij}$. Ao denotarmos por $|\mathcal{Q}|$ a maior das áreas Δ_{ij} , a integral dupla de uma função contínua $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\int \int_R f(x, y) = \lim_{|\mathcal{Q}| \rightarrow 0} s(f, \mathcal{Q})$$

De modo análogo procede-se para regiões entre dois gráficos $R = \{c \leq y \leq d\}$ e $\phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)$. Uma região R deste tipo é chamada **região do tipo II**. Primeiramente, obtemos uma partição por meio de uma subdivisão da região em faixas horizontais. Em seguida, subdividimos as faixas horizontais.



Continuando a analogia com o caso unidimensional, podemos generalizar o conceito de integral dupla para funções *contínuas por partes*.



Definição 1.4.1 Dizemos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes se

- podemos escrever $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k$, como uma união finita de regiões,
- as *regiões* R_i são sub-conjuntos do plano limitados por gráficos de funções contínuas;
- quando duas regiões intersectam, a intersecção coincide com as suas fronteiras, isto é pedaços de curvas;
- a restrição de f a cada uma das regiões é contínua. Ou seja, são definida por desigualdades do tipo:

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \text{ e } \phi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x).$$

Definição 1.4.2 Definimos a integral dupla de uma função contínua por partes

$$\int_R f(x, y) dA = \int_{R_1} f(x, y) dA + \int_{R_2} f(x, y) dA + \dots + \int_{R_k} f(x, y) dA$$

Pode-se demonstrar, mas não o faremos aqui, que para calcular esta integral dupla basta usar o Teorema de Fubini em cada uma das sub-regiões R_i . Vejamos em um exemplo como fazer isto.

Exemplo 1.14 Calcule a integral

$$\int \int_R (xy + 1) \, dx \, dy$$

onde R é o triângulo de vértices $A = (-1, -1)$, $B = (0, 0)$ e $C = (1, -1)$.

Primeira Solução: Inicialmente observe que os lados do triângulo são dados pelas retas $y = x$, $y = -x$ e $y = -1$. Para cada y fixado $-1 \leq y \leq 0$ temos que $y \leq x \leq -y$, ou seja, temos uma região do tipo II. Para calcular a integral procedemos como na fórmula acima utilizando o Teorema de Fubini.

$$\begin{aligned} \int \int_R (xy + 1) \, dA &= \int_{-1}^0 \int_y^{-y} (xy + 1) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 \left(\frac{x^2}{2} y + x \right) \Big|_{x=y}^{x=-y} \, dy \\ &= \int_{-1}^0 \left(\frac{y^3 - y^3}{2} - 2y \right) \, dy = -\frac{2y^2}{2} \Big|_{-1}^0 = 1 \end{aligned}$$

Segunda Solução: Podemos ver a mesma região R como uma região do tipo I. Para isto consideramos a subdivisão do triângulo dado em dois subtriângulos R_1 e R_2 tais que $R = R_1 \cup R_2$, onde

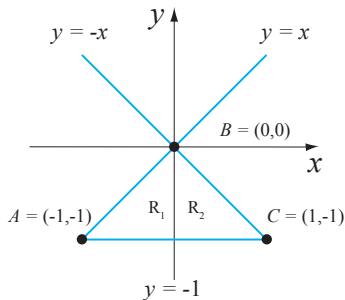
$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq x\}$$

e

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq -x\}.$$

Temos então utilizando primeiramente a Definição 1.4.2 que:

$$\int \int_R (xy + 1) dA = \int \int_{R_1} (xy + 1) dA + \int \int_{R_2} (xy + 1) dA$$



Em seguida, utilizando o Teorema de Fubini temos:

$$\begin{aligned} \int \int_{R_1} (xy + 1) dA &= \int_{-1}^0 \int_{-1}^x (xy + 1) dy dx = \int_{-1}^0 \left(x \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{y=-1}^{y=x} dx = \\ &= \int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{2} + x - \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \right) dx = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{4} + x \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{5}{8} \\ \int \int_{R_2} (xy + 1) dA &= \int_0^1 \int_{-1}^{-x} (xy + 1) dy dx = \int_0^1 \left(x \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{y=-1}^{y=-x} dx = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Finalmente adicionando os dois resultados anteriores obtemos $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$ o que mostra que, neste caso, podemos calcular a integral como uma região do tipo I ou como uma região do tipo II. Veremos na Seção 1.5 que isto nem sempre acontece.

1.4.1 Propriedades da Integral Dupla

O Teorema de Fubini nos dá o caminho a ser seguido para efetuar o cálculo da integral dupla:

- Primeiro passo: descreva a região de integração por meio de inequações. Observe se há necessidade de decompor a região em sub-regiões mais simples.
- Segundo passo: escreva a integral repetida e observe se a ordem pode ser importante para facilitar o cálculo das primitivas.
- Terceiro passo: calcule a integral repetida.

Algumas propriedades são úteis para o cálculo da integral dupla e são similares ao caso de uma variável.

1. $\int \int_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \int \int_R f(x, y) dA + \int \int_R g(x, y) dA$, o mesmo valendo para a diferença.

2. $\int \int_R cf(x, y)dA = c \int \int_R f(x, y)dA$, $c \in \mathbb{R}$ constante.
3. Se $f(x, y) \geq 0$ então $\int \int_R f(x, y)dA \geq 0$
4. Se $R = B \cup C$ com $B \cap C$ ou é vazio ou é uma união de curvas contínuas. Então

$$\int \int_R f(x, y)dA = \int \int_B f(x, y)dA + \int \int_C f(x, y)dA.$$

1.5 Mudança na ordem de Integração

Na seção anterior, vimos como fazer a integração em regiões do Tipo 1, que são descritas por desigualdades:

$$a \leq x \leq b \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x);$$

e também em regiões do Tipo 2 que são descritas por desigualdades:

$$c \leq y \leq d \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$

Há regiões que podem ser descritas tanto como regiões do Tipo I, como do Tipo II. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 1.15 Considere a região R interior ao círculo de raio 1 dado por $x^2 + y^2 = 1$. Resolvendo para y temos: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Esta região pode ser descrita como uma região do Tipo I, onde $\phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$ e $\phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$$-1 \leq x \leq 1 \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Mas resolvendo para x temos $x = \pm\sqrt{1-y^2}$. E então podemos descrever a mesma região como uma região do Tipo II para $\psi_1(y) = -\sqrt{1-y^2}$ e $\psi_2(y) = \sqrt{1-y^2}$:

$$-1 \leq y \leq 1 \quad -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}.$$

Explorando esta dupla maneira de expressar uma região do plano temos uma boa ferramenta para resolver integrais duplas. Observe o seguinte exemplo:

Exemplo 1.16 Mude a ordem de integração para resolver a seguinte integral:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(1-y^2)} \, dy \, dx$$

A integral iterada acima é equivalente a integral dupla

$$\int \int_R \sqrt{(1-y^2)} \, dy \, dx$$

onde S é o conjunto dos pontos (x, y) do plano xy onde $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ ou seja S é o o quarto do disco de raio 1 em que x e y são positivos.

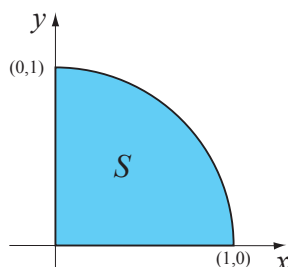
A região S pode também ser descrita assim

$$0 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}.$$

Temos portanto:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(1-y^2)} \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{(1-y^2)} \, dx \, dy =$$

$$\int_0^1 x \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{(1-y^2)} \, dy = \int_0^1 (1-y^2) \, dy = y - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$



Veamos um outro exemplo deste método

Exemplo 1.17 Mude a ordem de integração para resolver a seguinte integral:

$$\int_0^1 \int_y^1 \exp(x^2) \, dx \, dy$$

Observe a figura que descreve a região R onde a integral iterada acima está definida. A integral acima é equivalente a integral

$$\int \int_R \exp(x^2) \, dy \, dx,$$

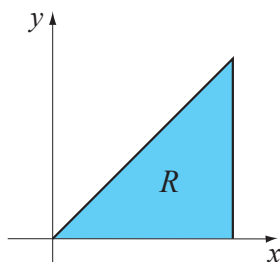
onde R está descrita pelas desigualdades

$$0 \leq y \leq 1 \quad y \leq x \leq 1.$$

Mudando a ordem de integração temos

$$\int_0^1 \int_y^1 \exp(x^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x \exp(x^2) \, dy \, dx =$$

$$\int_0^1 y \Big|_0^x \exp(x^2) \, dx = \int_0^1 (x \exp(x^2)) \, dx = \frac{1}{2} \exp(x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1)$$



1.6 EXERCÍCIOS

1. Calcule as seguintes integrais iteradas:

(a) $\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen}(x)} (1 + y) dy dx$

(b) $\int_2^4 \int_0^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx$

(c) $\int_{-1}^1 \int_x^{3x} e^{x+y} dy dx$

(d) $\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen}(x)} (1 + y) dy dx$

(e) $\int_2^4 \int_0^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx$

(f) $\int_{-1}^1 \int_x^{3x} e^{x+y} dy dx$

2. Em cada um dos itens abaixo, faça um esboço da região plana R descrita pelas desigualdades:

(a) $1 \leq x \leq 2, 1 - x \leq y \leq 1 + x$

(b) $1 - y^2 \leq x \leq 1 + y$

(c) $0 \leq y \leq 1, y^2 - x^2 \geq 0$

3. Em cada um dos exercícios abaixo é possível calcular a integral como uma região do tipo I ou como uma região do tipo II. Calcule-as das duas maneiras e verifique, em cada caso, que o resultado encontrado é o mesmo. Esboce sempre a região triangular correspondente e calcule as equações das retas, lados dos triângulos, pois caso contrário, é praticamente impossível resolver o problema.

(a)

$$\iint_D (x + y) dx dy$$

onde D é a região do plano xy dada pelo interior do triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (-1, 1)$ e $C = (-1, -1)$.

(b)

$$\iint_D (x + y) dx dy$$

onde D é a região do plano xy dada pelo interior do triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ e $C = (1, -1)$.

(c) $\int \int_D (x + y) dx dy$ onde D é o triângulo do plano xy de vértices $A = (-2, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 0)$.

4. Em cada um dos itens abaixo, primeiramente tente calcular a integral repetida. Em seguida, faça um esboço da região de integração e escreva a integral iterada na ordem inversa. Observe que as integrais obtidas são fáceis de calcular.

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$

(b) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 (x^3 + \operatorname{sen}(y^3)) dy dx$

5. Para testar a sua intuição, calcule $\int \int_R f(x, y) dA$ para o caso em que $f(x, y) = g(x)$ só depende de x e o caso em que $f(x, y) = h(y)$ só depende de y .

Verifique que:

a) $\int \int_R g(x) dA = [\int_a^b g(x) dx](d - c)$.

b) $\int \int_R h(y) dA = [\int_c^d h(y) dy](b - a)$.

6. Procedendo como no Exemplo 1.11, utilizando a definição de integral dupla, verifique que

$$\int \int_{[a,b] \times [c,d]} [g(x) + h(y)] dA = [\int_a^b g(x) dx][d - c] + [\int_c^d h(y) dy][b - a].$$

Aplique esse resultado para verificar que:

$$\int \int_{[0, \frac{\pi}{3}] \times [0, 1]} [\text{sen}(x) + y] dA = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$$

7. Em cada um dos itens abaixo, calcule a integral dupla $\int \int_R f(x, y) dA$ para a função e região especificadas:

(a) $f(x, y) = x \text{sen}(xy)$ e $R =: \{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq 1\}$.

(b) $f(x, y) = x^2$ e $R =: \{0 \leq x \leq \cos(y); 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

(c) $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$, R a região limitada pelas retas $y = x, x = 1, x = 2$ e $y = 0$.

(d) $f(x, y) = e^{x^2}$ para R a região descrita pelas seguintes desigualdades:
 $0 \leq y \leq 1$ e $3y \leq x \leq 3$.

(e) $f(x, y) = x^3 + \text{sen}(y^3)$ para R a região descrita pelas seguintes desigualdades:
 $\sqrt{x} \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq 1$.

2

Mudança de variáveis e aplicações da Integral Dupla

AULA 2: MUDANÇA DE VARIÁVEIS E APLICAÇÕES DA INTEGRAL DUPLA

Objetivos 2.1 Os objetivos desta Aula são:

- apresentar a ideia de mudança de variáveis no plano para calcular integrais duplas;
- usar as coordenadas polares para calcular a integral dupla em regiões que apresentem simetria em relação à origem;
- apresentar algumas aplicações da integral dupla;
- encontrar a área de regiões planas;
- encontrar a massa de placas planares;
- encontrar o volume de sólidos limitados por gráficos;
- encontrar a área de regiões contidas em superfícies no espaço;

2.1 Mudança de variáveis em integral dupla

O objetivo desta seção é generalizar a fórmula de mudança de variáveis para integrais duplas. No caso de uma variável, sabemos que esta fórmula decorre da regra da cadeia. Por exemplo, para calcular $\int \sin(x^2) x dx$, fazemos a substituição de variáveis $u = x^2$ de modo que $du = 2x dx$ e

$$\int \sin(x^2) x dx = \frac{1}{2} \int \sin(u) du = \frac{-1}{2} \cos(u) = \frac{-1}{2} \cos(x^2).$$

Quando fazemos uma substituição de variáveis do tipo $x = g(u)$ a integral $\int_a^b f(x) dx$ transforma-se na integral $\int_{u_a}^{u_b} f(g(u))g'(u)du$, para $g(u_a) = a$ e $g(u_b) = b$. Isto é: $\int_a^b f(x) dx = \int_{u_a}^{u_b} f(g(u))g'(u)du$.

Vejam, o significado desta fórmula, sem detalhar o argumento: Suponha que $g(u)$ seja uma função crescente. Então a uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ corresponde uma partição $u_a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = u_b$, para $x_i = g(u_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Assim, $x_{i+1} - x_i = g(u_{i+1}) - g(u_i)$. O Teorema do Valor Médio nos diz que existe um ponto $u_i^* \in (u_i, u_{i+1})$ tal que $g(u_{i+1}) - g(u_i) = g'(u_i^*)(u_{i+1} - u_i)$. Dessa forma, se $z_i = g(u_i^*)$, então a soma $\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(x_{i+1} - x_i)$ se escreve:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)[x_{i+1} - x_i] = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(g(u_{i+1}) - g(u_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(g(u_i^*))g'(u_i^*)(u_{i+1} - u_i)$$

Observe que ao tomarmos partições cada vez menores de modo que se $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$ então $\Delta u_i = (u_{i+1} - u_i) \rightarrow 0$. Vemos então que o lado esquerdo tende a $\int_a^b f(x) dx$ enquanto o lado direito tende a $\int_{u_a}^{u_b} f(g(u))g'(u)du$. Em particular, se $f(x) = 1, \forall x$, então $\int_a^b dx = \int_{u_a}^{u_b} g'(u)du$, o que justifica a notação $dx = g'(u)du$

Cabe então a pergunta: será que existe uma fórmula semelhante para a integral dupla? Ou seja ao fazermos uma mudança de variáveis $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, como relacionar os elementos de área, $dx dy$ e $du dv$?

2.1.1 O determinante como área

Sejam $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ dois vetores do plano. No curso de Geometria Analítica (ver [5], [6]) aprendemos que a área do paralelogramo de vértices $O = (0, 0)$, $A = (v_1, v_2)$, $B = (w_1, w_2)$ e $C = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ é o módulo do determinante da matriz cujas colunas são respectivamente, (v_1, v_2) e (w_1, w_2) :

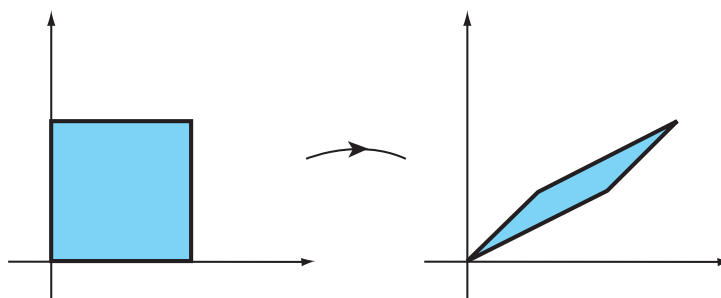
$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

Ou seja área $[OABC] = |v_1 w_2 - w_1 v_2|$.

Este resultado pode ser interpretado no contexto de mudança de variáveis, novamente usando o que aprendemos no curso de Geometria Analítica. Considere a transformação linear (ou mudança de variáveis) do plano definida por $(x, y) = T(u, v) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$ cuja representação na forma matricial é obtida calculando-se $T(1, 0) = (\alpha, \gamma)$ e $T(0, 1) = (\beta, \delta)$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Isto significa que o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ de área igual a 1 tem imagem um paralelogramo cujos vértices são, respectivamente, $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, \gamma)$, $B = (\beta, \delta)$ e $C = (\alpha + \beta, \gamma + \delta)$.



De acordo com o que acabamos de recordar, a área do paralelogramo $OABC$ é igual ao módulo do determinante da matriz que representa a transformação ou seja

$$\text{área}[OABC] = |\alpha\delta - \gamma\beta|$$

Vemos assim que imagem de um pequeno retângulo de lados Δu e Δv pela transformação linear $T(u, v)$ é um paralelogramo gerado pelos vetores $\Delta u(\alpha, \gamma)$ e $\Delta v(\beta, \delta)$.

Portanto, ao fazermos uma mudança de coordenadas linear, o elemento de área é multiplicado por um fator igual ao módulo do determinante da matriz que representa a mudança de coordenadas. Ou seja, se $T(R') = R$ e $(x, y) = T(u, v) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$, então

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int \int_{R'} f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) |\alpha\delta - \gamma\beta| du dv$$

Os próximos exemplos ilustram a utilidade da mudança de coordenadas:

Exemplo 2.2 Calcular $\int \int_R xy dx dy$ na região plana R limitada pelas retas $x + y = -1$, $x + y = 1$, $x - y = 0$ e $x - y = 1$.

Observe que se fizermos $u = x + y$ e $v = x - y$ então nas coordenadas (u, v) a região de integração R fica descrita de maneira muito simples: $R' = \{-1 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1\}$. Ou seja R' é um retângulo, ao passo que R é um paralelogramo.

Para calcular $\int \int_R xy dx dy$, qualquer que seja a ordem escolhida para calcular a integral repetida, deveremos subdividir R em três partes e realizar três integrais. Faça um esboço da região para se convencer disto. Observe que se fizermos $u = x + y$ e $v = x - y$ então nas coordenadas (u, v) a região de integração R fica descrita de maneira muito simples: $R' = \{-1 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1\}$. Ou seja R' é um retângulo, ao passo que R é um paralelogramo.

A mudança de coordenadas $u = x + y$ e $v = x - y$ é descrita por uma transformação $T(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$, cuja representação matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

cujo determinante tem módulo igual a $|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}| = \frac{1}{2}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \int_R xy dx dy &= \int_0^1 \int_{-1}^1 (\frac{u}{2} + \frac{v}{2})(\frac{u}{2} - \frac{v}{2}) \frac{1}{2} du dv \\ \int \int_R xy dx dy &= \int_0^1 \int_{-1}^1 (\frac{u^2 - v^2}{4}) \frac{1}{2} du dv \\ \int_0^1 \int_{-1}^1 (\frac{u^2}{8} - \frac{v^2}{8}) du dv &= \frac{1}{8} \int_0^1 [\frac{u^3}{3} - uv^2]_{-1}^1 dv \\ \frac{1}{8} \int_0^1 [\frac{2}{3} - 2v^2] dv &= \frac{1}{4} \int_0^1 [\frac{1}{3} - v^2] dv = \frac{1}{2} [\frac{v}{3} - \frac{v^3}{3}]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Exercício 2.3

Calcular $\int \int_R xy dx dy$ na região plana R limitada pelas retas $2x + 3y = 0$, $2x + 3y = 1$, $-2x + y = 0$ e $-2x + y = 1$.

2.1.2 Integral dupla em Coordenadas Polares

As *coordenadas polares* são muito úteis para descrever regiões planas que possuem alguma simetria em relação a um ponto (origem).

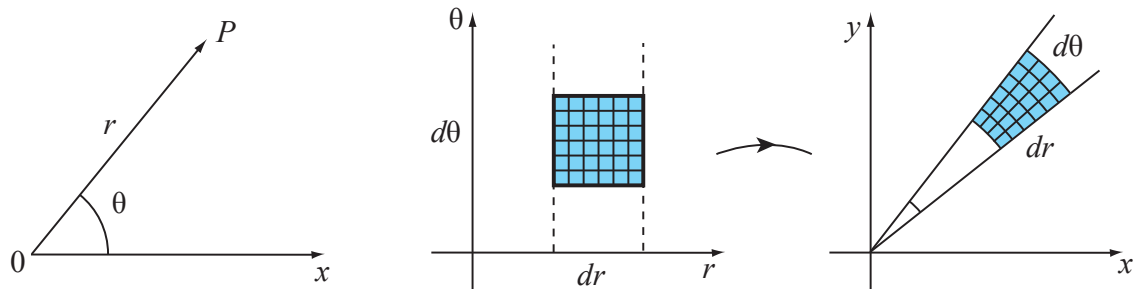
Portanto, para usar integrais duplas nessas coordenadas, é importante que se obtenha o *elemento de área* em coordenadas polares.

Recordando, escolhidos uma origem no plano cartesiano $(0, 0)$ e um semi-eixo (o semi-eixo Ox positivo), um ponto $P \neq O$ do plano pode ser localizado por meio de dois números: $r = \text{dist}(P, O)$ a distância de P a O , e $\theta =$ ângulo orientado positivamente entre o vetor OP e o semi-eixo Ox .

Segue da definição que se $P = (x, y)$ em coordenadas cartesianas, então $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Obtemos assim uma mudança de coordenadas definida por $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ dada por $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$.

Pergunta-se então, qual é o *elemento de área* em coordenadas polares?

Observe que um pequeno retângulo de área $drd\theta$ corresponde a um pequeno setor circular em que dr corresponde a uma pequena variação do raio e $d\theta$ corresponde a uma pequena variação do ângulo, conforme a figura a seguir



Responder a esta pergunta equivale a obter uma aproximação para a área deste setor. Ora, sabemos que um setor circular de ângulo $d\theta$ e raio r tem área igual a $A(r) = \frac{r^2}{2} d\theta$. Portanto, derivando em relação a r , obtemos que o elemento de área em coordenadas polares é igual a $dA = r dr d\theta$.

Uma alternativa, usando diferencial, é a seguinte: $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, implica que $dx = \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta$ e $dy = \sin(\theta) dr + r \cos(\theta) d\theta$. Ou seja dx e dy são obtidos por uma transformação linear cuja representação matricial é

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

Essa matriz tem módulo do determinante igual a r . Assim analogamente ao caso linear, temos que o elemento de área é igual a $r dr d\theta$.

Vejam alguns exemplos:

Exemplo 2.4 Talvez o exemplo mais simples seja utilizar coordenadas polares para obter a conhecida fórmula da área de um disco D de raio a com centro na origem. Em coordenadas polares o disco se escreve $r = a$. Temos

$$\iint_D dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta = 2\theta \Big|_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^a = \pi a^2.$$

No próximo exemplo, veremos como calcular a área de uma região plana limitada por curvas escritas em coordenadas polares:

Se C é uma curva plana fechada, contendo a origem no seu interior e definida em coordenadas polares por $r = f(\theta)$, para $\alpha \leq \theta \leq \beta$ então, a área da região plana limitada por C é igual a

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{f(\theta)} r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta.$$

Exemplo 2.5 Seja C dada por $C =: r = 3 + 2\cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A área da região limitada por C é igual a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{(3+2\cos(\theta))} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(3 + 2\cos(\theta))^2}{2} d\theta$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{(3+2\cos(\theta))} r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [3 + 2\cos(\theta)]^2 d\theta \\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [3 + 2\cos(\theta)]^2 d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [9 + 12\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta)] d\theta \end{aligned}$$

Recordando que $\int \cos^2(\theta) d\theta = \int \frac{1}{2} [1 + \cos(2\theta)] d\theta = \frac{1}{2} [\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta)]$, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [9 + 12\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} [9\theta + 12\sin(\theta) + 2\theta + \sin(2\theta)] \Big|_0^{2\pi}$$

Substituindo os valores $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$,

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [9 + 12\cos(\theta) + 4\cos^2(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} [18\pi + 4\pi] = 11\pi$$

2.1.3 Fórmula da mudança de variáveis em Integral dupla

Nas seções anteriores, vimos dois exemplos de como se transforma o elemento de área quando fazemos uma mudança de coordenadas; o caso linear e o caso das coordenadas polares. Neste segundo caso usamos uma aproximação linear das coordenadas.

Nosso objetivo é mostrar uma fórmula geral para qualquer mudança de variáveis: Se $(x, y) = F(u, v)$ é uma mudança de coordenadas da forma $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ e R' é a região do plano de coordenadas (u, v) tal que $F(R') = R$, se g_u , g_v , h_u e h_v denotam as derivadas parciais, então

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(g(u, v), h(u, v)) |g_u h_v - g_v h_u| du dv$$

Exemplo 2.6 A fórmula quer dizer que se fizermos a substituição de variáveis $x = g(u, v) = u^2 - v^2$, $y = h(u, v) = uv$ então para escrever a integral $\iint_R f(x, y) dx dy$ nas novas coordenadas (u, v) , primeiramente calculamos $g_u = 2u$, $g_v = -2v$, $h_u = v$ e $h_v = u$ de modo que $|g_u h_v - g_v h_u| = 2u^2 + 2v^2$. Assim, a fórmula de mudança de variáveis se escreve:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(g(u, v), h(u, v)) 2(u^2 + v^2) du dv$$

Por que é válida a fórmula?

A obtenção rigorosa desta fórmula foge dos objetivos destas notas. Podemos apenas dar uma idéia do tipo de aproximação utilizado.

A idéia é usar a diferencial das funções g e h para fazer uma aproximação linear: $dg = g_u du + g_v dv$ e $dh = h_u du + h_v dv$.

Um pequeno retângulo de lados du e dv é enviado pela diferencial em um paralelogramo gerado pelos vetores $du(g_u, h_u)$ e $dv(g_v, h_v)$.

Mais especificamente, as imagens dos vértices $A = (u, v)$, $B = (u + du, v)$, $C = (u, v + dv)$ e $D = (u + du, v + dv)$ de um pequeno retângulo são $A_1 = F(u, v)$, $B_1 = F(u + du, v)$, $C_1 = F(u, v + dv)$ e $D_1 = F(u + du, v + dv)$.

Usando a diferencial:

$$B_1 \approx B' = F(u, v) + du(g_u(u, v), h_u(u, v)),$$

$$C_1 \approx C' = F(u, v) + dv(g_v(u, v), h_v(u, v))$$

$$D_1 \approx D' = F(u, v) + du(g_u(u, v), h_u(u, v)) + dv(g_v(u, v), h_v(u, v)).$$

Não entraremos em detalhes sobre o significado desta aproximação (\approx) que, na verdade, está contida na ideia de derivada como aproximação linear da função.

Intuitivamente, isto significa que estamos substituindo um pequeno trecho da curva que passa pelo ponto $A' = F(u, v)$ pelo seu vetor tangente neste ponto. De modo que a região do plano limitada por curvas com vértices A_1, B_1, C_1 e D_1 tem área aproximadamente igual à área do paralelogramo de vértices A', B', C' e D' .

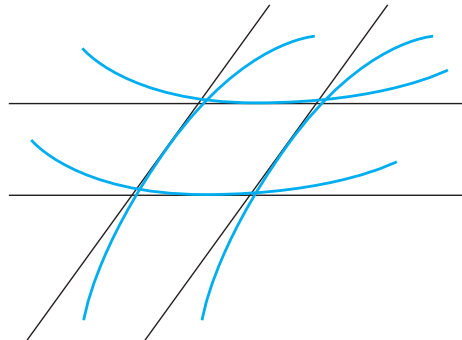
Como vimos, no caso linear, o paralelogramo tem área igual a $|g_u h_v - g_v h_u| du dv$.

Para ter uma melhor ideia do que está acontecendo, examine dois casos particulares para a mudança de coordenadas:

o primeiro $F(u, v) = (u, g(u, v))$, a mudança de coordenadas leva reta vertical ($u = \text{constante}$) em reta vertical e o elemento de área é uma região compreendida entre dois gráficos de função $u \mapsto g(u, v)$. Neste caso a afirmação é que a área de uma pequena região (isto é, Δu pequeno) é aproximada por $|g_v| du dv$.

Analogamente, se considerarmos mudanças da forma $F(u, v) = (f(u, v), v)$, em que as retas horizontais ($v = \text{constante}$) são preservadas. O elemento de área é igual a $|f_u| du dv$.

Veja a figura



2.2 Aplicações da Integral dupla

2.2.1 Área de figuras planas

Sobre esta aplicação, não há muito o que acrescentar, pois esta foi a motivação para o conceito de integral dupla. Para calcular a área de uma região limitada por curvas precisamos primeiramente descrevê-la como uma região (ou uma união de regiões) compreendida entre dois gráficos e em seguida, calcular a integral dupla por meio da integral repetida.

Exercícios: Use a integral dupla para encontrar a área das seguintes regiões planas $R \subset \mathbb{R}^2$:

1. R =: a região limitada pelas retas $x = -1$, $y = -1$ e pelas curvas $x = (x + 1)^2$ e $y = x - x^3$.
2. R =: a região limitada pela curva $y = 1 - x^2$ e pelas retas $y = 2x$ e $y = 0$.

2.2.2 Volume de sólidos limitados por gráficos de funções

Também aqui a questão é usar a interpretação geométrica da integral dupla: Se $f(x, y)$ é uma função positiva, então $\int \int_R f(x, y) dA$ é igual ao volume do sólido M limitado pelo gráfico de f e o plano xOy , sobre uma região plana R .

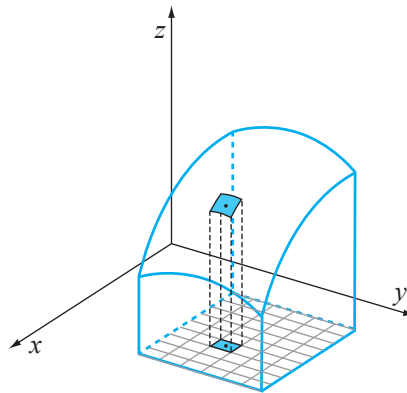
Interpreta-se assim porque cada parcela da soma

$$s(f, \mathcal{Q}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f((x_i, y_j)) \Delta_{ij}$$

é igual ao volume do bloco retangular B_{ij} de base $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ e altura $f((x_i, y_j))$ para $\Delta_{ij} = (a_{i+1} - a_i)(b_{j+1} - b_j)$.

Deste modo, a soma $s(f, \mathcal{Q})$ é igual ao volume de um sólido $B = \cup B_{ij}$ constituído pela união de todos os blocos.

Veja a figura



Como, ao tomarmos partições cada vez mais finas, isto é, tais que $|\mathcal{Q}|$ é cada vez menor, o valor de $s(f, \mathcal{Q})$ converge para $\int \int_R f(x, y) dA$ faz todo o sentido definir

$$vol(M) = \int \int_R f(x, y) dA.$$

Mais geralmente se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções contínuas tais que $f(x, y) > g(x, y)$ sobre uma região plana R , então, o volume do sólido M limitado pelos gráficos de $f(x, y)$ e $g(x, y)$ é igual a $vol(M) = \int \int_R [f(x, y) - g(x, y)] dA$.

Exemplo 2.7 Encontre o volume do sólido M limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $z = 1 - x - y$

Solução: o sólido está compreendido entre os gráficos de $z = 0$ e $z = 1 - x - y$ e está situado no primeiro octante. Portanto, o volume do sólido é igual a $\int \int_R (1 - x - y) dA$ para R a projeção ortogonal do sólido sobre o plano xOy . R corresponde exatamente aos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ do plano tais que existe um valor z para o qual o ponto (x, y, z) pertence a M . A região R é limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e pela intersecção de $z = 1 - x - y$ com $z = 0$. Ou seja, a reta $1 - x - y = 0$ ou $x + y = 1$. Portanto R é o sub-conjunto do plano caracterizado pelas seguintes desigualdades: $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$. E o volume do sólido é igual a

$$\int \int_R [1 - x - y] dA.$$

Escolhendo integrar primeiramente em relação a y e depois em relação a x teremos: Fixado x , a variação de y , dentro da região R é descrita por $0 \leq y \leq 1 - x$ enquanto $0 \leq x \leq 1$. De modo que

$$\int \int_R [1 - x - y] dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} [1 - x - y] dy dx = \int_0^1 [y - xy - \frac{1}{2}y^2] \Big|_0^{1-x} dx$$

$$\int \int_R [1 - x - y] dA = \int_0^1 [1 - x - x(1 - x) - \frac{1}{2}(1 - x)^2] dx$$

Integrando:

$$\int \int_R [1 - x - y] dA = [x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(1 - x)^3] \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Exemplo 2.8 Encontre o volume V do sólido situado abaixo do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ a acima do plano $z = 0$. Temos que:

$$V = \int \int_D 4 - x^2 - y^2 dx dy.$$

Em que região D do plano devemos fazer a integral? Para entender isto observe que x e y variam no domínio D interior a intersecção de $z = 4 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$. Substituindo obtemos $0 = 4 - x^2 - y^2$ ou $x^2 + y^2 = 2$, ou seja D é o interior do disco de raio $\sqrt{2}$.

Para efetuar o cálculo utilizamos coordenadas polares $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$. Obtemos que $4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2$. Logo,

$$\begin{aligned} V &= \int \int_D 4 - x^2 - y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4 - r^2) r dr d\theta = \\ &= \left(\frac{4r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} \pi. \end{aligned}$$

2.2.3 Massa de placas planas

A integral dupla permite-nos calcular massas de placas planas (ou lâminas) não homogêneas. O termo placa significa que estamos desprezando a espessura do objeto.

A *densidade* é uma propriedade do material e, por definição é a razão entre massa e área.

Estamos supondo que é conhecida a função densidade $\rho(x, y)$, positiva e contínua.

Novamente, para uma subdivisão de uma placa R em pequenas sub-regiões R_{ij} de área Δ_{ij} , escolhido um ponto $(x_i, y_j) \in R_{ij}$, então o produto $\rho(x_i, y_j)\Delta_{ij}$ é uma aproximação para a massa de R_{ij} .

Portanto, a soma $m(\rho, \mathcal{Q}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \rho(x_i, y_j)\Delta_{ij}$ é uma aproximação para a massa da placa.

Novamente tomando partições cada vez mais finas vemos que a soma $m(\rho, \mathcal{Q})$ converge para $\int \int_R \rho(x, y)dA$ que é igual à massa total da placa.

Exemplo 2.9 Calcular a massa de uma placa plana circular dada por $x^2 + y^2 \leq 1$, cuja densidade é dada por $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução: usando coordenadas polares, a placa é dada por $0 \leq r \leq 1$ e a densidade é $\rho(r, \theta) = r$.

Portanto a massa é igual a $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta$. Calculando a integral, obtemos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 d\theta$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

2.2.4 Área de superfícies parametrizadas

Os conceitos desenvolvidos nesta subseção serão utilizados posteriormente quando tratarmos a integral de superfície. No momento, o objetivo é calcular a área de regiões contidas em superfícies. Esta é uma generalização importante da área de figuras planas e trata do conceito de área de uma região contida em uma *superfície parametrizada* S .

O exemplo mais simples de tal superfície é o gráfico de uma função $f(x, y)$, ou seja o conjunto $S = \{(x, y, f(x, y))\}$. Observe que S pode ser descrita por uma *parametrização*, que a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associa o ponto $(x, y, f(x, y))$.

Gráficos de funções de duas variáveis foram estudados no Cálculo III. Vimos que se f é diferenciável, então para cada ponto (x_0, y_0) de seu domínio a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada por

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Recordamos como obter esta equação: Por definição, o plano tangente é o plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e é gerado pelos vetores $X_x = (1, 0, f_x(x_0, y_0))$ e $X_y = (0, 1, f_y(x_0, y_0))$. No Cálculo Diferencial de várias variáveis, vimos que o produto vetorial $X_x \times X_y$ é um vetor normal ao plano. Portanto, a equação vetorial do plano tangente é:

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot [X_x \times X_y] = 0$$

Ou

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

O nosso objetivo é mostrar como usar a integral dupla para formular o conceito de área de uma superfície e calcular algumas áreas. Por exemplo, a área de uma esfera de raio 1. Começamos generalizando a ideia de gráfico como uma superfície. Temos a seguinte

Definição 2.2.1 Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ tal que os vetores

$$\mathbf{r}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)) \text{ e } \mathbf{r}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$$

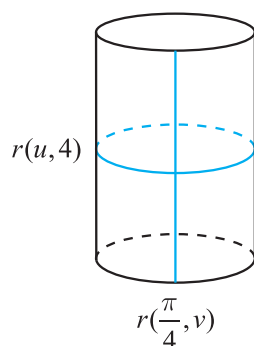
são linearmente independentes para todo $(u, v) \in U$.

Em outras palavras, o vetor $\mathbf{r}_u(u, v)$ não é um múltiplo do vetor $\mathbf{r}_v(u, v)$ ou, equivalentemente, $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \neq 0$. Se na definição acima fixamos uma das variáveis, por exemplo fazendo $v = v_0$ a imagem de $r(u, v_0)$ é uma curva contida na superfície S . Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 2.10 Considere a superfície dada por $\mathbf{r}(u, v) = (2 \cos(u), 2 \sin(u), v)$. Então $\mathbf{r}_u(u, v) = (-2 \sin(u), 2 \cos(u), 0)$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (0, 0, 1)$. Observe que se (x, y, z) são as coordenadas da imagem de $r(u, v)$ temos $x^2 + y^2 = 4$ e a coordenada z é qualquer. Temos portanto que a superfície dada por $r(u, v)$ é um cilindro. A superfície é regular em todos os

pontos, pois temos $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 \sin u & 2 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos(u), 2 \sin(u), 0) \neq$

0 para todo u . Observe que se fixamos v , por exemplo, $v = 4$ temos que $r(u, 4)$ é um círculo contido no cilindro. Se fixamos u , por exemplo $u = \frac{\pi}{4}$ a imagem de $r(\frac{\pi}{4}, v)$ é uma reta, que é uma geratriz do cilindro. Veja a figura.



Exemplo 2.11 O próximo exemplo é o gráfico de uma função: $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Temos $\mathbf{r}_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v))$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v))$ que são linearmente independentes pois

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{vmatrix} = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1) \neq 0$$

é um vetor normal ao plano tangente a superfície no ponto (u, v) .

Exemplo 2.12 Seja $\mathbf{r}(u, v) = (e^u \cos(v), e^u \sin(v), u)$, então $\mathbf{r}_u(u, v) = (e^u \cos(v), e^u \sin(v), 1)$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (-e^u \sin(v), e^u \cos(v), 0)$.

Se $\mathbf{r}_u(u, v)$ e $\mathbf{r}_v(u, v)$ fossem linearmente dependentes, então olhando para a última coordenada, teríamos um absurdo, $1 = 0$.

Logo $\mathbf{r}(u, v) = (e^u \cos(v), e^u \sin(v), u)$ é uma superfície parametrizada regular.

Exemplo 2.13 Se $\mathbf{r}(u, v) = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u))$, então $\mathbf{r}_u(u, v) = (-\sin(u)\cos(v), -\sin(u)\sin(v), \cos(u))$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (-\cos(u)\sin(v), \cos(u)\cos(v), 0)$.

E $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \cos(u)(\cos(u)\cos(v), -\cos(u)\sin(v), -\sin(u)) \neq 0$ para $u \neq \frac{\pi}{2}$ e $u \neq \frac{3\pi}{2}$.

Exemplo 2.14 $\mathbf{r}(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), 0)$, $u \neq 0$ é uma superfície parametrizada pois, $\mathbf{r}_u(u, v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$ e $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = (0, 0, u) \neq 0$.

A condição $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \neq 0$ para uma superfície parametrizada regular nos permite proceder analogamente ao caso dos gráficos e definir o *plano tangente* a S em um ponto $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$: o plano que passa em P_0 e é gerado pelos vetores $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. A definição de plano tangente nos dá imediatamente que o vetor $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ é um vetor *normal* ao plano tangente.

Portanto um vetor normal ao plano tangente à superfície no ponto P_0 é dado por:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = ((y_u z_v - z_u y_v), (z_u x_v - x_u z_v), (x_u y_v - x_v y_u)).$$

Assim, se designamos $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ e $z_0 = z(u_0, v_0)$, a equação do plano tangente se escreve:

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot [\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)] = 0$$

$$(y_u z_v - z_u y_v)(x - x_0) + (z_u x_v - x_u z_v)(y - y_0) + (x_u y_v - x_v y_u)(z - z_0) = 0$$

Observação 2.15 O plano tangente contém os vetores tangentes a *todas* as curvas contidas em S e que passam pelo ponto P_0 . De fato, seja $t \rightarrow (u(t), v(t))$ uma curva diferenciável tal que $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$.

Então, $\gamma(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$ é uma curva no espaço tal que para $t = 0$ temos $\mathbf{r}(u_0, v_0) = P_0$. O cálculo do vetor tangente a esta curva, usando a regra da cadeia nos fornece: $\gamma'(t) = (u'(t)x_u + v'(t)x_v, u'(t)y_u + v'(t)y_v, u'(t)z_u + v'(t)z_v)$. Que pode ser escrito na forma $\gamma'(t) = u'(t)(x_u, y_u, z_u) + v'(t)(x_v, y_v, z_v)$ isto é: $\gamma'(t) = u'(t)\mathbf{r}_u(u, v) + v'(t)\mathbf{r}_v(u, v)$. Fazendo $t = 0$ obtemos $\gamma'(0) = u'(0)\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + v'(0)\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. Esta expressão significa precisamente que o vetor $\gamma'(0)$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ que são os geradores do plano tangente. Neste sentido é que dizemos que o plano tangente é uma *aproximação linear* da superfície S no ponto P_0 .

Observação 2.16 Os vetores $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ geram um paralelogramo no plano tangente com vértices P_0 , $P_0 + \mathbf{r}_u(u_0, v_0)$, $P_0 + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ e $P_0 + \mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. Como vimos anteriormente, este paralelogramo possui área igual a $|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)|$.

Definição 2.2.2 A área de $A(D)$ de uma região $D \subset U$ contida no domínio de uma superfície parametrizada regular $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é igual à seguinte integral dupla:

$$A(D) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

(dA o elemento de área do plano (u, v)).

A expressão $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$ é chamada *elemento de área* da superfície parametrizada. Nos exemplos a seguir, pretendemos mostrar intuitivamente o sentido desta definição e a sua motivação:

Exemplo 2.17 Seja $\mathbf{r}(u, v) = (au + cv, bu + dv, 0)$. Calcular a área da região da superfície que corresponde à região do domínio (u, v) igual a $D = [1, 2] \times [-1, 1]$. Calculamos $\mathbf{r}_u(u, v) = (a, b, 0)$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (c, d, 0)$ Portanto $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = |ad - bc|$.

$$A(D) = \iint_D |ad - bc| dA = \int_{-1}^1 \int_1^2 |ad - bc| du dv$$

Ou seja,

$$A(D) = |ad - bc|(2 - 1)(1 + 1) = 2|ad - bc|.$$

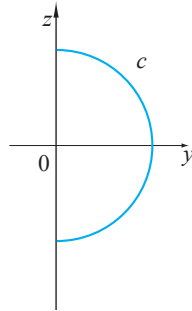
Exemplo 2.18 Calcular o elemento de área da superfície $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0)$. Primeiramente calculamos $\mathbf{r}_u(u, v) = (x_u, y_u, 0)$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (x_v, y_v, 0)$. Portanto, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = |x_u y_v - x_v y_u|$. Logo, conforme a definição,

$$A(D) = \iint_D |x_u y_v - x_v y_u| dA$$

Observe que esta é precisamente a fórmula da mudança de coordenadas (com $f(x, y) = 1$) já utilizada anteriormente. Isto significa que a noção de área que estamos utilizando é uma generalização da fórmula da mudança de coordenadas na integral dupla. Note também que estamos usando a mesma idéia intuitiva de que a área do paralelogramo formado pelos vetores tangentes a uma superfície parametrizada é o *elemento de área* da superfície. Esta ideia corresponde à ideia de aproximação linear da superfície pelo seu plano tangente.

Exemplo 2.19 Encontre a área da esfera de raio 1.

Solução: primeiramente precisamos de uma parametrização da esfera. Considere a semi-circunferência C de raio 1 no plano yOz parametrizada por $(0, \text{sen}(v), \text{cos}(v))$, para $0 < v < \pi$. Ao girarmos a curva C em torno do eixo Oz , obteremos a seguinte superfície parametrizada: $\mathbf{r}(u, v) = (\text{cos}(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\text{sen}(v), \text{cos}(v))$, $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < \pi$.



É fácil verificar que os pontos $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ que estão na imagem da parametrização satisfazem $x(u, v)^2 + y(u, v)^2 + z(u, v)^2 = 1$ ou seja, a imagem da parametrização está contida na esfera de raio 1.

Também é fácil de verificar que os pontos que não estão na imagem são os pontos do meridiano intersecção da esfera com o semi-plano $x = 0, y \geq 0$ (Verifique isso!).

Assim, usando a simetria da esfera, se calcularmos a área da região D da superfície parametrizada $\mathbf{r}(u, v) = (\text{cos}(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\text{sen}(v), \text{cos}(v))$, descrita por $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ e multiplicarmos por 8 obteremos a área da esfera.

$$\mathbf{r}_u(u, v) = (-\text{sen}(u)\text{sen}(v), \text{cos}(u)\text{sen}(v), 0)$$

$$\mathbf{r}_v(u, v) = (\text{cos}(u)\text{cos}(v), \text{sen}(u)\text{cos}(v), -\text{sen}(v))$$

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \text{sen}(v)(-\text{cos}(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\text{sen}(v), -\text{cos}(v))$$

$$|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| = |\text{sen}(v)| \neq 0 \text{ para } v \neq 0, \pi.$$

$$A(D) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(v) dv du$$

Calculando:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(v) dv du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\text{cos}(v)]_0^{\frac{\pi}{2}} du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [0 + 1] du = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a área da esfera é igual a $8 \frac{\pi}{2} = 4\pi$.

Exemplo 2.20 Encontre o elemento de área de um gráfico. Seja $(x, y, f(x, y))$ o gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$.

Vimos que $\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) \neq 0$.

Logo, calculando a norma deste vetor, obtemos o elemento de área do gráfico:

$$|\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y)| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA.$$

Exemplo 2.21 Calcular a área da região do gráfico da função $f(x, y) = xy$ sobre a região R limitada pelo círculo de raio 1, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Como $f_x = y$ e $f_y = x$, o elemento de área do gráfico é igual a $\sqrt{y^2 + x^2 + 1} dA$.

Pelas características da região R e da função que iremos integrar, é conveniente usar coordenadas polares.

Assim, R corresponde à região $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Portanto a área é igual a

$$A(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr d\theta.$$

Fazendo a substituição $u = r^2 + 1$, obtemos, $du = 2r dr$, $0 \leq r \leq 1$ corresponde a $1 \leq u \leq 2$ de modo que

$$\int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr = \int_1^2 \sqrt{u} \frac{1}{2} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} [2^{\frac{3}{2}} - 1].$$

Logo a área da região é igual a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr d\theta = \frac{1}{3} [2^{\frac{3}{2}} - 1] \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3} [2^{\frac{3}{2}} - 1].$$

Exemplo 2.22 (Superfície de revolução) Seja $C = (0, f(v), g(v))$ uma curva regular no plano yOz , isto é, uma curva tal que o vetor tangente $(0, f'(v), g'(v))$ é não nulo, $\forall v$. Se além disso $f(v) > 0$, então a curva não intersecta o eixo Oz e rotação de C em torno do eixo Oz gera a seguinte superfície parametrizada regular (superfície de revolução):

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sen(u), g(v)), \quad 0 \leq u < 2\pi.$$

O nome "superfície de revolução" (ou de rotação como designam alguns autores), vem do fato de que, ao fixarmos $v = v_0$, obtemos a curva $\mathbf{r}(u, v_0) = (f(v_0)\cos(u), f(v_0)\sen(u), g(v_0))$, que é um círculo contido no plano $z = g(v_0)$, centrado na origem e de raio igual a $f(v_0)$. Este círculo é chamado *paralelo*.

A curva obtida ao fixarmos $u = u_0$ é chamada *meridiano ou geratriz*. Dizemos que uma superfície de revolução é gerada pela rotação do meridiano em torno de um eixo (no caso, o eixo Oz).

Verifiquemos o fato da superfície ser regular:

$$\mathbf{r}_u(u, v) = (-f(v)\sen(u), f(v)\cos(u), 0)$$

$$\mathbf{r}_v(u, v) = (f'(v)\cos(u), f'(v)\sen(u), g'(v)),$$

de modo que

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = f(v)(g'(v)\cos(u), g'(v)\sen(u), f'(v)) \neq 0.$$

Pois $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = f(v)\sqrt{g'(v)^2 + f'(v)^2}$ é positivo porque $f(v) > 0$ e $g'(v)^2 + f'(v)^2 > 0$ (a curva é regular).

Concluimos que o *elemento de área* da superfície de revolução é igual a

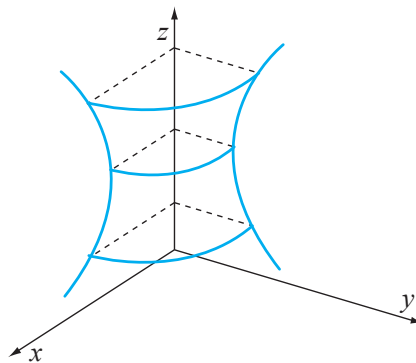
$$dA = f(v)\sqrt{g'(v)^2 + f'(v)^2}dudv.$$

Em particular, se $g(v) = v$, então estamos rodando um *gráfico* $y = f(u)$ no plano yOz em torno do eixo Oz . Neste caso, o elemento de área é igual a

$$dA = f(v)\sqrt{1 + f'(v)^2}dudv.$$

Como dA não depende da variável u , podemos integrar uma vez e exibir uma fórmula para a área da superfície S obtida pela rotação do gráfico de uma função $f(v)$ em torno de um eixo entre dois pontos $v = a$ e $v = b$.

$$A(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} [f(v)\sqrt{1 + f'(v)^2}]dudv = 2\pi \int_a^b [f(v)\sqrt{1 + f'(v)^2}]dv$$



2.3 EXERCÍCIOS

1. Utilize a mudança de coordenadas $x = au$ e $y = bv$ para encontrar a área da região plana limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Encontre o volume do sólido situado abaixo do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ e acima do plano $z = 0$.
3. Encontre o volume do sólido situado abaixo do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ e acima do parabolóide $z = x^2 + y^2$.
4. Encontre o volume do sólido descrito pelas seguintes desigualdades: $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
5. Considere a mudança de variáveis $F(u, v) = (x, y)$ definida por: $x = u$, $y = u^2 - v^2 + v$
 - (a) Faça um esboço da imagem por F do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.
 - (b) Calcule o elemento de área.
6. Seja $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$ uma mudança de coordenadas que envia o quadrado $R = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ em uma região D' no plano (u, v) .
Calcule $\int \int_D dudv$ diretamente e, em seguida, usando a mudança de coordenadas.
7. Encontre a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares $r = \theta^2$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
8. Se $R := \{(x, y)/4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; x \geq 0; y \geq 0\}$, use coordenadas polares para calcular

$$\int \int_R xy dA.$$

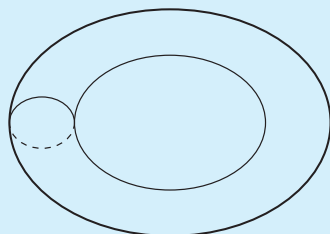
9. Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (3x - 2y) dy dx.$$

10. Use coordenadas polares para calcular $\int \int_R e^{-(x^2+y^2)} dA$ para $R(K)$ o disco centrado na origem e de raio K . Observe o que ocorre com o resultado quando $K \rightarrow \infty$.
11. Em cada um dos itens abaixo, calcular a massa da placa descrita por uma região plana R com densidade ρ .
 - (a) $R =: \{[0, 1] \times [0, 5]\}$ e densidade $\rho(x, y) = 1 + 3x^2 + 5y^2$.
 - (b) R a região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ e densidade $\rho(x, y) = 4x$.

12. Calcular a área da seguinte superfície:

$$\mathbf{r}(u, v) = ((2 + \cos(u))\cos(v), (2 + \cos(u))\sin(v), \sin(u)) \text{ para } 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \leq v \leq \pi.$$



13. Em cada um dos itens abaixo, encontre a área da região descrita na superfície:

(a) R região do plano $z = 1 - x - y$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

(b) R região do parabolóide limitada pelo cilindro $x^2 - 2x + y^2 = 0$ (use coordenadas polares).

14. Calcule o elemento de área de uma plano dado pela equação $ax + by + cz = d$.

15. Encontre a área do tronco de cone obtido pela rotação da reta $z = y$ em torno do eixo Oz , para $1 \leq y \leq 2$.

16. Encontre a área da superfície obtida pela rotação da curva $(0, \frac{e^v + e^{-v}}{2})$ entre os pontos $v = -1$ e $v = 1$ (catenóide).

3

Integral Tripla

AULA 3: INTEGRAL TRIPLA

Objetivos 3.1 Os objetivos desta Aula são:

- introduzir o conceito de integral tripla;
- enunciar o Teorema de Fubini que, analogamente ao caso da Integral Dupla, permite calcular a integral tripla por meio da integral repetida;
- utilizar a integral tripla para encontrar o volume de regiões do espaço limitadas por superfícies;
- usar coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas no espaço \mathbb{R}^3 para calcular a integral tripla em regiões com certos tipos de simetria.

3.1 Integral Tripla em um bloco retangular e o Teorema de Fubini

A definição de integral tripla segue exatamente os passos da integral dupla. As dificuldades que geralmente ocorrem estão na descrição ou na decomposição do domínio de integração, que é agora uma região D do espaço tri-dimensional cujo bordo é formada por uma união de superfícies.

Repetiremos assim, de modo sumário o que foi feito nas seções anteriores.

Primeiro passo: a integral tripla em um bloco retangular. Seja $D = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \subset \mathbb{R}^3$ um bloco retangular. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3$ é uma função contínua definida em um aberto U que contém D e \mathcal{P} uma partição de D em blocos $D_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$ formada a partir de partições de cada um dos intervalos. Ou seja, consideramos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $y_0 = c < y_1 < y_2 < \dots < y_l = d$ e $z_0 = p < z_1 < z_2 < \dots < z_m = q$. Como anteriormente, o tamanho de uma partição \mathcal{P} é denotada $|\mathcal{P}| = \max\{(x_{i+1} - x_i), (y_{j+1} - y_j), (z_{k+1} - z_k)\}$ e

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k),$$

onde (x_i^*, y_j^*, z_k^*) é um ponto qualquer do bloco D_{ijk} .

Definição 3.1.1 A integral tripla da função $f(x, y, z)$ no bloco retangular D é igual :

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dV = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} s(f, \mathcal{P})$$

Note que se $f(x, y, z) = 1$, então $s(f, \mathcal{P})$ é igual ao volume do bloco D , ou seja $(b - a)(d - c)(q - p)$. Logo

$$\int \int \int_D dV = (b - a)(d - c)(q - p),$$

o que justifica chamarmos dV de *elemento de volume* em coordenadas cartesianas.

Segundo passo: utilizamos o chamado Teorema de Fubini, que de maneira semelhante caso bi-dimensional, afirma que para fazer uma integral tripla podemos fazer as integrais iteradas que agora serão três. Conforme a ordem em que fazemos a integral repetida escrevemos $dV = dx dy dz$ ou qualquer uma das permutações de dx, dy, dz .

De maneira mais precisa:

Teorema 3.1.1 (Fubini) Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua definida em um conjunto aberto que contém um bloco retangular $D = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ então

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dV = \int_p^q \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y, z) dx \right] dy \right] dz$$

De fato, podemos calcular a integral usando qualquer uma das permutações do elemento de volume. Entretanto, é preciso atenção para que a *ordem* em que escrevemos os limites de integração seja compatível.

Assim, no enunciado acima, temos:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\int_p^q \left[\int_c^d f(x, y, z) dy \right] dz \right] dx$$

Vejamos alguns exemplos de como calcular a integral tripla em um bloco retangular utilizando o Teorema de Fubini:

Exemplo 3.2 Vamos calcular $\int \int \int_D f(x, y, z) dV$ onde $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y, z) = xyz$. Como a função dada é simétrica por permutações das variáveis, não há vantagem de escolha da ordem de integração. Assim, escrevemos:

$$\int \int \int_D xyz dV = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 xyz dx \right] dy \right] dz$$

A primeira integral $\int_0^1 xyz dx = \frac{yzx^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{yz}{2}$.

A segunda $\int_0^1 \frac{yz}{2} dy = \left[\frac{zy^2}{4} \right]_0^1 = \frac{z}{4}$.

Finalmente $\int_0^1 \frac{z}{4} dz = \left[\frac{z^2}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$.

Exemplo 3.3 $D = [0, 1] \times [-1, 1] \times [1, 2]$, $f(x, y, z) = xe^{xy} - zx^2$. Observe que se escolhermos integrar a primeira parcela na ordem $dx dy dz$, então a primeira integral será $\int_0^1 xe^{xy} dx$ que envolve uma integração por partes. Entretanto, se escolhermos integrar primeiramente em relação a y , então teremos: $\int_{-1}^1 xe^{xy} dy = e^{xy} \Big|_{-1}^1 = e^x - e^{-x}$, bem mais fácil (e rápido).

Assim sendo escrevemos

$$\int \int \int_D xe^{xy} - zx^2 dV = \int_1^2 \left[\int_0^1 \left[\int_{-1}^1 xe^{xy} - zx^2 dy \right] dx \right] dz.$$

É claro que já vimos este tipo de escolha na integral dupla. O Teorema de Fubini é importante porque nos permite trocar a ordem de integração conforme a nossa conveniência. Prosseguindo com o exemplo:

$$\int_{-1}^1 [xe^{xy} - zx^2] dy = e^x - e^{-x} - 2zx^2$$

$$\int_0^1 [e^x - e^{-x} - 2zx^2] dx = \left[e^x + e^{-x} - 2z \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = e - e^{-1} - \frac{2z}{3}$$

E finalmente,

$$\int_1^2 \left[e - e^{-1} - \frac{2z}{3} \right] dz = \left[ez - e^{-1}z - \frac{z^2}{3} \right]_1^2 = e - e^{-1} - \frac{4-1}{3} = e - e^{-1} - 1.$$

$$\iiint_D xe^{xy} - zx^2 dV = e - e^{-1} - 1$$

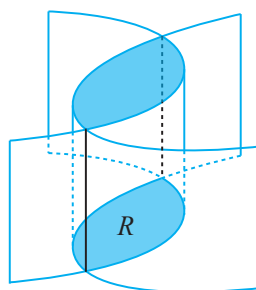
Cabe agora a pergunta: em que tipo de regiões do espaço além dos blocos retangulares podemos definir a integral tripla?

Vejam algumas respostas:

I) O primeiro tipo de região segue imediatamente da integral dupla pois é a região do tipo produto $R \times I$, de uma região R plana limitada por dois gráficos de funções e um intervalo $I = [a, b]$

Analisemos o seguinte exemplo: $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b; \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, $I = [p, q]$. O cálculo é feito por meio da integral repetida (Teorema de Fubini). Observe que fixados x e y , então a função $F(x, y) = \int_p^q f(x, y, z) dz$ é uma função contínua. Logo podemos calcular a integral dupla $\iint_R F(x, y) dA$ como fizemos anteriormente:

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy \right] dx$$



Exemplo 3.4 Encontre $\iiint_D (x + y + z) dV$, para D definida pelas desigualdades $x \leq y \leq x^2$ e $0 \leq z \leq 1$.

Solução: Pelo Teorema de Fubini, calculamos a integral iterada em D . Já sabemos que $0 \leq z \leq 1$. Portanto, basta descrever a região plana R que corresponde aos pontos do domínio de integração. Porém, esta região é definida pelas desigualdades $x \leq y \leq x^2$. Vemos que as curvas $y = x$ e $y = x^2$ que limitam a região se intersectam em $x = x^2$ ou seja para os valores $x = 0$ e $x = 1$. Dessa forma, a região D é descrita pelas desigualdades $0 \leq z \leq 1$, $x \leq y \leq x^2$ e $0 \leq x \leq 1$. Logo,

$$\iiint_D (x + y + z) dV = \int_0^1 \int_x^{x^2} \int_0^1 (x + y + z) dz dy dx.$$

Calculamos agora a integral iterada:

$$\int_0^1 \int_x^{x^2} \int_0^1 (x + y + z) dz dy dx = \int_0^1 \int_x^{x^2} \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 dy dx = \int_0^1 \int_x^{x^2} \left[x + y + \frac{1}{2} \right] dy dx.$$

$$\int_0^1 \int_x^{x^2} [x + y + \frac{1}{2}] dy dx = \int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}] \Big|_x^{x^2} dx$$

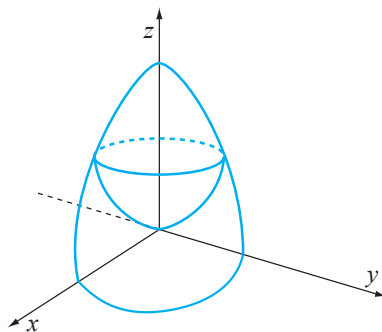
$$\int_0^1 \int_x^{x^2} [x + y + \frac{1}{2}] dy dx = \int_0^1 [x^3 + \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x}{2}] dx = -\frac{7}{30}$$

II) Para regiões limitadas por gráficos $g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$ sobre um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ o procedimento é semelhante: a integral $F(x, y) = \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz$ define uma função contínua de modo que o Teorema Fubini implica em

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dV = \int \int_R F(x, y) dA = \int \int_R [\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz] dA.$$

III) Região D do espaço limitada pelo gráfico de duas funções: $g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$. Observe que não está especificada a região do plano que corresponde à integral. Devemos primeiramente responder à pergunta: Qual é o conjunto R dos pontos do plano (x, y) que correspondem à região D ? Melhor dizendo, qual é o conjunto de pontos (x, y) para os quais é válida a desigualdade $g(x, y) \leq h(x, y)$?

Exemplo 3.5 Se $g(x, y) = x^2 + y^2$ e $h(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ e o domínio de integração é dado por $D := \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$ então estamos interessados em obter o subconjunto $R := \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2 - x^2 - y^2\}$. Ora, determinar R significa descrever os pontos que satisfazem à inequação $x^2 + y^2 + x^2 + y^2 \leq 2$ isto é, $x^2 + y^2 \leq 1$. Ou seja R é o conjunto de pontos interiores ao círculo de raio 1.



No caso geral, procedemos da mesma maneira, primeiramente obtemos o conjunto de pontos do plano R que satisfazem à inequação $g(x, y) \leq h(x, y)$ e, em seguida, usamos novamente o Teorema de Fubini para obter:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dV = \int \int_R F(x, y) dA = \int \int_R [\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz] dA$$

. Uma recomendação: para fazer a integração neste tipo de região, é útil ter um bom esboço dos gráficos das funções envolvidas para a seguir, determinar a região R dos pontos do plano que corresponde ao domínio de integração. Observe que R é precisamente a imagem do domínio D pela projeção ortogonal $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Logo, é a região plana limitada pela curva de equação $g(x, y) - h(x, y) = 0$.

Exemplo 3.6 Encontre $\int \int \int_D z dV$ para D a região do espaço limitada pelos gráficos $x = 1 - z^2$, $x = 0$, entre os planos $y = -1$ e $y = 1$.

Solução: observe que pela descrição da região de integração D , é mais conveniente escrever $dV = dx dz dy$ na integral iterada.

Assim descrevemos os limites de integração na seguinte forma: fixados y e z a variação de x é dada pela desigualdade $0 \leq x \leq 1 - z^2$. A intersecção dos gráficos é dada por $1 - z^2 = 0$ ou seja $z = 0$ e $z = 1$. Portanto, as seguintes desigualdades definem os limites de integração para a integral iterada: $0 \leq x \leq 1 - z^2$, $0 \leq z \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \int \int_D z dV &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^{1-z^2} z dx dz dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 [z(1 - z^2)] dz dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 [z(1 - z^2)] dz dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 dy = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercício 3.7 Como seria a integral repetida escrita na forma $dx dy dz$?

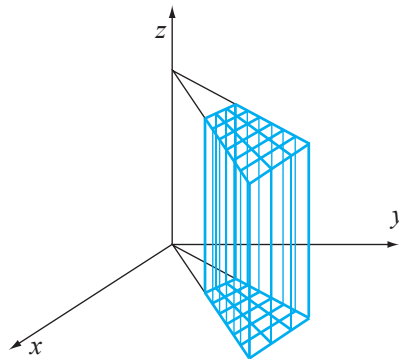
Roteiro 3.8 Em qualquer uma das situações descritas para calcular a integral tripla, a integral repetida é obtida a partir da descrição da região D de integração da seguinte forma. Suponha que escolhamos fazer a integração na ordem $dy dx dz$: primeiramente, fixamos duas variáveis x e z e obtemos uma desigualdade envolvendo gráficos de funções, por exemplo, $h(x, z) \leq y \leq g(x, z)$. Em seguida, projeta-se a região D em uma região de integração das demais variáveis R . Fixada a variável z , a região R também é descrita por uma desigualdade do tipo $\phi_1(z) \leq x \leq \phi_2(z)$. Finalmente, a projeção da região R sobre o eixo Oz é um intervalo descrito por uma desigualdade: $a \leq z \leq b$. Temos então:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \int_{h(x,z)}^{g(x,z)} f(x, y, z) dy dx dz$$

3.2 Coordenadas Cilíndricas

Se usarmos coordenadas polares no plano xOy e coordenada cartesiana usual no eixo Oz , obteremos um sistema de coordenadas no \mathbb{R}^3 denominado *Coordenadas Cilíndricas* definido por:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta) \quad \text{e} \quad z.$$



O elemento de volume nestas coordenadas é igual produto do elemento área em coordenadas polares, isto é $dA = r dr d\theta$ pelo elemento dz ou seja:

$$dV = r dz dr d\theta$$

Quando usamos coordenadas cilíndricas? O critério é exatamente o que usamos para as coordenadas polares isto é, quando a descrição da região de integração fica descrita de modo mais simples e a integral pode ser calculada facilmente.

Ao optarmos pelo sistema de coordenadas cilíndricas devemos observar a simetria da região de integração em relação ao eixo Oz e a função que iremos integrar ao fazermos a substituição de variáveis.

Os cilindros e os cones são exemplos de algumas superfícies que satisfazem o critério de simetria. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.9 O cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, em coordenadas cilíndricas se escreve $r = R$. Note que a variável z não aparece nesta equação, portanto a figura é realmente um cilindro.

Exemplo 3.10 O cone $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ em coordenadas cilíndricas se escreve $z = ar$.

Exemplo 3.11 Em coordenadas cilíndricas uma superfície de revolução:

$$(f(v) \cos(\theta), f(v) \sin(\theta), g(v)),$$

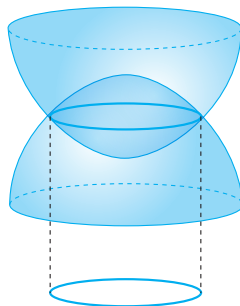
se escreve $r = f(v)$, $z = g(v)$, não dependendo da coordenada θ .

Exemplo 3.12 Utilize coordenadas cilíndricas para calcular o volume do sólido Ω limitado pelos gráficos das funções $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

Solução: Substituindo as coordenadas polares nas expressões $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$, obtemos $z = r^2$ e $z = 2 - r^2$. O fato de que as funções não dependem de θ significa simetria dos gráficos em relação ao eixo Oz .

A interseção dos gráficos é dada por $r^2 = z = 2 - r^2$, ou seja, $2r^2 = 2$, ou $r = 1$.

Observe que o sólido é limitado superiormente por $z = 2 - r^2$ e inferiormente por $z = r^2$ projetando-se no plano xOy no disco $r^2 \leq 1$, conforme a figura abaixo:



Assim sendo, o sólido Ω é descrito pelas desigualdades: $r^2 \leq z \leq 2 - r^2$, $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Portanto, lembrando que o elemento de volume em coordenadas cilíndricas é $dV = r dz dr d\theta$, temos

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} r dz dr d\theta \\ \text{vol}(\Omega) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(2-2r^2) dr d\theta \\ \text{vol}(\Omega) &= \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \pi \end{aligned}$$

3.3 Coordenadas Esféricas

No parágrafo sobre aplicações da integral dupla, calculamos a área da esfera de raio 1 centrada na origem. Para isso, usamos a seguinte parametrização:

$$(\theta, \phi) \mapsto (\text{sen}(\phi) \cos(\theta), \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta), \cos(\phi)), \quad \text{para } 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \phi < \pi.$$

Os círculos $\theta = \theta_0 = \text{constante}$ correspondem aos *meridianos*: $(\text{sen}(\phi) \cos(\theta_0), \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta_0), \cos(\phi))$.

As curvas que correspondem a $\phi = \phi_0 = \text{constante}$ são círculos de raio igual a $\text{sen}(\phi_0)$ e são chamados *paralelos* $(\text{sen}(\phi_0) \cos(\theta), \text{sen}(\phi_0) \text{sen}(\theta), \cos(\phi_0))$.

Estas duas famílias de curvas estabelecem uma maneira de localizar pontos na esfera por meio de um par de ângulos: (θ, ϕ) , que significa localizar o meridiano e paralelo em que o ponto encontra-se.

Por exemplo, o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ localiza-se no paralelo $\phi = \frac{\pi}{4}$ e no meridiano $\theta = \frac{\pi}{4}$. Analogamente para uma esfera de raio R , de equação cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, obtemos a parametrização $(R \text{sen}(\phi) \cos(\theta), R \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta), R \cos(\phi))$. Da mesma maneira que utilizamos coordenadas polares para obter um sistema de coordenadas no plano, podemos construir um sistema de coordenadas no espaço usando coordenadas esféricas do seguinte modo: fixada uma origem O , se $P \in \mathbb{R}^3$, seja $\rho = \text{dist}(P, O)$. Se $P \neq O$, então $\rho > 0$. Nesta situação, o ponto P encontra-se numa esfera centrada na origem e de raio ρ . Para localizar um ponto nesta esfera precisamos encontrar o par de ângulos (θ, ϕ) . Dessa maneira, podemos atribuir a qualquer ponto $P \neq O$ as coordenadas

$$(\rho \text{sen}(\phi) \cos(\theta), \rho \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta), \rho \cos(\phi))$$

Exemplo 3.13 Considere o ponto $(\sqrt{3}, 3, 2)$. Obtemos $\rho(P) = 4$, $\phi(P) = \frac{\pi}{3}$ e $\theta(P) = \frac{\pi}{3}$.

Definimos um *sistema de coordenadas esféricas* que para cada ponto $P \in \mathbb{R}^3$ associa um terno ordenado (ρ, θ, ϕ) .

Como era de se esperar, a equação de uma esfera de centro O e raio R nestas coordenadas é bastante simples: $\rho = R$.

Exemplo 3.14 Outra superfície de equação muito simples em coordenadas esféricas é o cone, de equação cartesiana $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$. Para obtê-la, basta fazer substituição $x = \rho \text{sen}(\phi) \cos(\theta)$, $y = \rho \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta)$, $z = \rho \cos(\phi)$ para obter $x^2 + y^2 = \rho^2 \text{sen}^2(\phi)$:

$$\rho \cos(\phi) = a \rho \text{sen}(\phi)$$

$$\cot(\phi) = a$$

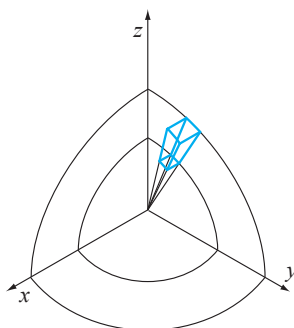
Equivalentemente $\phi = \text{constante}$.

Para calcular integrais triplas em regiões no espaço que envolvam superfícies que possuem algum tipo de simetria em relação à origem, talvez seja vantajoso usar coordenadas esféricas.

Para isso, primeiro apresentamos o *elemento de volume em coordenadas esféricas*:

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Esta expressão é obtida de modo similar ao que foi feito com a mudança de coordenadas no plano. Não discutiremos aqui a sua obtenção. Apenas lembramos que ela pode ser interpretada como o volume de um paralelepípedo formado por um paralelogramo tangente à esfera e um radial, apontando para fora. Em termos de volume, obtemos o produto do elemento de área da esfera pelo elemento $d\rho$.



Exemplo 3.15 Encontre o volume do sólido Ω no interior da esfera de centro na origem e de raio 1 e acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução: Como vimos anteriormente, Ω é limitado por duas superfícies, que em coordenadas esféricas possuem equações $\rho = 1$ e $\cot(\phi) = 1$. Ou seja $\rho = 1$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$, respectivamente. Logo, a região Ω é descrita pelas desigualdades (verifique!): $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int \int \int_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(\phi) \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \, d\phi \, d\theta \\ \int \int \int_{\Omega} dV &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(\phi) \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos(\phi)]_0^{\frac{\pi}{4}} \, d\theta \\ \operatorname{Vol}(\Omega) &= \int \int \int_{\Omega} dV = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \end{aligned}$$

Exemplo 3.16 Encontre o volume do sólido Ω limitado pelos cones S_1 , $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e S_2 , $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e pelo plano $z = 3$.

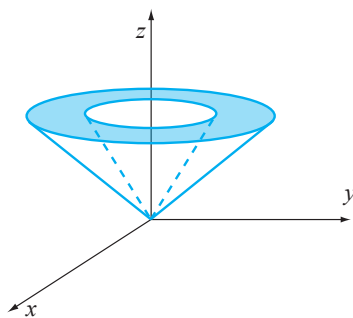
Solução: Como foi observado anteriormente, a equação de um cone do tipo $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$ em coordenadas esféricas é: $\cot(\phi) = a$.

Portanto, o sólido Ω é limitado por superfícies que em coordenadas esféricas se escrevem:

$$S_1 := \cot(\phi) = 1 \text{ ou } \phi = \frac{\pi}{4},$$

$$S_2 := \cot(\phi) = \sqrt{3} \text{ ou, usando trigonometria, } \cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ isto é, } \phi = \frac{\pi}{6}$$

e o plano $\rho \cos(\phi) = 3$ (verifique isso!).



Portanto, as seguintes desigualdades descrevem o domínio de integração: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ e $0 \leq \rho \leq \frac{3}{\cos(\phi)}$. Logo, o volume é igual à integral repetida:

$$Vol(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{3}{\cos(\phi)}} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Que calculamos

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{\cos(\phi)}} \operatorname{sen}(\phi) \, d\phi \, d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{9}{\cos^3(\phi)} \operatorname{sen}(\phi) \, d\phi \, d\theta = \\ Vol(\Omega) & = \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\cos^2(\phi)} \right]_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta = 6\pi \end{aligned}$$

É um bom exercício (trabalhoso) calcular o volume deste sólido usando coordenadas cartesianas.

3.4 EXERCÍCIOS

1. Em cada uma das regiões D abaixo escreva a integral tripla $\int \int \int_D f(x, y, z) dV$ na forma de integral iterada:

(a) $D := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) D a região dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e acima do gráfico de $z = x^2 + y^2$.

(c) D a região fora do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

2. Calcule o volume do sólido limitado pelos seguintes planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$

3. Use integral tripla para encontre o volume do tetraedro de vértices: $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 0, 1)$, $D = (1, 1, 0)$. (Sugestão: encontre a equação do plano BCD).

4. Encontre o volume de um tetraedro regular de aresta igual a $\sqrt{2}$. (Em que pontos colocaremos os vértices?)

5. Encontre a seguinte integral $\int \int \int_{\Omega} y dV$ para $\Omega = \{(x, y, z) / \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$

6. Encontre o volume do sólido $B = \{(x, y, z) / \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}$

7. Use coordenadas cilíndricas para calcular a integral

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz dy dx$$

8. Em cada um dos itens abaixo, esboce a região do espaço \mathbb{R}^3 descrita em coordenadas esféricas pela equação:

(a) $\tan(\theta) = 1$

(b) $\tan(\phi) = 1$

(c) $\rho \sec(\phi) = 4$

9. Encontre o volume do sólido limitado inferiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e superiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10. Encontre o volume do sólido contido no octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ e limitado pela esfera de centro na origem $(0, 0, 0)$ e raio 2 e pelos planos verticais $x = y$ e $y = \sqrt{3}$.

11. Encontre a equação do cilindro $x^2 + y^2 = k^2$ em coordenadas esféricas.

4

Integral Curvilínea

AULA 4: INTEGRAL CURVILÍNEA

Objetivos 4.1 Os objetivos desta Aula são:

- introduzir o conceito de curva parametrizada;
- introduzir o conceito de integral curvilínea de uma função escalar sobre uma curva;
- introduzir o conceito de integral curvilínea de um campo vetorial sobre uma curva;
- enunciar e demonstrar o Teorema de Green;
- estudar os campos conservativos;

4.1 Introdução

Imagine um pedaço de arame, na forma de uma curva C no espaço tri-dimensional. Suponha que o arame é feito de um material cuja densidade é uma função que a cada ponto $p \in C$, associa um valor $f(p)$. Deseja-se calcular a massa do objeto. A ideia é proceder como foi feito nos capítulos anteriores: usar uma integral para encontrar a massa do objeto. Isso será feito, subdividindo C em pequenos pedaços, bem aproximados por segmentos de retas. Calcula-se a massa de cada pedaço e, em seguida, soma-se para obter uma aproximação da massa do objeto. A massa total é o limite dessa aproximações ou seja uma integral.

Nosso objetivo inicial será estender o conceito de integral de Riemann para subconjuntos mais gerais: curvas e superfícies no espaço. Neste capítulo faremos a extensão para curvas usando os conceitos de caminho e de comprimento de arco e serão tratados os seguintes assuntos:

- caminhos regulares;
- comprimento de arco de caminhos regulares;
- a integral em curvas regulares;
- campo vetorial em \mathbb{R}^3 ;
- integral curvilínea (ou integral de linha);
- Teorema de Green, que relaciona a integral curvilínea em uma curva fechada plana com a integral dupla na região limitada pela curva;
- campos conservativos no plano.

4.2 Curvas Regulares

Definição 4.2.1 Um *caminho contínuo* é uma aplicação $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são contínuas. Se as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são diferenciáveis em (a, b) , então dizemos que γ é um *caminho diferenciável*.

Nesse caso, o vetor $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é chamado *vetor tangente* a γ no ponto $\gamma(t)$. Se γ descreve o movimento de uma partícula movendo-se no plano, então o vetor tangente é a velocidade da partícula no instante t .

Exemplo 4.2 $\delta(t) = (t^2, t^3, 0)$ é um caminho diferenciável com vetor tangente $\delta'(t) = (2t, 3t^2, 0)$. Por exemplo, para $t = 1$ temos o vetor $\delta'(1) = (2, 3, 0)$ que é tangente ao caminho no ponto $\delta(1) = (1, 1, 0)$.

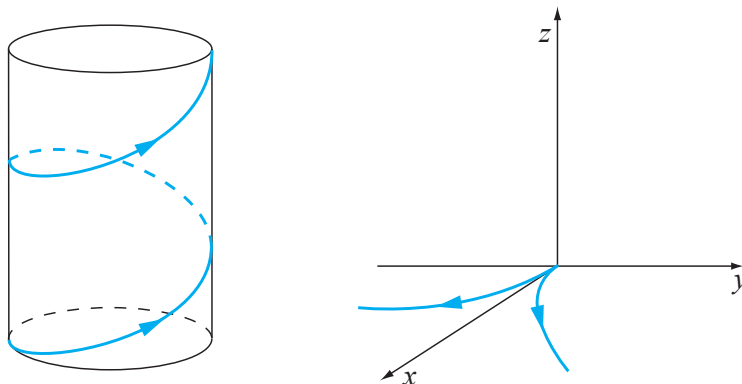
Definição 4.2.2 Um caminho $\gamma(t)$ diferenciável é chamado *regular*, se o vetor tangente nunca se anula ou seja, se $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$ ou equivalentemente se sua norma não se anula: $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \neq 0$.

Definição 4.2.3 Dizemos que $C \subset \mathbb{R}^3$ é uma *curva regular* se é a imagem de um caminho regular.

Em outras palavras C é uma curva regular se existe um caminho regular $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(I) = C$.

Exemplo 4.3 $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ é um caminho regular pois $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ e $|\gamma'(t)| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + 1} = \sqrt{2}$

Exemplo 4.4 Por outro lado, o caminho do Exemplo 4.2, $\delta(t) = (t^2, t^3, 0)$ não é regular, pois o vetor tangente na origem é nulo. Compare as figuras.



Exercício 4.5 Verifique se o caminho $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ é regular ou não.

Para generalizar a definição de integral de Riemann de uma função f em um caminho, primeiramente devemos dar sentido à noção de *elemento de comprimento de arco*, que substituirá o elemento dx na integral simples uni-dimensional.

Lembre-se que o princípio geral que usamos é:

1. fazer uma partição \mathcal{P} do caminho γ em pequenos arcos de comprimento $\Delta_i s$,
2. em seguida, calcular o valor da função $f(t_i^*)$ em um ponto contido em cada um dos sub-arcos e formar a soma: $s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^k f(t_i^*) \Delta_i s$
3. Finalmente tomar o limite da soma quando $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$.

Vejamos como formalizar um pouco mais essa ideia:

Definição 4.2.4 Se $\gamma(t)$ é um caminho regular, o *comprimento de arco* de γ entre dois pontos é igual à integral

$$s(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt$$

Exemplo 4.6 Encontre o comprimento de arco da curva $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ para entre os pontos $\gamma(0)$ e $\gamma(\frac{\pi}{2})$.

Solução: basta aplicar a definição. Temos $s(0, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Observação 4.7 Se interpretarmos o caminho $\gamma(t)$ como o movimento de uma partícula no plano, então a norma (ou módulo) do vetor velocidade $|\gamma'(t)|$ é conhecida como *velocidade escalar*. E assim, com esta interpretação, o comprimento de arco é a distância total percorrida pela partícula ao longo do caminho γ .

Exemplo 4.8 Encontre o comprimento de arco do caminho $r(t) = (t^2, t^3, 0)$ entre $t = 0$ e $t = 2$.

Solução: $r'(t) = (2t, 3t^2, 0)$, portanto $|r'(t)| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$ e

$$s(0, 2) = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \int_0^2 \sqrt{4 + 9t^2} t dt$$

Fazendo a substituição $u = 4 + 9t^2$, temos $du = 18 t dt$. Além disto $t = 0$ corresponde a $u = 4$ e $t = 2$ corresponde a $u = 40$, portanto,

$$s(0, 2) = \int_4^{40} \sqrt{u} \frac{du}{18}$$

Integrando, obtemos

$$\int \sqrt{u} \frac{du}{18} = \frac{2}{54} u^{\frac{3}{2}}$$

Ou seja

$$s(0, 2) = \frac{2}{54} [40^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}] = \frac{8}{27} [10^{\frac{3}{2}} - 1]$$

Observe que segue da definição de comprimento de arco e do Teorema Fundamental do Cálculo que $\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|$. Novamente, interpretando o caminho como a descrição do movimento de uma partícula percorrendo uma curva C , então $\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|$ é a *velocidade escalar* da partícula. Portanto $|\gamma'(t)|dt$ é o produto da velocidade escalar pelo tempo. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 4.2.5 Chama-se *elemento de comprimento de arco* de um caminho γ à expressão $ds = |\gamma'(t)|dt$

4.3 Integral Curvilínea de uma função escalar

Definição 4.3.1 Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com imagem C , então a integral curvilínea da função escalar f em C é definida como:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ então $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ e escrevemos

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Exemplo 4.9 Encontre o valor da integral $\int_C y ds$ para C uma curva imagem de $\gamma(t) = (\frac{t^2}{2}, 2t, -t^2)$, $0 \leq t \leq 2$.

Solução: $\gamma'(t) = (t, 2, -2t)$, $|\gamma'(t)| = \sqrt{t^2 + 4 + 4t^2}$, $y(t) = 2t$, portanto,

$$\int_C f ds = \int_0^1 t \sqrt{5t^2 + 4} dt$$

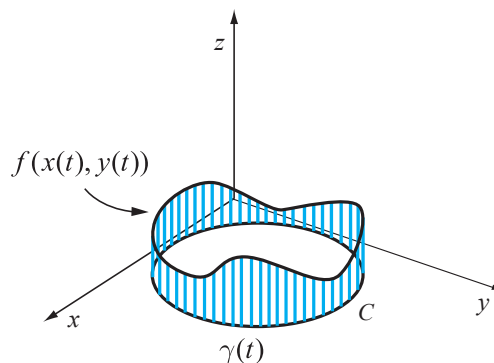
Fazendo a substituição de variáveis $u = 4 + 5t^2$ temos $du = 10t dt$, quando $t = 0$, $u = 4$ quando $t = 1$, $u = 9$. Logo

$$\int_C f ds = \int_0^1 t \sqrt{20t^2 + 1} dt = \frac{1}{10} \int_4^9 \sqrt{u} du = \frac{1}{5} \frac{u^{3/2}}{3} \Big|_4^9 = \frac{27}{15}$$

Um caso particular importante da Integral Curvilínea de uma função escalar ocorre quando C é uma curva plana. Vamos examinar este caso com detalhes. Suponha que $\gamma(t)$ é um caminho tal que a imagem C é uma curva plana cujos pontos estão no plano xy . Seja f uma função real de duas variáveis. A Integral Curvilínea da função escalar f é dada então por

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Quando $f(x, y) \geq 0$, esta integral possui a interpretação geométrica da “área de uma cerca”. Para ver isto imagine a imagem C da função $\gamma(t)$ como base da cerca e para cada $(x, y) \in C$ imagine $f(x, y)$ como a altura da cerca no ponto (x, y) (veja a figura). Vejamos um exemplo desta situação.

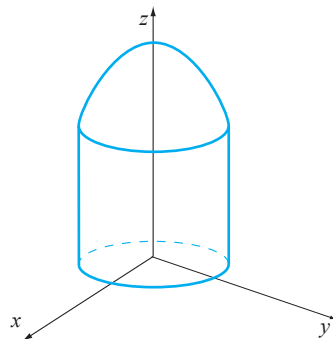


Exemplo 4.10 Deseja-se construir uma peça metálica que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = 4 - x - y$. Se o metro quadrado da peça custa R\$ 25,00, calcule o preço total da peça.

Solução: A base da peça é dada pela circunferência parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e a altura da peça metálica em cada ponto $(x, y) \in C$ imagem de $\gamma(t)$ é dada pela função $f(x, y) = 4 - x - y$. $\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ e portanto $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4} = 2$. Temos então

$$\int_C f(x(t), y(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (4 - 2 \cos t - 2 \sin t) 2 dt = 16\pi.$$

O Custo total será portanto $25 \times 16\pi = 400\pi$ reais.



Veremos outras aplicações da integral curvilínea de uma função escalar e também um outro conceito importante a Integral Curvilínea de um campo vetorial. Mas antes faremos algumas observações um pouco mais teóricas que nos ajudam a entender o conceito de integral curvilínea.

Observação 4.11 A definição de integral sobre uma curva é motivada do seguinte modo: para definir a integral de uma função contínua f em uma curva C que é a imagem de um caminho regular, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ a ideia é seguir os passos da definição da integral de Riemann em uma variável.

Primeiramente, tomamos uma partição $\mathcal{Q} = \cup \mathcal{C}_i$ da curva em pequenos pedaços e calculamos o valor de $f(p_i)$ em um ponto $p_i \in \mathcal{C}_i$ em cada um desses pedaços. Em seguida, toma-se a soma de $s(f, \mathcal{Q}) = \sum f(p_i) \mathcal{L}(\mathcal{C}_i)$, para $\mathcal{L}(\mathcal{C}_i)$ o comprimento do pedaço \mathcal{C}_i .

Observe que, se a correspondência $t \mapsto \gamma(t)$ é injetiva, então uma partição \mathcal{Q} corresponde a uma partição no domínio $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ e $\gamma(t_i) = p_i$. E o comprimento de cada pedaço $\mathcal{L}(\mathcal{C}_i)$ é aproximado por $|\gamma'(t_i)|\Delta_i t$. De modo que escrevemos

$$s(f, \mathcal{Q}) = \sum f(p_i)\mathcal{L}(\mathcal{C}_i) \approx \sum f(\gamma(t_i))|\gamma'(t_i)|\Delta_i t.$$

Finalmente, tomamos o limite $\lim_{|\mathcal{Q}| \rightarrow 0} s(f, \mathcal{Q})$. Observe que $\sum f(\gamma(t_i))|\gamma'(t_i)|\Delta_i t$ é precisamente uma soma de Riemann para a função $f(\gamma(t))|\gamma'(t)|$. De modo que o limite $\lim_{|\mathcal{Q}| \rightarrow 0} s(f, \mathcal{Q})$, se existir, é igual a $\int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$.

Observação 4.12 A integral de uma função sobre uma curva não depende da parametrização da curva: suponha que $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t)$ e $u \in [c, d] \mapsto \delta(u)$ sejam dois caminhos regulares que possuem a mesma imagem, C com as mesmas extremidades, $\gamma(a) = \delta(c)$ e $\gamma(b) = \delta(d)$.

Se existe uma mudança de parâmetro $t \mapsto u(t)$ tal que $\gamma(t) = \delta(u(t))$. Então, pela Regra da Cadeia, $\gamma'(t) = \delta'(u(t))u'(t)$ e $|\gamma'(t)| = |\delta'(u(t))|u'(t)$, pois $u'(t) \neq 0$ (por que?).

$$\int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_a^b f(\delta(u(t)))|\delta'(u(t))|u'(t)dt.$$

Mas aplicando a fórmula da mudança de variáveis em integral de uma variável, temos $du = u'(t)dt$, $a = u(c)$ e $b = u(d)$ e

$$\int_a^b f(\delta(u(t)))|\delta'(u(t))|u'(t)dt = \int_c^d f(\delta(u))|\delta'(u)|du.$$

Concluimos assim que a integral de uma função sobre uma curva não depende do caminho (ou parametrização) que a descreve. Este é o sentido da expressão **integral curvilínea**:

$$\int_C f ds$$

Observação 4.13 Se $\gamma(t)$ é um caminho regular, então existe uma função $T(s)$ tal que o caminho $r(s) = \gamma(T(s))$ tem vetor tangente de norma igual a 1, isto é: $|r'(s)| = 1$. Neste caso, dizemos que o caminho está *parametrizado pelo comprimento de arco*.

Exemplo 4.14 Verifique se o caminho $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ está parametrizado pelo comprimento de arco. Em caso negativo tente achar uma mudança de parâmetro de modo que o novo caminho esteja parametrizado pelo comprimento de arco:

Solução: Iniciamos com o cálculo do vetor velocidade:

$$\gamma'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t)).$$

Portanto, $|\gamma'(t)| = 2$ e γ não está parametrizado pelo comprimento de arco. Entretanto, se definimos um novo parâmetro $t = \frac{s}{2}$, o caminho $\alpha(s) = (2 \cos(\frac{s}{2}), 2 \sin(\frac{s}{2}))$ tem vetor velocidade igual a $\alpha'(s) = (-\sin(\frac{s}{2}), \cos(\frac{s}{2}))$ que satisfaz $|\alpha'(s)| = 1$. Ou seja, α está parametrizada pelo comprimento de arco.

Vejam como obter teoricamente a função $T(s)$ no caso geral:

Primeiramente observe que se fixarmos um ponto t_0 no domínio do caminho γ então, o comprimento de arco de $\gamma(t_0)$ até $\gamma(t)$ é uma função de t definida por:

$$s(T) = s(t_0, T) = \int_{t_0}^T |\gamma'(t)| dt. \quad (4.1)$$

O Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que $\frac{ds}{dT} = |\gamma'(t)|$.

Como γ é um caminho regular, então $|\gamma'(t)| > 0$.

Ou seja, a função que a cada T associa o comprimento de arco $s(T)$ possui derivada positiva. Pode-se concluir que $s(T)$ é uma função crescente de T (por que?).

Usando a interpretação do caminho como a descrição do movimento de uma partícula no espaço, isto deveria ser claro, pois, se a velocidade escalar é positiva então, quanto maior o tempo de percurso, maior será o comprimento de arco percorrido no caminho.

Sendo $s(T)$ uma função crescente, então possui uma inversa, que denotamos por $T(s)$.

Isto significa que (teoricamente) podemos descrever os pontos do caminho usando o comprimento de arco como parâmetro. Ou seja um ponto é localizado pelo comprimento de arco percorrido a partir de um ponto fixado.

Além disso, o Teorema da Função Inversa nos garante que a função $T(s)$ é diferenciável com

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dT}} = \frac{1}{|\gamma'(T(s))|}.$$

Se $r(s) = \gamma(T(s))$, então usando a regra da cadeia,

$$r'(s) = \gamma'(T(s)) \frac{dT}{ds} = \gamma'(T(s)) \frac{1}{|\gamma'(T(s))|}.$$

Portanto,

$$|r'(s)| = \frac{|\gamma'(T(s))|}{|\gamma'(T(s))|} = 1.$$

Como queríamos demonstrar.

4.4 Campo de vetores

A idéia de campos de vetores vem da Física e corresponde a associar a cada ponto do plano ou do espaço uma grandeza que possui direção, sentido e tamanho (módulo), ou seja, um *vetor*. Por exemplo, a velocidade de uma partícula movendo-se no espaço é uma grandeza vetorial, pois possui direção, sentido e módulo (ou velocidade escalar).

Sabemos que os vetores do plano $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ formam uma *base* de \mathbb{R}^2 . Recordando o que isto quer dizer: cada vetor do plano se escreve de maneira única como combinação linear de e_1 e e_2 . Em símbolos, $\forall v \in \mathbb{R}^2$ existe um único par de números reais a e b tais que $v = ae_1 + be_2$.

Definição 4.4.1 Um *Campo de Vetores* no plano é uma aplicação que a cada ponto (x, y) do plano faz corresponder um vetor $X(x, y) = F(x, y)e_1 + G(x, y)e_2$ ou simplesmente $X(x, y) = ((F(x, y), G(x, y)))$ quando a base estiver escolhida. Utilizaremos também a notação \vec{X} quando quisermos enfatizar que para cada ponto (x, y) do plano o campo X associa um vetor.

Um campo de vetores é dito *diferenciável* (respectivamente de classe C^1) quando cada uma das funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ for diferenciável (respectivamente, tiver todas as derivadas parciais contínuas). Nestas notas, exceto quando se supõe o contrário, iremos trabalhar com campos de classe C^1 .

Exemplo 4.15 Damos a seguir 3 exemplos de campos de vetores no plano:

1. $X(x, y) = (2x, 3y)$.
2. $X(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$.
3. $X(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, com *domínio* o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exemplo 4.16 Campo gradiente: se $U(x, y)$ é uma função diferenciável então o *campo gradiente* de U é definido por $X(x, y) = \nabla U(x, y) = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})$. O campo gradiente é bastante estudado no Cálculo Diferencial de Várias Variáveis e uma de suas propriedades mais importantes é que aponta sempre na direção de crescimento máximo da função (Ver também a Seção 4.7).

Exemplo 4.17 Igualmente importante é o *Campo Hamiltoniano* definido por $X_H(x, y) = (\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x})$. Os Campos Hamiltonianos são estudados na Mecânica Clássica. Por exemplo, se $H(x, y) = \frac{m}{2}y^2 + U(x)$, é do tipo energia cinética mais energia potencial, então o Campo Hamiltoniano associado se escreve $X_H(x, y) = (my, -U'(x))$.

A noção de campo vetorial estende-se naturalmente ao espaço tri-dimensional: é uma aplicação que a cada ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associa um vetor

$$X(x, y, z) = (F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z)).$$

Alternativamente, usando a base canônica de \mathbb{R}^3 dada pelos vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, todo campo vetorial se escreve $X(x, y, z) = F(x, y, z)e_1 + G(x, y, z)e_2 + H(x, y, z)e_3$. Também é usada comumente a notação \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} para os vetores da base canônica de modo que um campo de vetores se escreve $X(x, y, z) = F(x, y, z)\mathbf{i} + G(x, y, z)\mathbf{j} + H(x, y, z)\mathbf{k}$. Utilizaremos também a notação \vec{X} quando quisermos enfatizar que para cada ponto (x, y, z) do espaço o Campo X associa um vetor.

Exemplo 4.18 Campo gravitacional: segundo a Lei Gravitacional de Newton, a força gravitacional exercida por um objeto de massa M colocado na origem, sobre um outro objeto, de massa m , situado na posição (x, y, z) é igual a

$$X(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$$

onde G é a constante de gravitação universal e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância do objeto até a origem. Observe que o campo X não está definido na origem (por que?). Uma expressão similar é dada para um campo elétrico que é dado pela força exercida por uma carga pontual Q na origem sobre outra q na posição (x, y, z) :

$$Y(x, y, z) = \frac{eqQ}{r^3}(x, y, z).$$

4.5 Integral Curvilínea de um campo vetorial

Se \vec{X} é um campo vetorial no espaço então uma partícula neste espaço (por exemplo uma massa em um campo gravitacional) vai ser submetida à força X . Suponha que a partícula se movimenta ao longo de uma curva C sob a ação de uma força X . Um dos conceitos fundamentais da física é o *trabalho* realizado por X ao longo de C . Veremos que este trabalho é medido por uma integral sobre a curva.

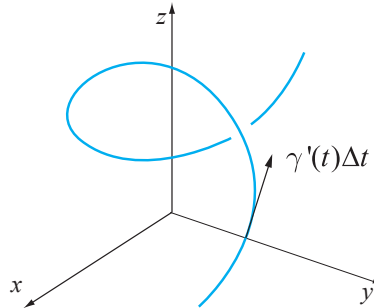
Inicialmente, suponha que a trajetória da partícula é um vetor deslocamento \vec{AB} e o campo é constante. Neste caso sabemos que o trabalho é dado pelo produto escalar do campo pelo vetor \vec{AB} .

$$\vec{X} \cdot \vec{AB} = (\text{força}) \times (\text{deslocamento na direção da força})$$

De uma maneira mais geral, se o caminho é um caminho curvo no espaço, podemos imaginar que ele é constituído por uma sucessão de deslocamentos retilíneos infinitesimais. Da mesma forma que procedemos na dedução da fórmula para a integral curvilínea de uma função escalar, ver a Observação 4.11, chegamos a seguinte fórmula para o cálculo do trabalho realizado por um campo $X(x, y, z)$ no espaço sobre uma partícula que percorre um caminho regular $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$:

$$\text{trabalho realizado por } X = \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Não vamos fazer uma dedução rigorosa desta fórmula mas podemos justificá-la da seguinte maneira. Primeiramente, tomamos uma partição \mathcal{Q} do intervalo $[a, b]$, dada por $a = t_0 < \dots < t_i < t_n = b$ e obtemos uma poligonal no espaço com vértices $\gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, $0 \leq i \leq n$ (ver figura).



Se t varia em um intervalo de t_i para t_{i+1} que vamos supor pequeno o deslocamento da partícula é aproximado pelo vetor $\Delta s_i = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)$ e o campo X pode ser pensado como constante e igual a $X(\gamma(t_i))$ no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Supondo que $\gamma'(t)$ existe para todo $t \in [a, b]$ então pela definição de derivada, temos que

$$\Delta s_i \approx \gamma'(t)\Delta t_i$$

Concluimos que o trabalho realizado para deslocar uma partícula de $\gamma(t_i)$ para $\gamma(t_{i+1})$ é aproximadamente

$$X(\gamma(t_i))\Delta s_i \approx X(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(t_i)\Delta t_i$$

Assim o trabalho W realizado pela força X para deslocar uma partícula ao longo de C é aproximadamente:

$$s(X, \mathcal{Q}) = \sum X(\gamma(t_i))\Delta s_i \approx \sum X(\gamma(t_i))\cdot\gamma'(t_i)\Delta_i t.$$

Finalmente, tomamos o limite $\lim_{|\mathcal{Q}|\rightarrow 0} s(X, \mathcal{Q})$. Observe que quando $|\mathcal{Q}| \rightarrow 0$ a aproximação se torna cada vez melhor e que portanto é razoável tomar como nossa definição de trabalho a integral

$$W_\gamma = \int_a^b X(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

Esta noção de trabalho, fundamental na física, nos leva a definir a integral curvilínea de um campo vetorial da seguinte maneira.

Definição 4.5.1 Seja X um campo vetorial no \mathbb{R}^3 contínuo no caminho regular $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. A Integral curvilínea do campo X ao longo de γ é definida da seguinte maneira:

$$\int_\gamma X \cdot ds = \int_a^b X(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

Utilizando coordenadas, se o campo vetorial se escreve

$$X(x, y, z) = (F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z)) \text{ e } \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

então

$$X(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = F(x(t), y(t), z(t))x'(t) + G(x(t), y(t), z(t))y'(t) + H(x(t), y(t), z(t))z'(t)$$

Logo

$$\int_\gamma X \cdot ds = \int_a^b [F(\gamma(t))x'(t) + G(\gamma(t))y'(t) + H(\gamma(t))z'(t)]dt.$$

Exemplo 4.19 Considere o campo vetorial $X(x, y, z) = (x, y, z^2)$ e o caminho $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ onde $0 \leq t \leq \pi$. Calcule a integral curvilínea $\int_\gamma X \cdot ds$.

Solução: O campo ao longo do caminho é igual a $X(\gamma(t)) = (\cos(t), \sin(t), t^2)$ e o vetor tangente ao caminho é igual a $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ para $0 \leq t \leq \pi$.

Logo, $X(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = t^2$ e, por definição,

$$\int_\gamma X \cdot ds = \int_0^\pi t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}.$$

Como já vimos, o conceito de integral curvilínea de um campo está associado ao conceito de *Trabalho* realizado ao movermos uma partícula ao longo de uma curva α , sob a influência de um campo de forças $X = (F, G)$. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 4.20 Encontre o trabalho realizado pelo campo $X(x, y) = (xy, y^2)$ ao se mover uma partícula ao longo de uma curva C descrita pelo caminho $r(t) = (3\cos(t), 2\sin(t))$ para $0 \leq t \leq \pi$.

Solução: $X(r(t)) = (6\cos(t)\sin(t), 4\sin^2(t))$ e $r'(t) = (-3\sin(t), 2\cos(t))$.

Logo $X(r(t))\cdot r'(t) = -18\cos(t)\sin^2(t) + 8\cos(t)\sin^2(t) = -10\cos(t)\sin^2(t)$.

Portanto $W_C = \int_C X \cdot dr = \int_0^\pi [-10\cos(t)\sin^2(t)]dt = -\frac{1}{3}\cos^3(t) \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}$

Observação 4.21 A componente de X na direção do vetor unitário da tangente a γ no ponto t é o produto escalar $f(t) = X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ que é uma função escalar do parâmetro t . Isto quer dizer que ao projetarmos ortogonalmente X sobre o vetor unitário da tangente obteremos a função escalar $f(t)$. Obtemos assim uma relação entre a integral curvilínea do campo e a integral de f no caminho γ que pode ser muito útil:

$$\int_{\gamma} f(t) ds = \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Observação 4.22 Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ um caminho regular. Suponha que g seja uma função diferenciável com $g'(u) > 0$ tal que $g(u_a) = a, g(u_b) = b$. Definimos um novo caminho regular $\alpha(u) = \gamma(g(u))$ obtido do caminho anterior por uma mudança de parâmetros $t = g(u)$. Pela Regra da Cadeia $\alpha'(u) = \gamma'(g(u))g'(u)$. Portanto,

$$X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) = X(\gamma(g(u))) \cdot \gamma'(g(u))g'(u).$$

Por definição, dado um campo X

$$\int_{\alpha} X \cdot ds = \int_{u_a}^{u_b} X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du.$$

Logo,

$$\int_{\alpha} X \cdot ds = \int_{u_a}^{u_b} X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = \int_{u_a}^{u_b} X(\gamma(g(u))) \cdot \gamma'(g(u))g'(u) du.$$

Aplicando a fórmula de mudança de variáveis nesta última integral, obtemos:

$$\int_{\alpha} X \cdot ds = \int_{u_a}^{u_b} X(\gamma(g(u))) \cdot \gamma'(g(u))g'(u) du = \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} X \cdot ds.$$

Em outras palavras, a integral curvilínea de um campo X ao longo de um caminho, não depende da parametrização do caminho.

Faz sentido, portanto, definir a *Integral Curvilínea* de X sobre a curva regular C , o traço (ou imagem) de um caminho γ regular:

$$\int_C F dx + G dy + H dz = \int_{\gamma} X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

A expressão $F dx + G dy + H dz$ deve ser interpretada como o produto escalar do campo vetorial $X = (F, G, H)$ com o vetor tangente dado por uma parametrização regular γ da curva C . A integral de linha na forma

$$\int_C X \cdot dr.$$

Quando a curva é fechada escreve-se

$$\oint_C X \cdot dr$$

para a integral na curva completa (uma volta completa).

Observação 4.23 Se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $\beta(t) = \gamma(a+b-t)$, então o traço de ambos os caminhos coincide, mas $\beta(a) = \gamma(b)$ e $\beta(b) = \gamma(a)$.

Isto é os sentidos dos percursos são contrários: $\beta'(t) = -\gamma'(a+b-t)$.

$$\int_{\beta} X \cdot ds = \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b X(\gamma(a+b-t)) \cdot (-\gamma'(a+b-t)) dt$$

Fazendo a mudança de variáveis, $u = a+b-t$, $du = -dt$,

$$\begin{aligned} \int_{\beta} X \cdot ds &= \int_a^b X(\gamma(a+b-t)) \cdot (-\gamma'(a+b-t)) dt = \int_b^a X(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u) du = \\ &= - \int_a^b X(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u) du = - \int_{\gamma} X \cdot ds. \end{aligned}$$

Ou seja, ao mudarmos o sentido do percurso de uma curva C , a integral do campo vetorial muda de sinal:

$$\int_{\beta} X \cdot ds = - \int_{\gamma} X \cdot ds.$$

Isto significa que se denotarmos por $-C$ o traço de γ percorrido no sentido contrário ao de C , então

$$\int_{-C} F dx + G dy + H dz = - \int_C F dx + G dy + H dz.$$

Exercício 4.24 Verifique esta observação no seguinte caso: $X(x, y, z) = zy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yx\mathbf{k}$, C a imagem de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ e $-C$ a imagem de $\gamma(-t) = (-t, t^2, -t^3)$, para $-1 \leq t \leq 2$.

Exemplo 4.25 Geralmente não se faz menção explícita ao campo de vetores e escrevemos uma integral curvilínea na forma $\int_C F dx + G dy + H dz$. Se C é o traço do caminho $\gamma(t) = (t, 0, 0)$, $a \leq t \leq b$, então $\int_C F dx + G dy + H dz = \int_a^b F(t, 0, 0) dt$.

Exemplo 4.26 Calcular $\int_C 2y dx + x dy + xz dz$, $C = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ parametrizado no sentido anti-horário (positivo).

Solução: observe que $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ é uma parametrização de C , $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\int_C 2y dx + x dy + xz dz = \int_0^{2\pi} [2\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t)] dt.$$

Usando identidades trigonométricas, $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ e $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ temos $\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) = 2\cos(2t) - 1$ e substituindo na última integral obtemos:

$$\int_C y dx + x dy + xz dz = \int_0^{2\pi} [2\cos(2t) - 1] dt = [-\sin(2t) - t]_0^{2\pi} = -2\pi.$$

Pergunta: qual seria o resultado se a curva estivesse orientada no sentido contrário?

Exercício 4.27 Sejam $\gamma(t) = (e^{-t}\sin(t), e^{-t}\cos(t), t)$ para $0 \leq t \leq 3$ um caminho e $X(x, y, z) = (F, G, H) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x, y, z)$. Encontre a integral curvilínea:

$$\int_{\gamma} Fdx + Gdy + Hdz$$

Definição 4.5.2 A integral curvilínea pode ser estendida para um caminho *regular por partes*, ou seja um caminho contínuo $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ constituído de uma união finita de caminhos regulares que se intersectam em no máximo um ponto.

Portanto existe um número finito de pontos $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ tal que a restrição de γ a cada um dos sub-intervalos $[a_i, a_{i+1}]$ é um caminho regular.

Se denotamos por C o traço de γ e por C_i o traço do caminho $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$, restrição de γ ao sub-intervalo $[a_i, a_{i+1}]$, então, definimos

$$\int_C Fdx + Gdy + Hdz = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} Fdx + Gdy + Hdz$$

Exemplo 4.28 Calcular $\oint_C zdx + xdy + ydz$ para C o triângulo de vértices $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$, percorrido na seguinte ordem: de O para A , de A para B e de B para O .

Solução: C é um triângulo formado por três segmentos (arestas):

C_1 , de O para A : $\gamma_1(t) = (t, t, 0)$, para $0 \leq t \leq 1$;

C_2 , de A para B : $\gamma_2(t) = (1, 1, t)$, para $0 \leq t \leq 1$ e

C_3 , de B para O : $\gamma_3(t) = (1-t, 1-t, 1-t)$, para $0 \leq t \leq 1$.

Observe que estamos usando o fato de que a integral curvilínea não depende da parametrização.

Logo $\oint_C zdx + xdy + ydz = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} zdx + xdy + ydz$.

Calculamos separadamente

$$\int_{C_1} zdx + xdy + ydz = \int_0^1 (t+t)dt = t^2 \Big|_0^1 = 1$$

$$\int_{C_2} zdx + xdy + ydz = \int_0^1 dt = t \Big|_0^1 = 1$$

$$\int_{C_3} zdx + xdy + ydz = \int_0^1 -3(1-t)dt = \frac{3}{2}(1-t)^2 \Big|_0^1 = -\frac{3}{2}$$

Portanto,

$$\oint_C zdx + xdy + ydz = 1 + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

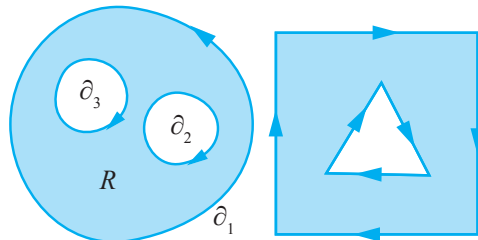
Exercício 4.29 Encontre a integral curvilínea $\oint_C xydx + xy^2dy$ para C o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (1, 1)$, orientado no sentido: de A para B , de B para C e de C para A . vskip 5cm

4.6 Teorema de Green

Nesta seção estaremos restritos a caminhos e campos vetoriais no plano. O objetivo desta seção é expor o Teorema de Green, que estabelece uma relação entre a integral curvilínea em um caminho fechado e a integral dupla de uma função (o "rotacional" do

campo) na região limitada pelo traço do caminho. Veremos que de certa forma estaremos generalizando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Seja R uma região plana limitada por uma curva γ união de um número finito de curvas disjuntas γ_i , para $i = 1, 2, \dots, n$. Cada uma das curvas γ_i é regular por partes e está orientada de modo que ao percorrê-la, o interior da região está sempre à esquerda. Para enunciar o Teorema de Green vamos definir o conceito do rotacional de um campo vetorial plano.



Definição 4.6.1 Dado um campo vetorial X no plano, o rotacional de X , é a diferença entre a derivada parcial da segunda componente do campo em relação à primeira variável e a derivada parcial da primeira componente em relação à segunda variável:

$$\text{rot}(X) = [G_x(x, y) - F_y(x, y)] = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Teorema 4.6.1 (Green) *Seja $X(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ um campo vetorial definido em um subconjunto aberto U do plano tal que $R \subset U$, $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde R é uma região plana limitada por uma curva orientada γ como acima.*

Então

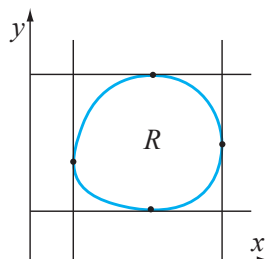
$$\oint_{\gamma} F(x, y)dx + G(x, y)dy = \iint_R [G_x(x, y) - F_y(x, y)]dA$$

Em palavras, para campos vetoriais X no plano, O Teorema de Green afirma que a integral curvilínea em uma união disjunta de curvas regulares por partes que limita uma região plana R é igual à integral dupla do rotacional do campo em R .

Antes de fazer a demonstração damos a seguinte definição:

Definição 4.6.2 Um região R do plano é chamada uma *região simples* se ela pode ser descrita simultaneamente com uma região do Tipo I e como uma região do tipo II (ver Seção 1.4).

Demonstração: Suponha inicialmente o caso particular em que R seja uma região simples. Ou seja, vamos supor que $R = \{a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ e simultaneamente $R = \{c \leq y \leq d; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$.



Desta forma, a curva γ que limita R (ou fronteira de R) é descrita de duas maneiras: A primeira : $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_3$ com $\gamma_1(x) = (x, g_1(x))$ e $\gamma_3(x) = (a + b - x, g_2(a + b - x))$ para $a \leq x \leq b$. Observe que as curvas γ_1 e γ_3 são percorridas em sentidos contrários.

A segunda: $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_4$ com $\gamma_2(y) = (g_1(y), y)$ e $\gamma_4(y) = (h_2(c + d - y), c + d - y)$ para $c \leq y \leq d$. A curva γ_2 é percorrida no sentido positivo do eixo Oy , enquanto a curva γ_4 é percorrida em sentido contrário.

A prova do teorema é consequência do Teorema Fundamental do Cálculo. Calculemos

$$\int \int_R [G_x(x, y) - F_y(x, y)] dA = \int \int_R G_x(x, y) dA - \int \int_R F_y(x, y) dA.$$

Para a primeira integral, escolhamos integrar primeiramente em relação a x e usamos a seguinte descrição para R : $R = \{c \leq y \leq d; h_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$.

Assim, pelo Teorema de Fubini,

$$\int \int_R G_x(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} [G_x(x, y) dx] dy.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int \int_R G_x(x, y) dA = \int_c^d [G(h_2(y), y) - G(h_1(y), y)] dy.$$

Mas o lado direito da equação é igual a

$$- \int_{\gamma_2} G(x, y) dy - \int_{\gamma_4} G(x, y) dy.$$

Portanto,

$$\int \int_R G_x(x, y) dA = \int_{\gamma_2} G(x, y) dy + \int_{\gamma_4} G(x, y) dy.$$

Para a segunda parcela, integramos primeiramente em relação a y :

$$\int \int_R F_y(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} [F_y(x, y) dy] dx.$$

Ou

$$\int \int_R F_y(x, y) dA = \int_a^b [F(x, g_2(x)) - F(x, g_1(x))] dx.$$

Mas o termo direito da equação é igual a

$$- \int_{\gamma_1} F(x, y) dx - \int_{\gamma_3} F(x, y) dx.$$

Substituindo

$$\int \int_R F_y(x, y) dA = \int_{\gamma_1} F(x, y) dx + \int_{\gamma_3} F(x, y) dx$$

Subtraindo as igualdades encontramos:

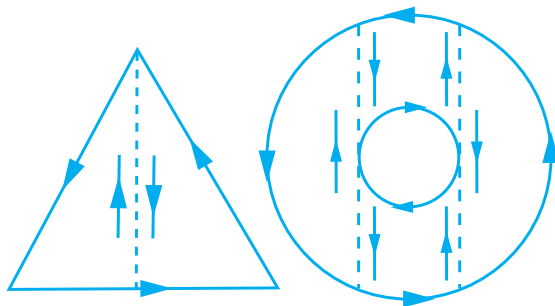
$$\int \int_R [G_x(x, y) - F_y(x, y)] dA =$$

$$= \int_{\gamma_2} G(x, y)dy + \int_{\gamma_4} G(x, y)dy + \int_{\gamma_1} F(x, y)dx + \int_{\gamma_3} F(x, y)dx.$$

Concluimos assim que

$$\int \int_R [G_x(x, y) - F_y(x, y)]dA = \int_{\gamma} F(x, y)dx + G(x, y)dy.$$

Para o caso geral, basta decompor a região R em sub-regiões simples $R_{i,j}$ como acima por meio da introdução de segmentos verticais ou horizontais.



Aplica-se o resultado em cada sub-região $R_{i,j}$ e, em seguida, observa-se cada segmento introduzido é percorrido duas vezes *em sentido contrário* de modo que ao somarmos

$$\sum \int \int_{R_{i,j}} [G_x(x, y) - F_y(x, y)]dA$$

as integrais curvilíneas correspondentes se cancelam, restando apenas a integral curvilínea sobre os arcos de curvas $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, n$ da fronteira de R , concluindo assim a demonstração do Teorema de Green. \square

Exemplo 4.30 Seja γ uma curva regular simples e fechada limitando uma região R . Seja $X(x, y) = (x, y)$ um campo. Então

$$\oint_{\gamma} xdx + ydy = \int \int_R 0 dA = 0.$$

Exemplo 4.31 Seja novamente γ uma curva regular simples e fechada limitando uma região R . Considere agora o campo $X(x, y) = (-y, x)$, então:

$$\oint_{\gamma} -ydx + xdy = \int \int_R 2dA = 2 \text{ área } (R).$$

Exercício 4.32 Seja γ uma curva regular simples e fechada limitando uma região R . Se $F_y(x, y) = G_x(x, y), \forall (x, y) \in R$, calcule

$$\oint_{\gamma} F(x, y)dx + G(x, y)dy$$

O Teorema de Green tem muitas aplicações na Matemática. Entre as mais importantes que estudamos no curso de graduação citamos: a integral de funções complexas e na Geometria Diferencial. Também encontramos aplicações do Teorema de Green na Física quando estudamos os chamados campos conservativos. É o que veremos na próxima seção.

4.7 Campos Conservativos no Plano

Seja $r(t)$, $a \leq t \leq b$ uma parametrização regular por partes de uma curva orientada $C \subset \mathbb{R}^3$ e X um campo contínuo sobre C . Então vimos a seguinte definição:

$$\int_C X \cdot dr = \int_a^b X(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Em geral a integral curvilínea ao longo de uma curva C parametrizada por $r(t)$, $a \leq t \leq b$ depende da curva C e dos pontos inicial e final da curva $A = r(a)$ e $B = r(b)$. Veremos agora um caso particular importante em que a integral curvilínea depende apenas dos pontos inicial e final A e B mas não da curva C . Para isto, considere o campo $X = \nabla f$, o gradiente da função f , dado por $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.

Teorema 4.33 *Seja X um campo vetorial tal que exista uma função f satisfazendo $\nabla f = X$. Se $C \subset \mathbb{R}^3$ é uma curva regular por partes com pontos inicial e final A e B respectivamente, então temos:*

$$\int_C X \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A)$$

Demonstração: Como $r(a) = A$ e $r(b) = B$ temos

$$\int_C X \cdot dr = \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Seja $g(t) = f(r(t))$ $a \leq t \leq b$.

Temos que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t),$$

pela regra da cadeia. Mas então segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_C X \cdot dr = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(r(b)) - f(r(a)) = f(B) - f(A).$$

□

Definição 4.7.1 Um campo X que satisfaça o teorema anterior, isto é tal que exista uma função f com $X = \nabla f$ é chamado um *campo gradiente*.

O seguinte teorema caracteriza os campos gradientes no plano.

Teorema 4.7.1 *Seja $X = (F, G)$ um campo vetorial no plano com componentes contínuas e diferenciáveis em uma aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Então são equivalentes:*

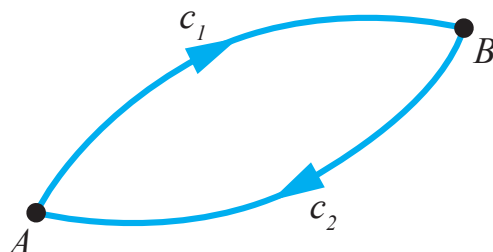
1. $\oint_C X \cdot dr = 0$ para toda curva fechada C regular por partes contida em U .
2. A integral curvilínea de X do ponto A até o ponto B independe da curva que liga A a B .

3. X é um campo gradiente de alguma função f em U .

4. $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Demonstração:

Vamos mostrar que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow 3 \Rightarrow (4) \Rightarrow (1). Inicialmente para ver que (1) \Rightarrow (2), considere duas curvas C_1 e C_2 regulares por partes contidas em U e unindo os pontos A e B (ver figura).



Pela Observação 4.23, dada a curva C_2 , existe a curva $-C_2$ uma curva idêntica a C_2 mas com ponto inicial B e ponto final A . Então $C = C_1 \cup -C_2$ é uma curva fechada e por (1) temos que:

$$\oint_C X \cdot dr = \int_{C_1} X \cdot dr - \int_{C_2} X \cdot dr = 0.$$

Segue que $\int_{C_1} X \cdot dr = \int_{C_2} X \cdot dr$.

Em seguida vamos mostrar que (2) \Rightarrow (3). Seja C uma curva ligando o ponto $(0, 0)$ a um ponto (x, y) e suponha que C possui uma parametrização $r(t)$. Defina $f = \int_C X \cdot dr$. Por hipótese f independe de C . Vamos mostrar que $f = \nabla X$. Para isto escolha o caminho $C = C_1 \cup C_2$ onde C_1 é parametrizada por $r_1 = (t, 0)$, $0 \leq t \leq x$ e C_2 é parametrizada por $r_2 = (x, t)$, $0 \leq t \leq y$. Temos:

$$f(x, y) = \int_0^x F(t, 0) dt + \int_0^y G(x, t) dt.$$

Segue que $\frac{\partial f}{\partial y} = G(x, y)$. De maneira semelhante permutando x e y obtemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = F(x, y)$, concluindo esta parte da demonstração.

Para ver que (3) \Rightarrow (4), suponha que $X = \nabla f$, para alguma f . Isto significa que $F = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $G = \frac{\partial f}{\partial y}$. Mas então $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Mas sabemos do curso de cálculo diferencial em várias variáveis que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, nestas condições, concluindo a demonstração desta parte.

Finalmente é fácil mostrar que (4) \Rightarrow (1), pois o resultado segue diretamente do Teorema de Green, pois

$$\oint_C X \cdot dr = \int \int_D (G_y - F_x) \, dx \, dy = \int \int_D 0 \, dx \, dy = 0,$$

onde D é o interior do caminho fechado C . □

Definição 4.7.2 Uma função f que satisfaz as condições equivalentes do Teorema 4.7.1 é chamada uma *Função potencial*, ou seja, f é potencial se existe um campo X tal que $f = \nabla X$. Neste caso dizemos que o campo X é um *Campo Conservativo*

Observação 4.34 Podemos usar o Teorema 4.7.1 para encontrar uma função potencial de um campo conservativo e para calcular facilmente algumas integrais curvilíneas de campos conservativos. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 4.35 Considere o campo $X = (F, G) = (2xy, x^2 - y^2)$, no plano.

1. Verifique que X é um campo conservativo.

Solução: Como as condições do Teorema 4.7.1 são equivalentes basta mostrar que a condição (4) é satisfeita. Com efeito $F_y = 2x$ e $G_x = 2x$. Logo $G_x - F_y = 0$ e o campo é conservativo.

2. Encontre uma função potencial para o campo X .

Solução: Estamos procurando uma função f tal que $\nabla f = X = (2xy, x^2 - y^2)$. Sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$. Integrando em relação a x podemos concluir que $f(x, y) = x^2y + h_1(y)$ onde h não depende de x . De maneira semelhante, temos que $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$, donde concluímos que $f(x, y) = x^2y - \frac{y^3}{3} + h_2(x)$, onde $h(x)$ não depende de y . Comparando as expressões obtidas para f encontramos uma função potencial $f = x^2y - \frac{y^3}{3}$. Observe que esta é apenas uma das possibilidades, não existe unicidade na função potencial procurada.

3. Calcule $\int_C X.dr$ onde C é o arco de parábola dado por (t, t^2) para $0 \leq t \leq 1$.

Solução: Como encontramos a função potencial do campo temos

$$\int_A^B X.dr = f(B) - f(A) = 1 - 0 = 0,$$

onde $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$.

Exercício 4.36 Encontre outras funções potenciais para o mesmo campo X .

Observação 4.37 Se $\text{rot}(X) = G_x - F_y = 0$ então o trabalho realizado *não depende da curva*, apenas do ponto inicial e do ponto final. Isto é uma consequência imediata do teorema acima.

4.8 EXERCÍCIOS

- Verifique se cada um dos caminhos abaixo é regular ou não:
 - $\gamma(t) = (t^2, t^3, t^4)$
 - $\gamma(t) = (\tan(t), t, e^t), 0 \leq t \leq \pi$
 - $\gamma(t) = (0, \frac{1}{1-t}, \frac{t}{1-t^2})$
 - $\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), t)$
- Dados dois pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ em \mathbb{R}^3 , encontre um caminho diferenciável cuja imagem é a reta que passa pelos pontos.
- Se $N = (1, 0)$, $S = (-1, 0)$, encontre um caminho cuja imagem está contida no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e se inicia em N e termina em S .
- Mostre que o caminho $\theta \mapsto (3\cos(\theta), 4\sin(\theta))$ é regular e sua imagem está contida na elipse de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
- Encontre $\int_C y dx$, $C := (x, x^2)$, para $0 \leq x \leq 1$.
- Deseja-se construir uma peça metálica que tem a forma de um cilindro $x^2 + y^2 = 9$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = 9 - x - y$. Se o metro quadrado da peça custa R\$ 50,00 calcule o custo total da peça. Faça um esboço da peça.
- Seja C a fronteira do quadrado no plano xy de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$ orientada no sentido anti-horário. Considere o campo do plano dado por $F(x, y) = (x^2, xy)$. Calcule a integral curvilínea (ou de linha) do campo F ao longo da curva orientada C .
- Escolha um caminho γ ligando o ponto $(1, 1)$ ao ponto $(2, -3)$ e calcule $\int_{\gamma} 2xy dx + x^2 dy$. (Sugestão: utilize um segmento de reta.)
 - A integral calculada depende do caminho? Por que? (Sugestão: Aplique o Teorema 4.7.1).
- Encontre a integral curvilínea $\oint_C x^2 y dx + xy dy$ para C a curva fechada formada pelo arco de parábola $y = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$, percorrida no sentido crescente de x e pelo arco de parábola $x = y^2$, percorrida no sentido decrescente de x (de 1 a 0).
- Encontre $\oint_C (x^3 + xy^2) dx + (x^2 y + y^3 + 3x) dy$, para C a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ orientada positivamente (sentido anti-horário).
- Encontre $\oint_C 2xy dx + \sqrt{1 + y^4} dy$ para C o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (3, 1)$, orientado no sentido negativo, isto é: de A para B , de B para C e de C para A .

12. Atenção! Devemos ter cautela ao aplicar o Teorema 4.7.1. Seja $X(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

(a) Verifique que $rot(X) = 0$.

(b) Se $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ e $\beta(t) = (\cos(t), -\sin(t))$, $0 \leq t \leq \pi$ são curvas que ligam $(1, 0)$ a $(-1, 0)$, é verdade que $W(\alpha) = W(\beta)$?

(c) O que falha?

13. Utilize o Teorema de Green para encontrar as seguintes integrais curvilíneas:

(a) $\oint_C xydx + xy^2dy$ para C o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (1, 1)$, orientado no sentido: de A para B , de B para C e de C para A .

(b) $\oint_C xydx + x^2dy$ para C a curva constituída pela semi-circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$ e o segmento $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$, orientada positivamente.

(c) $\oint_C (e^{x^2} + 3y^2)dx + (\cos(\sqrt{y}) - 2xy)dy$ para C o quadrado de vértices $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$, orientado positivamente.

14. Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) , mostre que

$$\int_C xdy - ydx = x_1y_2 - x_2y_1.$$

15. Se os vértices de um polígono de n lados, na ordem anti-horária, são (x_1, y_1) , $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, mostre que a área do polígono é

$$A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \dots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)].$$

16. Determine a área do pentágono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

5

Teorema de Stokes

AULA 5: TEOREMA DE STOKES

Objetivos 5.1 Os objetivos desta Aula são:

- calcular a integral de uma função escalar e de um campo vetorial sobre uma região contida em uma superfície (integral de superfície);
- estudar as propriedades de campos vetoriais por meio do rotacional e da divergência;
- introduzir o conceito de fluxo de um campo através de uma superfície;
- relacionar a integral curvilínea de um campo ao longo de uma curva com o fluxo do rotacional do campo na região da superfície limitada pela curva.
- estudar um tipo de campo importante: os campos conservativos;

Nosso próximo objetivo é generalizar o Teorema de Green para campos de vetores no espaço tridimensional. As generalizações que descreveremos têm aplicações importantes tanto na matemática quanto no eletromagnetismo, ou na mecânica dos fluidos, por exemplo. Conforme o ponto de vista adotado, há duas generalizações para o Teorema de Green.

A primeira considera a integral curvilínea sobre uma curva $C \subset S$ que limita uma região $D = \mathbf{r}(R)$ contida na imagem de superfície parametrizada regular S . Lembre-se que o Teorema de Green (no plano) relaciona a integral curvilínea sobre uma curva parametrizada γ a uma integral dupla de uma certa expressão do campo no interior de R . A primeira generalização que estudaremos neste capítulo, relaciona a integral curvilínea em C com uma integral de superfície no interior da região D .

A segunda generalização, que será tema do próximo capítulo, relaciona uma integral sobre uma superfície parametrizada regular S que limita uma região no espaço Ω com uma integral tripla no interior da região. Nesta generalização, ao invés de integral curvilínea teremos uma integral numa superfície e no lugar de integral dupla teremos integral tripla. Neste sentido dizemos que esta é uma generalização na dimensão.

Iniciemos, com a generalização da Integral Curvilínea.

5.1 Integral de Superfície de funções escalares

No Capítulo II, aplicamos a integral dupla para calcular a área de uma superfície parametrizada.

Recordemos a definição de superfície parametrizada regular.

Definição 5.1.1 Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ tal que os vetores

$$\mathbf{r}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)) \text{ e } \mathbf{r}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$$

são linearmente independentes para todo $(u, v) \in U$.

A imagem $\mathbf{r}(U) = S$ é chamada *superfície regular*. A expressão $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$ é chamada *elemento de área* da superfície parametrizada. Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua cujo domínio contém S a imagem de uma superfície parametrizada \mathbf{r} .

Sejam $R \subset U$ uma região contida no domínio de \mathbf{r} e $D = \mathbf{r}(R)$.

Definição 5.1.2 A Integral de Superfície de uma função escalar f em D é definida pela seguinte expressão:

$$\int \int_D f dS = \int \int_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

Esta definição é análoga à definição de integral em uma curva tratada no capítulo anterior. De maneira semelhante àquele caso é possível provar, usando a fórmula de mudança de variáveis para a integral dupla, que, se $D \subset S$ é a imagem de duas regiões por parametrizações regulares então o valor da integral de superfície é o mesmo.

Observe também que se $f = 1$ então a integral de superfície é igual à área da região que foi tratada nas aplicações da integral dupla (ver Definição 2.2.2).

Exemplo 5.2 Encontre a massa de uma placa D descrita pela imagem do disco $u^2 + v^2 \leq 1$ pela parametrização $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, cuja densidade é dada por $\rho(x, y, z) = \frac{1}{1+4x^2+4y^2}$. Observe que esta é a parametrização de uma região do parabolóide $z = x^2 + y^2$. Primeiramente calculamos os vetores geradores do plano tangente em cada ponto: $\mathbf{r}_u(u, v) = (1, 0, 2u)$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (0, 1, 2v)$ e o vetor normal: $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-2u, -2v, 1)$ e $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$. Por definição, a massa total é igual a:

$$\int \int_D \rho dS = \int \int_R \left[\frac{1}{1 + 4u^2 + 4v^2} \right] \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} dA$$

Para calcular a integral dupla, usamos coordenadas polares:

$$\int \int_R \left[\frac{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}{1 + 4u^2 + 4v^2} \right] dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{8r^2 + 1}} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{8r^2 + 1}} dr.$$

Calculando a integral por meio da substituição $t = 8r^2 + 1$, $dt = 16r dr$, obtemos:

$$2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{8r^2 + 1}} dr = 2\pi \int_1^9 \frac{1}{16\sqrt{t}} dt = \frac{\pi}{4} \sqrt{t} \Big|_1^9 = \frac{\pi}{2}.$$

Exercício 5.3 Calcule a integral de superfície da função $f(x, y, z) = y$ sobre o triângulo de vértices nos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. (Observe que os pontos estão contidos no plano $x + y + z = 1$.)

5.2 Integral de Superfície de campos vetoriais

Seja $X(x, y, z) = (F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z))$ um campo de vetores em \mathbb{R}^3 . Seja S uma superfície parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$ onde $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$. Definimos:

Definição 5.2.1 A Integral de Superfície do campo X na superfície S é definida pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int \int_S X \cdot d\mathbf{S} &= \int \int_R X(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv = \\ &= \int \int_R X(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv \end{aligned}$$

A integral de superfície definida acima de um campo X sobre uma superfície S é denominada o *fluxo* de X através de S .

Observação 5.4 Segue da definição que o fluxo depende da orientação da superfície, isto é, se usamos uma parametrização da superfície com vetor normal no sentido contrário, então o fluxo tem sinal oposto.

Vejamos a seguir um exemplo de como se calcula esta integral e, em seguida, a razão desta denominação.

Exemplo 5.5 Seja S a esfera de raio 1 e $X(x, y, z) = x\vec{i} + \vec{j}y + \vec{k}z$ um campo. Vamos calcular $\int \int_S X \cdot d\mathbf{S}$. Para isto consideramos a parametrização da esfera, utilizando coordenadas esféricas (ver 3.3), dada por:

$$r(u, v) = (\cos(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\text{sen}(v), \cos(v))$$

com $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq \pi$. Denominemos D a região do plano uv dada pelas equações acima.

Temos que $\mathbf{r}_u = (-\text{sen}(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\cos(v), 0)$ e $\mathbf{r}_v = (\cos(u)\cos(v), \text{sen}(u)\cos(v), -\text{sen}(v))$.

Consequentemente $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-\text{sen}^2(v)\cos(u), -\text{sen}^2(v)\text{sen}(u), -\text{sen}(v)\cos(v))$.

Em seguida calculamos $X(r(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$.

Como $X(r(u, v)) = (\cos(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\text{sen}(v), \cos(v))$, temos

$$\begin{aligned} X(r(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= \\ (\cos(u)\text{sen}(v), \text{sen}(u)\text{sen}(v), \cos(v)) \cdot (-\text{sen}(v))(-\text{sen}(v)\cos(u), -\text{sen}(v)\text{sen}(u), \cos(v)) &= \\ -(\text{sen}(v))(\text{sen}^2(v)\cos^2(u) + \text{sen}^2(v)\text{sen}^2(u) + \cos^2(v)) &= \\ = -\text{sen}(v) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Finalmente:

$$\int \int_S X \cdot d\mathbf{S} = \int \int_D -\text{sen}(v) \, du \, dv = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -\text{sen}(v) \, dv \, du = -4\pi$$

Observação 5.6 Observe que se $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é a parametrização uma superfície regular $D = \mathbf{r}(R)$ com vetor unitário da normal igual a $N(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$, então o produto escalar $X(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot N(u, v) = f(u, v)$ é a componente do campo de vetores X na direção do vetor normal à superfície. Se imaginarmos uma família de curvas tangentes ao campo vetorial X , então a função $f(u, v)$ pode ser interpretada como uma medida de quanto o campo entra (caso em que $f(u, v) > 0$ ou sai (respectivamente $f(u, v) < 0$) da superfície. Podemos, portanto, calcular a integral de superfície da função escalar $f(u, v)$ sobre D .

Definimos o *Fluxo* de X sobre a superfície como

$$\int \int_D X \cdot d\mathbf{S} = \int \int_R X(r(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, du \, dv = .$$

Mas temos as seguintes igualdades:

$$\int \int_D f \, dS = \int \int_D X(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot N(u, v) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$$

$$\int \int_D f dS = \int \int_R X(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

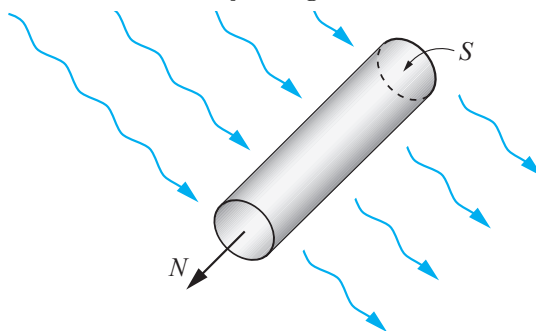
$$\int \int_D f dS = \int \int_D X(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA = \int \int_D X \cdot d\mathbf{S}$$

Ou seja temos duas expressões equivalentes para o fluxo. Vamos explorar este fato mais adiante.

Exercício 5.7 No Exemplo 5.5 calculamos o fluxo de X na esfera com vetor normal apontando para dentro, dado por $-\text{sen}(v)$. Calcule o fluxo de X na mesma esfera com o vetor normal apontando para fora.

Exercício 5.8 Calcule o fluxo de $X(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ sobre a esfera centrada na origem e de raio 2 com vetor normal apontando para fora.

Observação 5.9 Para entender melhor a Observação 5.6 acima considere a seguinte situação física. Imagine um cano de água de seção circular S e considere um campo X que expressa o escoamento de um líquido em cada ponto. O fluxo de X através de S mede a quantidade de água que está escoando através de S . Imaginemos X constante em cada ponto. Se X é normal ao cano o fluxo é zero significando que não há vasão de água através do cano. Se X está na direção da normal de S a vasão é máxima para fora ou para dentro do cano dependendo do sentido de X . Veja a figura.



SITUAÇÃO DE VASÃO ZERO

Exercício 5.10 Faça o esboço do cano e do fluxo do campo X quando a vasão é máxima para dentro do cano.

5.3 Teorema de Stokes

Nesta seção será exposta a primeira generalização do Teorema de Green de que falamos no início do Capítulo. Recordando a conclusão do Teorema de Green é que:

$$\int_C F dx + G dy = \int \int_R [G_x - F_y] dA.$$

Designamos o integrando $G_x - F_y$ como o rotacional do campo X . Esta expressão generaliza-se para dimensão três, o rotacional de um campo de vetores é um outro vetor definido por

Definição 5.3.1 Considere

$$X(x, y, z) = (F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z))$$

um campo de vetores em \mathbb{R}^3 . Chama-se rotacional de um campo X ao campo $rot(X)$ definido por:

$$rot(X) = (H_y - G_z, F_z - H_x, G_x - F_y)$$

É claro que se X é um campo vetorial no plano então $X(x, y, z) = (F(x, y), G(x, y), 0)$ então

$$rot(X) = (0, 0, G_x - F_y).$$

Há uma notação muito sugestiva para o rotacional, usando a notação do produto vetorial. Se $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ então,

$$rot(X) = \nabla \times X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F & G & H \end{vmatrix}$$

Exercício 5.11 Encontre $rot(X)$ para o campo $X(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

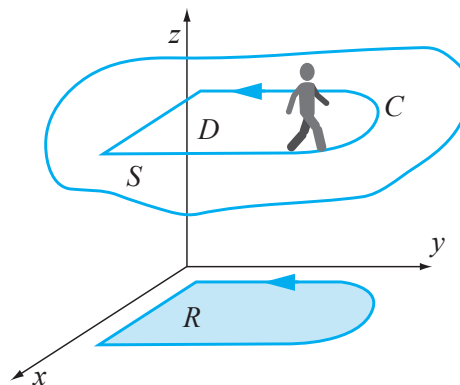
Antes de enunciar o Teorema de Stokes, vamos discutir um pouco o conceito de orientação de uma curva.

Vimos no capítulo sobre integral curvilínea, que o valor da integral troca de sinal quando mudamos o sentido de percurso da curva (orientação). Para generalizar o Teorema de Green, é preciso dar sentido ao conceito de orientação de uma curva contida em uma superfície. Observe que escolhida uma parametrização regular $\mathbf{r}(u, v)$ para a superfície, temos definido um campo vetorial normal á superfície:

$$N(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

Dada uma curva regular fechada $C \subset S$, que limita uma região D simples na superfície, podemos escolher uma parametrização $\gamma(t)$ para C .

Observe que $N(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$ são vetores ortogonais, de modo que $N(\gamma(t)) \times \gamma'(t) \neq 0$ é um terceiro vetor ortogonal a ambos.



Definição 5.3.2 Nas condições descritas acima, dizemos que a parametrização $\gamma(t)$ dita *positiva na superfície* se a matriz cujas linhas são $\gamma'(t)$, $N(\gamma(t)) \times \gamma'(t)$ e $N(\gamma(t))$ possui determinante positivo.

Equivalentemente, se o produto misto $\gamma'(t) \cdot [N(\gamma(t)) \times \gamma'(t)] \times N(\gamma(t)) > 0$.

Uma interpretação pictórica desta definição: a parametrização é dita *positiva* se ao caminharmos ao longo de γ a região D fica à nossa esquerda.

Este conceito de orientação coincide com o formulado no capítulo anterior, pois o vetor normal ao plano xOy é igual ao vetor $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ e uma curva neste plano tem vetor tangente igual a $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), 0)$.

Portanto $\mathbf{k} \times \gamma'(t) = (-y'(t), x'(t), 0)$ e

$$\gamma'(t) \cdot [N(\gamma(t)) \times \gamma'(t)] \times N(\gamma(t)) = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & 0 \\ -y'(t) & x'(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$$

Teorema 5.3.1 (Stokes) *Sejam $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ a parametrização de uma superfície S regular e $D = \mathbf{r}(R)$ uma região simples limitada por uma curva fechada regular por partes C orientada positivamente.*

Então

$$\oint_C Fdx + Gdy + Hdz = \int \int_D \text{rot}(X) \cdot dS = \int \int_D \text{rot}(X) \cdot NdA$$

Apresentaremos a seguir uma demonstração do Teorema de Stokes. Antes porém, vejamos alguns exemplos e exercícios de aplicação.

Exemplo 5.12 Se $X(x, y, z) = (F(x, y), G(x, y), 0)$ então $\text{rot}(X) = (0, 0, G_y(x, y) - F_y(x, y))$ é ortogonal ao plano xOy . Seja C uma curva parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$ no plano xOy , orientada positivamente, que limita uma região $R \subset \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C F(x, y)dx + G(x, y)dy = \int \int_R \text{rot}(X) dS = \int \int_R [G_y(x(t), y(t)) - F_y(x(t), y(t))] dA.$$

Este é precisamente o enunciado do Teorema de Green. Vemos assim que o Teorema de Stokes é uma generalização do Teorema de Green.

Exemplo 5.13 $\oint_C ydx - xdy + [\cos(z^2) - xy]dz$ para C a intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente.

Solução Usaremos o Teorema de Stokes. C limita a região R do plano definida por $x^2 + y^2 \leq 1$ e $z = 1 - x - y$ (um gráfico). Um vetor normal ao plano é dado por $(1, 1, 1)$ e o campo vetorial é igual a $X = (y, -x, \cos(z^2) - xy)$. Logo, $\text{rot}(X) = (-x, y, -2)$ (verifique!). Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C ydx - xdy + [\cos(z^2) - xy]dz = \int \int_R (-x, y, -2) \cdot (1, 1, 1) dA$$

Ou

$$\oint_C ydx - xdy + [\cos(z^2) - xy]dz = \int \int_R (-x + y - 2) dA.$$

Usando coordenadas polares, a região R é descrita pelas desigualdades $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 1$. Temos assim,

$$\oint_C ydx + -xdy + [\cos(z^2) - xy]dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r\cos(\theta) + r\sen(\theta) - 2)rdrd\theta.$$

$$\oint_C ydx + -xdy + [\cos(z^2) - xy]dz = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^3}{3}\cos(\theta) + \frac{r^3}{3}\sen(\theta) - 2r\right]_0^1 d\theta =$$

$$\oint_C ydx + -xdy + [\cos(z^2) - xy]dz = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}\cos(\theta) + \frac{1}{3}\sen(\theta) - 2\right]d\theta = -4\pi.$$

Exemplo 5.14 Encontre $\oint_C x^2ydx + y^2zdy - z^2xdz$ para C a intersecção do plano $x + y + z = 1$ com os planos xOy , xOz e yOz orientada positivamente.

Solução: Escrevendo o campo vetorial $X(x, y, z) = (x^2y, y^2z, z^2x)$, temos $\nabla \times X = (-y^2, z^2, -x^2)$. Verifique que a curva C limita a região triangular D do plano $z = 1 - x - y$ definida pelas seguintes desigualdades: $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$. C é um triângulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. A orientação positiva em relação à superfície significa que o triângulo é percorrido de A para B , de B para C e de C para A . Verifique também que D é igual a imagem de triângulo R definido pelas desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$.

Utilizando o Teorema de Stokes e também que $z = 1 - x - y$, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C x^2ydx + y^2zdy - z^2xdz &= \int \int_D (\nabla \times X) \cdot NdS = \\ &= \int \int_R (-y^2, (1-x-y)^2, -x^2) \cdot (1, 1, 1) dA \end{aligned}$$

Para obter os limites de integração, descrevemos a região R pelas seguintes desigualdades: $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq 1 - x - y$ e escrevemos:

$$\begin{aligned} \oint_C x^2ydx + y^2zdy - z^2xdz &= \int \int_R [-y^2 + (1-x-y)^2 - x^2] dA = \\ &= \int \int_R [1 - 2x - 2y + 2xy] dA \end{aligned}$$

Finalmente, calculando a integral dupla (a cargo do leitor):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} [1 - 2x - 2y + 2xy] dy dx &= \int_0^1 [1 - x - 2x(1-x) - (1-x)^2 + x(1-x)^2] dx = \\ &= \int_0^1 [-x^2 + x^3] dx = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.15 Seja $X(x, y, z) = (z^3, -y^2, x^2)$ um campo vetorial. Encontre $\int_D \text{rot}(X) dS$ para D o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ com vetor normal apontando para cima.

Solução: A região D é limitada pelo círculo $C := \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$, que orientamos positivamente em relação ao interior da região D .

Pelo Teorema de Stokes $\int \int_D \text{rot}(X) dS = \int_C z^3 dx - y^2 dy + x^2 dz$.

Para calcular a integral curvilínea, usamos a parametrização

$\theta \mapsto (\cos(\theta), \text{sen}(\theta), 0)$ do círculo para obter:

$$\int_C z^3 dx - y^2 dy + x^2 dz = \int_0^{2\pi} [-\text{sen}^2(\theta)\cos(\theta)] d\theta = -\frac{\text{sen}^3(\theta)}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

É interessante (mas mais longo) calcular diretamente $\int \int_D \text{rot}(X) dS$ e confrontar os resultados.

Demonstração:

A apresentação desta demonstração tem como objetivo proporcionar um melhor entendimento dos conceitos e ideias envolvidos. Em particular, pretende-se enfatizar a interpretação de que estamos generalizando o Teorema Fundamental do Cálculo. Veremos como o Teorema de Stokes aplicado a uma situação especial, segue do Teorema de Green. Este por sua vez, é consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, também aplicado em uma situação especial. A leitura desta demonstração não é essencial, mas para utilizar corretamente o Teorema é preciso saber verificar as circunstâncias em que ele pode ser aplicado.

Primeiramente desenvolvemos a integral de superfície do lado direito para esclarecer o que deve ser demonstrado:

$$\int \int_D \text{rot}(X) \cdot N dA = \int \int_R (H_y - G_z, F_z - H_x, G_x - F_y) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$

Lembrando que

$\mathbf{r}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$ e $\mathbf{r}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$, então

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (y_u z_v - y_v z_u, z_u x_v - z_v x_u, x_u y_v - x_v y_u)$$

O roteiro da demonstração é bastante simples.

Calculamos cada uma das parcelas de

$$\oint_C F dx + \int_C G dy + \int_C H dz$$

Usamos o Teorema de Green em cada parcela para passar da integral curvilínea para a integral dupla.

Finalmente, somamos as três parcelas para obter exatamente o lado direito da igualdade.

Faremos o cálculo para a primeira parcela, $\oint_C F dx$; para as demais, o cálculo é semelhante.

Queremos mostrar que

$$\oint_C F dx = \int \int_R [F_y(y_u x_v - x_u y_v) + F_z(z_u x_v - x_u z_v)] dA$$

Escreva a parametrização de C da forma

$\alpha(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$.

A integral curvilínea se escreve:

$$\oint_C F dx = \int_{\alpha} F((x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))) x'(t) dt$$

Pela Regra da Cadeia $x'(t) = x_u u'(t) + x_v v'(t)$, portanto, substituindo temos:

$$\oint_C F dx = \int_{\alpha} F((x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))) [x_u u'(t) + x_v v'(t)] dt$$

Ou

$$\oint_C F dx = \int_{\alpha} F(\alpha(t)) x_u u'(t) dt + F(\alpha(t)) x_v v'(t) dt = \int_{\alpha} F(\alpha(t)) x_u du + F(\alpha(t)) x_v dv$$

Esta última é uma integral curvilínea no plano (u, v) em um caminho α que limita uma região simples R .

Nesta região, aplicamos o Teorema de Green:

$$\oint_{\alpha} F(\alpha(t)) x_u du + F(\alpha(t)) x_v dv = \int \int_R \left[\frac{\partial}{\partial u} (F(\mathbf{r}(u, v)) x_v) - \frac{\partial}{\partial v} (F(\mathbf{r}(u, v)) x_u) \right] dA$$

Note que a primeira parcela é igual a

$$\frac{\partial}{\partial u} [F((x(u, v), y(u, v), z(u, v))) x_v] = [F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u] x_v + F x_{uv}$$

Enquanto a segunda é igual a

$$\frac{\partial}{\partial v} [F((x(u, v), y(u, v), z(u, v))) x_u] = [F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v] x_u + F x_{uv}$$

Subtraindo a segunda expressão da primeira, e omitindo o argumento $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de F , obtemos, após simplificações algébricas:

$$\frac{\partial}{\partial u} [F x_v] - \frac{\partial}{\partial v} [F x_u] = F_y [y_u x_v - x_u y_v] + F_z [z_u x_v - x_u z_v]$$

Isto é:

$$\oint_C F dx = \int \int_R [F_y (y_u x_v - x_u y_v) + F_z (z_u x_v - x_u z_v)] dA$$

Procedendo analogamente para as demais parcelas temos:

$$\oint_C G dy = \int \int_R [G_x (x_u y_v - x_v y_u) + G_z (z_u y_v - z_v y_u)] dA$$

$$\oint_C H dz = \int \int_R [H_x (x_u z_v - x_v z_u) + H_y (y_u z_v - y_v z_u)] dA$$

Finalmente, somando as três parcelas e coletando os termos comuns obtemos

$$\begin{aligned} & \oint_C F dx + G dy + H dz = \\ & = \int \int_R [H_y - G_z] [y_u z_v - y_v z_u] + [F_z - H_x] [z_u x_v - z_v x_u] + [G_x - F_y] [x_u y_v - x_v y_u] dA \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$\oint_C F dx + G dy + H dz = \int \int_D \text{rot}(X) \cdot N dA.$$

Como queríamos demonstrar. □

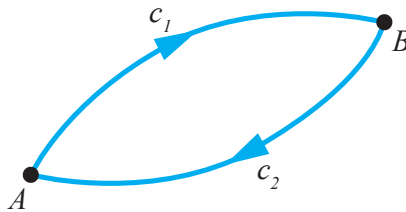
5.4 Campos conservativos no espaço

Vimos na Seção 4.7, Teorema 4.33, que a Integral Curvilínea de alguns campos no plano ou no espaço não dependem do caminho $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$ ao longo do qual a integral é calculada mas apenas dos pontos inicial e final $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. Estes campos, chamados conservativos, são importantes na Física pois o trabalho independe da trajetória. Vamo a seguir, utilizar o Teorema de Stokes para caracterizar os Campos Conservativos no Espaço.

Teorema 5.16 *Seja $X = (F, G, H)$ um campo vetorial no espaço com componentes contínuas e diferenciáveis em uma aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, exceto possivelmente em um número finito de pontos. Então são equivalentes:*

1. $\oint_C X \cdot dr = 0$ para toda curva fechada C regular por partes contida em U .
2. A integral curvilínea de X do ponto A até o ponto B independe da curva regular por partes que liga A a B .
3. X é um campo gradiente de alguma função f em U .
4. $\text{rot}(X) = 0$

Demonstração: A demonstração deste teorema é praticamente idêntica a demonstração do Teorema 4.7.1. A maior diferença é que aqui utilizamos o Teorema de Stokes em vez do Teorema de Green. Vamos mostrar que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow 3 \Rightarrow (4) \Rightarrow (1). Inicialmente para ver que (1) \Rightarrow (2), considere duas curvas C_1 e C_2 regulares por partes contidas em U e unindo os pontos A e B (ver figura).



Pela Observação 4.23, dada a curva C_2 , existe a curva $-C_2$ uma curva idêntica a C_2 mas com ponto inicial B e ponto final A . Então $C = C_1 \cup -C_2$ é uma curva fechada e por (1) temos que:

$$\oint_C X \cdot dr = \int_{C_1} X \cdot dr - \int_{C_2} X \cdot dr = 0.$$

Segue que $\int_{C_1} X \cdot dr = \int_{C_2} X \cdot dr$.

Para mostrar que (2) \Rightarrow (3), utilizamos um argumento análogo à demonstração do item correspondente no Teorema 4.7.1, que omitiremos aqui.

A implicação (3) \Rightarrow (4), será vista no Exercício 5.

Finalmente vamos mostrar que (4) \Rightarrow (1). Para isto seja C uma curva fechada regular por partes e seja S uma superfície cuja fronteira é C . Vamos supor que se X possui pontos excepcionais onde o campo não é contínuo ou diferenciável que S evitas estes pontos.

É sempre possível conseguir isto, mas não demonstraremos este fato aqui. Pelo Teorema de Stokes temos

$$\oint_C X \cdot dr = \int \int_S \text{rot}(X) \cdot dS = 0.$$

□

Exemplo 5.17 Calcule a integral do campo $X(x, y, z) = (yz + x, xz + y, xy + z^2)$ ao longo da curva C obtida como interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ com o plano $y = 0$.

Solução: A curva C é um semicírculo no plano $y = 0$. Consideremos a curva orientada de $(-1, 0, 0)$ para $(1, 0, 0)$. Observe que $\text{rot}(X) = 0$ pois

$$\text{rot}(X) = \nabla \times X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + x & xz + y & xy + z^2 \end{vmatrix} = (x - x, -(y - y), z - z) = 0.$$

Pelo teorema anterior existe uma função potencial f para o campo X , ou seja, tal que $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = X$. Vamos calculá-la.

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = yz + x$ temos que $f(x, y, z) = yzx + \frac{x^2}{2} + A(y, z)$ onde $A(y, z)$ é uma função que não depende de x . Analogamente trabalhando com as outras derivadas parciais de f , que conhecemos, obtemos: $f(x, y, z) = yzx + \frac{y^2}{2} + A(x, z)$ e $f(x, y, z) = yzx + \frac{z^3}{3} + A(x, y)$. Comparando vemos que uma função potencial para X pode ser dada por:

$$f(x, y, z) = yzx + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}.$$

Como também pelo teorema anterior sabemos que a integral não depende do caminho, mas apenas dos pontos inicial e final temos que:

$$\int_C X \cdot dr = f(-1, 0, 0) - f(1, 0, 0) = 0.$$

5.5 EXERCÍCIOS

1. Encontre o fluxo do campo $X(x, y, z) = \mathbf{k}$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com vetor normal apontando para o exterior da bola.
2. Encontre o fluxo do campo $X(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ sobre o cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ com orientação para fora.
3. Encontre o fluxo do campo $X(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ sobre a parte do gráfico de $z = 4 - x^2 - y^2$ que está sobre o quadrado $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima.
4. Para cada campo de vetores abaixo, encontre $\text{rot}(X)$:
 - (a) $X(x, y, z) = (x, y, z)$
 - (b) $X(x, y, z) = (xy, yz, zx)$
 - (c) $X(x, y, z) = (e^{-x}, e^x, e^z)$
5. Seja $X(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ o campo gradiente para $f(x, y, z)$ uma função com derivadas parciais de ordem dois contínuas. Mostre que $\text{rot}(X) = 0$.
6. Utilize o teorema de Stokes para calcular:

(a)

$$\int_C ydx + zdy + xdz$$

onde C é a curva de interseção do plano $x + y = 4$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4(x + y)$.

(b)

$$\int_C ydx + zdy + xdz$$

onde C é a curva de interseção do plano $x + y = 2$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. (Sugestão: faça um esboço da curva de interseção e da área que ela envolve e observe que esta área é fácil de calcular.)

7. Encontre $\int_C e^{-x}dx + e^x dy + e^z dz$ para C a interseção do plano $2x + y + 2z = 2$ com os planos coordenados, orientada positivamente.
8. Encontre $\int_C (y - z)dx - (z - x)dy + (x - y)dz$ para C a interseção do plano $x + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente.
9. Seja $F(x, y, z) = (2xz + y^2, 2xy + 3y^2, e^z + x^2)$.
 - (a) Verifique se F é um campo conservativo.
 - (b) Determine uma função potencial para F .
 - (c) Seja C a curva obtida como interseção da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq -4$ com o plano $y = 2$. Calcule $\int_C F \cdot dr$ especificando uma orientação para C .

6

Teorema da Divergência (Gauss)

AULA 6: TEOREMA DA DIVERGÊNCIA (GAUSS)

Objetivos 6.1 Os objetivos desta Aula são:

- introduzir os conceito de divergência de uma campo vetorial: a divergência é uma taxa de espalhamento de um campo vetorial;
- relacionar o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada com a integral tripla da divergência do campo na região limitada pela superfície (Teorema da Divergência ou Teorema de Gauss);

6.1 Divergência de um campo

Nesta aula será exposta a segunda generalização do teorema de Green que foi proposta no início do capítulo anterior. Isto é, a que relaciona o fluxo de um campo sobre uma superfície S com uma integral tripla no interior da região Ω do espaço limitada pela superfície.

Voltemos à situação bi-dimensional: imagine que temos um campo vetorial $X = (F, G)$ em \mathbb{R}^2 e uma curva simples e fechada, C , imagem de uma parametrização regular $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

O Teorema de Green nos diz que

$$\int_C -Gdx + Fdy = \int \int_R [F_x + G_y]dA.$$

Observe o sinal e a ordem em que foi escrita a integral curvilínea à esquerda da igualdade. Esta integral curvilínea pode ser interpretada do seguinte modo: Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ é o vetor tangente ao caminho e o vetor $(y'(t), -x'(t))$ é vetor ortogonal ao caminho. Além disso, o produto escalar do campo X com o vetor normal é igual a $X \cdot n = Fy' - Gx'$. O sinal do produto escalar $X \cdot n$ nos diz se o campo está “entrando” (negativo) ou “saindo” da região R . Portanto, a integral curvilínea $\int_C -Gdx + Fdy$ é o *fluxo* do campo sobre a curva. O fluxo pode ser interpretado como uma medida do espalhamento do campo em relação à curva. Isto é de certa forma medido pela função $F_x + G_y$ que aparece na integral dupla à direita.

As considerações acima motivam a seguinte definição:

Definição 6.1.1 Chama-se divergência de um campo vetorial $X = (F, G, H)$ a seguinte função escalar: $div(X) = F_x + G_y + H_z$

Exemplo 6.2 Se $X(x, y, z) = (x, y, z)$, então $div(X) = F_x + G_y + H_z = 1 + 1 + 1 = 3$

Exercício 6.3 Se $X(x, y, z) = (-x, -y, -z)$, calcule $div(X)$

6.2 Teorema da Divergência de Gauss

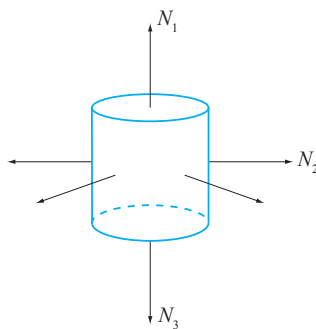
Estamos prontos para enunciar Teorema da Divergência, também conhecido como Teorema de Gauss, que relaciona o fluxo de um campo sobre uma superfície com a divergência na região limitada pela superfície.

Teorema 6.2.1 (Divergência de Gauss) *Seja $X(x, y, z)$ um campo vetorial com derivadas parciais contínuas definido em uma região $U \subset \mathbb{R}^3$. Suponha que Ω seja uma região contida em U limitada pela união finita de superfícies regulares orientadas com vetor normal apontando para fora da região Ω . Então,*

$$\int \int_S X \cdot N dA = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dV$$

Antes de ver uma demonstração do Teorema da Divergência, vejamos alguns exemplos e exercícios.

Exemplo 6.4 Considere a superfície $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ regular por partes, definida por: $S_1 := \{x^2 + y^2 = 1; 0 \leq z \leq 1\}$, $S_2 := \{x^2 + y^2 \leq 1; z = 0\}$ e $S_3 := \{x^2 + y^2 \leq 1; z = 1\}$.



A orientação de S "para fora" é obtida tomando-se os seguintes vetores normais:

$N_1 = (-\operatorname{sen}(\theta), \operatorname{cos}(\theta), 0)$ em S_1 ; $N_2 = (0, 0, -1)$ em S_2 e $N_3 = (0, 0, 1)$ em S_3 .

Seja $X(x, y, z) = (x, y, z)$ (campo radial), com $\operatorname{div}(X) = 1 + 1 + 1 = 3$. Pelo Teorema da Divergência o cálculo do fluxo de X sobre S é igual à integral tripla da divergência no cilindro sólido Ω limitado por S , isto é:

$$\int \int_S X \cdot N dA = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dV = 3 \int \int \int_{\Omega} dV = \operatorname{vol}(\Omega) = 3\pi.$$

Exemplo 6.5 Sejam $y(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ e $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ a mesma superfície do exemplo anterior.

Como $\operatorname{div}(X) = 2x + 2y + 2z$, pelo Teorema da Divergência:

$$\int \int_S X \cdot N dA = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dV = 2 \int \int \int_{\Omega} [x + y + z] dV$$

Usando coordenadas cilíndricas, $x = r \operatorname{cos}(\theta)$, $y = r \operatorname{sen}(\theta)$, z

$$\begin{aligned} 2 \int \int \int_{\Omega} [x + y + z] dV &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 (r \operatorname{cos}(\theta) + r \operatorname{sen}(\theta) + z) r dz dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^2 (\operatorname{cos}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)) + \frac{r}{2}] dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} (\operatorname{cos}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)) + \frac{1}{4} \right] dr d\theta = \pi \end{aligned}$$

Exemplo 6.6 Encontre o fluxo do campo $X(x, y, z) = (\cos(y) + z^5)\mathbf{i} + (\sin(xz) + y^2)\mathbf{j} + (xe^{xy} + z)\mathbf{k}$ sobre a superfície S , regular por partes, definida pelas equações $x = 4 - y^2$, $x + z = 6$, o plano yOz e xOy com vetor normal apontando para fora da superfície.

Solução: Faça um esboço da superfície S . Lembre-se que uma superfície em \mathbb{R}^3 definida por uma equação que envolve apenas duas variáveis é uma superfície cilíndrica. Deste modo, por exemplo, a equação $x = 4 - y^2$ representa um cilindro parabólico.

Estamos em condições de usar o Teorema da Divergência, pois o campo X está definido em \mathbb{R}^3 . Como $\operatorname{div}(X) = 2y + 1$, se denotamos por Ω a região interior à superfície S , então:

$$\int \int_S X \cdot N dS = \int \int \int_{\Omega} (2y + 1) dV.$$

Ω pode ser descrito pelas desigualdades: $0 \leq z \leq 6 - x$, $0 \leq x \leq 4 - y^2$ e $-2 \leq y \leq 2$ (verifique isto!)

portanto,

$$\begin{aligned} \int \int_S X \cdot N dS &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{6-x} (2y + 1) dz dx dy. \\ \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{6-x} (2y + 1) dz dx dy &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} [(2y + 1)(6 - x)] dx dy \\ \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} [(2y + 1)(6 - x)] dx dy &= \int_{-2}^2 (2y + 1) \left[6(4 - y^2) - \frac{(4 - y^2)^2}{2} \right] dy \\ \int_{-2}^2 (2y + 1) \left[6(4 - y^2) - \frac{(4 - y^2)^2}{2} \right] dy &= \int_{-2}^2 \left[-y^5 - \frac{y^4}{2} - 4y^3 - 2y^2 + 32y + 16 \right] dy \end{aligned}$$

Observe que o intervalo de integração é simétrico, $[-2, 2]$, portanto a integral das funções ímpares é nula.

Logo

$$\int_{-2}^2 \left[-y^5 - \frac{y^4}{2} - 4y^3 - 2y^2 + 32y + 16 \right] dy = \frac{694}{15}$$

Exercício 6.7 Encontre o fluxo do campo $X(x, y, z) = (x, y, z)$ sobre a esfera com centro $(0, 0, 0)$ e raio igual a R , com normal apontando para fora.

Demonstração do Teorema da Divergência:

Analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema de Green, vamos supor que que a região Ω no espaço seja simples e que possa ser escrita simultaneamente como uma região entre gráficos, entre em cada uma das direções Ox , Oy ou Oz .

Isto significa que Ω se expressa, simultaneamente da seguinte forma:

$\Omega := \{h_1(y, z) \leq x \leq g_1(y, z), (y, z) \in R_1 \subset \mathbb{R}^2\}$, com R_1 a região do plano (y, z) ou $x = 0$ sobre a qual projeta-se a região sólida Ω ou

$\Omega := \{h_2(x, z) \leq y \leq g_2(x, z), (x, z) \in R_2 \subset \mathbb{R}^2\}$, R_2 imagem de Ω pela projeção ortogonal sobre o plano de coordenadas (x, z) ou

$\Omega := \{h_3(x, y) \leq z \leq g_3(x, y), (x, y) \in R_3 \subset \mathbb{R}^2\}$, R_3 imagem de Ω pela projeção ortogonal sobre o plano de coordenadas (x, y) .

A demonstração neste caso é similar à que foi apresentada para o Teorema de Stokes. Isto é, se $X = (F, G, H) = F\mathbf{i} + G\mathbf{j} + H\mathbf{k}$, calculamos cada uma das parcelas de $\int \int \int_{\Omega} [F_x + G_y + H_z] dV$ separadamente e provamos que

$$\begin{aligned}\int \int \int_{\Omega} F_x dV &= \int \int_S F\mathbf{i} \cdot N dA \\ \int \int \int_{\Omega} G_y dV &= \int \int_S G\mathbf{j} \cdot N dA \\ \int \int \int_{\Omega} H_z dV &= \int \int_S H\mathbf{k} \cdot N dA\end{aligned}$$

Em cada um dos casos usamos a descrição mais conveniente de Ω , para que possamos usar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Vemos também como é importante o Teorema de Fubini, que permite-nos escolher a *ordem* de integração.

O resultado é obtido somando-se as três igualdades acima.

Provemos a primeira igualdade, as outras seguem de maneira análoga:

Escrevemos dA_{yz} para destacar que a ordem em que calculamos a integral repetida: primeiramente calculamos a integral em relação a x , em seguida calculamos a integral dupla sobre a região R_1 contida no plano (y, z) .

Ela indica também que a integral de superfície é calculada sobre a imagem das superfícies parametrizadas $(y, z) \mapsto (h_1(y, z), y, z)$ e $(y, z) \mapsto (g_1(y, z), y, z)$ respectivamente.

$$\int \int \int_{\Omega} F_x dV = \int \int_{R_1} \int_{h_1(y,z)}^{g_1(y,z)} F_x dx dA_{yz}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int \int \int_{\Omega} F_x dV = \int \int_{R_1} [F(g_1(y, z), y, z) - F(h_1(y, z), y, z)] dA_{yz}$$

Por outro lado, o vetor unitário da normal N aos gráficos de $g_1(y, z)$ e de $h_1(y, z)$ são os vetores unitários de $(1, -\frac{\partial g_1}{\partial y}, -\frac{\partial g_1}{\partial z})$ e de $(-1, \frac{\partial h_1}{\partial y}, \frac{\partial h_1}{\partial z})$.

Por que a diferença dos sinais? Porque estamos tomando o vetor normal apontando *para fora* da região Ω .

Assim a expressão para o produto escalar $F\mathbf{i} \cdot N$ sobre cada um dos gráficos é:

$$F(g_1(y, z), y, z) \text{ e } -F(h_1(y, z), y, z)$$

$$\int \int_S F\mathbf{i} \cdot N dA = \int \int_{R_1} [F(g_1(y, z), y, z) - F(h_1(y, z), y, z)] dA_{yz}$$

Usando a igualdade, temos

$$\int \int \int_{\Omega} F_x dV = \int \int_{R_1} [F(g_1(y, z), y, z) - F(h_1(y, z), y, z)] dA_{yz} = \int \int_S F\mathbf{i} \cdot N dA$$

Como foi dito anteriormente, o mesmo raciocínio é empregado para obter as demais igualdades. Concluindo a prova do Teorema da Divergência para o caso especial da região Ω acima.

Para o caso de regiões mais gerais, seguimos o que foi feito no teorema de Green, por meio da decomposição da região dada em regiões do tipo acima.

Para isso, a *orientação* exerce um papel fundamental.

6.3 Teorema da Divergência de Gauss em regiões mais gerais

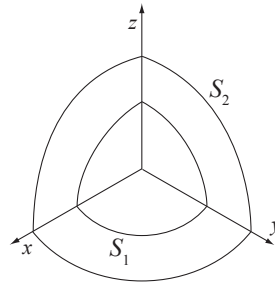
Considere o seguinte exemplo.

Exemplo 6.8 Vamos tentar aplicar o Teorema 6.2.1 para calcular o fluxo do campo $X(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ sobre a esfera centrada na origem e de raio 2 com vetor normal apontando para fora. Ao fazer isto temos um problema já que o campo X não está definido na origem e portanto o Teorema 6.2.1 não se aplica a este campo, se nos considerarmos que Ω é a esfera de raio 2.

Podemos utilizar o Teorema da Divergência de Gauss, em regiões mais gerais do que as que consideramos até agora.

Seja Ω a região do \mathbb{R}^3 definida por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$



Observe que a fronteira $\partial\Omega$ de Ω é agora constituída por duas esferas uma exterior S_2 de raio 2 e uma interior S_1 de raio 1. Como o campo X só não está definido na origem e satisfaz as hipóteses do Teorema 6.2.1 podemos aplicar o Teorema de Gauss nesta região mais geral.

Para isto vamos utilizar o Exercício 5.10 que mostra que o fluxo do campo X é 4π para qualquer esfera de raio a independentemente do raio da esfera. Faça agora o seguinte exercício:

Exercício 6.9 Mostre que a divergência do campo X na região Ω acima é zero.

Temos então:

$$\int \int_{\partial\Omega} X \cdot N dA = \int \int_{S_1 \cup S_2} X \cdot N dA = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(X) dV = 0$$

Mas como

$$\int \int_{S_1 \cup S_2} X \cdot N dA = \int \int_{S_1} X \cdot N dA + \int \int_{S_2} X \cdot N dA$$

e $\int \int_{S_2} X \cdot N dA = - \int \int_{S_1} X \cdot N dA = 4\pi$, um resultado que já conhecíamos.

Mas agora podemos obter um resultado bastante surpreendente. Seja Ω a região do espaço limitada internamente pela esfera S_1 de raio 1 e externamente por qualquer superfície S tal que S_1 está no interior da região limitada por S .

Podemos facilmente utilizando o que já fizemos calcular $\int \int_S X \cdot N dA$. Pelo Teorema da Divergência de Gauss temos:

$$\int \int_{\partial\Omega} X \cdot N dA = \int \int_{S_1 \cup S} X \cdot N dA = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dV = 0$$

Mas como

$$\int \int_{S_1 \cup S} X \cdot N dA = \int \int_{S_1} X \cdot N dA + \int \int_S X \cdot N dA$$

e $\int \int_{S_1} X \cdot N dA = -4\pi$, Temos

$$\int \int_S X \cdot N dA = 4\pi$$

6.4 EXERCÍCIOS

- Se $X(x, y, z) = (z, y, x)$, mostre que $\operatorname{div}(X) = 0$
 - Se $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ mostre que $\operatorname{div}(X) = 0$.
- Vamos utilizar a notação $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
 - Prove que se U é uma função com derivadas de segunda ordem contínuas, então $\operatorname{rot}(\nabla U) = 0$.
 - É verdade que $\operatorname{div}(\nabla U) = 0$?
 - Mostre que podemos escrever $\operatorname{div}(X) = \nabla \cdot X$
 - Se $X(x, y, z) = (\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2})$, calcule $\operatorname{div}(X)$.
- Prove que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}X) = 0$
- Calcule o fluxo do campo $X(x, y, z) = xy^2\mathbf{j} + yz^2 + zx^2\mathbf{k}$ sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com vetor normal apontando para o exterior da bola.
- Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo $X(x, y, z) = (x^3, 0, zx^2)$ sobre a esfera centrada na origem e de raio 1 com vetor normal apontando para fora.
- É possível calcular o fluxo do campo $X(x, y, z) = (\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2})$ sobre a esfera centrada na origem e de raio 1 com vetor normal apontando para fora, utilizando o Teorema de Gauss? Por que?
 - E na esfera $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1$? Explique.
 - É verdade que os fluxos do campo X nas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ são iguais? Explique.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Marsden, Jerrold e Tromba, Anthony: *Vector Calculus*, 2nd Edition, W.H. Freeman & Company, San Francisco, 1981.
- [2] Pinto, Diomara e Morgado, Maria Cândido Ferreira: *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*, Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 1997.
- [3] Stewart, James: *Cálculo, Volume 2*, 6ª edição norte-americana, Editora Cengage Learning, SP, 2010.
- [4] Fusaro Pinto, Márcia Maria, *Introdução ao Cálculo Integral*, Editora UFMG, Belo Horizonte, 2010.
- [5] Avritzer, Dan, *Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma visão geométrica*, Tomo I, Editora UFMG, Belo Horizonte, 2009.
- [6] Avritzer, Dan, *Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma visão geométrica*, Tomo II, Editora UFMG, Belo Horizonte, 2009.

Composto em caracteres Aller, Arial, Calibri, PT Sans e Times New Roman.
Editorado pelo Centro de Apoio à Educação a Distância da UFMG (CAED-UFMG).
Capa em Supremo, 250g, 4 X 0 cores - Miolo Off Set 120g, 2X2 cores.

2012