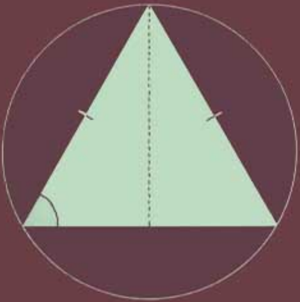
PROBLEMAS de ANÁLISIS MATEMÁTICO

Límite · Continuidad · Derivabilidad

L. D. Kudriávtsev, A. D. Kutásov,
V. I. Chejlov, M. I. Shabunin



Editorial Mir Moscú

Problemas de análisis matemático

Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов,
В. И. Чехлов, М. И. Шабунин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Предел
Непрерывность
Дифференцируемость

Под редакцией Л. Д. Кудрявцева

Издательство «Наука»

L. D. Kudriávtsev, A. D. Kutásov,
V. I. Chejlov, M. I. Shabunin

PROBLEMAS de ANÁLISIS MATEMÁTICO

Límite
Continuidad
Derivabilidad

Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por
el ingeniero Antonio Elías Ballesteros

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000664-8

INDICE

PROLOGO

El manual «Problemas de análisis matemático» que ofrecemos consta de cuatro capítulos.

El primero contiene material cuya asimilación tiene el objetivo de preparar al lector para resolver problemas de análisis matemático. En el segundo capítulo se dan problemas referentes a tales conceptos como el límite y la continuidad de las funciones. En los capítulos tercero y cuarto se han reunido problemas relacionados a las nociones de derivada y diferencial y al empleo de las derivadas para investigar funciones.

Al confeccionar el manual los autores se basaron en la experiencia de muchos años acumulada en la enseñanza del Curso de análisis matemático en el Instituto Fisicotécnico de Moscú, IFTM. El manual contiene gran cantidad de problemas originales creados por los profesores de la cátedra de matemática superior del IFTM y empleados al trabajar con los estudiantes. Parte considerable de los problemas del manual ha sido preparada por los autores. En el manual se han incluido problemas tomados de publicaciones ampliamente conocidas, en particular del manual de problemas de análisis matemático de B. P. Demidovich y del manual de problemas de matemática superior de N. M. Günter y P. O. Kuzmin.

Cada apartado del manual contiene material teórico de resolución de problemas típicos y problemas para el trabajo individual. Los problemas de cada apartado están agrupados por temas y cada grupo de ellos está dispuesto en orden de creciente complejidad: de los más sencillos a los de suficiente complejidad.

En el manual se presta gran atención a los problemas que favorecen a la asimilación de las nociones fundamentales del análisis matemático. El gran conjunto de problemas que ilustran uno u otro tema ofrece al profesor la posibilidad de utilizar el manual para operar en el aula, para tareas individuales y al componer los trabajos de control.

En lo fundamental el manual está destinado a los centros de enseñanza superior con programa ampliado de matemáticas. La presencia de una gran cantidad de problemas de diversa complejidad proporciona la posibilidad de utilizar el manual tanto en las universidades como en los centros de enseñanza técnica.

Los autores expresan su agradecimiento al colectivo de la cátedra de matemática superior del IFTM, cuya labor fructífera de muchos años ha contribuido en alto grado a la aparición de este manual.

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

§ 1. Conjuntos. Combinatoria

1. Conjuntos. El conjunto y sus elementos es la noción primaria de matemática. Los conjuntos se designan con mayúsculas de cualquier alfabeto, por regla latino; los elementos del conjunto se designan con minúsculas. Para algunos de los conjuntos más importantes se usan designaciones estándares. P. ej., con las letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se designan los *conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos*, respectivamente.

Si el objeto a es un elemento del conjunto A, escribimos $a \in A$ o bien $A \ni a$. Esto se lee así: «a pertenece al conjunto A» o bien «el conjunto A contiene el elemento a». La anotación $a \notin A$ significa que el objeto a no es elemento del conjunto A. P. ej.,

$$1 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \pi \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}.$$

Si cada elemento del conjunto A es elemento del conjunto B, se escribe $A \subset B$ o bien $B \supset A$ y se dice que el conjunto A es el *subconjunto del conjunto B*. Aquí, también se suele decir que A se contiene en B o que B contiene A. De la definición de subconjunto se deduce que $A \subset A$, o sea, cada conjunto es su subconjunto. Asimismo se desprende de la definición que si $A \subset B$ y $B \subset C$, $A \subset C$. Ejemplos de inclusiones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Si existe un elemento $a \in A$ tal que $a \notin B$, el conjunto A no es subconjunto del conjunto B. En este caso se escribe $A \not\subset B$ o bien $B \not\supset A$.

Reciben el nombre de iguales los conjuntos que constan de unos mismos elementos. Si los conjuntos A y B son iguales, se escribe $A = B$; en caso contrario, $A \neq B$.

Los conjuntos A y B son iguales si y sólo si son ciertas las inclusiones $A \subset B$ y $B \subset A$.

Para separar el subconjunto M del conjunto U se hace con frecuencia uso de cierta propiedad p, propia del conjunto M y sólo de él, es decir, la propiedad característica de los elementos del conjunto M. En tal caso se escribe

$$M = \{x \in U \mid p\},$$

lo que quiere decir que el conjunto M consta de aquellos y sólo de aquellos elementos del conjunto U que poseen la propiedad p*).

P. ej., la anotación

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

significa que $\mathbb{R}_+$ es un conjunto de números reales positivos.

Puede resultar que la propiedad p no es propia de ninguno de los elementos del conjunto U. Entonces, el subconjunto $\{x \in U \mid p\}$ no contiene elementos del conjunto U y lleva el nombre de *subconjunto vacío*.

$$\text{P. ej.,}\ \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 = 1\},\quad \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq x\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\},$$

son subconjuntos vacíos de conjuntos de números naturales, racionales y reales, respectivamente. El subconjunto vacío se designa con el signo especial $\varnothing$ y se considera subconjunto de todo conjunto.

Si $M \subset U$ y $M \neq \varnothing$, $M \neq U$, el conjunto M se denomina subconjunto *propio* del conjunto U. Los subconjuntos $\varnothing$ y U del conjunto U reciben el nombre de *impropio*.

Ejemplo 1. Indiquen todos los subconjuntos del conjunto de tres elementos $\{a, b, c\}$.

△ El conjunto de tres elementos tiene los subconjuntos impropios $\varnothing$ y $\{a, b, c\}$ y seis subconjuntos propios: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Un total de ocho subconjuntos. ▲

2. Operaciones con conjuntos. Sean A y B conjuntos tomados al azar.

El conjunto que consta de todos aquellos y sólo de aquellos elementos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos A y B lleva el nombre de *unión de los conjuntos* A y B y se designa con $A \cup B$.

El conjunto que consta de todos aquellos y sólo de aquellos elementos pertenecientes tanto al conjunto A como al B lleva el nombre de *intersección de los conjuntos* A y B y se designa con $A \cap B$.

$$\text{P. ej., si}\ A = \{1, 2, 3\},\quad B = \{2, 3, 4, 5\},$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},\quad A \cap B = \{2, 3\}.$$

Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, entonces

$$A \cup B = \mathbb{R},\quad A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}.$$

Si $A \cap B = \varnothing$, se suele decir que los conjuntos A y B son disjuntos.

---

*) Si sólo se consideran los subconjuntos de cierto conjunto fundamental U, la indicación $x \in U$ con frecuencia se omite y se escribe $M = \{x \mid p\}$.

Las operaciones de unión e intersección poseen las siguientes propiedades:

1) conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

2) asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

3) distributividad

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

4) idempotentividad

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

Si $a \in A$ y $b \in B$, el par de elementos a y b, anotado en la forma $(a; b)$, recibe el nombre de *par ordenado*, con la particularidad de que se considera que los pares $(a_1; b_1)$ y $(a_2; b_2)$ son iguales cuando y sólo cuando $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

El conjunto, cuyos elementos son todos pares ordenados $(a; b)$, $a \in A$, $b \in B$, se denomina *producto directo* o *cartesiano de los conjuntos* A y B y se designa con $A \times B$.

P. ej., si $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, entonces

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3)\},$$
$$B \times A = \{(2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2)\}.$$

El producto directo no se supedita a la ley conmutativa. La igualdad $A \times B = B \times A$ sólo es justa cuando $A = B$. El producto $A \times A$ se llama *cuadrado cartesiano* y se designa con A^2. P. ej., el cuadrado cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto $(x; y)$ de todas las coordenadas cartesianas de los puntos de un plano.

El conjunto que consta de todos los elementos del conjunto A, no pertenecientes al conjunto B, recibe el nombre de *diferencia de los conjuntos* A y B y se denomina con $A \setminus B$.

P. ej., si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$,

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4, 5\}.$$

Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$,

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}, \quad B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}.$$

Si $A \subset B$, la diferencia $B \setminus A$ recibe el nombre de *complemento del conjunto A hasta el conjunto B* y se designa con A'_B.

En aquellos casos cuando sólo se consideran los subconjuntos de cierto conjunto fundamental U, el complemento del conjunto M

hasta el conjunto U se denomina simplemente complemento M y, en lugar de M'_U se escribe M'.

De la definición de complemento de un conjunto se desprenden en directo las igualdades

$$M \cup M' = U, \quad M \cap M' = \varnothing, \quad (M')' = M.$$

Para cualesquiera subconjuntos A y B del conjunto U son asimismo válidas las siguientes igualdades que llevan el nombre de *leyes de dualidad de Morgan*:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

es decir, el complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos, en tanto que la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos.

Ejemplo 2. Demuestren la ley de dualidad:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

$\triangle$ Sea $x \in (A \cap B)'$, entonces $x \notin A \cap B$ y, por lo tanto, $x \notin A$, o bien, $x \notin B$, o sea, $x \in A'$, o bien, $x \in B'$, pero esto significa que $x \in A' \cup B'$. Así, pues, queda demostrada la inclusión

$$(A \cap B)' \subset A' \cup B'.$$

Sea $x \in A' \cup B'$, entonces $x \in A'$, o bien, $x \in B'$ y, por consiguiente, $x \notin A$, o bien $x \notin B$, es decir, $x \notin A \cap B$, lo que quiere decir que $x \in (A \cap B)'$. De modo que está demostrada la inclusión

$$A' \cup B' \subset (A \cap B)'.$$

De las inclusiones $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ y $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ se desprende que los conjuntos $(A \cap B)'$ y $A' \cup B'$ constan de los mismos elementos, o sea, son iguales.$\blacktriangle$

3. Conjuntos equivalentes y no equivalentes. Decimos que entre los conjuntos A y B se ha establecido *correspondencia biunívoca* si a cada elemento del conjunto A se le contrapone uno, y sólo un elemento del conjunto B, de forma que a diversos elementos del conjunto A se les contraponen diversos elementos del conjunto B y cada elemento del conjunto B resulta contrapuesto a cierto elemento del conjunto A.

P. ej., entre el conjunto de todos los números naturales pares y el conjunto $\mathbb{N}$ es posible establecer correspondencia biunívoca:

$$\begin{array}{cccccc}
2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, \ldots
\end{array}$$

Los conjuntos entre los que se puede establecer correspondencia biunívoca reciben el nombre de *equivalentes*. Si los conjuntos A y B son equivalentes, se escribe $A \sim B$; si ellos no son equivalentes, escribimos $A \not\sim B$.

La relación de equivalencia entre conjuntos posee las propiedades de:

1) reflexibilidad $A \sim A$;

2) simetría: si $A \sim B$, $B \sim A$;

3) transitividad: si $A \sim B$ y $B \sim C$, $A \sim C$.

Si $A \sim B$ se dice que los conjuntos A y B tienen igual potencia.

Si $A \not\sim B$, pero $A \sim B_1 \subset B$, se dice que el conjunto A tiene menor potencia que el B.

El conjunto $A \neq \varnothing$ se denomina *finito* si existe tal número $n \in \mathbb{N}$ que

$$A \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

En semejante caso suele decirse que el conjunto A contiene n elementos o que él tiene la potencia n.

El conjunto vacío $\varnothing$ también se considera finito, su potencia se toma igual a cero.

El conjunto que no es finito se considera *infinito*.

El conjunto A recibe el nombre de *numerable* si $A \sim \mathbb{N}$. Decimos que el conjunto numerable tiene potencia numerable. Si el conjunto es finito o numerable lo denominan no más que numerable.

Recibe el nombre de *innumerable* un conjunto si él tiene potencia mayor que la del conjunto $\mathbb{N}$.

Teoremas de Cantor:

1. *El conjunto de todos los números racionales es numerable.*
2. *El conjunto de todos los números reales es innumerable.*

El conjunto A lleva el nombre de conjunto *de potencia del continuo* si $A \sim \mathbb{R}$.

Sea dado el conjunto $S = \{s\}$, llamado conjunto de índices y a cada índice s se le contrapone el conjunto A_s. El conjunto $\{A_s\}$, cuyos elementos son los conjuntos A_s, $s \in S$, se denomina *sistema* o *familia de conjuntos*. Las nociones de unión o intersección de dos conjuntos se extienden al caso de un sistema arbitrario finito o infinito de conjuntos de la forma siguiente.

Lleva el nombre de *unión* de un sistema de conjuntos A_s, $s \in S$ el conjunto de todos los elementos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos del sistema.

Lleva el nombre de *intersección* del sistema de conjuntos A_s, $s \in S$ el conjunto de todos los elementos contenidos en cada conjunto del sistema.

La unión e intersección del sistema de conjuntos A_s, $s \in S$ se designan

$$\bigcup_{s \in S} A_s \quad \text{y} \quad \bigcap_{s \in S} A_s.$$

En casos particulares cuando el sistema de conjuntos es finito o numerable, se escribe

$$\bigcup_{s=1}^{n} A_s, \ \bigcap_{s=1}^{n} A_s, \ n \in \mathbb{N}, \text{ o bien, } \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s, \ \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

Resuelvan los problemas **1.1—1.8** en los que A, B, C, D son conjuntos tomados al azar.

1.1. Se dan los conjuntos A, B, C. Con ayuda de las operaciones de unión e intersección escriban un conjunto que conste de los elementos pertenecientes: 1) a los tres conjuntos; 2) por lo menos a un conjunto; 3) por lo menos a dos de dichos conjuntos.

1.2. Demuestren que las igualdades: 1) $A \cup B = B$, 2) $A \cap B = A$ son ciertas cuando y sólo cuando $A \subset B$.

1.3. Demuestren que la igualdad $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ es cierta cuando y sólo cuando $A \supset C$.

1.4. Demuestren las igualdades:

1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
2. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
4. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

1.5. Demuestren que la inclusión $A \setminus B \subset C$ es cierta cuando y sólo cuando $A \subset B \cup C$.

1.6. Demuestren las inclusiones:

1) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$.
2) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

1.7. Determinen en qué razón ($X \subset Y$, $X \supset Y$, $X = Y$) se encuentran los conjuntos X e Y si:

1) $X = A \cup (B \setminus C)$, $\quad Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.
2) $X = (A \cap B) \setminus C$, $\quad Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
3) $X = A \setminus (B \cup C)$, $\quad Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4) $X = (A \times B) \cup (C \times B)$, $\quad Y = (A \cup C) \times B$.
5) $X = (A \times B) \cup (C \times D)$, $\quad Y = (A \times C) \cup (B \times D)$.

1.8. Demuestren que si $A \subset C$, $B \subset D$,

$$A \times B = (A \times D) \cap (B \times C).$$

1.9. Sean $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leqslant 6\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$. ¿De qué elementos constan los conjuntos:

1) $B \cup C$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $A \cup B \cup C$;
4) $(A \cap B) \cup (B \cup C)$; 5) $B \times C$; 6) $C \times B$?

1.10. Los conjuntos A y B están compuestos, respectivamente, de los elementos $a = 4n + 2$, $b = 3n$, $n \in \mathbb{N}$. Hallen $A \cap B$.

1.11. Supongamos que el conjunto A contiene n elementos, el conjunto B, m elementos y la intersección $A \cap B$, k elementos. Hallen el número de elementos de los conjuntos: 1) $A \cup B$, 2) $A \times B$.

1.12. Sea que $A \subset \mathbb{N}$ y cada elemento de A es un número múltiplo bien a 2, o bien a 3, o bien a 5. Hallen el número de elementos del conjunto A si entre ellos tenemos: 70 números múltiplos a 2; 60 números múltiplos a 3; 80 números múltiplos a 5; 32 números múltiplos a 6; 35 números múltiplos a 10; 38 números múltiplos a 15; 20 números múltiplos a 30.

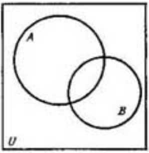


Fig. 1

1.13. Los conjuntos A y B son subconjuntos del conjunto U (fig. 1). Sombreen en el dibujo los siguientes conjuntos:

1) $A \cup B'$; 2) $A' \cap B$; 3) $(A \cup B)'$; 4) $(A \cup B')'$;
5) $(A \cap B)'$; 6) $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$.

1.14. Sean A y B subconjuntos tomados al azar del conjunto U. Demuestren las igualdades:

1) $(A \setminus B)' = A' \cup B$.
2) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$.
3) $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = A \cup B$.

1.15. Sea $A \subset U$, $B \subset U$. Hallen el conjunto $X \subset U$ que satisfaga la ecuación

$$(X \cup A)' \cup (X \cup A') = B.$$

1.16. Hallen los subconjuntos A y B del conjunto U si se sabe que para todo conjunto $X \subset U$ es cierta la igualdad

$$X \cap A = X \cup B.$$

1.17. Sea $A_s \subset U$, $s \in S$. Demuestren que:

1) $\left(\bigcup\limits_{s \in S} A_s\right)' = \bigcap\limits_{s \in S} A_s'$; 2) $\left(\bigcap\limits_{s \in S} A_s\right)' = \bigcup\limits_{s \in S} A_s'$.

1.18. Está dado un sistema de conjuntos arbitrarios A_s, $s \in \mathbb{N}$.

1) Sea $B_n = \bigcup\limits_{s=1}^{n} A_s$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s.$$

2) Sea $B_n = \bigcap\limits_{s=1}^{n} A_s$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s.$$

1.19. Sea A_{sp}, $s \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ un sistema de conjuntos tomados al azar. Establezcan si son ciertas las inclusiones:

1) $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} A_{sp}\right) \subset \bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_{sp}\right)$.

2) $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} A_{sp}\right) \supset \bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} A_{sp}\right)$.

1.20. Establezcan la correspondencia biunívoca entre los conjuntos A y B:

1) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$.

2) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \mathbb{N}$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b, b > a\}$.

4) $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \| x \mid < 1\}$.

1.21. Establezcan la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del intervalo $(0; 1)$ y el conjunto de todos los puntos del segmento $[0; 1]$.

1.22. Demuestren la equipotencia de los siguientes conjuntos:

1) del cuadrado $\{(x; y) \| x \mid \leqslant 1, \mid y \mid \leqslant 1\}$ y del círculo $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

2) del círculo abierto $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y de todo el plano $(x; y)$;

3) del círculo abierto $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y el círculo cerrado $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1.23. Demuestren que un conjunto es infinito cuando y sólo cuando él es equivalente a cierto subconjunto suyo.

1.24. Demuestren que si el conjunto A es infinito y el conjunto B numerable, $(A \cup B) \sim A$.

1.25. Demuestren que si $A \setminus B \sim B \setminus A$, $A \sim B$.

1.26. Demuestren que si $A \subset B \subset C$ y $A \sim C$, $A \sim B$.

1.27. Demuestren que si A y B son conjuntos numerables, el conjunto $A \times B$ es numerable.

1.28. Demuestren que la unión de un sistema no más que numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

1.29. Demuestren la numerabilidad de los siguientes conjuntos:

1) el conjunto de todos los números de la forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$;

2) el conjunto de todos los triángulos en el plano, cuyos vértices tienen coordenadas racionales;

3) el conjunto de todos los puntos de un plano con coordenadas racionales;

4) el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales;

5) el conjunto de todos los números algebraicos (un número se denomina algebraico si es la raíz de un polinomio con coeficientes enteros);

6) el conjunto de todos los subconjuntos finitos de un conjunto numerable.

1.30. Demuestren que si la distancia entre cualesquiera dos puntos de un conjunto de puntos en una recta es mayor que la unidad, dicho conjunto no es más que numerable.

1.31 Demuestren que los siguientes conjuntos tienen la potencia de continuo:

1) el conjunto de todos los puntos de un intervalo no vacío $(a; b)$;

2) el conjunto de todas las sucesiones compuestas con las cifras 0 y 1;

3) el conjunto de todas las sucesiones de números reales;

4) el conjunto de todos los puntos de un cuadrado;

5) el conjunto de todos los puntos de un círculo;

6) el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto numerable;

7) el conjunto de todos los subconjuntos numerables del conjunto de potencia de continuo.

1.32. En el plano se ha construido un conjunto de: 1) circunferencias, 2) figuras en forma de T, 3) figuras que tienen la forma de Γ, intersecantes todas a pares. ¿Puede ser este conjunto innumerable?

1.33. Hallen la potencia del conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto finito que contiene n elementos.

1.34. Demuestren que para cada conjunto, el conjunto de todos sus subconjuntos tiene una potencia mayor que la del conjunto inicial.

1.35. Sea A un conjunto no numerable, y B, no más que numerable. Demuestren que los conjuntos $A \cup B$ y $A \setminus B$ tienen la potencia del conjunto A.

---

4. Conjuntos ordenados. Un conjunto recibe el nombre de *ordenado* si para cualesquiera dos de sus elementos a y b se ha establecido una relación del orden $a \leqslant b$, o bien $b \leqslant a$ (a no supera b, o bien, b no supera a) que posee las propiedades:

1) reflexibilidad: $a \leqslant a$, es decir, todo elemento no se supera a sí mismo;

2) antisimetría: si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, los elementos a y b coinciden;

3) transitividad: si $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$.

Se considera que un conjunto vacío es ordenado. Un conjunto se puede ordenar con distintos procedimientos. P. ej., en el conjunto de estudiantes de un grupo la relación de orden ($\leqslant$) puede establecerse con los dos siguientes procedimientos: el estudiante a no supera al estudiante b, o sea, $a \leqslant b$ si: 1) la estatura de estudiante a es menor que la del estudiante b, 2) el apellido del estudiante a en el diario del grupo está bajo un número mayor que la del estudiante b.

Estableciendo con diferentes procedimientos la relación de orden en un mismo conjunto, obtenemos diferentes conjuntos ordenados.

Los elementos de conjuntos finitos ordenados se escribe, por regla, entre paréntesis ordinarios, disponiendo el elemento a a la izquierda del elemento b, si $a \leqslant b$. P. ej., la anotación $A = (3, 2, 1)$, $B = (2, 3, 1)$ significa que A y B son diferentes conjuntos ordenados, a diferencia de la anotación $A = \{3, 2, 1\}$, $B = \{2, 3, 1\}$ de la que se desprende que $A = B$.

P. ej., el conjunto que contiene tres elementos a, b y c tiene 3 subconjuntos de dos elementos:

$$\{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{b, c\}$$

y 6 subconjuntos de dos elementos ordenados:

$$(a, b), \quad (b, a), \quad (a, c), \quad (c, a), \quad (b, c), \quad (c, b).$$

5. Arreglos y permutaciones. Supongamos que tenemos un conjunto que contiene n elementos. Cada uno de sus subconjuntos ordenados, constituidos por k elementos, se denomina *arreglo* de n elementos por k elementos.

El número de todos los arreglos de n elementos por k elementos se denomina A_n^k (se lee: «número de arreglos de n por k» o bien «A de n por k»). (A de la palabra francesa *arrangement.*)

El número de arreglos se halla con la fórmula

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \quad k > 0, \tag{1}$$

es decir, el número de arreglos de n elementos por k elementos es igual al producto de k números naturales sucesivos de n hasta $n - k + 1$, incluido.

El producto de todos los números naturales de 1 a n se designa con el símbolo $n!$ (se lee «n factorial»), es decir,

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,n.$$

Haciendo uso de esta designación, podemos escribir la fórmula (1) en la forma

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{2}$$

con la particularidad de que si convenimos considerar que $0! = 1$, la fórmula (2) proporciona resultado correcto incluso en los casos cuando $k = 0$ y $k = n$.

El arreglo de n elementos recibe el nombre de *permutación* de n elementos.

Las permutaciones son un caso particular de los arreglos. Como cada permutación contiene todos los n elementos del conjunto, diversas permutaciones se distinguen entre sí sólo por el orden de los elementos. El número de permutaciones de n elementos se designa con P_n. (P de la palabra francesa *permutation*.)

Como $P_n = A_n^n$, para el número de permutaciones es válida la fórmula

$$P_n = n!. \qquad (3)$$

De la fórmula (3) se deduce que el conjunto que contiene n elementos se puede ordenar con ayuda de $n!$ procedimientos.

Ejemplo 3. Un grupo de estudiantes estudia 7 asignaturas. ¿Con cuántos procedimientos es posible componer el horario de las clases para el lunes si para ese día se planifican clases dedicadas a 4 asignaturas?

△ Sin duda, hay tantos procedimientos diferentes para confeccionar el horario como cuantos subconjuntos ordenados de cuatro elementos existen en un conjunto de siete elementos. Por lo tanto, el número de procedimientos es igual al número de arreglos de 7 elementos por 4 elementos, es decir, es igual a A_7^4. Con la fórmula (1), haciendo en ella $n = 7$, $k = 4$, hallamos

$$A_7^4 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 4. ¿Cuántos números de seis cifras, múltiplos a cinco, pueden ser compuestos de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 a condición de que las cifras no se repitan en el número?

△ Con el fin de que el número compuesto de las cifras prefijadas se divida entre 5 es necesario y suficiente que la cifra 5 se encuentre en el último puesto. Las demás cinco cifras pueden encontrarse en los restantes cinco puestos en cualquier orden. Por consiguiente, la cantidad buscada de números de seis cifras, múltiplos a cinco, es igual a la cantidad de permutaciones de los cinco elementos, es decir, $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$. ▲

Ejemplo 5. ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar con las letras de la palabra «zadacha» (vocablo ruso que significa «problema»)?

△ Formar cierta permutación de las letras de la palabra «zadacha» quiere decir que en seis puestos numerados hay que poner de algún modo una letra «z», una"letra"«d», una"letra"«ch» y tres letras «a». Si las letras «z», «d» y «ch» se han colocado de algún modo, el resto de los puestos se rellenarán con la letra «a». ¿Pero con cuántos procedimientos es posible poner tres letras diferentes en seis puestos? Es evidente que el número de procedimientos es igual al número de subconjuntos ordenados de tres elementos del conjunto de seis elementos, es decir, es igual a $A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$.

Podemos razonar de otro modo. Si las seis letras de la palabra fueran diferentes, el número de permutaciones sería igual a $6!$. Pero con la letra «a» tropezamos en dicho vocablo tres veces y las permutaciones de sólo estas tres «a» no ofrecen nuevos procedimientos de disposición de las letras. Por ello, el número de permutaciones de las letras de la palabra «zadacha» no será 6!, sino que 3! veces menor, es decir,

$$\frac{6!}{3!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=6\cdot5\cdot4=120. \ \blacktriangle$$

6. **Combinaciones.** Sea que tenemos un conjunto constituido por n elementos. Cada uno de sus subconjuntos, con k elementos, lleva el nombre de *combinación* de n elementos por k elementos.

El número de todas las combinaciones de n elementos por k elementos se designa con el símbolo C_n^k (se lee: «número de combinaciones de n por k», o bien, «c de n por k»).

El número de combinaciones se determina con la fórmula

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{4}$$

o bien con la fórmula

$$C_n^k=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}. \tag{5}$$

Son válidas las siguientes igualdades

$$C_n^k=C_n^{n-k}. \tag{6}$$

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k, \quad k<n. \tag{7}$$

Haciendo uso de la igualdad (6) es posible simplicar el cálculo de los números C_n^k en aquellos casos cuando $k>n/2$, p. ej.,

$$C_{15}^{12}=C_{15}^{3}=\frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2}=455.$$

Ejemplo 6. ¿Cuántas comisiones de exámenes, compuestas de 5 miembros, se pueden formar de 10 profesores?

△ Es evidente que son tantos como cuantos haya subconjuntos de cinco elementos en un conjunto de diez elementos, es decir, el número de comisiones será igual a C_{10}^5. Con la fórmula (4), haciendo en ella $n=10$, $k=5$, hallemos

$$C_{10}^5=\frac{10!}{5!5!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot3\cdot4\cdot5}=252. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 7. En el campeonato nacional de fútbol (primera liga) toman parte 18 equipos, con la particularidad de que cada dos equipos compiten entre sí dos veces. ¿Cuántos partidos se juegan en el transcurso de la temporada?

△ En la primera etapa tendrán lugar tantos partidos cuantos subconjuntos haya de dos elementos en un conjunto de 18 elementos, es decir, su cantidad será igual a C_{18}^2. Con la fórmula (5), hallamos

$$C_{18}^2=\frac{18\cdot 17}{2}=153.$$

En la segunda etapa se juega igual cantidad de partidos, por lo que en el transcurso de la temporada tendrán lugar 306 encuentros. ▲

Ejemplo 8. ¿Con cuántos procedimientos $2n$ elementos pueden dividirse a pares?

Podemos obtener respuesta a esta pregunta empleando la fórmula para el número de combinaciones y el número de permutaciones. Aduzcamos otra solución.

△ Designemos el número de particiones a pares de $2n$ elementos con R_{2n}.

Elijamos cualquier elemento. Con su participación se puede formar un par con $2n-1$ procedimientos. Cada vez, después de la formación de un par, quedarán $2n-2$ elementos que pueden ser divididos en pares con R_{2n-2} procedimientos. Por esta razón, $R_{2n}=(2n-1)R_{2n-2}$. Haciendo uso de esta fórmula recurrente, obtenemos $R_{2n}=(2n-1)R_{2n-2}=(2n-1)\cdot(2n-3)R_{2n-4}=\ldots$ $\ldots=(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot R_2=(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1$.

El producto de todos los números naturales que no superan n y que tienen la misma paridad que n, con frecuencia se designa con $n!!$ (se lee: «n doble factorial»).

Así, pues, $2n$ elementos se puede dividir a pares con $(2n-1)!!$ procedimientos. ▲

7. Sucesos aleatorios y su probabilidad. Examinemos el experimento que consiste en lanzar una moneda. Este experimento tiene dos resultados: o la moneda cae de forma que arriba estará la cara, o bien cae con ésta hacia abajo. Uno u otro resultado del experimento depende de múltiples causas que no es posible tomar en consideración y, por ello, es imposible predecir el resultado del experimento. El suceso que consiste en que «cayó la cara» es un ejemplo de suceso aleatorio. Como ejemplo de otros sucesos aleatorios se pueden aducir: «la aparición de la unidad» al jugar a los dados (cubos de material homogéneo con caras numeradas con cifras desde la unidad hasta seis), fallo de una bombilla eléctrica antes de determinado plazo, falta de correspondencia con la norma elegida para verificar un artículo. En todos estos casos es imposible predecir de antemano, hasta finalizar el experimento, si tendrá lugar o no el respectivo suceso. Por ello, semejantes sucesos llevan el nombre de aleatorios.

En el experimento con el lanzamiento de la moneda ambos resultados son equivalentes, antes de lanzar la moneda no hay fundamento alguno para dar preferencia a uno de los resultados. En semejantes casos se dice que los dos resultados son equiprobables, en tanto que la probabilidad de cada uno de ellos es igual a 1/2. Al lanzar el dado hay seis resultados. Si el dado es homogéneo y simétrico, todos los resultados del experimento son igualmente posibles o bien equiprobables. La probabilidad de cada resultado es igual a 1/6.

La generalización de estos sencillos experimentos será un experimento en el que son posibles n resultados equiprobables u_1, u_2, ..., u_n, llamados asimismo sucesos elementales. En tal caso, la probabilidad de cada uno de los resultados se toma igual a $1/n$. Esto se escribe del modo siguiente:

$$P(u_1) = 1/n, \quad P(u_2) = 1/n, \ \ldots, \ P(u_n) = 1/n.$$

La primera de estas fórmulas se lee: «la probabilidad del suceso u_1 es igual a $1/n$».

Ahora, estudiemos un experimento con n resultados equiprobables y cierto suceso A que se produce cuando el experimento termina con ciertos k resultados y no tiene lugar en el caso si se obtiene uno de los restantes $n - k$ resultados. Vamos a decir que los resultados que conducen al suceso A le favorecen. *La probabilidad del suceso A relacionado con un experimento con n resultados equiprobables se denomina la razón entre el número de resultados que favorecen al suceso A y el número de todos los resultados*, es decir,

$$P(A) = k/n, \tag{8}$$

donde k es el número de resultados favorecientes al suceso A. La probabilidad de cualquier suceso A satisface las desigualdades

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

lo que en directo se desprende de la fórmula (8), ya que es evidente que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Ejemplo 9. El experimento consiste en que se lanzan dos monedas: de cobre y de plata. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos en una moneda aparezca la cara?

△ Se considera que los resultados equiprobables del experimento son los siguientes:

u_1 — la cara aparece en ambas monedas,
u_2 — la cara aparece sólo en la moneda de cobre,
u_3 — la cara aparece sólo en la moneda de plata,
u_4 — la cara no aparece en ninguna de las monedas.

Los resultados u_1, u_2, u_3 (aparición de la cara por lo menos en una moneda) favorecen al acontecimiento A. Haciendo en la fórmula (8) $n = 4$, $k = 3$, obtenemos $P(A) = 3/4$. ▲

Ejemplo 10. Al marcar un número en el teléfono el abonado se olvidó de las dos últimas cifras y sólo recordando que éstas eran diferentes, las marcó a la ventura. ¿Cuál es la probabilidad de que el número se ha marcado correctamente?

△ Las dos últimas cifras se pueden marcar con un número de procedimientos igual al número de subconjuntos ordenados de dos elementos en un conjunto de diez elementos (el de todas las cifras). Este número de procedimientos es igual a A_{10}^2. Por lo tanto, existe un total de A_{10}^2 resultados. Sólo un resultado (las cifras se han marcado correctamente) favorece al suceso A. Por ello, $P(A) = 1/A_{10}^2 = 1/(10 \cdot 9) = 1/90$. ▲

Ejemplo 11. Entre 100 bombillas eléctricas 5 están deterioradas. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar 3 bombillas éstas estén en buen estado?

△ En un conjunto de 100 elementos hay C_{100}^3 subconjuntos de tres elementos. Por ello, 3 bombillas de 100 pueden elegirse mediante C_{100}^3 procedimientos. Las bombillas se eligen a la ventura. Esto significa que todos los procedimientos para la elección (todos los resultados) son equiprobables. El número de resultados exitosos, es decir, las tres bombillas están en buen estado, se calcula de forma análoga. De 95 bombillas en buen estado 3 se pueden elegir con C_{95}^3 procedimientos, ya que tantos son los subconjuntos de tres elementos existentes en el conjunto de 95 elementos. Haciendo en la fórmula (8) $n = C_{100}^3$, $k = C_{95}^3$, obtenemos

$$P(A) = C_{95}^3 / C_{100}^3 = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}856. \ ▲$$

1.36. Calculen:

1) $\dfrac{A_{20}^4}{A_{20}^6 + A_{20}^5}$. 2) $\dfrac{A_{10}^7}{6!\,(C_7^3 + C_7^4)}$.

3) $\dfrac{P_{n+1}}{(n-k)!\,A_{n-1}^{k-1}}$, $k \leqslant n$. 4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

1.37. Hallen n, si:

1) $\dfrac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240 A_{n+3}^{k+3}$. 2) $C_{n+3}^n - C_{n+2}^{n-1} = 15(n+1)$.

3) $C_{10}^n > 2C_{10}^{n+1}$. 4) $4(n-2)!\,A_{n+2}^5 < 143 \cdot n!$

1.38. En un grupo hay 30 estudiantes. ¿Con cuántos procedimientos se pueden separar dos personas para hacer guardia si: 1) una de ellas ha de ser el jefe; 2) no debe haber jefe?

1.39. Para cinco funcionarios hay tres plazas en una casa de reposo. ¿Con cuántos procedimientos se pueden distribuir si: 1) todas las plazas son diferentes; 2) todas ellas son iguales?

1.40. ¿Con cuántos procedimientos se pueden disponer en una fila 5 bolas blancas y 4 negras de modo que las negras no estén juntas? Consideremos dos casos: 1) las bolas de un mismo color no se distinguen entre sí; 2) todas las bolas son diferentes.

1.41. ¿Cuántas diagonales tiene un n — ágono convexo?

1.42. Ningunas tres diagonales de un decágono convexo se cortan en un punto. Determinen el número de puntos de intersección de las diagonales.

1.43. En la primera de las dos rectas paralelas yacen 15 puntos, en la segunda, 21. ¿Cuántos triángulos existen con los vértices en dichos puntos?

1.44. ¿Con cuántos procedimientos se pueden colocar en la tabla de ajedrez 8 torres de un mismo color de modo que no se batan entre sí y que se encuentren sólo en los escaques negros?

1.45. Con las cifras 0, 1, 2, 3 se han compuesto los más variados números de cuatro cifras de modo que en cada número no hay cifras iguales. ¿Cuántos números se han obtenido? ¿Cuántos números pares hay entre ellos?

1.46. ¿Cuántos números diferentes de diez cifras se pueden escribir empleando las cifras 1 y 2?

1.47. ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar de las letras de las siguientes palabras: 1) cebra, 2) pañal, 3) caracal, 4) abracadabra?

1.48. ¿Con cuántos procedimientos se pueden distribuir 28 fichas de dominó entre cuatro jugadores de forma que cada uno de ellos reciba 7 fichas?

1.49. Un equipo de hockey consta de 2 porteros, 7 defensas y 10 delanteros. ¿Con ayuda de cuántos procedimientos es posible formar el grupo de seis jugadores que empieza el juego, compuesto de un portero, dos defensas y tres delanteros?

1.50. ¿Cuántos números de seis cifras existen en los que todas las cifras son impares (1, 3, 5, 7, 9)?

1.51. ¿Cuántos divisores tiene el número 462?

1.52. En un estante hay m libros encuadernados de negro y n libros encuadernados de azul, con la particularidad de que todos los libros son diferentes. ¿Con cuántos procedimientos se pueden disponer los libros de forma que los encuadernados en negro estén juntos?

1.53. ¿Con cuántos procedimientos se pueden empaquetar 9 libros diferentes en 5 impresos si 4 de ellos deben contener 2 libros cada uno?

1.54. ¿Con cuántos procedimientos es posible poner 12 monedas iguales en 5 diferentes monederos de modo que ninguno de éstos quede vacío?

1.55. Una caja fuerte se cierra con cerrojo que consta de cinco discos en cada uno de los cuales están representadas las cifras 0, 1, 2, . . ., 9. El cerrojo se abre si en los discos se ha marcado una determinada combinación de cifras. ¿Serán suficientes 10 días para abrir la caja fuerte si el «día laboral» dura 13 horas y para marcar una combinación de cifras son necesarios 5 segundos?

1.56. Entre todos los números enteros desde 1 hasta 10^n cuáles hay más: ¿aquellos para cuya anotación se emplea la cifra 9 o bien aquellos que se escriben sin ella?

1.57. Cierto alfabeto consta de seis letras que, para su transmisión por telégrafo, están codificadas así:

$$\cdot;\ -;\ \cdot\cdot;\ --;\ \cdot-;\ -\cdot$$

Al transmitir una palabra no hicieron intervalos que separaran las letras entre sí, de modo que se obtuvo una cadena continua de puntos y rayas que contenía 12 signos. ¿Con cuántos procedimientos se puede leer la palabra transmitida?

1.58. En una urna había 3 bolas blancas, 4 negras, 5 rojas y de ella, al azar, se sacaba una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sacada sea: 1) blanca, 2) negra, 3) amarilla, 4) roja?

1.59. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos aparecidos en los dados sea igual a 8?

1.60. El programa de los exámenes consta de 40 preguntas. En el examen se propone responder a dos de ellas. El estudiante había preparado respuestas a 30 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que en el examen le toquen dos preguntas para las que él había preparado la respuesta?

1.61. En la lotería de 50 billetes 8 ganan. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los cinco primeros billetes tomados al azar dos sean premiados?

1.62. Entre diez billetes dos ganan. Determinen la probabilidad de que entre los cinco billetes tomados a la ventura: 1) uno será premiado, 2) ambos serán los premiados.

1.63. Al jugar al «Sportlotó» 6 números de 49 son los «felices». El participante en el juego indica 6 números de 49. ¿Cuál es la probabilidad de adivinar: 1) los 6 números «felices», 2) 3 números «felices»?

1.64. En el ascensor de una casa de ocho pisos, en el primero entraron 5 personas. Supongamos que cada una de ellas, independientemente de los demás y con igual probabilidad, puede salir en cualquier piso a partir del segundo. Hallen la probabilidad de que las 5 salen en diferentes pisos.

1.65. En el campeonato de baloncesto participan 18 equipos, entre los cuales hay dos equipos de extraclase. Para reducir el número total de partidos, los equipos se dividen en dos grupos iguales para lo que se realiza un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos equipos de extraclase resulten estar: 1) en diferentes subgrupos, 2) en un mismo subgrupo?

1.66. Demuestren que es menor que 1/10000 la probabilidad de que el cumpleaños de las doce personas elegidas al azar trascurran en diferentes meses.

§ 2. Elementos de lógica. Método de la inducción matemática

1. Proposiciones. Operaciones con proposiciones. Por *proposición* se entiende toda afirmación acerca de la que tiene sentido decir que ella es verdadera o falsa. De los datos de las proposiciones, con ayuda de las llamadas subjunciones lógicas a las que se refieren la partícula «no», las conjunciones «y», «o», las palabras «si . . ., entonces ...», «cuando y sólo cuando . . .» se forman nuevas proposiciones.

La operación de negación corresponde en el lenguaje habitual a la partícula «no». Para cada proposición p se puede formar una nueva proposición $\overline{p}$ (se lee: «p con raya», o bien «no p») que es verdadera si p es falsa y, a la inversa, falsa si p es verdadera. La proposición $\overline{p}$ recibe el nombre de *negación* de la proposición p. P. ej., para la proposición «la sucesión $\{1/n\}$ tiene límite» la negación es la proposición «la sucesión $\{1/n\}$ no tiene límite».

La proposición compuesta por las proposiciones p y q con ayuda de la conjunción «y» recibe el nombre de *conjunción* y se designa con $p \wedge q$ (se lee: «p y q»).

Se considera que la conjunción $p \wedge q$ es una proposición verdadera cuando y sólo cuando las proposiciones p y q son verdaderas.

Si la proposición está formada con las proposiciones p y q con ayuda de la conjunción «o», ella se denomina *disyunción* de las proposiciones p y q y se designa $p \vee q$ (se lee: «p o q»).

La disyunción $p \vee q$ se considera proposición verdadera cuando y sólo cuando es verdadera por lo menos una de las proposiciones.

La proposición formada con las proposiciones p y q con ayuda de las palabras «si . . ., entonces . . .» se llama *implicación* y se designa con $p \to q$ (se lee: «si p, entonces q»). Con ello, la proposición p lleva el nombre de condición, en tanto que la proposición q, conclusión.

Se considera que la implicación $p \to q$ es una proposición falsa sólo en el caso cuando la condición (proposición p) es verdadera y la conclusión (proposición q), falsa.

La proposición formada por las proposiciones p y q, con ayuda de las palabras «cuando y sólo cuando . . .» se denomina *equivalencia* (o *implicación doble*) y se designa con $p \leftrightarrow q$.

La equivalencia $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando y sólo cuando ambas proposiciones p y q son verdaderas o bien cuando ambas son falsas.

Si a las proposiciones verdaderas adjudicamos la letra V y las falsas, la letra F, las operaciones lógicas $\overline{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ pueden ser determinadas de modo formal con ayuda de las siguientes tablas de verdad:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Las nuevas proposiciones pueden ser formadas mediante varias operaciones lógicas, con la particularidad de que cada una de las operaciones puede ser empleada varias veces. El orden con el que han de realizarse las operaciones se indica con ayuda de paréntesis.

En las tablas de verdad para la implicación vemos que si la condición p y la implicación $p \to q$ son verdaderas, la conclusión q también será verdadera. En semejante caso se escribe $p \Rightarrow q$ y se dice que p se deduce de q. Esta regla clásica de deducción se emplea en matemáticas con constancia.

Si de p se deduce q y de q se deduce p, las proposiciones p y q reciben el nombre de *equivalentes*. Las proposiciones equivalentes se unen bien con el signo $\Leftrightarrow$, o bien con el signo de igualdad, es decir, se escribe o $p \Leftrightarrow q$, o bien $p = q$.

Durante la investigación de las proposiciones con relación a la equivalencia, en los casos sencillos es posible hacer uso de las tablas de verdad, ya que para las proposiciones equivalentes de diferente forma, las tablas de verdad coinciden. P. ej., empleando las tablas de verdad para la negación e implicación, es fácil confeccionar la tabla de verdad para las proposiciones de la forma $\bar{q} \to \bar{p}$:

p	q	$\bar{q}$	$\bar{p}$	$\bar{q} \to \bar{p}$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Esta tabla coincide con la tabla de verdad para la implicación $p \to q$. Por lo tanto, las proposiciones $p \to q$ y $\overline{q} \to \overline{p}$ son equivalentes, es decir, $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$ o bien $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$.

La tabla de verdad correspondiente a la proposición formada por n proposiciones sencillas contiene 2^n filas. Por esta razón, por regla, la equivalencia de las proposiciones se establece con otro procedimiento: cierta cantidad de equivalencias base (leyes de álgebra proporcional) se verifica partiendo de las tablas de verdad, las igualdades obtenidas se utilizan al demostrar otras igualdades de la misma forma que en álgebra elemental en las transformaciones idénticas se emplean las leyes algebraicas: conmutativa, asociativa, distributiva y otras.

Leyes fundamentales del álgebra proposicional:

1. Conmutatividad de la disyunción:

$$p \vee q = q \vee p. \tag{1}$$

2. Conmutatividad de la conjunción:

$$p \wedge q = q \wedge p. \tag{2}$$

3. Asociatividad de la disyunción:

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r. \tag{3}$$

4. Asociatividad de la conjunción:

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r. \tag{4}$$

5. Primera ley distributiva:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \tag{5}$$

6. Segunda ley distributiva:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r). \tag{6}$$

7. Ley de Morgan:

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}, \quad \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}. \tag{7}$$

8. Ley de la negación doble:

$$\overline{\overline{p}} = p. \tag{8}$$

9. Leyes de idempotencia:

$$p \vee p = p, \quad p \wedge p = p. \tag{9}$$

En lógica las proposiciones idénticamente verdaderas o bien idénticamente falsas desempeñan importante papel. Las proposiciones idénticamente verdaderas son siempre verdaderas independientemente de si las proposiciones que las forman son verdaderas o falsas. P. ej., la proposición $p \vee \overline{p}$ es idénticamente verdadera.

Designaremos las proposiciones idénticamente verdaderas con la letra i.

Las proposiciones idénticamente falsas siempre lo son, es decir, independientemente de la veracidad o falsedad de las proposiciones que las forman. Semejantes proposiciones se designan con la letra l. P. ej., $p \wedge \bar{p} = l$, ya que la proposición $p \wedge \bar{p}$ es falsa independientemente de si la proposición p es verdadera o falsa.

Para las proposiciones idénticamente verdaderas e idénticamente falsas, con todo p son ciertas las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{ll} p \vee \bar{p} = i, & p \wedge \bar{p} = l, \\ p \vee i = i, & p \wedge i = p, \\ p \vee l = p, & p \wedge l = l, \quad \bar{i} = l. \end{array} \tag{10}$$

Las leyes (1) — (10) del álgebra proposicional describen las propiedades de tres operaciones: disyunción, conjunción y negación. La implicación y la equivalencia se expresan a través de la disyunción, conjunción y negación mediante las siguientes fórmulas:

$$p \to q = \bar{p} \vee q, \tag{11}$$

$$p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}). \tag{12}$$

Ejemplo 1. Demuestren la equivalencia

$$\overline{p \to q} = p \wedge \bar{q}. \tag{13}$$

△ Empleando la igualdad (11), obtenemos

$$\overline{p \to q} = \overline{\bar{p} \vee q}.$$

A continuación, se emplea la ley de Morgan (7) y la ley de negación doble (8):

$$\overline{\bar{p} \vee q} = \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} = p \wedge \bar{q}.$$

La fórmula (13) proporciona la regla de construcción de la negación para la implicación que, con frecuencia, se aplica a los razonamientos matemáticos. ▲

Ejemplo 2. Brown, Jones y Smith se acusan de ser cómplices en un asalto a un banco. Los ladrones se escaparon en un automóvil que los esperaba. En el transcurso de la instrucción Brown mostró que los delincuentes marcharon en un «Buick» azul, Jones dijo que el auto era un «Crysler» negro y Smith afirmaba que era un «Ford Mustang», pero de manera ninguna azul. Era evidente que deseando complicar la instrucción cada uno de ellos indicó correctamente sólo la marca del automóvil o bien su color. ¿De qué color y marca era el auto?

△ Al resolver este problema omitiremos, para abreviar, el signo de conjunción, o sea, en lugar de $p \wedge q$ escribiremos simplemente pq.
Examinemos las proposiciones:
p — auto de color azul,
q — auto de marca «Buick»,
r — auto de color negro,
s — auto de marca «Crysler»,
t — auto de marca «Ford Mustang».
De las declaraciones de Brown, Jones y Smith se deduce, correspondientemente, que las proposiciones $p \vee q$, $r \vee s$, $\bar{p} \vee t$ son verdaderas. Por consiguiente, la conjunción verdadera de esas tres proposiciones:

$$(p \vee q)(r \vee s)(\bar{p} \vee t).$$

Abriendo los paréntesis, obtenemos la disyunción de ocho conjunciones:

$$(pr\bar{p})(prt) \vee (ps\bar{p}) \vee (pst) \vee (qr\bar{p}) \vee (qrt) \vee (qs\bar{p}) \vee (qst).$$

Del planteamiento se desprende que todas las conjunciones, salvo la quinta, son falsas. Por ello, la disyunción puede ser verdadera sólo a condición de la veracidad de la proposición $qr\bar{p}$, lo que significa que los delincuentes huyeron en un «Buick» negro. ▲

2. Enunciados que dependen de la variable (predicados). En matemáticas y otras ciencias, además de las proposiciones, se tropieza con diversos enunciados que dependen de la variable perteneciente a cierto conjunto. En lógica, semejantes enunciados se denominan *predicados*. El predicado $p(x)$, $x \in U$, hablando en general, no es una proposición. No obstante, se supone que para cada elemento fijado $x_0 \in U$ el predicado $p(x_0)$ es una proposición.

El conjunto U, en el que se prefija el predicado $p(x)$, se puede dividir en dos subconjuntos. Uno de ellos contiene aquellos y sólo aquellos elementos de U para los que $p(x)$ es verdadero. Recibe el nombre de conjunto de veracidad del predicado $p(x)$. Otro subconjunto consta de aquellos elementos de U para los que $p(x)$ es falso. Si el primero de dichos subconjuntos se designa con la letra P, el segundo se debe designar con P', ya que es el complemento del conjunto P hasta el conjunto U.

Por ej., para el predicado $x^2 - x < 0$, $x \in \mathbb{R}$, el intervalo $(0; 1)$ es el conjunto de veracidad P, la unión de los intervalos $(-\infty; 0]$ y $[1; +\infty)$ (complemento del intervalo $(0; 1)$ hasta toda la recta númerica) es el conjunto P'.

Dos predicados $p(x)$ y $q(x)$ prefijados en un mismo conjunto llevan el nombre de *equivalentes* si sus conjuntos de veracidad coinciden.

P. ej., dos predicados (desigualdades) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$ y $x^4 - 5x^3 + 6x^2 < 0$ son equivalentes en el conjunto $\mathbb{R}$, ya que el conjunto de veracidad de cada uno de ellos es el intervalo (2; 3).

Para los predicados que dependen de la variable, lo mismo que para las proposiciones, se introducen operaciones lógicas.

Recibe el nombre de *negación* del predicado $p(x)$, $x \in U$, tal predicado definido en el propio conjunto U y que se convierte en una proposición de verdad para aquellos y sólo aquellos valores de x para los que $p(x)$ es falso.

La negación $p(x)$ se designa $\overline{p(x)}$. Si P es el conjunto de veracidad $p(x)$, el conjunto de veracidad $\overline{p(x)}$ será P'. En la fig. 2 están representados esquemáticamente los conjuntos U, P y P'.

De forma análoga también se determinan otras operaciones lógicas.

P. ej., la implicación $p(x) \to q(x)$ de los predicados $p(x)$ y $q(x)$, determinados en el conjunto U, se llama predicado determinado

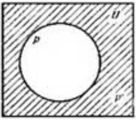


Fig. 2

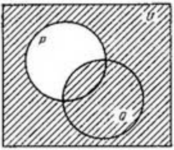


Fig. 3

en ese mismo conjunto U y que se convierte en una proposición falsa para aquellos y sólo aquellos valores de x, para los que la condición $p(x)$ es verdadera y la conclusión $q(x)$, falsa. En la fig. 3 está sombreado el conjunto de veracidad de la implicación $p(x) \to q(x)$ (P y Q son los conjuntos de veracidad de los predicados $p(x)$ y $q(x)$).

3. Signos de universalidad y existenciales (cuantores). Con predicados dependientes de las variables están ligados dos tipos de afirmaciones con las que se tropieza con frecuencia.

1. El predicado $p(x)$, $x \in U$ se convierte en una proposición verdadera para todos los elementos del conjunto U.

2. El predicado $p(x)$, $x \in U$, se convierte en una proposición verdadera al menos para uno de los elementos del conjunto U.

Estas afirmaciones se suelen escribir con brevedad haciendo para ello uso de signos especiales: el *signo de universalidad* $\forall$ (la primera letra girada del vocablo inglés *All* — todo) y el *signo existencial* $\exists$

(la primera letra girada del vocablo inglés *Exists* — existe). En lógica los signos $\forall$ y $\exists$ llevan el nombre de *cuantores*. El cuantor de universalidad $\forall$ corresponde a las palabras «todo», «cualquiera», «cada»; el cuantor existencial $\exists$, a las palabras «al menos uno», «se hallará», «existe».

Al emplear los signos $\forall$ y $\exists$, podemos escribir las afirmaciones 1 y 2 del modo siguiente:

1. $\forall x p(x)$, $x \in U$. 2. $\exists x p(x)$, $x \in U$.

Cada uno de estos predicados es bien verdadero, o bien falso y, por lo tanto, es una proposición.

Las reglas para confeccionar las negaciones para las proposiciones que contienen los cuantores se prefijan con las fórmulas

$$\overline{\forall x p(x)} = \exists x \overline{p(x)}, \quad \overline{\exists x p(x)} = \forall x \overline{p(x)}. \tag{14}$$

La primera fórmula significa que $p(x)$ es verdadera no para todas las x cuando y sólo cuando existe tal x para la cual $p(x)$ es falsa. La segunda fórmula nos indica que no existe tal x para la cual $p(x)$ es verdadera cuando y sólo cuando $p(x)$ es falsa para todas las x.

El elemento x_0 del conjunto U, para el que el predicado $p(x)$ no es cierto, lleva el nombre de contraejemplo para la proposición $\forall x p(x)$.

Así, pues, con el fin de cerciorarse de la falsedad de la proposición $\forall x p(x)$ es suficiente hallar (o bien como asimismo se dice, construir) un contraejemplo.

El predicado definido en el conjunto $X \times Y$ (es decir, en el producto cartesiano de los conjuntos X e Y), recibe el nombre de predicado dependiente de dos variables o bien predicado doble y se designa $p(x; y)$, $x \in X$, $y \in Y$. De semejante predicado, con ayuda de los cuantores $\forall$ y $\exists$ se pueden formar ocho proposiciones:

1. $\forall x \forall y p(x; y)$. 2. $\forall y \forall x p(x; y)$.
3. $\forall x \exists y p(x; y)$. 4. $\exists y \forall x p(x; y)$.
5. $\exists x \forall y p(x; y)$. 6. $\forall y \exists x p(x; y)$.
7. $\exists x \exists y p(x; y)$. 8. $\exists y \exists x p(x; y)$.

Las proposiciones 1 y 2 son, por lo visto, equivalentes lo mismo que las proposiciones 7 y 8. Las proposiciones 3 y 4, así como 5 y 6, no son equivalentes (véanse los problemas **2.21**, **2.22**). Por ello se dice que los cuantores homónimos pueden permutarse, y los diferentes, no.

4. Método de inducción matemática. En muchas partes de las matemáticas es preciso demostrar la veracidad de los predicados $p(x)$ determinados en un conjunto de números naturales para todos los valores de la variable, es decir, la veracidad de la proposición

$$\forall n p(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Con frecuencia, esto se consigue realizar con el *método de inducción matemática*. Este método se basa en el llamado principio de inducción matemática (axioma de la inducción) que puede enunciarse del siguiente modo. El predicado $p(n)$ se considera verdadero para todos los valores naturales de la variable si se emplean las dos siguientes condiciones:

1. El predicado $p(n)$ es verdadero para $n = 1$.
2. De la suposición que $p(n)$ es verdadero para $n = k$ (donde k es cualquier número natural) se desprende que también es verdadero para el siguiente valor $n = k + 1$.

Por método de inducción matemática se entiende el siguiente método de demostración. Si es preciso demostrar la veracidad del predicado $p(n)$ para todos los valores naturales de n, primero se comprueba la veracidad de la proposición $p(1)$ y, a continuación, suponiendo que la proposición $p(k)$ es verdadera, se demuestra la veracidad de la proposición $p(k+1)$. Si la demostración es cierta para cada valor natural de k, en correspondencia con el principio de la inducción matemática el predicado $p(n)$ será verdadero para todos los valores de n.

Ejemplo 3. Demuestren la igualdad

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n\in\mathrm{N}.$$

△ Esta igualdad es el predicado $p(n)$ prefijado en un conjunto de números naturales. Demostremos la veracidad de $p(n)$ para todos los valores de n según el método de la inducción matemática.

1. La proposición $p(1)$ es verdadera, ya que

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot(2\cdot 1+1)}{6}.$$

2. Supongamos que $p(k)$ es verdadero, es decir, es válida la igualdad

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Después de adicionar a ambos miembros de la igualdad $(k+1)^2$, obtenemos

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Transformemos el segundo miembro de la igualdad de la siguiente forma:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Por lo tanto

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

lo que significa que $p(k+1)$ es verdadero. De este modo, el razonamiento es justo con todo $k \in \mathbb{N}$.

En correspondencia con el principio de la inducción matemática la igualdad inicial es verdadera. ▲

Ejemplo 4. Demostrar la desigualdad de Bernoulli.

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha, \quad \alpha > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

△ 1. Con $n = 1$ obtenemos una proposición verdadera

$$1+\alpha \geqslant 1+\alpha.$$

2. Supongamos que la desigualdad es cierta con $n = k$, es decir,

$$(1+\alpha)^k \geqslant 1 + k\alpha.$$

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $1+\alpha$ (esto se puede realizar, ya que $\alpha > -1$), obtenemos

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha) \geqslant 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2.$$

Teniendo en cuenta que $k\alpha^2 \geqslant 0$, llegamos a la desigualdad

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)\alpha.$$

Así, pues, al suponer que la desigualdad es cierta para $n = k$, hemos demostrado que ella es asimismo cierta para $n = k+1$. Es evidente, que la demostración seguirá siendo válida para cada valor de k. De forma que la desigualdad está demostrada. ▲

Ejemplo 5. Demostrar que con cada $n \in \mathbb{N}$ el número $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ es múltiplo a 19.

△ 1. Con $n = 1$ la afirmación dada es, por lo visto, cierta.

2. Supongamos que es cierta para $n = k$, o sea, supongamos que $5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ se divide por 19. Entonces, como

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 8 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} = 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1}$$

la afirmación también es cierta con $n = k+1$. En efecto, el primer sumando del segundo miembro de esta igualdad se divide por 19 debido a la suposición inductiva; el segundo se divide asimismo por 19, ya que contiene el factor 19.

Las dos condiciones del principio de inducción matemática se han cumplido. La afirmación está demostrada. ▲

Ejemplo 6. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

△1. Con $n = 1$ la desigualdad es cierta, ya que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1.$$

2. Supongamos que la desigualdad es cierta con $n = k$, es decir,

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1.$$

Adicionemos a ambos miembros de la desigualdad la suma de tres fracciones

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$$

y traslademos el primer sumando del primer miembro al segundo de la desigualdad. Entonces, obtenemos

$$\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+4}>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}.$$

El segundo miembro de esta desigualdad es mayor que la unidad, ya que

$$1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=$$

$$=1+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>1.$$

Por lo tanto, el primer miembro con más razón es mayor que la unidad, es decir,

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\ldots+\frac{1}{3(k+1)+1}>1.$$

Esta última desigualdad se obtiene de la inicial con $n = k+1$.

Así, pues, al suponer la veracidad de la desigualdad con $n = k$, hemos demostrado su veracidad con $n = k + 1$. De este modo, hemos demostrado la desigualdad con el método de inducción matemática. ▲

Ejemplo 7. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos tomados al azar, con la particularidad de que $x_1x_2 \ldots x_n = 1$. Demuestren que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

△ 1. Si $n = 1$, de acuerdo con el planteamiento $x_1 = 1$ y, por consiguiente, podemos escribir $x_1 \geqslant 1$, es decir, para $n = 1$ la afirmación es cierta.

2. Supongamos que la afirmación es cierta para $n = k$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$, números positivos tomados al azar y que

$$x_1x_2 \ldots x_kx_{k+1} = 1.$$

Pueden haber dos casos: bien todos estos números son iguales a 1 y, entonces, su suma será igual a $k + 1$ y la desigualdad quedará demostrada, o bien entre dichos números hay al menos un número no igual a la unidad y, entonces, habrá obligatoriamente al menos un número más no igual a la unidad, con la particularidad de que si uno de ellos es menor que la unidad, el otro es mayor que ella. Sin limitar la universalidad es posible considerar que $x_k > 1$ y $x_{k+1} < 1$. Ahora, consideremos k números

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ (x_k x_{k+1}).$$

Su producto es igual a la unidad y, por consiguiente, según la suposición inductiva

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geqslant k.$$

Adicionemos a ambos miembros de la última desigualdad $x_k + x_{k+1}$, traslademos $x_k x_{k+1}$ a la derecha y transformemos el segundo miembro de la desigualdad:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} &\geqslant k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} = \\ &= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 = \\ &= k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) - (1 - x_{k+1}) = \\ &= k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \geqslant k + 1. \end{aligned}$$

Así, pues, de la veracidad de la afirmación con $n = k$ se desprende su veracidad con $n = k + 1$. La afirmación está demostrada. De la demostración aducida se deduce que el signo de igualdad en la relación que demostramos tiene lugar cuando y sólo cuando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. ▲

Ejemplo 8. Demuestren la desigualdad

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos arbitrarios.

△ Esta importante desigualdad entre la media aritmética y la media proporcional de n números es el corolario de la afirmación demostrada en el ejemplo 7. En efecto, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos tomados al azar.

Consideremos n números

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}};\quad \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}};\ \ldots;\ \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}.$$

Por lo visto, todos estos números son positivos y su producto es igual a la unidad. Por consiguiente, su suma es mayor o igual a n, es decir,

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}} \geqslant n,$$

de donde

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

con la particularidad de que la igualdad tiene lugar cuando y sólo cuando $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$. ▲

En ciertas ocasiones el método de inducción matemática se aplica en forma algo variada. Con la mayor frecuencia se utilizan las dos siguientes enunciaciones:

I. El predicado $p(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ es verdadero para todos los valores enteros de $n \geqslant m$ (m es cierto número entero) si se cumplen las condiciones:

1. El predicado $p(n)$ es verdadero para $n = m$.
2. De la suposición que $p(n)$ es verdadero para $n = k$ (k es un número entero, $k \geqslant m$) se desprende que es verdadero para el siguiente valor de $n = k + 1$.

II. El predicado $p(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ es verdadero para todo $n \geqslant m$ (m es cierto número entero) si se cumplen las condiciones:

1. El predicado $p(n)$ es verdadero para $n = m$ y $n = m + 1$.
2. De la suposición que $p(n)$ es verdadero para $n = k$ y $n = k - 1$ se deduce (para todo $k > m$) que él es verdadero para $n = k + 1$.

P. ej., la enunciación I se emplea al resolver los problemas **2.30**, **2.36**, la II, al resolver el problema **2.34**.

2.1. Entre las siguientes frases separen aquellas que son proposiciones y establezcan (si esto es posible) si ellas son verdaderas o falsas:

1) El gran poeta ruso A. S. Pushkin nació el año 1799.
2) El duodécimo campeón del mundo de ajedrez es Anatoli Kárpov.
3) ¡Vuelen en aeronaves de Aeroflot!
4) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
5) Para los dos conjuntos arbitrarios A y B es cierta la inclusión $A \subset A \cup B$.
6) Hay civilizaciones extraterrestres.
7) $2CO + O_2 = 2CO_2$.
8) La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°.

2.2. Se dan dos proposiciones:

p — «el número 3 es el divisor del número 174»;

q — «llueve».

¿En qué consisten las proposiciones:

1) $\overline{p}$; 2) $p \vee q$; 3) $p \wedge q$; 4) $p \rightarrow q$; 5) $\overline{p} \rightarrow q$; 6) $p \leftrightarrow \overline{q}$?

¿Cuáles de estas proposiciones son verdaderas si p es verdadera y q falsa?

2.3. Confeccionen la tabla de verdad para las proposiciones de la forma:

1) $s = (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$; 2) $s = (p \wedge (q \rightarrow p)) \vee \overline{p}$.

2.4. Demuestren las fórmulas (3) — (7).

2.5. Demuestren las fórmulas (11) y (12).

2.6. A un blanco se han efectuado tres tiros. Sea p_k la proposición «el blanco ha sido batido por el k-ésimo tiro», $k = 1, 2, 3$. ¿Qué significan las siguientes proposiciones:

1) $p_1 \vee p_2 \vee p_3$; 2) $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$; 3) $(\bar{p}_1 \vee \bar{p}_2) \wedge p_3$?

¿Cuáles de estas tres proposiciones son verdaderas si p_3 es verdadera y p_1 y p_2, falsas?

2.7. ¿Cuáles de las proposiciones p, q, r deben ser verdaderas y cuáles falsas para que $((\overline{\bar{p} \vee p}) \wedge q) \to r$ sea verdadera?

2.8. Simplifiquen las proposiciones de la forma:

1) $(p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})) \vee (p \wedge \bar{q})$. 2) $(p \wedge q) \vee ((r \vee p) \wedge \bar{q})$.

3) $(r \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$. 4) $(p \to q) \wedge (\overline{r \to q})$.

2.9. A la pregunta de cuál de tres estudiantes estudiaba lógica fue obtenida una respuesta correcta: si la estudiaba el primero, también lo hacía el tercero, pero no era cierto que si la estudiaba el segundo, lo hacía asimismo el tercero. ¿Quién estudiaba lógica?

2.10. Víctor, Román, Yuri, Sergio ocuparon en la olimpiada de matemáticas los cuatro primeros puestos. Cuando les preguntaron acerca de la distribución de los puestos, dieron las tres siguientes respuestas:

1) Sergio — primero, Román — segundo;
2) Sergio — segundo, Víctor — tercero;
3) Yuri — segundo, Víctor — cuarto.

¿Cómo se distribuyeron los puestos si en cada una de las respuestas sólo una de las afirmaciones era verdadera?

2.11. Determinen cuál de cuatro estudiantes dio el examen si sabemos que:

1) si lo dio el primero, el segundo también;
2) si lo dio el segundo, el tercero también o bien el primero no lo dio;
3) si no lo dio el cuarto, lo dio el primero, pero el tercero no;
4) si el cuarto lo dio, el primero también.

2.12. Para una expedición polar de ocho pretendientes A, B, C, D, E, F, G y H hay que elegir seis especialistas: biólogo, hidrólogo, sinóptico, radista, mecánico y médico. Las funciones del biólogo pueden ser realizadas por E y G, las del hidrólogo, B y F. Las del sinóptico, F y G, las del radista, C y D, las del mecánico, C y H, las del médico, A y D. Aunque algunos de los pretendientes tienen dos especialidades, en la expedición cada uno puede realizar sólo una función. ¿Quién y en calidad de qué ha de incluirse en la expedición si F no puede ir sin B, D sin H y sin C, C no puede ir simultáneamente con G, y A no puede ir junto con B?

2.13. En un conjunto de números naturales de una cifra se dan dos predicados:

$p(n)$: el número 3 es divisor del número n;
$q(n)$: $n \leqslant 6$.
Hallen el conjunto de veracidad de los predicados:

1) $p(n) \vee q(n)$; 2) $p(n) \wedge \overline{q(n)}$;
3) $\overline{p(n)} \to q(n)$; 4) $\overline{p(n) \to q(n)}$.

2.14. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son proposiciones? ¿Cuáles de las proposiciones son verdaderas y cuáles falsas:

a) La suma de las raíces de la ecuación cuadrática aducida es igual al término independiente.

b) La suma de las raíces de cualquiera ecuación cuadrática aducida es igual al término independiente.

c) Existe una ecuación cuadrática reducida, en la que la suma de las raíces es igual al término independiente?

2.15. En el conjunto de todos los números naturales se prefijan tres predicados:
$p(n)$: el número $n^2 - 2$ es múltiplo de 7;
$q(n)$: el número $n - 2$ es múltiplo de 7;
$r(n)$: $4n^2 - 360n + 8099 < 0$.
¿Con qué valores de n de los tres predicados dos son verdaderos y uno falso?

2.16. En el conjunto de todos los números naturales se dan tres predicados:
$p(x)$: x es un número entero;
$q(x)$: $x^2 - 3x$ es un número entero negativo;
$r(x)$: $x + \frac{1}{x}$ es un número positivo.
¿Con qué valores de x es falsa una y sólo una de estas tres proposiciones?

2.17. En el conjunto de todos los pares ordenados $(m; n)$ de números enteros positivos se dan los predicados:
$p(m, n)$: $m + 1$ se divide por n;
$q(m, n)$: m es igual a $2n + 5$;
$r(m, n)$: $m + n$ se divide por 3;
$s(m, n)$: $m + 7n$ es un número primo.
Hallen todos los pares de números $(m; n)$ para los cuales una y sólo una de las proposiciones es falsa.

2.18. ¿Con qué valores de a el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y = b, \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}$$

tiene raíces reales con cualesquiera valores de b?

2.19. Está dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} bx - y = ac^2, \\ (b-6)x + 2by = c + 1, \end{cases}$$

donde a, b, c son números reales. ¿Con qué valores de a y cualquier b habrá tal c con el que el sistema tiene al menos una raíz?

2.20. Se dan dos puntos A (0; 9), B (3; 6) y el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2x - y + a \leqslant 0, \\ 6x + 3y + 5a \geqslant 0. \end{cases}$$

¿Con qué valores del parámetro a la solución del sistema serán las coordenadas: 1) al menos de un punto del segmento AB, 2) de cada punto del segmento AB?

2.21. Consideremos dos definiciones de un trabajo sencillo de control.

1. El trabajo de control se denomina sencillo si cada uno de los problemas fue resuelto al menos por un estudiante.

2. El trabajo de control se llama sencillo si al menos un estudiante resolvió todos los problemas.

1) ¿Puede ser sencillo el trabajo de control en el sentido de la primera definición y difícil (no sencillo) en el sentido de la segunda?

2) ¿Puede ser sencillo el trabajo de control en el sentido de la segunda definición y difícil en el sentido de la primera?

2.22. Se da la desigualdad $kx + l^2 > 0$. Con qué valores de k son verdaderós los siguientes predicados:

1) Con toda l la desigualdad tiene al menos una solución.

2) Existe una l con la que la desigualdad es cierta para todas x.

3) Con toda l la desigualdad es cierta para todas x.

4) Existe una l con la que la desigualdad tiene al menos una solución.

2.23. Empleando las reglas de construcción de una negación para las proposiciones que contienen cuantores (véase la fórmula (14)), enuncien la negación de las siguientes proposiciones:

1) En cierto tren que va de Moscú a Leningrado, en cada vagón hay (existe) un sitio libre.

2) En cada ciudad de Suecia hay una calle en la que hay una casa en la que todas las ventanas dan al sur.

2.24. Construyan un contraejemplo para las proposiciones:

1) Con cada $n \in \mathrm{N}$ el número $n^2 + n + 41$ es primo.

2) Cada función continua en el punto tiene en éste una derivada.

Con el método de inducción matemática resuelvan los problemas **2.25 — 2.40.**

2.25. Demuestren que con cada $n \in \mathrm{N}$ son ciertas las igualdades:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$.

3) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

4) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n - 1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

5) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

6) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)\,n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

7) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

8) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

9) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

2.26. Demuestren que con toda $n\in\mathbb{N}$:

1) $n(2n^2-3n+1)$ es múltiplo de 6.

2) $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ se divide por 11.

3) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ se divide por 133.

4) n^5-n es múltiplo de 5.

2.27. Demuestren que con todo número $n>1$ natural, $2^{2^n}+1$ termina en la cifra 7.

2.28. Demuestren la validez de las siguientes desigualdades para todos los números $n>1$ naturales:

1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

2) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

3) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

4) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

5) $(2n!)>\frac{4n}{n+1}(n!)^2$.

2.29. Demuestren que con todo número $n>2$ natural es cierta la desigualdad

$$2^n n!<n^n.$$

2.30. ¿Con qué valores naturales de n son ciertas las desigualdades:

1) $3^n>2^n+7n$; 2) $2^n>n^2+4n+5$;

3) $2^n>n^3$; 4) $n!>2^n$?

2.31. Demuestren que

$$3+33+\ldots+33\ldots3=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27},\quad n\in\mathbb{N}$$

el primer miembro de la igualdad contiene n sumandos).

2.32. Demuestren la igualdad

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}=2\cos(\pi/2^{n+1}),\quad n\in\mathbb{N}$$

(el primer miembro contiene n raíces).

2.33. Demuestren la igualdad

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1},\quad n\in\mathbb{N}.$$

2.34. La sucesión $\{a_n\}$ es la relación recurrente

$$a_n=\frac{5}{2}a_{n-1}-a_{n-2}\,(n>1),\quad a_0=2,\quad a_1=\frac{5}{2}.$$

Hallen el n-ésimo término de la sucesión.

2.35. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números no negativos arbitrarios, con la particularidad de que

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1/2.$$

Demuestren que

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\geqslant 1/2.$$

2.36. Demuestren que cualquier suma de dinero mayor que 7 kop. sólo se puede cambiar con monedas de tres y cinco kopeks.

2.37. En el plano se han trazado n rectas de las que ningunas dos son paralelas y ningunas tres pasan por un mismo punto. ¿En cuántas partes dividen el plano dichas rectas?

2.38. ¿En cuántas partes se dividirá una esfera con n planos que pasan por el centro si ningunos tres planos pasan por un mismo diámetro?

2.39. En un plano se han trazado al azar n rectas. Demuestren que con pinturas blanca y negra puede ser pintado el plano de tal forma que cualesquiera dos partes, que tengan un lado común, estarán pintadas de diferente color.

2.40. Demuestren que si p es un número primo y n, un número natural, n^p-n se divide por p (teorema de Fermat).

§ 3. Números reales

1. Números racionales e irracionales. Lleva el nombre de *número real* una fracción decimal infinita. Para los números reales están determinadas las operaciones de adición y multiplicación, sometidas a las leyes conmutativa y asociativa y ligadas entre sí con la ley distributiva (esto se tratará más adelante con mayor detalle). La operación inversa a la adición se llama sustracción, inversa a la multiplicación, división. Los números reales pueden compararse por su valor. El conjunto de números reales se designa con $\mathbb{R}$.

Así, pues, todo número real a, por definición, se escribe en forma de una fracción decimal infinita

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots, \tag{1}$$

donde α_0 es un número entero no negativo (es decir, α_0 puede tomar los valores $0, 1, 2, 3, \ldots, m, \ldots$), así como cada uno de α_n ($n = 1, 2, \ldots$) es una de las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. En la anotación (1) el signo «$+$», por regla, no se escribe. En tal caso, el número a recibe el nombre de no negativo: $a \geqslant 0$ y se escribe

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \tag{2}$$

El número (2) se denomina *valor absoluto* del número (1) y se designa con $|a|$. De este modo

$$|\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots| = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

Puede suceder que un mismo número real permite realizar la anotación en forma de dos fracciones decimales distintas; en semejante caso, en una de las anotaciones, a partir de cierto lugar (de las decenas) después de la coma, habrá sólo ceros, mientras que en otro, sólo nueves. P. ej.,

$$1 = 1,000 \ldots 0 \ldots = 0,999 \ldots 9 \ldots$$

En adelante, como anotación de números reales vamos a emplear sólo fracciones decimales infinitas (llamadas tolerables), en las que no hay semejantes decenas a partir de las cuales en la anotación del número sólo está la cifra 9. Llegando a este acuerdo, cada número real se escribe de forma única en forma de una fracción decimal infinita.

Si en la anotación decimal (1) del número a, a partir de cierto lugar, sólo hay ceros:

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 00 \ldots 0 \ldots,$$

por regla, se escribe

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{3}$$

y se dice que el número a se escribe con ayuda de la fracción decimal finita (3).

Para un número no negativo a, escrito en forma de la fracción decimal tolerable infinita (2), la fracción decimal finita

$$\underline{a}_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{4}$$

recibe el nombre de su *aproximación decimal inferior* (o bien *aproximación decimal por defecto*) del orden n, en tanto que el número

$$\overline{a}_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n}, \tag{5}$$

el de *aproximación decimal superior* (o bien *aproximación decimal por exceso*) del orden $n = 0, 1, 2, \ldots$

Pero si el número a es negativo: $a < 0$, es decir, se escribe en forma de una fracción decimal tolerable

$$a = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots,$$

donde al menos uno de α_m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) no es igual a cero, sus aproximaciones decimales inferior $\underline{a}_n$ y superior $\overline{a}_n$ del orden n, se determinan con las igualdades (6)

$$\underline{a}_n = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n - 10^{-n}, \qquad (6)$$
$$\overline{a}_n = -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

De este modo, con cualquier $a \in \mathbb{R}$

$$\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \overline{a}_n,$$
$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 10^{-n},$$
$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n.$$

Las aproximaciones con las fracciones decimales finitas (4), (5) y (6) de los números reales $a \in \mathbb{R}$ proporcionan facilidades al emplearlas cuando se realizan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y comparación de números reales.

P. ej., la suma $a + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ es el número real único que satisface con toda $n = 0, 1, 2, \ldots$ la desigualdad

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n \leqslant a + b \leqslant \overline{a}_n + \overline{b}_n.$$

El producto ab es el único número real que, con toda $n = 0$ $1, 2, \ldots$, satisface las desigualdades

$$\underline{a}_n\underline{b}_n \leqslant ab \leqslant \overline{a}_n\overline{b}_n \text{ si } a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,$$
$$\underline{a}_n\overline{b}_n \leqslant ab \leqslant \overline{a}_n\underline{b}_n \text{ si } a < 0, \ b \geqslant 0,$$
$$\overline{a}_n\overline{b}_n \leqslant ab \leqslant \underline{a}_n\underline{b}_n \text{ si } a < 0, \ b < 0.$$

La condición $a < b$ es equivalente a la existencia de tal número n que $\overline{a}_n < \underline{b}_n$.

En el § 1 ya se indicó que los números naturales $1, 2, \ldots$ se designan con $\mathbb{N}$, y los enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, con $\mathbb{Z}$. Los números de la forma

$$\frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0$$

llevan el nombre de *racionales*, y el símbolo $\frac{m}{n}$ con el que se escriben, *fracción racional*. Un mismo número racional a puede ser escrito mediante diferentes fracciones racionales: si

$$a=\frac{m}{n} \quad \text{y} \quad a=\frac{k}{l}, \quad m, n, k, l \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0, \quad l \neq 0,$$

esto es posible cuando y sólo cuando $lm = kn$.

El conjunto de todos los números racionales se designa con $\mathbb{Q}$. Los números reales que no son racionales reciben el nombre de irracionales. El conjunto de todos los números irracionales se designa con $\mathbb{I}$.

Una fracción racional infinita se denomina *periódica* con período $\beta_1 \ldots \beta_m$ y se escribe en la forma

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n (\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m) \tag{7}$$

si después de cierta decena (su número se designa con n) el grupo de cifras $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m$ se repite constantemente.

Las fracciones decimales infinitas periódicas, y solamente ellas, son números reales racionales. De aquí se desprende que un número real es irracional cuando y sólo cuando él se escribe en forma de una fracción infinita aperiódica. El paso de la anotación de un número racional con una fracción racional p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, a su anotación mediante una fracción decimal infinita periódica, se realiza dividiendo «en columna» el numerador p por el denominador q. El paso de la anotación de un número racional de la forma (7) a su anotación con ayuda de una fracción racional se realiza con la fórmula

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n (\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m) = \\ = \alpha_0 \frac{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m - \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}{\underbrace{99 \ldots 9}_{m \text{ veces}}\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ veces}}}. \tag{8}$$

En el numerador de la fracción en el segundo miembro de la igualdad se encuentra la diferencia de los números situados después de la coma en (7) hasta el segundo y primer períodos, respectivamente. En el denominador está un número que comienza con la cifra 9 tomada tantas veces cuantas cifras hay en el período y, a continuación, siguen ceros cuya cantidad es igual al número de cifras antes del período. Empleando las reglas enunciadas p. ej., tenemos

$$\frac{3}{7}=0,(428571), \qquad 2,7(13)=2\,\frac{713-7}{990}=2\,\frac{706}{990}=2\,\frac{353}{495}.$$

Entre los puntos de la recta geométrica y los números reales se puede establecer tal correspondencia biunívoca que si al número cero le corresponde el punto O, a la unidad, el punto E y si tomamos en la recta el vector $\overrightarrow{OE}$ como el versor de coordenadas, entonces a cada número se ha puesto en correspondencia el punto de la recta con abcisa igual a dicho número. Por esta razón, el conjunto de números reales lleva asimismo el nombre de *recta numérica* o bien *eje numérico* o *eje real*, los propios números reales se denominan *puntos* de la recta numérica y, p. ej., en lugar de «el número x es menor que y» se puede decir: «el punto x del eje numérico está a la izquierda del punto y».

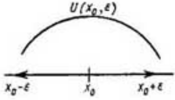


Fig. 4

La recta numérica $\mathbb{R}$ completada con dos elementos designados $+\infty$ (más infinito) y $-\infty$ (menos infinito) tales que para cualquier número $x \in \mathbb{R}$, por definición, se considera

$$-\infty < x < +\infty,$$

recibe el nombre de *recta numérica ampliada* $\overline{\mathbb{R}}$. Los elementos $+\infty$ y $-\infty$ también se denominan *puntos infinitamente alejados* de la recta numérica o bien *números infinitos*, a diferencia de los puntos $x \in \mathbb{R}$ que, en ocasiones, se llaman *puntos finitos* de dicha recta (correspondientemente, *números finitos*).

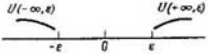


Fig. 5

Para todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ el intervalo $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ lleva el nombre de su *ε-entorno* y se designa con $U(x_0;\ \varepsilon)$, es decir,

$$U(x_0;\ \varepsilon) = \{x\colon |x - x_0| < \varepsilon\} \tag{9}$$

(fig. 4). Para los puntos infinitamente alejados $+\infty$ y $-\infty$ sus ε-entornos $U(+\infty;\ \varepsilon)$ y $U(-\infty;\ \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ se determinan con las fórmulas:

$$U(+\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon x > \varepsilon\},\quad U(-\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon x < -\varepsilon\} \tag{10}$$

(fig. 5).

A veces, la recta numérica se completa con un elemento que se designa con ∞ y se llama infinidad. La infinidad sin signo no está ligada con la relación de orden con los números reales. Su ε-entorno $U(\infty;\ \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ se prefija con la fórmula

$$U(\infty;\ \varepsilon) = \{x\colon |x| > \varepsilon\}. \tag{11}$$

La infinidad sin signo se denominа asimismo punto infinitamente alejado de la recta numérica.

3.1. Escriban las fracciones racionales 2/3, 11/20, 3/14, $-2/7$ en forma de fracciones decimales infinitas.

3.2. Escriban las fracciones decimales infinitas periódicas 0,125 (0); 0,(3); 2,4 (31); 0,2 (9) en forma de fracciones racionales.

3.3. Demuestren que el número $0{,}121221222\ldots\underbrace{122\ldots2}_{n\ \text{veces}}\ldots$ es irracional.

3.4. Demuestren que $\log 2$, $\log_2 3$ son números irracionales.

3.5. Demuestren que los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2/3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ son irracionales.

3.6. ¿Puede ser la suma de dos números irracionales un número racional?

3.7. Demuestren que para cualesquiera números racionales a y b, tales que $a < b$, habrá un número irracional c que satisfaga la condición $a < c < b$.

3.8. Demuestren que para cualesquiera números racionales p, q, r, de los cuales al menos uno no es igual a cero, el número $p\sqrt{2} + q\sqrt{3} + r\sqrt{2/3}$ es irracional.

3.9. Hallen las cinco primeras aproximaciones decimales inferiores y superiores de los números 3/10, 1/3, 11/9, $-$ 5/8.

3.10. Hallen tres aproximaciones decimales inferiores y superiores de los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

3.11. ¿Son conmensurables segmentos si la razón entre sus longitudes se expresa con la fracción 0,23 (75)?

3.12. Comparen los siguientes números reales:
1) 3,3 y 3,298. 2) 3,1416 y 3,14159.
3) 3,141592 y 22/7, 4) $\sqrt{3}+2$ y $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.
5) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ y $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

3.13. Hallen las tres primeras cifras significativas en las aproximaciones decimales inferiores y superiores para los siguientes números:

1) $\frac{1}{3}+\sqrt{3}$. 2) $\sqrt{2}-1{,}4$. 3) $\sqrt{5}-2\frac{1}{3}$.

4) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$. 5) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$. 6) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

3.14. Demuestren que en dos puntos cualesquiera de la recta numérica existen entornos no intersecantes.

3.15. Demuestren que en dos puntos cualesquiera de la recta numérica ampliada con ayuda de dos puntos infinitamente alejados

$+\infty$ y $-\infty$, o bien mediante un punto infinitamente alejado ∞, existen entornos no intersecantes.

3.16. Hallen el ε-entorno máximo del punto $x = 2$ en el que
1) $x^2 - 5x + 4 < 0$, 2) $\operatorname{sen} x > 0$, 3) $\operatorname{tg} x < 0$,

$$4)\ \frac{x^2(x+1)}{x-1} > 0.$$

2. Números enteros.

Ejemplo 1. Demuestren que si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, existe una y única representación del número a en la forma

$$a = bq + r,\ 0 \leqslant r < b,\ q \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}.$$

$\triangle$ Tomemos $q \in \mathbb{Z}$ de modo que $bq \leqslant a < b(q + 1)$. Entonces $0 \leqslant a - bq < b$, es decir, el número $r = a - bq$ satisface las condiciones del problema.

Si $a = bq_1 + r_1$, $0 \leqslant r_1 < b$, entonces sustrayendo de él, término por término, la igualdad $a = bq + r$, obtenemos $0 = b(q_1 - q) + r_1 - r$ y, por lo tanto, $r_1 - r$ es múltiplo de b. Como $|r_1 - r| < b$, esto sólo es posible cuando y sólo cuando $r_1 = r$ y $q_1 = q$. $\blacktriangle$

3.17. El máximo común divisor (m.c.d.) de los números naturales a y b se designa con (a, b). Demuestren que si $a = bq + c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, entonces $(a, b) = (b, c)$.

3.18. Sean $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$. Demuestren que existen $n \in \mathbb{N}$ y los números $q_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $r_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ tales que

$$\begin{aligned} &a = bq_1 + r_1,\quad 0 < r_1 < b,\\ &b = r_1q_2 + r_2,\quad 0 < r_2 < r_1,\\ &r_1 = r_2q_3 + r_3,\quad 0 < r_3 < r_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1},\quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2},\quad r_{n-2} = r_{n-1}q_n \end{aligned} \qquad (12)$$

y que r_{n-1} es el máximo común divisor de los números a y b. (Semejante método para hallar el m.c.d. de dos números naturales recibe el nombre de algoritmo de Euclides).

3.19. Demuestren que el conjunto de divisores comunes de dos números naturales coincide con el conjunto de m.c.d.

Indicación. Hagan uso del algoritmo de Euclides (12).

3.20. Demuestren que para cualesquiera números naturales a, b y c es válida la igualdad $(ac, bc) = (a, b)\,c$.

Indicación. Multipliquen la igualdad (12) por c.

Ejemplo 2. Demuestren que si a y b son números naturales y $(a, b) = 1$ (tales números llevan el nombre de mutuamente primos), para cualquier natural c es válida la igualdad $(ac, b) = (c, b)$.

$\triangle$ Demostremos que los números (ac, b) y (b, c) se dividen entre sí, de donde se desprenderá de inmediato que ellos son iguales. El número b y, por consiguiente, asimismo el número bc se dividen por (ac, b). Por ello, el número (ac, b) es el divisor de los números ac y bc, de donde del problema (3.19) se deduce que (ac, b) es también el divisor de m.c.d. $(ac, bc) = c\,(a, b) = c$ de los números ac y bc. Así, pues, (ac, b) es el divisor de los números b y c y, por ello, también el divisor de (b, c). A la inversa, el número (b, c) es el divisor de los números b y ac, por consiguiente, él es el divisor de su m.c.d.(ac, b). $\blacktriangle$

Ejemplo 3. Demuestren que si a, b y c son números naturales, $(a, b) = 1$ y ac se divide por b, c también se divide por b.

$\triangle$ De acuerdo con el ejemplo 2, tenemos $(ac, b) = (c, b)$ y como ac se divide por b, entonces $(ac, b) = b$. De este modo, $(c, b) = b$, es decir, el número c se divide por b. $\blacktriangle$

3.21. Demuestren que si cada número natural $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es recíprocamente primo con cada número natural $b_1, b_2, \ldots, b_m$, su producto $a_1 a_2 \ldots a_n$ es recíprocamente primo con el producto $b_1 b_2 \ldots b_m$.

3.22. Demuestren que si el producto de varios números enteros no negativos se divide por el número primo p, al menos uno de los factores también se divide por p. (Un número natural recibe el nombre de primo si él no tiene divisores enteros positivos salvo la unidad y él mismo.)

3.23. Demuestren que todo número natural mayor que la unidad se descompone en el producto de los factores primos y, además, con el único procedimiento, si nos abstraemos del orden de los factores.

3.24. Demuestren que el conjunto de los números primos es infinito.

3.25. Demuestren que para cualesquiera dos números naturales m y n existen tales números enteros p y q que

$$pm + qn = (m, n).$$

En particular si m y n son primos entre sí, $pm + qn = 1$.

3.26. Demuestren que si ξ es un número irracional, el conjunto de las partes fraccionales de los números del tipo $n\xi$, $n \in \mathbb{N}$ es denso en el segmento $[0; 1]$. (Se denomina *parte fraccional* del número real x la diferencia entre ese número y el número entero mayor que no supera a x. El conjunto $X \subset [a; b]$ lleva el nombre de *denso en el segmento* $[a, b]$ si todo entorno de cada punto de dicho segmento contiene puntos del conjunto X.)

3.27. Demuestren que si un número natural no es el cuadrado de semejante número, él tampoco puede ser el cuadrado de un número racional.

Indicación. Hagan uso del resultado del problema **3.23.**

---

3. Teoría axiomática de los números reales

3.1. Axiomas de los números reales. Se denomina *conjunto de números reales* un conjunto en el que para sus elementos se verifican las siguientes condiciones:

I. En el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ está definida la operación binaria llamada operación de adición: a todo par ordenado de números reales a y b le está puesto en correspondencia un número, designado con $a + b$ y denominado suma de los números a y b. Con esto, tienen lugar las siguientes propiedades:

I_1 (ley conmutativa de la adición). Para cualesquiera números a y b se cumple la igualdad $a + b = b + a$.

I_2 (ley asociativa de la adición). Para cualesquiera números a, b y c se cumple la igualdad $a + (b + c) = (a + b) + c$.

I_3. Existe tal número designado con 0 que para cualquier número a se cumple la igualdad $a + 0 = a$.

I_4. Para cada número a existe semejante número, llamado opuesto al número a y designado con $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

El número $a + (-b)$ se denomina diferencia $a - b$ de los números a y b.

II. En el conjunto de números reales está definida la operación binaria denominada operación de multiplicación: a cualquier par ordenado de números reales a y b le está puesto en correspondencia un número, designado con ab y llamado producto de los números a y b. Con esto, tienen lugar las siguientes propiedades:

II_1 (ley conmutativa de la multiplicación). Para cualesquiera números a y b se cumple la igualdad $ab = ba$.

II_2 (ley asociativa de la multiplicación). Para cualesquiera números a, b y c se cumple la igualdad $a(bc) = (ab)c$.

II_3. Existe un número tal, designado con 1, con que para cualquiera número a se cumple la igualdad $a1 = a$.

II_4. Para cualquier número $a \neq 0$ existe un número tal, llamado opuesto a a y designado con $\frac{1}{a}$, que $a\frac{1}{a} = 1$.

El número $a\frac{1}{b}$ recibe el nombre de cociente de la división del número a por $b \neq 0$ y se designa con $\frac{a}{b}$, a/b o bien $a:b$.

III. (ley distributiva de la adición con relación a la multiplicación). Para cualesquiera números reales a, b y c es válida la igualdad $(a + b)c = ac + bc$.

IV. Para cualquier número a está definida una y sólo una de las relaciones $a > 0$ (a mayor que cero), $a = 0$ (a igual a cero) y $a < 0$ (a menor que cero) y las condiciones $a > 0$ y $-a < 0$ son equivalentes. Además, si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

IV_1. $a+b>0$.
IV_2. $ab>0$.

Los números mayores que cero se llaman positivos; los números menores que cero, negativos. Si $a-b>0$, se dice que el número a es mayor que el número b y se escribe $a>b$ (o bien, b es menor que a, que es lo mismo y, entonces, se escribe: $b<a$).

La presencia de las comparaciones «mayor» o bien «menor» para todo par ordenado de diferentes números reales lleva el nombre de propiedad de ordenación del conjunto de números reales.

V. (continuidad). Cualesquiera que sean los conjuntos no vacíos $A\subset\mathbb{R}$ y $B\subset\mathbb{R}$, en los que para dos elementos cualesquiera $a\in A$ y $b\in B$ se cumple la desigualdad $a\leqslant b$, existe tal número α que para todos $a\in A$ y $b\in B$ es válida la relación $a\leqslant\alpha\leqslant b$.

Con el fin de aclarar la definición axiomática de los números reales introduzcamos la noción de campo. Si en cierto conjunto X que contiene más de un elemento están definidas las operaciones de adición y multiplicación que satisfacen las condiciones I—III (en las enunciaciones de dichas condiciones el término «número» ha de sustituirse por el término «elemento del conjunto X»), el conjunto X recibe el nombre de campo. Si, además, se cumple la condición IV, el campo se denomina ordenado.

Sean X e Y campos ordenados y supongamos que existe tal aplicación biunívoca (biyección) f: $X\to Y$ del campo X en el campo Y que para todos $x\in X$ y $x'\in X$ tienen lugar las relaciones $f(x+x')=f(x)+f(x')$, $f(xx')=f(x)f(x')$ y si $x<x'$, $f(x)<f(x')$, entonces los campos ordenados X e Y reciben el nombre de isomorfos y la propia aplicación f, isomorfismo (con relación a la adición, multiplicación y ordenación).

Si el campo ordenado satisface la condición V, él lleva el nombre de campo continuo ordenado.

Teorema 1. Cualesquiera dos campos continuos ordenados son isomorfos.

Este teorema nos muestra que la definición axiomática de conjunto de números reales, dada más arriba, define dicho conjunto unívocamente con una precisión de hasta el isomorfismo.

Un conjunto de fracciones decimales infinitas es una de las realizaciones de un conjunto de números reales: los ejemplos de otras de sus realizaciones se darán en los problemas **3.43.** y **8.190.**

En la teoría axiomática de los números reales, para cualquier número a el número designado con $|a|$ y determinado con la fórmula

$$|a|=\begin{cases} a \text{ si } a\geqslant 0, \\ -a \text{ si } a<0 \end{cases} \tag{13}$$

recibe el nombre de *valor absoluto del número a* o bien su *módulo* (en el caso de realización de un conjunto de números reales en forma de fracciones decimales infinitas esta definición coincide con la aducida en el p. 1).

3.28. Partiendo de las propiedades $I_1 - I_4$ de la suma demuestren las siguientes afirmaciones:

1) Si $a + b = c$, $a = c - b$.
2) El número que posee la propiedad de cero es único.
3) El número opuesto al dado es único.
4) Para todo número a es válida la igualdad $a - a = 0$.
5) Para cualesquiera números a y b es válida la igualdad

$$-a - b = -(a + b).$$

6) La igualdad $a + x = b$ tiene en $\mathbb{R}$ solución, con la particularidad de que ésta es la única: $x = b - a$.

7) Empleando el método de la inducción matemática, muestren que si $i_1, i_2, \ldots, i_n$ es la reordenación de los números $1, 2, \ldots, n$, entonces

$$(\ldots((a_{i_1} + a_{i_2}) + a_{i_3}) + \ldots + a_{i_{n-1}}) + a_{i_n} = \\ = (\ldots((a_1 + a_2) + a_3) + \ldots + a_{n-1}) + a_n.$$

3.29. Partiendo de las propiedades $II_1 - II_4$ de la multiplicación, demuestren las siguientes afirmaciones:

1) El número que posee la propiedad de la unidad es único.
2) El número opuesto al número dado diferente de cero es único.
3) Para todo número $a \neq 0$ es válida la igualdad

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

4) Para todo número $a \neq 0$ es válida la igualdad

$$\frac{a}{a} = 1.$$

5) Para cualesquiera números $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es válida la igualdad

$$\frac{1}{a}\frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$$

6) La ecuación $ax = b$, $a \neq 0$, tiene en un conjunto de números reales una solución y, con ello, única:

$$x = \frac{b}{a}.$$

7) La igualdad

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ b\neq 0,\ d\neq 0$$

es válida cuando y sólo cuando $ad = bc$.

8) Para cualquier fracción $\frac{a}{b}$, $b\neq 0$ y todo número $c\neq 0$ es válida la igualdad

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}.$$

9) Es válida la fórmula (regla de multiplicación de fracciones)

$$\frac{a}{b}\frac{c}{a}=\frac{ac}{bd}.$$

10) El elemento opuesto de la fracción $\frac{a}{b}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ es la fracción $\frac{b}{a}$, es decir, $\frac{a}{b}\frac{b}{a}=1$.

11) Es válida la fórmula (regla de división de fracciones)

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},\quad b\neq 0,\quad c\neq 0,\quad d\neq 0.$$

12) Si $i_1, i_2, \ldots i_n$ es la reordenación de los números $1, 2, \ldots \ldots, n$, $(\ldots((a_{i_1}, a_{i_2})\, a_{i_3}) \ldots a_{i_{n-1}})\, a_{i_n} = (\ldots((a_1a_2)\, a_3) \ldots a_{n-1})\, a_n$.

3.30. Partiendo de las propiedades I—III de la adición y la multiplicación, demuestren las siguientes afirmaciones:

1) Para cualesquiera números a, b y c tiene lugar la igualdad

$$a(b-c)=ab-ac.$$

2) Para todo número a se verifica la igualdad $a0 = 0$.

3) Si $ab = 0$, por lo menos uno de los factores a o bien b es igual a cero.

4) Para cualesquiera números a y b tiene lugar la igualdad

$$(-a)\,b=-ab.$$

5) Es válida la fórmula (regla de adición de fracciones)

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\quad b\neq 0,\ d\neq 0.$$

6) Es válida la fórmula

$$(a_1+\ldots+a_n)\,b=a_1b+\ldots+a_nb,\ n\in\mathbb{N}.$$

7) Es válida la fórmula

$$na=\underbrace{a+\ldots+a}_{n\ \text{veces}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

4*

3.31. Partiendo de las propiedades I — IV demuestren las siguientes afirmaciones:

1) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

2) Si $a > b$, para todo número c es válida la desigualdad $a + c > b + c$.

3) Para cualesquiera dos números a y b con precisión tiene lugar una de las tres relaciones $a > b$, $a = b$, $a < b$.

4) Si $a < b$, $-a > -b$.

5) Si $a < b$ y $c \leqslant d$, entonces $a + c < b + d$.

6) Si $a < b$ y $c \geqslant d$, $a - c < b - d$.

7) Si $a < b$ y $c < 0$, $ac > bc$.

8) Es válida la desigualdad $1 > 0$.

3.32. Demuestren las afirmaciones:

1) Para todo número a son válidas las relaciones

$$|a| \geqslant 0, \quad |a| = |-a|, \quad -|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

2) Para cualesquiera números a y b son válidas las relaciones

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leqslant |a-b|, \quad |ab| = |a||b|.$$

3.33. Demuestren que dos conjuntos que satisfacen los axiomas I — V son entre sí isomorfos.

3.34. Demuestren que el conjunto de fracciones decimales infinitas tolerables forma un campo continuo ordenado, es decir, satisface los axiomas I — V.

3.2. Cortadura de conjuntos ordenados. El *conjunto* X se denomina *ordenado* si para cualesquiera dos de sus elementos a y b está definida una de las tres relaciones $a < b$ (a menor que b), $a = b$ (a igual a b) y $a > b$ (a mayor que b), con la particularidad de que si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Todo subconjunto de un conjunto ordenado también lo es.

El conjunto de números reales y, en general, todo campo ordenado, son ejemplos de conjuntos ordenados.

Un par de subconjuntos no vacíos A y $B = X \setminus A$ del conjunto ordenado X lleva el nombre de su *cortadura* y se designa $A \mid B$ si cualquier elemento de A es menor que cualquier elemento de B. El conjunto A se llama *clase inferior* y el conjunto B, *superior*.

Si X es un conjunto ordenado y $\alpha \in X$, los conjuntos

$$A = \{x\colon x \leqslant \alpha\}, \quad B = \{y\colon y > \alpha\}, \tag{14}$$

así como

$$A = \{x\colon x < \alpha\}, \quad B = \{y\colon y \geqslant \alpha\} \tag{15}$$

forman la cortadura del conjunto X. En ambos casos decimos que la cortadura $A \mid B$ se realiza con el elemento α y se escribe $\alpha = A \mid B$.

Si dos cortaduras $A_1|B_1$ y $A_2|B_2$ en el conjunto ordenado X se realizan con los elementos de dicho conjunto: $A_1|B_1 = x_1 \in X$ y $A_2|B_2 = x_2 \in X$, entonces estas cortaduras se llaman *iguales* cuando lo son los elementos que las producen: $x_1 = x_2$. Pero si al menos una de las cortaduras $A_1|B_1$ y $A_2|B_2$ no se realiza con los elementos del conjunto X, las mencionadas cortaduras se llaman *iguales* si $A_1 = A_2$.

$A|B$ recibe el nombre de cortadura *nula* del campo ordenado si ella se produce con el cero: $A|B = 0$.

Si en la cortadura no nula $A|B$ de un campo ordenado el conjunto A contiene todos los elementos negativos, $A|B$ recibe el nombre de *cortadura mayor que cero* y se escribe $A|B > 0$.

Una cortadura no nula de un campo ordenado, que no es mayor que cero, se llama *cortadura menor que cero*: $A|B < 0$.

3.35. Demuestren que si $X = \mathbb{R}$ o bien $X = \mathbb{Q}$, entonces en el caso de la cortadura (14), en la clase B no hay número mínimo, mientras que en el caso de la cortadura (15), en la clase A no hay máximo.

3.36. Demuestren que en un conjunto ordenado el elemento que realiza la cortadura es único.

3.37. Sea B el conjunto de todos los números racionales positivos r tales que $r^2 > 2$ y $A = \mathbb{Q}\setminus B$. Demuestren que el par A, B forma una cortadura en el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ y que en la clase A no hay número máximo, mientras que en la clase B no hay mínimo y, por lo tanto, no existe el número racional que realiza esta cortadura.

3.38. Demuestren que si en un campo ordenado se cumplen los axiomas I — IV, el axioma V tiene lugar cuando y sólo cuando cada cortadura del campo que consideramos se realiza con uno de sus elementos.

En los problemas **3.39—3.43** se entiende por cortadura la que se realiza en un conjunto de números racionales.

3.39. Sean $A_1 | B_1$ y $A_2 | B_2$ dos cortaduras,

$$A_1 + A_2 = \{x = x_1 + x_2 \colon x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\},$$
$$B_1 + B_2 = \{x = x_1 + x_2 \colon x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2\}.$$

Demuestren que entonces los conjuntos $A_1 + A_2$ y $B_1 + B_2$ forman una cortadura (se denomina suma de las cortaduras dadas y se designa $A_1|B_1 + A_2|B_2$).

3.40. Demuestren que para cualquier cortadura $A|B$ existe otra opuesta a ella que se designa $-A|B$ es decir, una cortadura tal que $A|B + (-A|B) = 0$.

3.41. Demuestren que si $-A|B < 0$, $A|B > 0$.

3.42. Sean $A_1|B_1$ y $A_2|B_2$ cortaduras, $A_1|B_1 > 0$, $A_2|B_2 > 0$,

$$B_1B_2 = \{x = x_1x_2 : x_1 \in B_1, x_2 \in B_2\}.$$

Demuestren que los conjuntos $A = \mathbb{R}\setminus B$ y B forman una cortadura (ella se denomina producto de las cortaduras dadas y se designa $A_1|B_1 \cdot A_2|B_2$).

El *valor absoluto* $|A|B|$ de la cortadura $A|B$ se determina con la fórmula

$$|A|B| = \begin{cases} A|B & \text{si } A|B \geqslant 0, \\ -A|B & \text{si } A|B < 0. \end{cases}$$

El *producto de cortaduras arbitrarias* en campos ordenados $A_1|B_1$ y $A_2|B_2$ se determina con la fórmula

$$A_1|B_1 \cdot A_2|B_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } A_1|B_1 = 0 \text{ o bien } A_2|B_2 = 0, \\ |A_1|B_1| \cdot |A_2|B_2|, & \text{si } A_1|B_1 \text{ y } A_2|B_2 \text{ son de un mismo signo} \\ -(|A_1|B_1| \cdot |A_2|B_2|), & \text{si } A_1|B_1 \text{ y } A_2|B_2 \text{ son de signo opuesto.} \end{cases}$$

3.43. Demuestren que el conjunto de cortaduras de números racionales con introducción en él de la adición, multiplicación y ordenación es un campo continuo ordenado, es decir, un conjunto de números reales.

3.3. Potencias racionales. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. El número obtenido después de la multiplicación del número a por sí mismo n veces recibe el nombre de *potencia n- ésima del número a* y se designa con a^n. Por definición

$$a^0 = 1 \text{ y } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

Sean $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. El número $b \in \mathbb{R}$, tal que $b^n = a$ (claro está, si existe), lleva el nombre de *raíz de n-ésima potencia* del número a y se designa con $\sqrt[n]{a}$ o bien $a^{1/n}$.

Si $a \geqslant 0$, $b = \sqrt[n]{a}$ y $b \geqslant 0$, el número b se llama *valor aritmético de la raíz* de n-ésima potencia del número a. En adelante, vamos a entender por raíz de un número real no negativo el valor aritmético de la raíz si no se ha acordado alguna otra cosa.

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces, por definición se hace

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

3.44. Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, con la particularidad de que si $n \leqslant 0$ o bien $m \leqslant 0$, $a \neq 0$. Demuestren que, entonces:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$. 2) $(a^m)^n = (a^n)^m$.

3.45. Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Demuestren que:

1) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$. 2) $\sqrt{a} = \sqrt[nm]{a^m}$. 3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$. 5) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

3.46. Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, $r' \in \mathbb{Q}$. Demuestren que:

1) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. 2) $a^r a^{r'} = a^{r+r'}$.

3) $(a^r)\,r' = a^{rr'}$. 4) $(ab)^r = a^r b^r$.

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

3.4. Cotas superior e inferior. Principio de segmentos encajados. Sea X el subconjunto de un conjunto extendido de números reales: $X \subset \overline{\mathbb{R}}$. El elemento $x_0 \in X$ se llama *elemento máximo* del conjunto X y se designa con máx X si para toda $x \in X$ se verifica la desigualdad $x \leqslant x_0$. El elemento $x_0 \in X$ se llama *elemento mínimo* del conjunto X y se designa con mín X si para todas las $x \in X$ tiene lugar la desigualdad $x \geqslant x_0$. Si existen los elementos máximo y mínimo del conjunto dado, ellos son únicos.

El conjunto $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ se denomina *acotado superiormente* (*inferiormente*) si existe tal número real $a \in \overline{\mathbb{R}}$ que todas las $x \in X$ satisfacen la desigualdad $x \leqslant a$ (correspondientemente, $x \geqslant a$); en semejante caso el número a lleva el nombre de número que acota superiormente (inferiormente) el conjunto X. El conjunto acotado superior o inferiormente se llama conjunto *acotado*.

El máximo (mínimo) de todos los números finitos o infinitos que acotan superiormente (inferiormente) el conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se denomina *cota superior* (*inferior*) del conjunto X y se designa sup X o bien $\sup\limits_{x \in X} \{x\}$ (correspondientemente, inf X o bien $\inf\limits_{x \in X} \{x\}$).

Si $\alpha = \sup X$ (correspondientemente, $\alpha = \inf X$), entonces
1) para todas las $x \in X$ se verifica la desigualdad $x \leqslant \alpha$ (correspondientemente, $x \geqslant \alpha$);

2) para todo $\beta < \alpha$ (correspondientemente, para todo $\beta > \alpha$) existe tal $x \in X$ que $x > \beta$ (correspondientemente, $x < \beta$).

Si α es un número finito, la condición 2) es equivalente a que para toda $\varepsilon > 0$ existe tal $x \in X$ que $x > \alpha - \varepsilon$ (correspondientemente, $x < \alpha + \varepsilon$).

Si la cota superior (inferior) del conjunto es un número finito: $\alpha \in \mathbb{R}$, ella se llama *finita*; en caso contrario, *infinita*.

Las cotas superior e inferior del conjunto dado son únicas. Para un conjunto no acotado superiormente X tenemos $\sup X = +\infty$ y para el no acotado inferiormente, $\inf X = -\infty$.

Teorema 2. Todo conjunto no vacío de números reales no acotado superiormente (inferiormente) tiene una cota superior (inferior) finita.

Del teorema 2 y los axiomas I — V de los números reales se desprende el llamado *principio de Arquímedes*: para todo número real positivo a existe tal número natural n que $n > a$.

El conjunto de segmentos $\{[a_n; b_n]\}$, $n \in \mathbb{N}$, de números reales ($a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$) recibe el nombre de *sistema de segmentos encajados* si para todas las n tiene lugar la implicación

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n].$$

Teorema 3. (*principio de los segmentos encajados*). Cualquier sistema de segmentos encajados de números reales tiene intersección no vacía.

3.47. Demuestren que el conjunto $X \subset \mathbb{R}$ es acotado si y sólo si existe tal a que para todas las $x \in X$ se verifica la desigualdad $|x| \leqslant a$.

3.48. Demuestren que es acotado el conjunto

$$X = \left\{x : x = \frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1}, \quad t > 0\right\}.$$

3.49. Sea $X = \{x : x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$. Demuestren que el conjunto X no tiene elemento mínimo ni máximo. Hallen $\sup X$ e $\inf X$.

3.50. Hallen las cotas superiores e inferiores de los conjuntos

$$\{n\};\ \left\{\frac{1}{n}\right\};\ \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\};\ \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hallen los elementos máximos y mínimos de estos conjuntos si tales existen.

3.51. Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $-X = \{x : -x \in X\}$. Demuestren que $\sup(-X) = -\inf X$, $\inf(-X) = -\sup X$.

3.52. Sea $X_k \subset \mathbb{R}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ y

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \left\{x\colon\ x=\sum_{k=1}^{n} x_k,\ x_k \in X_k,\ k=1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Demuestren que

$$\sup \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \sup X_k, \quad \inf \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \inf X_k.$$

3.53. Sea $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ y

$$X-Y=\{z\colon\ z=x-y,\ x\in X,\ y\in Y\}.$$

Demuestren que $\sup(X-Y)=\sup X-\inf Y$

3.54. Demuestren que el conjunto de todas las fracciones racionales propias m/n, $0<m<n$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ no tiene elemento mínimo ni máximo. Hallen sus cotas superior e inferior.

3.55. El conjunto

$$[a;\ b]_{\mathbb{Q}}=\{x\colon\ a\leqslant x\leqslant b,\ a\in\mathbb{Q},\ b\in\mathbb{Q},\ x\in\mathbb{Q}\}$$

se denomina segmento $[a;\ b]_{\mathbb{Q}}$ de números racionales.

El sistema $\{[a_n;\ b_n]_{\mathbb{Q}}\}$, $n\in\mathbb{N}$ de segmentos de números racionales se llama encajado si para cualquier n se verifica la implicación

$$[a_{n+1};\ b_{n+1}]_{\mathbb{Q}}\subset[a_n;\ b_n]_{\mathbb{Q}}.$$

¿Es válida la afirmación de que la intersección de cualquier sistema de segmentos encajados de números racionales contiene al meno un número racional?

3.56. ¿Es válida la afirmación de que todo sistema de intervalos encajados $\{(a_n;\ b_n)\}$, es decir, tales que

$$(a_{n+1};\ b_{n+1})\subset(a_n,\ b_n),\ n\in\mathbb{N}$$

tiene intersección no vacía?

3.57. ¿Existe un sistema de intervalos encajados con intersección no vacía?

3.58. Partiendo de los axiomas I — V de los números reales, demuestren que para todo número $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ existe tal número natural n que $n>a$ (como indicamos más arriba esta propiedad de los números reales se denomina principio de Arquímedes).

3.59. Demuestren que del principio de Arquímedes se desprende que para cualesquiera dos números $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}$, $0<a<b$ existe tal $n\in\mathbb{N}$ que $an>b$.

3.60. Sea que en el campo ordenado X se verifica el principio de Arquimedes, es decir, para todo $a \in X$, $a > 0$, existe tal $n \in \mathbb{N}$ que $n > a$. Entonces para el campo X son equivalentes las siguientes tres afirmaciones:

1) El campo X satisface el axioma V.

2) Cualquier sistema de segmentos encajados del campo X tiene intersección no vacía.

3) Cualquier subconjunto no vacío, acotado superiormente, del campo X tiene cota superior finita.

§ 4. Progresiones. Adición. Binomio de Newton. Desigualdades numéricas

1. Progresiones aritmética y geométrica. *La progresión aritmética* es una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal que para todos los $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = a_n + d, \tag{1}$$

donde a_1, d son los números dados; d, la *razón* de la progresión aritmética.

Fórmulas para el n-ésimo término y la suma S_n de los primeros n términos de la progresión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \tag{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2}\cdot n. \tag{3}$$

Propiedades de la progresión aritmética:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \geqslant 2, \tag{4}$$

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

La progresión geométrica es una sucesión numérica $\{b_n\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = b_n q, \tag{6}$$

donde b_1, q son los números dados, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$; q, la *razón* de la progresión geométrica.

Fórmulas para el n-ésimo término y la suma S_n de los primeros n términos de la progresión geométrica:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \tag{7}$$

$$S_n = b_1\,\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad q \neq 1. \tag{8}$$

Propiedades de la progresión geométrica:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \quad n \geqslant 2, \tag{9}$$

$$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Si $|q|<1$, la progresión geométrica lleva el nombre de *infinitamente decreciente*, su suma S se expresa con la fórmula

$$S=\frac{b_1}{1-q}. \tag{11}$$

4.1. Demuestren que si los números positivos a, b, c son términos consecutivos de una progresión aritmética, los números

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

también son términos consecutivos de la progresión aritmética.

4.2. Demuestren que si los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los términos consecutivos de una progresión aritmética,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

4.3. Sea S_n la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética. Demuestren que:

1) $S_{n+3}=3S_{n+2}-3S_{n+1}+S_n$. 2) $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$.

4.4. Demuestren que si la sucesión $\{a_n\}$ es una progresión aritmética, con cualquier $n\geqslant 3$ y todo $k\in\mathbb{N}$ es válida la igualdad

$$a_1^k-C_n^1a_2^k+C_n^2a_3^k+\ldots+(-1)^nC_n^na_{n+1}^k=0.$$

4.5. Sea S_n la suma de los primeros n miembros de una progresión geométrica. Demuestren que

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2.$$

4.6. Demuestren que para cualquier número a y todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})(1+a+a^2+\ldots+a^{n+1})=$$
$$=(1+a+a^2+\ldots a^n)^2-a^n.$$

4.7. Hallen las siguientes sumas:

1) $1+11+111+\ldots+11\ldots1$

(el último sumando es número de n cifras).

2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$.

3) $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n$.

4) $x^n+2x^{n-1}+\ldots+(n-1)x^2+nx$.

4.8. Demuestren que la sucesión $\{b_n\}$ de números diferentes de cero es una progresión geométrica si y sólo si con cada $n \geqslant 3$ se verifica la igualdad

$$(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{n-1}^2)(b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)=$$
$$=(b_1b_2+b_2b_3+\ldots+b_{n-1}b_n)^2.$$

---

2. Suma. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los números prefijados. Su suma se designa con $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\ldots+a_n, \tag{12}$$

donde k es el *índice de la suma*.

La suma no depende de la letra con que se designa su índice, o sea,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{p=1}^{n} a_p.$$

La operación de adición posee la propiedad de linealidad, es decir, para cualesquiera números α y β tiene lugar la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Examinemos la suma que contiene mn sumandos a_{ij}, donde los índices i y j toman valores desde 1 hasta n y desde 1 hasta m, respectivamente $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$. Semejante suma se designa con

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \text{ o bien } \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_{ij}$$

y lleva el nombre de *suma doble*. Tiene lugar la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

El problema de cálculo de la suma de la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

donde $f(x)$ es la función dada, se considera, por regla, como el problema de hallar S_n como una función de n. P. ej., si $f(k) = a_{k+1} - a_k$, donde $\{a_n\}$ es la sucesión dada, entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_2 - a_1 + a_3 - \\ - a_2 + \ldots + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_1,$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1. \qquad (13)$$

Ejemplo 1. Calculen las sumas:

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; 2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

△ 1) Como $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, según la fórmula (13) hallamos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2) Haciendo uso de la igualdad

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

y de la fórmula (13), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right). \ ▲$$

Ejemplo 2. Calculemos la suma

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

△Consideremos la identidad

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Haciendo en ella $x = 1, 2, \ldots, n$ y sumando, término por término, las igualdades obtenidas, hallamos

$$\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

empleando la fórmula (13), obtenemos

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{3}{2} n(n+1) + n,$$

de donde

$$S_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Así, pues,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 3. Calculemos la suma

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx.$$

△ Analicemos la igualdad

$$S_n(x) \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n} 2 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \frac{x}{2}.$$

Ya que,

$$2 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x,$$

de la fórmula (13) hallamos

$$S_n(x) \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x = 2 \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x.$$

de donde

$$S_n(x) = \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}, \quad \text{si } \operatorname{sen} \frac{x}{2} \neq 0,$$

si $\operatorname{sen}(x/2) = 0$, $S_n(x) = 0$. ▲

Ejemplo 4. La sucesión $\{x_n\}$ está prefijada con la fórmula $x_n = ax_{n-1} + b$. Expresen con x_1, a, b y n:

1) x_n, 2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

△ 1) Como

$$x_k = ax_{k-1} + b, \quad x_{k-1} = ax_{k-2} + b,$$

entonces

$$x_k - x_{k-1} = a(x_{k-1} - x_{k-2}) =$$
$$= a^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = \ldots = a^{k-2}(x_2 - x_1),$$

es decir,

$$x_k - x_{k-1} = a^{k-2}(x_2 - x_1).$$

Haciendo en esta fórmula $k = 2, 3, \ldots, n$ y sumando las igualdades obtenidas, hallamos

$$\sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1}) = (x_2 - x_1)\sum_{k=2}^{n} a^{k-2}$$

o bien

$$x_n - x_1 = (x_2 - x_1)\frac{a^{n-1}-1}{a-1} = ((a-1)x_1 + b)\frac{a^{n-1}-1}{a-1},$$

de donde

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b\frac{a^{n-1}-1}{a-1}, \quad a \neq 1.$$

Con $a = 1$ la sucesión $\{x_n\}$ es una progresión aritmética con diferencia b, por lo que

$$x_n = x_1 + (n-1)b.$$

2) $S_n = x_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} x_k = x_1 + a\sum\limits_{k=2}^{n} x_{k-1} + (n-1)b,$

$$S_n = x_1 + a(S_n - x_n) + (n-1)b,$$

$$S_n(1-a) = x_1 - ax_n + (n-1)b =$$
$$= x_1 - a^n x_1 - ab\frac{a^{n-1}-1}{a-1} + (n-1)b,$$

de donde

$$S_n = \frac{(n-1)b}{1-a} + \frac{ab}{(a-1)^2}(a^{n-1}-1) + \frac{a^n-1}{a-1}x_1, \quad a \neq 1. \ ▲$$

Ejemplo 5. La sucesión $\{x_n\}$ está prefijada con la fórmula

$$x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2},$$

donde $\alpha\beta \neq 0$. Expresen x_n a través de x_0, x_1, α, β y n.

△ Es posible escribir la igualdad inicial del modo siguiente:

$$x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}).$$

Designemos $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$, entonces $y_n = \beta y_{n-1}$, de donde $y_n = \beta^{n-1} y_1$, o sea, $x_n - \alpha x_{n-1} = \beta^{n-1} y_1$ o bien

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta^{n-1} y_1.$$

Haciendo $x_n = \beta^n z_n$, obtenemos

$$z_n = \frac{\alpha}{\beta} z_{n-1} + \frac{y_1}{\beta}.$$

Considerando $\alpha \neq \beta$ y utilizando el resultado del anterior ejemplo, hallamos

$$z_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{y_1}{\beta},$$

donde $z_1 = x_1/\beta$, $y_1 = x_1 - \alpha x_0$. De aquí obtenemos

$$x_n = x_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta x_0 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Si $\alpha = \beta$, $x_n = n\alpha^{n-1} x_1 - x_0 (n-1) \alpha^n$. ▲

4.9. Calculen la suma doble $\sum\limits_{i=1}^{n} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ si:

1) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$ 2) $a_{ij} = i$.

3) $a_{ij} = i - j$, 4) $a_{ij} = |i - j|$.

4.10. Demuestren que para cualesquiera números a y b son válidas las igualdades:

1) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum\limits_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}$.

2) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k b^k a^{2n-k}$.

4.11. Demuestren la *identidad de Lagrange*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

4.12. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones prefijadas de números. Demuestren que:

1) Si $B_m=\sum_{j=1}^{m} b_j$, con cualquier $n\in\mathbb{N}$ es válida la igualdad (*transformación de Abel*)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n} (a_k-a_{k+1}) B_k+a_n B_n,$$

y con todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $p\in\mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k=\sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k-a_{k+1}) B_k+a_{n+p}B_{n+p}-a_{n+1}B_n.$$

2) Si $D_s=\sum_{j=n+1}^{n+s} b_j$, para todo $p\in\mathbb{N}$ se verifica la igualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k=\sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j}-a_{n+j+1}) D_j+a_{n+p}D_p.$$

4.13. Calculen las sumas:

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$. 2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$.

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$.

4) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$. 5) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$.

4.14. Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética en la que todos sus términos y su diferencia d son distintos de cero. Demuestren que son válidas las igualdades

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$.

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}}=\frac{1}{3d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}\right)$.

4.15. Sea

$$S_n(p)=\sum_{k=1}^{n} k^p,\quad p\in\mathbb{N}.$$

1) Demuestren la fórmula

$$\sum_{p=1}^{m} C_{m+1}^{p} S_n(p) = (n+1)^{m+1} - (n+1).$$

2) De acuerdo con esta fórmula calculen $S_n(3)$, haciendo uso de que

$$S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.16. Demuestren las igualdades:

1) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = C_{2n+1}^{3}$. 2) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

3) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.

4) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

5) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

6) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

7) $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

4.17. Demuestren las igualdades:

1) $$\sum_{k=0}^{n} \cos(x+k\alpha) = \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} \alpha \cos\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

2) $$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(x+k\alpha) = \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} \alpha \operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

4.18. Calculen las sumas:

1) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(2k-1)x$. 2) $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$.

3) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2 kx$. 4) $\sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx$.

5) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^3 kx$. 6) $\sum_{k=1}^{n} \cos^3 kx$.

4.19. La sucesión $\{x_n\}$ está prefijada con la fórmula $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$. Expresen x_n a través de x_0, x_1 y n si:

1) $a=2$, $b=3$. 2) $a=3$, $b=-2$.

3) $a=\alpha$, $b=1-\alpha$, $\alpha \neq 2$.

---

3. Binomio de Newton. Para cualesquiera números a, b y todo $n \in \mathbb{N}$ es válida la *fórmula del binomio de Newton*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \quad (14)$$

donde

$$C_n^0 = 1, \; C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Los sumandos $C_n^k a^{n-k} b^k$ se llaman *términos del desarrollo* (14), en tanto que los números C_n^k, *coeficientes del desarrollo* o bien *coeficientes binomiales*. Los coeficientes del desarrollo tienen las siguientes propiedades:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \quad (15)$$

Haciendo en la fórmula (14) $a=1$, $b=x$, obtenemos

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \quad (16)$$

Poniendo en la igualdad (16) $x=1$ y $x=-1$, hallamos

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0. \quad (17)$$

Ejemplo 6. Calculen la suma

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$$

△ Consideremos la identidad

$$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}.$$

Igualando en esta identidad los coeficientes de x^n y empleando la fórmula (16), obtenemos

$$C_n^n C_n^0 + C_n^{n-1} C_n^1 + \ldots + C_n^{n-k} C_n^k + \ldots + C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n.$$

En virtud de (15) esta igualdad se puede escribir en la forma $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$.

Por consiguiente,

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n. \blacktriangle \tag{18}$$

Ejemplo 7. Calculen la suma

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}.$$

$\triangle$ Haciendo uso de la igualdad

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)\,k!}=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n+1-k)}{(n+1)\,(k+1)!}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1},$$

obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^k=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1). \blacktriangle$$

4.20. Escriban la fórmula del binomio de Newton:
1) $(1+x)^5$. 2) $(a+b)^6$.
3) $(x+y)^7$. 4) $(a-b)^8$.

4.21. Hallen el término del desarrollo de $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ que contiene x^3.

4.22. Hallen el coeficiente del polinomio:
1) $(1-x+x^2)^3$ en el término con x^3.
2) $(1+2x-3x^2)^4$ en el término con x^3 y x^4.
3) $(1+x^2-x^3)^9$ en el término con x^8.
4) $(1+x^2+x^3)^7$ en el término con x^{11}.
5) $\sum_{k=3}^{15}(1+x)^k$ en el término con x^3.

4.23. Calculen las siguientes sumas:

1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k$. 2) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k$.

3) $\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k}$. 4) $\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k-1}$.

5) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_n^k$, $m<n$. 6) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$.

4.24. Demuestren las siguientes igualdades:

1) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$. 2) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$.

3) $\sum_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s$. 4) $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$.

5) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1} C_n^k}{k+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} C_n^k}{k+1} = \frac{n}{n+1}$.

4.25. Hallen los términos del desarrollo que son números enteros:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5$. 2) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8$.

4.26. Hallen el coeficiente máximo del polinomio:

1) $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$. 2) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$.

4.27. Hallen el término máximo del desarrollo $(1+\sqrt{2})^{30}$.

4.28. Demuestren las fórmulas:

1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

2) $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+ b^2c+c^2a+c^2b)+6abc$.

3) $(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+4(a^3b+a^3c+b^3a+ b^3c+c^3a+c^3b)+6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+ 12(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$.

4.29. Demuestren la fórmula:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_p^{k_p},$$

donde la sumación se lleva a cabo por todos los $k_1, k_2, \ldots, k_p$ enteros no negativos tales que $k_1+k_2+\ldots+k_p=n$.

---

4. Desigualdades numéricas. Propiedades fundamentales de las desigualdades:

1) si $a>b$, $b>c$, entonces $a>c$;
2) si $a>b$, entonces $a+c>b+c$ con toda c;
3) si $a>b$, $c>d$, entonces $a+c>b+d$;
4) si $a>b$ y $c>0$, $ac>bc$;
si $a>b$ y $c<0$, $ac>bc$;

5) si $a > b > 0$ y $c > d > 0$, $ac > bd$;

6) si $a \geqslant b > 0$ y $c > d > 0$, $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$;

7) si $a > b \geqslant 0$, $a^n > b^n$ con todo $n \in \mathbb{N}$;

8) si $a > b$, $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ con todo $n \in \mathbb{N}$;

9) si $a > b \geqslant 0$, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ con todo $n \in \mathbb{N}$;

10) si $a > b$, $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}$ con todo $n \in \mathbb{N}$.

Algunas desigualdades importantes:

1) Para cualesquiera números reales a y b se verifica la desigualdad

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab. \tag{19}$$

2) La *media aritmética* de dos números no negativos no es menor que su *media proporcional*:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{20}$$

La desigualdad para la media aritmética y la media proporcional es válida para cualesquiera n números no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, o sea,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{21}$$

En (21) la desigualdad sólo tiene lugar con $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. La demostración de la desigualdad (21) se dio en el §2 (ejemplo 8).

3) Para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ se verifica la *desigualdad de Cauchy — Buniakovski*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{22}$$

En (22) la igualdad tiene lugar si y sólo si existen tales números α y β que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ y para toda $k = 1, 2, \ldots, n$ se verifica la igualdad $\alpha a_k + \beta b_k = 0$.

Ejemplo 8. Demuestren que para cualesquiera números reales a, b, c, d es válida la desigualdad

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd.$$

△ Empleando la desigualdad (21), obtenemos

$$\frac{1}{4}(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geqslant \sqrt[4]{a^4 b^4 c^4 d^4} = |abcd| \geqslant abcd,$$

de donde se deduce la desigualdad buscada. ▲

Ejemplo 9. Demuestren la desigualdad de Cauchy — Buniakovski.

$\triangle$ Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, entonces en (22) tiene lugar la igualdad. Sea al menos uno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distinto de cero y, en tal caso, $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Analicemos el trinomio de segundo grado con relación a x:

$$ax^2 + 2bx + c = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2,$$

donde

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Como $(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, el discriminante del trinomio $ax^2 + 2bx + c$ es no positivo: $b^2 \leqslant ac$. Por lo tanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Aclaremos en qué caso en (22) tiene lugar la igualdad. Sea $b^2 = ac$. Entonces, si $a = 0$, es decir, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, haciendo $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, obtenemos

$$\alpha a_k + \beta b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sea $a \neq 0$, entonces el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ tiene la raíz x_0 (ya que el discriminante del trinomio es igual a cero), es decir,

$$ax_0^2 + bx_0 + c = \sum_{k=1}^{n} (a_k x_0 + b_k)^2 = 0.$$

De aquí se desprende que $a_k x_0 + b_k = 0$ con $k = 1, 2, \ldots, n$. Haciendo $\alpha = x_0$, $\beta = 1$, obtenemos $\alpha a_k + \beta b_k = 0$, donde $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. $\blacktriangle$

Es fácil comprobar que cuando se verifican las condiciones $\alpha a_k + \beta b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, la relación (22) se convierte en una igualdad.

4.30. Demuestren que para cualesquiera números a, b son válidas las desigualdades

1) $a^2 + b^2 \geqslant 2\,|ab|$. 2) $|a - b| \geqslant \|a| - |b\|$.
3) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geqslant (a^3 + b^3)^2$.
4) $a^4 + b^4 \geqslant a^3 b + ab^3$.

4.31. Demuestren que para cualesquiera números positivos a, b son válidas las desigualdades

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

que ligan la media armónica, la media proporcional, la media aritmética y la media cuadrática de los números a y b.

4.32. Demuestren que para cualesquiera números no negativos a, b son válidas las desigualdades

1) $a^n+b^n \leqslant (a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $a^n+b^n \geqslant a^k b^{n-k}+b^k a^{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.

3) $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

4.33. Demuestren que si $|b| < |a|/2$, entonces

$$\frac{1}{|a-b|} < \frac{2}{|a|}.$$

4.34. Demuestren que para cualesquiera números reales a, b tales que $a^2+b^2=1$ se verifica la desigualdad $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$.

4.35. Demuestren que para cualesquiera números reales a, b, c son válidas las desigualdades:

1) $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.

2) $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.

3) $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant |a|+|b|+|c|$.

4) $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)$.

5) $(ab+bc+ac)^2 \geqslant 3(a+b+c)abc$.

6) $(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2 \geqslant ab+bc+$
$+ac$.

4.36. Demuestren que para cualesquiera a, b, c positivos son válidas las desigualdades:

1) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c$.

2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

3) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$.

4) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$.

5) $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$.

6) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

4.37. Demuestren que para cualesquiera números no negativos a, b, c son válidas las desigualdades:

1) $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

2) $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$.

3) $(a+b+c)(ab+bc+ac) \geqslant 9abc$.

4) $(ab+bc+ac)^3 \geqslant 27abc$.

5) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc$.

6) $(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+bc+ac)+9abc \geqslant 0$.
7) $3(a^3+b^3+c^3) \geqslant (a+b+c)(ab+ac+bc)$.
8) $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

4.38. Demuestren que para todo $n \geqslant 3$ natural se verifican las desigualdades:

1) $n^{n+1} > (n+1)^n$.
2) $(n!) > n^n$.

4.39. Demuestren que para todo $n \in \mathbb{N}$ son válidas las desigualdades:

1) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

3) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$. 4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$.

4.40. Demuestren que para todo $n \geqslant 2$ natural son válidas las desigualdades:

1) $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. 2) $1 < \sqrt[n]{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$.

3) $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$.

4.41. Demuestren la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > 1.$$

4.42. Sea $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Demuestren que

$$(1+a)^n > 1 + C_n^k a^k.$$

4.43. Demuestren que si $x > 0$, son válidas las desigualdades

$$1+\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}.$$

4.44. Demuestren que si $|x| < 1$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, entonces

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$

4.45 Sean $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que

$$a+a^2+\ldots+a^{2n-1} \leqslant n(1+a^{2n}) - a^n.$$

4.46. Sea $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \subset \mathbb{N}$, $m \leqslant n$. Demuestren que

$$a^m + \frac{1}{a^m} \leqslant a^n + \frac{1}{a^n}.$$

4.47. Demuestren que si A es el menor y B el mayor de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, es válida la desigualdad

$$A \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant B.$$

4.48. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, A el menor y B el mayor de los números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$. Demuestren que

$$A \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \leqslant B.$$

4.49. Demuestren que para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es válida la desigualdad

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leqslant n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).$$

4.50. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números positivos, M la mayor y m, la menor de las fracciones $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$. Demuestren que

$$m \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leqslant M.$$

4.51. Demuestren que para cualesquiera números reales a_1, $a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ que satisfacen las condiciones

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$$

es válida la desigualdad

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 1.$$

4.52. Demustren que para cualesquiera números positivos a_1, $a_2, \ldots, a_n$ es válida la desigualdad

$$(a_1+a_2+\ldots a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

4.53. Demustren que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son tales números positivos que $a_1a_2 \ldots a_n = 1$, entonces

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

4.54. Sea $a_i > -1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y que los números a_i tienen un mismo signo. Demuestren que la desigualdad

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 1+a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

4.55. Sean $x_1, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales tomados al azar, $\alpha > 0$. Demuestren que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

4.56. Demuestren que para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son válidas las desigualdades

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

que ligan la media armónica, la media proporcional, la media aritmética y la media cuadrática de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

4.57. Demuestren que si

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n,\quad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n,$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,\frac{b_1+b_2+\ldots b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

4.58. Sean los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ términos consecutivos de una progresión aritmética. Demuestren que

$$\sqrt{a_1a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_n}{2}.$$

4.59. Demuestren que si A es el menor, B, el mayor de los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, son válidas las desigualdades:

1) $A \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant B.$

2) $A \leqslant \sqrt{\frac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{n}} \leqslant B.$

3) $A \leqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant B.$

4.60. Demuestren que para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots b_n$ son válidas las desigualdades:

1) $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$

2) $\left|\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$

3) $\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k^2+b_k^2)^{1/2}.$

4.61. Demuestren que si $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $a_n \geqslant 0$ y $p \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{\sum\limits_{h=1}^{n} a_h}{n}\right)^p \leqslant \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} a_h^p.$$

§ 5. Números complejos

1. Definición de números complejos. Propiedades de las operaciones. Reciben el nombre de *números complejos* las expresiones de la forma $a + bi$ (a y b son números reales, i, cierto símbolo) para las cuales las nociones de igualdad y operaciones de adición y multiplicación se introducen del siguiente modo:

a) dos números complejos $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ son iguales si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$;

b) se llama *suma* de los números $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ el número

$$a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\, i;$$

c) se llama *producto* de los números $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ el número

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

Así, pues, la adición y multiplicación de números complejos se efectúa de acuerdo con las fórmulas

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\, i, \tag{1}$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \tag{2}$$

El conjunto de todos los números complejos se designa con $\mathbb{C}$. Los elementos del conjunto $\mathbb{C}$ (números complejos) se designan con frecuencia mediante una letra, con la particularidad de que, por regla, para ello se emplean las letras z, w, en ocasiones con índices, p. ej., z_1, z_2, w_0. La igualdad $z = a + bi$ significa que el número complejo $a + bi$ está designado con la letra z.

Las operaciones de adición (1) y multiplicación (2) poseen las siguientes propiedades:

1) conmutatividad de la suma

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

2) asociatividad de la suma

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

3) para cualesquiera números complejos z_1 y z_2 existe tal número complejo z que $z_1 + z = z_2$. Este número se llama *diferencia* de los números z_2 y z_1 y se designa con $z_2 - z_1$. La diferencia de los nú-

meros complejos $z_2 = a_2 + b_2i$ y $z_1 = a_1 + b_1i$ se halla con la fórmula

$$z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i; \quad (3)$$

4. conmutatividad de la multiplicación

$$z_1z_2 = z_2z_1;$$

5. asociatividad de la multiplicación

$$(z_1z_2)\,z_3 = z_1\,(z_2z_3);$$

6. para cualesquiera números complejos $z_1 \neq 0 + 0i$ y z_2 existe tal número z que $z_1z = z_2$. Este número se denomina *cociente* de los números complejos z_2 y z_1 y se designa con $\frac{z_2}{z_1}$ o bien z_2/z_1. La división por el número complejo $0 + 0i$, llamado cero, es imposible. El cociente z_2/z_1 de dos números complejos $z_2 = a_2 + b_2i$ y $z_1 = a_1 + b_1i$, a condición de que el divisor sea distinto de cero, puede ser hallado con la fórmula

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1^2 + b_1^2}\,i; \quad (4)$$

7. distributividad

$$z_1\,(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

El número complejo de la forma $a + 0i$ se identifica con el número real a, es decir, se considera que $a + 0 \cdot i = a$. P. ej.,

$$0 + 0 \cdot i = 0, \quad 1 + 0 \cdot i = 1, \quad -1 + 0 \cdot i = -1.$$

Así, pues, un conjunto de números reales es subconjunto de un conjunto de números complejos, o sea, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

El número $0 + bi$ lleva el nombre de *número puramente imaginario* y se designa con bi. P. ej., $0 - 2i = -2i$, $0 + 1 \cdot i = i$. El número real a se denomina parte *real* del número complejo $a + bi$. El número real b recibe el nombre de *parte imaginaria* del número complejo $a + bi$. Los números $a + bi$ y $a - bi$, o sea, aquellos que sólo se diferencian por el signo de la parte imaginaria, llevan el nombre de números complejos *conjugados*. El número conjugado a z se designa con $\bar{z}$. El número complejo i se suele denominar *unidad imaginaria*. Para ella es válida la fórmula

$$i^2 = -1. \quad (5)$$

La fórmula (2) de multiplicación de números complejos no hay que retenerla en la memoria, ya que ella se obtiene si multiplicamos de modo formal los binomios $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ según la regla habitual de multiplicación de binomios y, a continuación, de acuerdo con la fórmula (5), sustituimos i^2 por -1.

Ejemplo 1. Hallen la suma y la multiplicación de los números complejos

$$z_1 = -2 + 3i, \; z_2 = 7 - 8i.$$

△ Según la fórmula (1), hallamos

$$z_1 + z_2 = (-2 + 7) + (3 - 8)\, i = 5 - 5i.$$

El producto se halla multiplicando de modo formal los binomios $(-2 + 3i)$ y $(7 - 8i)$:

$$z_1 z_2 = (-2 + 3i)(7 - 8i) = -14 + 16i + 21i - 24i^2 = \\ = 10 + 37i. \; ▲$$

Ejemplo 2. Hallen la suma y el producto de números complejos conjugados.

△ Sea $z = x + yi$, entonces $\bar{z} = x - yi$.
La suma la hallamos con la fórmula (1):

$$z_1 + z_2 = (x + yi) + (x - yi) = 2x.$$

El producto se halla según la regla de multiplicación de binomios:

$$z_1 z_2 = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Así, pues, la suma de números complejos conjugados siempre es un número real, en tanto que el producto también es un número real, más aún, no negativo. ▲

Ejemplo 3. Se dan los números complejos $z_1 = -1 + 6i$ y $z_2 = 2 + 5i$. Hallen la diferencia $z_2 - z_1$ y el cociente z_2/z_1.

△ De acuerdo con la fórmula (3) hallamos

$$z_2 - z_1 = (2 + 5i) - (-1 + 6i) = 3 - i.$$

El cociente se halla con la fórmula (4):

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+5i}{-1+6i} = \frac{(-1)\cdot 2 + 6\cdot 5}{(-1)^2 + 6^2} + \frac{(-1)\cdot 5 - 2\cdot 6}{(-1)^2 + 6^2}\, i = \frac{28}{37} - \frac{17}{37}\, i. \; ▲$$

Ejemplo 4. Verifiquen las operaciones

$$\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}.$$

△ Después de multiplicar los números en el denominador, obtenemos

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{3+i}{1-2i+i+2} = \frac{3+i}{3-i}.$$

A continuación, tenemos la posibilidad de hacer uso de la fórmula (4), pero es más cómodo operar de otro modo. Multipliquemos el numerador y denominador de la fracción por el número conjugado al denominador, entonces

$$z=\frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{9+6i-1}{9+1}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i. \ \blacktriangle$$

5.1. Demuestren las propiedades 1—7 de las operaciones de adición y multiplicación de números complejos.

5.2. Demuestren la fórmula (5): $i^2=-1$.

5.3. Hallen la suma y el producto de los números complejos z_1 y z_2 si:

1) $z_1=4+5i,\ \ z_2=3-2i.$
2) $z_1=0{,}5-3{,}2i,\ \ z_2=1{,}5-0{,}8i.$
3) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i,\ \ z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i.$

5.4. Hallen la diferencia z_2-z_1 y el cociente z_2/z_1 si:

1) $z_1=3+4i,\ \ z_2=0{,}4-0{,}2i.$
2) $z_1=1-2i,\ \ z_2=0{,}6.$
3) $z_1=\sqrt{5}-i,\ \ z_2=\sqrt{5}-2i.$

5.5. Hallen la parte imaginaria z si:

1) $z=(2-i)^3(2+11i)$. 2) $z=\dfrac{2-3i}{1+4i}+i^6.$

3) $z=\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}.$

5.6. Verifiquen las operaciones:

1) $i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20}$. 2) $2i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$

3) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}.$ 4) $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}.$

5) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$

5.7. Determinen con qué valores reales de x e y los números complejos

$$z_1=y^2-7y+9xi \text{ y } z_2=-12+20i+x^2i$$

son iguales.

5.8. Determinen con qué valores reales de x e y los números complejos

$$z_1=8x^2-20i^9 \text{ y } z_2=9x^2-4+10yi^3$$

son conjugados.

5.9. Resuelvan las ecuaciones:

1) $(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-iz)+1+7i=0$.

2) $z^2+\overline{z}=0$.

5.10. Resuelvan el sistema

$$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i. \end{cases}$$

5.11. Demuestren las igualdades:

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. 2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

3) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$. 4) $\overline{(z_1/z_2)}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$, $z_2\neq 0$.

5) $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$, $n\in\mathbb{N}$.

---

2. Representación gráfica de números complejos. Módulo y argumentos del número complejo. A cada número complejo $a+bi$ se puede poner en correspondencia el punto M $(a; b)$ del plano de coordenadas y, a la inversa, a cada punto M $(a; b)$ del plano, el número complejo $a+bi$. La correspondencia establecida de semejante forma es biunívoca. Ella proporciona la posibilidad de considerar los números complejos como puntos del plano de coordenadas. Éste recibe el nombre de plano complejo. El eje de abscisas lleva el nombre de *eje real* (en él se disponen los puntos que corresponden a los números reales), el de ordenadas, *eje imaginario* (en él yacen los puntos correspondientes a los números imaginarios).

Con frecuencia, es cómodo interpretar el número complejo $a+bi$ como el vector $\overrightarrow{OM}$ (fig. 6). A cada vector del plano con origen en el punto O $(0; 0)$ y extremo en el punto M $(a; b)$ corresponde el número complejo $a+bi$ y viceversa. Al punto O $(0; 0)$ le corresponde el vector nulo.

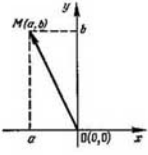


Fig. 6

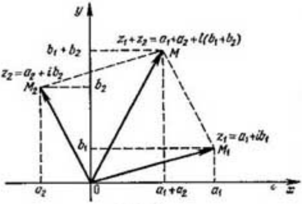


Fig. 7

La correspondencia establecida entre un conjunto de números complejos, por un lado, y los conjuntos de puntos o vectores del plano, por otro, permite denominar los números complejos puntos o vectores y, p. ej., hablar del vector $a + bi$ o del punto $a + bi$.

La representación de los números complejos con vectores permite dar una sencilla interpretación geométrica de las operaciones con ellos. P. ej., la suma de números complejos puede ser entendida geométricamente como un vector igual a la suma de los vectores correspondientes a los números complejos sumandos (fig. 7).

Lleva el nombre de *módulo del número complejo* la longitud del vector que corresponde a dicho número. Para el módulo del número z se emplea la designación $|z|$. El módulo del número complejo $z = a + bi$ puede calcularse con la fórmula

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (6)$$

Recibe el nombre de *argumento del número complejo* $z \neq 0$ el ángulo entre el sentido positivo del eje real y el vector z, con la particularidad de que dicho ángulo se considera positivo si contamos en sentido antihorario y negativo, si contamos en sentido horario. Para el número $z = 0$ argumento no se determina.

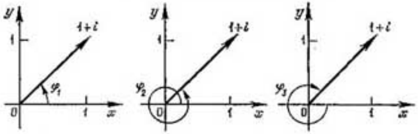


Fig. 8

A diferencia del módulo, el argumento del número complejo se determina no unívocamente. P. ej., (fig.8), los argumentos del número $z = 1 + i$ son los siguientes ángulos: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$; en general, cada uno de los ángulos $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, donde k es un número entero tomado al azar.

Cualesquiera dos argumentos de un número complejo se distinguen entre sí por un número múltiplo de 2π. Para designar el conjunto de todos los argumentos del número $z = a + bi$ se hace uso del símbolo arg z o bien arg $(a + bi)$. Si se trata de cualquiera de los argumentos, éste, por regla, se designa con la letra φ.

Las partes real e imaginaria del número complejo $z = a + bi$ se expresan con su módulo $|z| = r$ y su argumento φ del modo siguiente (fig. 9):

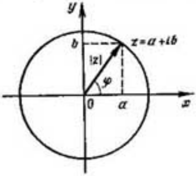


Fig. 9

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r \operatorname{sen}\varphi. \end{cases} \tag{7}$$

Así, pues, los argumentos φ del número complejo pueden ser hallados del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \tag{8}$$

Los argumentos del número complejo $z = a + bi$ $(a \neq 0)$ se pueden determinar de la ecuación

$$\operatorname{tg}\varphi = b/a, \tag{9}$$

que es el corolario del sistema (8). Esta ecuación no es equivalente al sistema (8), ella tiene mayor cantidad de raíces, pero la selección de las raíces necesarias (argumentos del número complejo) no presenta dificultades, ya que de la forma algebraica de anotación del número complejo siempre se advierte en qué cuadrante del plano complejo se encuentra él.

Ejemplo 5. Hallen los módulos de los números complejos

$$z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 2\sqrt{6} + 5i, \quad z_3 = i.$$

△ Con la fórmula (6) hallamos

$$|z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \quad |z_2| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = 7.$$

Para calcular el módulo de z_3 no es necesario emplear la fórmula (6). La longitud del vector $z_3 = i$ es, evidentemente, igual a uno, por ello, $|z_3| = 1$.▲

Ejemplo 6. Hallen los argumentos de los números complejos

$$z_1 = -i, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -1 + i.$$

△ Habiendo construido los vectores z_1, z_2, z_3 hallamos uno de los argumentos de cada número: $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 3\pi/4$. Por consiguiente,

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \arg z_2 = 2\pi k, \quad \arg z_3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$$

donde k es un número entero tomado al azar. ▲

Ejemplo 7. Hallen los argumentos del número complejo $z = -1 - \sqrt{3}i$.

$\triangle$ En este caso $a = -1$, $b = -\sqrt{3}$. El sistema (8) tiene la forma

$$\begin{cases} \cos\varphi = -1/2, \\ \operatorname{sen}\varphi = -\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $\varphi_k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$\arg z = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 8. Hallen los argumentos del número complejo $z = -\sqrt{3} + i$.

$\triangle$ Cada uno de los argumentos φ del número $z = -\sqrt{3} + i$ satisface la ecuación

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\sqrt{3}.$$

De esta ecuación se desprende que

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como el número $z = -\sqrt{3} + i$ está situado en el segundo cuadrante del plano complejo, sus argumentos serán los números φ_k con los valores impares de k, de modo que

$$\arg(-\sqrt{3} + i) = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}. \ \blacktriangle$$

5.12. En el plano complejo se dan los puntos z_1, z_2, z_3 que son los vértices de un triángulo. Hallen el punto de intersección de sus medianas.

5.13. En los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ del plano complejo yacen los puntos materiales con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente. Hallen el centro de gravedad del sistema de puntos materiales.

5.14. En el plano complejo se dan los puntos z_1, z_2, z_3 que son los tres vértices consecutivos de cierto paralelogramo. Hallen el cuarto vértice de la figura.

5.15. En el plano complejo están dados los puntos $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$. Hallen los números complejos que corresponden a los puntos en la bisectriz del ángulo formado con los vectores z_1 y z_2.

5.16. Hallen el módulo del número complejo z:
1) $z = -4$. 2) $z = -i$. 3) $z = -5 - 2\sqrt{6}\, i$.
4) $z = 1 + \cos(8\pi/7) + i \operatorname{sen}(8\pi/7)$.
5.17. Resuelvan la ecuación:
1) $z^2 + 3\,|z| = 0$. 2) $z^2 + 2\,|z| = 1$.
3) $z^2 + |z|^2 = 0$. 4) $z^2 + z\,|z| + |z^2| = 0$.
5.18. Demuestren las igualdades:
1) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$. 2) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, $z_2 \neq 0$.
5.19. Demuestren las desigualdades

$$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

5.20. Demuestren que $|z_1 - z_2|$, es decir, el módulo de la diferencia de los números complejos z_1 y z_2, es igual a la distancia entre los puntos z_1 y z_2 en el plano complejo.
5.21. Hallen el conjunto de puntos del plano complejo prefijado con la condición:
1) $|z + 1| = 1$. 2) $|z - i| < |z + i|$.
3) $|z + 2i - 1| \leqslant 2$. 4) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$.
5) $|z - 2| + |z + 2| = 26$. 6) $\operatorname{sen}|z| > 0$.
7) $\log|z - 10i| < 1$. 8) $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$.
5.22. Resuelvan el sistema de ecuaciones:
1) $|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|$.

2. $\begin{cases} |z+1| = |z+2|, \\ |3z+9| = |5z + 10i|. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (1-i)\bar{z} = (1+i)z, \\ |z^2 + 51i| = 1. \end{cases}$

5.23. Demuestren que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = \sqrt{2}, \\ |z| = 3 \end{cases}$$

no tiene soluciones.
5.24. Hallen los argumentos del número complejo:
1) $z = i$. 2) $z = -1$. 3) $z = 8$. 4) $z = 2 - 2i$.
5) $z = \operatorname{sen}(\pi/9) - i\cos(\pi/9)$. 6) $z = 1 + \cos(\pi/7) + i\operatorname{sen}(\pi/7)$.
5.25. ¿Qué conjunto de puntos del plano complejo se prefija con la condición:
1) uno de los argumentos del número z es igual a cero.
2) uno de los argumentos es igual a $5\pi/2$.
3) uno de los argumentos φ satisface las desigualdades $2\pi < \varphi < 3\pi$.
4) uno de los argumentos φ satisface las desigualdades $0 \leqslant \varphi < 2\pi$?
5.26. ¿Qué conjunto de puntos del plano complejo se prefija con la condición:
1) $\arg z = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2) $\pi(8k + 1)/4 < \arg(z + i) < \pi(4k + 1)/2$, $k \in \mathbb{Z}$?
5.27. Entre los números complejos z que satisfacen la condición:

1) $|z + 1 - i| = 1$, 2) $|z + 3 - \sqrt{3}i| \leqslant \sqrt{3}$, hallen el número que tenga el argumento positivo menor.

5.28. ¿Dónde se halla el punto z^2, si el punto z pertenece a la recta $\operatorname{Im} z = 1$?

5.29. ¿Dónde se halla el punto z del plano complejo si el punto z^2 pertenece al eje imaginario?

5.30. Sea $z \neq \pm 1$. Demuestren que el punto $(z - 1)/(z + 1)$ pertenece al eje imaginario si y sólo si el punto z pertenece a la circunferencia de radio $R = 1$ con centro en el punto $z = 0$.

5.31. ¿Puede el punto $z = 0$ pertenecer a cierto polígono cuyos vértices se hallan en los puntos

$$z_k = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{k-1},\ |z| < 1?$$

---

3. Forma trigonométrica del número comlejo. Multiplicación y división de números complejos escritos en forma trigonométrica Cada número complejo $z = a + bi$, distinto de cero, puede ser representado en la forma

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi),$$

donde r es el módulo del número, φ, uno (cualquiera) de sus argumentos. Esta representación del número lleva el nombre de *forma trigonométrica del número complejo*. La anotación del número en forma $z = a + bi$ recibe el nombre de *forma algebraica del número complejo*.

Con el fin de pasar de la forma algebraica del número a la trigonométrica es suficiente hallar el módulo del número complejo y uno de sus agrumentos.

Dos números complejos escritos en forma trigonométrica

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1) \text{ y } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2)$$

son iguales si y sólo si

$$r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\quad k \in \mathbb{Z},$$

es decir, cuando los módulos de los números son iguales y los argumentos se diferencian en $2\pi k$, donde k es cierto número entero.

La anotación de los números complejos en forma trigonométrica se emplea para la multiplicación y división de números. Sean

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1) \text{ y } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2)$$

dos números escritos en forma trigonométrica. Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{11}$$

Por consiguiente,

$$|z_1z_2| = r_1r_2, \arg(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}, \ \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, pues, el módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de los módulos de dichos números, la suma de los argumentos de los factores es el argumento del producto; el módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos de dichos números, la diferencia de los argumentos del dividendo y el divisor es el argumento del cociente.

Ejemplo 9. Escriban los números $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$ en forma trigonométrica.

△ Como $|z_1| = \sqrt{2}$ y $\varphi_1 = -3\pi/4$, entonces

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i \operatorname{sen}(-3\pi/4)).$$

El módulo de z_2 es igual a 2, y uno de los argumentos de z_2 es el ángulo $\varphi_2 = \pi$, por ello

$$z_2 = 2(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi).$$

Tomando en consideración que $|z_3| = 1$ y $\varphi_2 = \pi/2$ es uno de los argumentos de z_3, obtenemos

$$z_3 = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2). \blacktriangle$$

Ejemplo 10. Escriban los números

$$z_1 = 2\cos(7\pi/4) - 2i \operatorname{sen}(\pi/4), \quad z_2 = -\cos(\pi/17) + i \operatorname{sen}(\pi/17)$$

en forma trigonométrica.

△ Para escribir z_1 y z_2 en forma trigométrica no hay necesidad de hallar previamente sus módulos y argumentos (aunque hacerlo no presenta ninguna dificultad). Hagamos uso de que

$$\cos(7\pi/4) = \cos(-\pi/4), \text{ en tanto que}$$
$$-\operatorname{sen}(\pi/4) = \operatorname{sen}(-\pi/4)$$

y obtenemos de inmediato la forma trigonométrica del primer número

$$z_1 = 2(\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4)).$$

Por analogía, teniendo en cuenta que

$$-\cos\frac{\pi}{17} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right) = \cos\frac{16\pi}{17},$$

en tanto que

$$\operatorname{sen} \pi/17 = \operatorname{sen} (\pi - \pi/17) = \operatorname{sen} 16\pi/17,$$

obtenemos

$$z_2 = \cos (16\pi/17) + i \operatorname{sen} (16\pi/17). \blacktriangle$$

Ejemplo 11. Hallen el producto de los números $z_1 = \sqrt{2}(\cos(11\pi/4) + i \operatorname{sen}(11\pi/4))$ y $z_2 = \sqrt{8}(\cos(3\pi/8) + i \operatorname{sen}(3\pi/8))$.

$\triangle$ Como $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{8}$, entonces $|z_1z_2| = 4$. El argumento del producto z_1z_2 será la suma

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 11\pi/4 + 3\pi/8 = 25\pi/8.$$

Por consiguiente,

$$z_1z_2 = 4 (\cos (25\pi/8) + i \operatorname{sen} (25\pi/8)),$$

o bien

$$z_1z_2 = 4 (\cos (9\pi/8) + i \operatorname{sen} (9\pi/8)). \blacktriangle$$

Ejemplo 12. Escriban en forma trigonométrica el número complejo

$$z = \frac{(\cos(\pi/3) - i \operatorname{sen}(\pi/3))(\sqrt{3} + i)}{i - 1}.$$

$\triangle$ El número $z_1 = \cos (\pi/3) - i \operatorname{sen} (\pi/3)$ tiene módulo igual a 1 y argumento $\varphi_1 = -\pi/3$; el número $z_2 = \sqrt{3} + i$ tiene módulo 2 y argumento $\varphi_2 = \pi/6$; el número $z_3 = i - 1$ tiene módulo $\sqrt{2}$ y argumento $\varphi_3 = 3\pi/4$. Por ello,

$$|z| = \frac{|z_1|\ |z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

y el argumento

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi.$$

Por lo tanto,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right). \blacktriangle$$

4. Elevación a una potencia. La potencia del número complejo z con el exponente $n \in \mathbb{N}$ se determina con la fórmula

$$z^n = zz \ldots z,$$

en la que el segundo miembro contiene n factores.

Sea $z = r$ $(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, entonces

$$(r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi), \qquad (12)$$

es decir, al elevar un número complejo a una potencia con exponente natural, su módulo se eleva a la potencia con el mismo exponente, en tanto que el argumento se multiplica por el exponente de la potencia.

Ejemplo 13. Eleven a la novena potencia el número complejo

$$z = \sqrt{3} - i.$$

△ El módulo de z es igual a 2 y uno de los argumentos es el ángulo $\varphi = -\pi/6$, por lo que el módulo del número z^9 es igual a 2^9 y el argumento del número z, a $9\varphi = -3\pi/2$. Por lo tanto,

$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9 (\cos(-3\pi/2) + i \operatorname{sen}(-3\pi/2)) = 512i$. ▲

5. Radicación. El número w se llama raíz del orden n del número z (se designa $\sqrt[n]{z}$), si $w^n = z$.

P. ej., los números $w_1 = i$ y $w_2 = -i$ son las raíces del orden 2 (raíces cuadradas) del número $z = -1$, ya que $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = -1$.

De la definición se desprende que cada solución de la ecuación $w^n = z$ es la raíz del orden n del número z. Con otras palabras, para extraer una raíz de orden n del número z es suficiente resolver la ecuación $w^n = z$.

Sea $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, entonces la ecuación $w^n = z$ tiene n soluciones (raíces del orden n de z), que pueden ser halladas con la fórmula

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right), \qquad (13)$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

De esta fórmula se deduce que todas las raíces de orden n del número z tienen un mismo módulo $\sqrt[n]{r}$, pero diferentes argumentos que difieren entre sí por los sumandos múltiplos del número $2\pi/n$. De aquí se desprende que los números complejos, raíces del orden n del número complejo z, corresponden a los puntos en el plano complejo situados en los vértices de un n-ágono regular inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el punto $z = 0$ (véase el ejemplo 14).

Señalemos que el símbolo $\sqrt[n]{z}$ no tiene un sentido unívoco. Por ello, al emplearlo hay que comprender claramente lo que se entiende por él. P. ej., empleando la anotación $\sqrt{-1}$ hay que poner atención, para que esté claro, si por este símbolo se entiende un par de números complejos i e $-i$ o bien uno y, si es así, cuál de ellos precisamente.

Ejemplo 14. Hallen todos los valores de $\sqrt[4]{-16}$.

△ Escribamos el número $z = -16$ en forma trigonométrica

$$z = -16 = 16\,(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi).$$

De acuerdo con la fórmula (13), obtenemos

$$w_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)+i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)\right)\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Por consiguiente,

$$w_0 = 2\,(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$
$$w_1 = 2\,(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$
$$w_2 = 2\,(\cos(5\pi/4) + i \operatorname{sen}(5\pi/4)) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$
$$w_3 = 2\,(\cos(7\pi/4) + i \operatorname{sen}(7\pi/4)) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

En la fig. 10 están representados los cuatro valores de $\sqrt[4]{-16}$. Los puntos correspondientes a los números w_0, w_1, w_2, w_3 se hallan

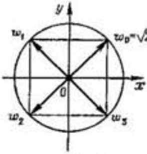


Fig. 10

en los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio $R = 2$ con centro en el punto $z = 0$.▲

Ejemplo 15. Escriban el número $\dfrac{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}$ en forma algebraica a condición de que las partes reales de las raíces $\sqrt{5+12i}$ y $\sqrt{5-12i}$ son negativas.

△ Para extraer la raíz cuadrada del número $5 + 12i$ hagamos $\sqrt{5+12i} = x + iy$, entonces

$$5 + 12i = x^2 + 2xyi - y^2$$

y, por lo tanto, x e y satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Después de resolverlo, obtenemos dos soluciones (3; 2) y (—3; —2). De acuerdo con el planteamiento, la parte real de $\sqrt{5+12i}$ es negativa y, por ello, $\sqrt{5+12i}=-3-2i$. De forma análoga, hallamos $\sqrt{5-12i}=-3+2i$. Así, pues,

$$z=\frac{-3-2i-(-3+2i)}{-3-2i+(-3+2i)}=\frac{2}{3}i. \ \blacktriangle$$

5.32. Representen el número complejo z en forma trigonométrica:

1) $z=-\sqrt{3}+i$. 2) $z=-1$. 3) $z=-\cos\frac{\pi}{12}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

4) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\operatorname{sen}\frac{10\pi}{9}$. 5) $z=\operatorname{tg}1-i$.

5.33. Escriban el número complejo z en las formas algebraica y trigonométrica:

1) $z=\dfrac{i(\cos(5\pi/3)+i\operatorname{sen}(5\pi/3))}{\cos(\pi/6)+i\operatorname{sen}(\pi/6)}$.

2) $z=\dfrac{1}{\cos(4\pi/3)-i\operatorname{sen}(4\pi/3)}$. 3) $z=\dfrac{i}{(1+i)^2}$.

4) $z=\dfrac{-\cos(5\pi/12)+i\operatorname{sen}(5\pi/12)}{\cos(13\pi/12)-i\operatorname{sen}(13\pi/12)}$.

5) $z=\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$.

5.34. Representar en forma trigonométrica el número complejo z:

1) $z=\dfrac{5(\cos100^\circ+i\operatorname{sen}100^\circ)i}{3(\cos40^\circ-i\operatorname{sen}40^\circ)}$.

2) $z=\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi/5)+i(1-\cos(2\pi/5))}{i-1}$.

5.35. El vector $z_1=2+5i$, después de girarlo a un ángulo $\pi/2$ en sentido horario y alargar doblemente, se convierte en el vector z_2. Hallen el número complejo que corresponde al vector z_2.

5.36. El vector $z=-2+3i$ está girado a 180° y alargado 1,5 veces. Hallen el número complejo que corresponde al vector obtenido.

5.37. Hallen el número complejo z en forma algebraica:

1) $z=\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$. 2) $z=(\cos 31^\circ+i\operatorname{sen} 31^\circ)^{-10}$.

3) $z=\left(\frac{i^8+\sqrt{3}\,i^6}{4}\right)^5$. 4) $z=\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$.

5) $z=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

5.38. Escriban el número complejo z en forma trigonométrica:

1) $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$. 2) $z=\left(\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6$.

3) $z=\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in\mathbb{N}$. 4) $z=(\operatorname{tg} 2-i)^4$.

5) $z=\left(\operatorname{sen}\frac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\frac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

5.39. ¿Con qué valores enteros de n es válida la igualdad

$$(1+i)^n=(1-i)^n?$$

5.40. Hallen todos los valores de $\sqrt[n]{z}$ si:

1) $z=-1$, $n=3$. 2) $z=8i$, $n=3$.
3) $z=1$, $n=5$. 4) $z=1+i$, $n=8$.

5.41. Resuelvan las ecuaciones:

1) $z^3=1+i$. 2) $z^4+1=0$. 3) $z^5=1+\sqrt{3}i$.
4) $z^6+64=0$. 5) $z^2=\bar{z}^3$. 6) $z^n=\bar{z}$, $n\in\mathbb{N}$.

5.42. Sean A_k ($k=1, 2, \ldots, n$) los vértices de un n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio unitario. Hallen:

1) $|A_1A_2|^2+|A_1A_3|^2+\ldots+|A_1A_n|^2$.
2) $|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\ldots|A_1A_n|$.

---

6. Potencia compleja del número e. La operación de elevación del número e a la potencia compleja $z=x+yi$ se determina con la fórmula

$$e^z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y). \tag{14}$$

P. ej.,

$$e^{1+i}=e(\cos 1+i\operatorname{sen} 1),$$
$$e^{\pi i/2}=\cos(\pi/2)+i\operatorname{sen}(\pi/2)=i,$$
$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi=-1.$$

Propiedades fundamentales de la potencia compleja del número e: 1) a) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, b) $e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$, es decir, para e^z se conservan las propiedades habituales de la potencia.

2) Para los valores reales de $z = x + 0 \cdot i$

$$e^z = e^{x+0i} = e^x,$$

es decir, la potencia compleja del número e se transforma, en este caso, en una potencia con exponente real.

3) Para todo número complejo z es válida la igualdad

$$e^{z+2\pi n i} = e^z, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{15}$$

en particular, $e^{2\pi n i} = 1$.

De la fórmula (14), con $z = i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, se obtiene una importante fórmula

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi \tag{16}$$

llamada *fórmula de Euler*.

Cada número complejo $z \neq 0$ se puede representar en la forma

$$z = re^{i\varphi}, \tag{17}$$

donde r es el módulo del número z, φ, uno (cualquiera) de los argumentos. Esta representación de z lleva el nombre de *forma exponencial del número complejo*. Para los números complejos escritos en forma exponencial las fórmulas de multiplicación, división, elevación a una potencia natural, extracción de la raíz, toman la siguiente forma compleja:

a) si $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{18}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \tag{19}$$

b) si $z = re^{i\varphi}$, entonces

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \tag{20}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) i} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{21}$$

Ejemplo 16. Representen en forma exponencial el número complejo

$$z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8} i.$$

△ Hallamos el módulo del número

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

y uno de sus argumentos

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/\sqrt{3},\quad \varphi = -\pi/6$$

(ya que z se encuentra en el cuarto cuadrante). Por consiguiente,

$$z = \frac{1}{4}e^{-\pi i/6}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 17. Escriban en forma exponencial el número complejo

$$z = \frac{(-\sqrt{3}+i)(\cos(\pi/12) - i\operatorname{sen}(\pi/12))}{1-i}.$$

△ Representemos cada uno de los números $-\sqrt{3}+i$, $\cos(\pi/12) - i\operatorname{sen}(\pi/12)$, $1-i$ en forma exponencial

$$-\sqrt{3}+i = 2e^{5\pi i/6},$$

$$\cos(\pi/12) - i\operatorname{sen}(\pi/12) = \cos(-\pi/12) + i\operatorname{sen}(-\pi/12) = e^{-\pi i/12},$$

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}.$$

Empleando las fórmulas (18) y (19), obtenemos

$$z = \frac{2e^{5\pi i/6}e^{-\pi i/12}}{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}} = \sqrt{2}\,e^{\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\pi}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 18. Representemos en forma exponencial el número complejo $z = (-1+i)^5$.

△ Escribamos en forma exponencial la base de la potencia y apliquemos la fórmula (20):

$$(-1+i)^5 = (\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4})^5 = 4\sqrt{2}\,e^{15\pi i/4} = 4\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 19. Escriban todos los valores de la raíz $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ en forma exponencial.

△ Representamos el número $\sqrt{3}+i$ en forma exponencial y aplicamos la fórmula (21):

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[4]{2e^{\pi i/6}} = \sqrt[4]{2}e^{\pi i(12k+1)/24} \quad (k = 0, 1, 2, 3). \ \blacktriangle$$

5.43. Demuestren las propiedades 1) — 3) de la potencia compleja del número e.

5.44. Sea $z = x + iy$; hallen el módulo y los argumentos del número e^z.

5.45. Representen z en forma algebraica:

1) $z = e^{2-i}$. 2) $z = e^{-\frac{3}{2}\pi i + 12\pi i}$. 3) $z = e^{3i+7+3\pi i - \frac{\pi}{2}i}$.

5.46. Representen en forma exponencial el número complejo: 1) $z = -\sqrt{12} - 2i$. 2) $z = -\cos(\pi/7) + i\operatorname{sen}(\pi/7)$.

5.47. Escriban en las formas exponencial y algebraica el número complejo:

1) $z = 5e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}} (\cos(5\pi/12) - i \operatorname{sen}(5\pi/12))$.

2) $z = \left(\frac{1}{2} e^{\pi i/12}\right)^{-3}$. 3) $z = (\sqrt{3} - i)^8$.

4) $z = \frac{1}{(\cos 12° + i \operatorname{sen} 12°)^5}$. 5) $z = \frac{e^{-\pi i/3}(1+\sqrt{3}i)^7}{i}$.

5.48. Demuestren la fórmula

$$(1 + \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{in\alpha}, \ n \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

5.49. Empleando la fórmula (21) escriban en forma exponencial todos los valores de $\sqrt[n]{z}$:

1) $z = 1, n = 3$. 2) $z = -1, n = 5$.

3) $z = -4 + \sqrt{48}i, n = 3$. 4) $z = -1 - \sqrt{3}i, n = 4$.

5.50. Hallen las sumas:

1) $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi}$. 2) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\varphi, \ \varphi \neq 2\pi p, \ p \in \mathbb{Z}$.

3) $\sum_{k=0}^{n} \cos k\varphi, \ \varphi \neq 2\pi p, \ p \in \mathbb{Z}$.

§ 6. Polinomios. Ecuaciones algebraicas. Fracciones racionales

1. Polinomios. Ecuaciones algebraicas. Llevan el nombre de *polinomios* con relación a la variable z las expresiones de la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{1}$$

donde n es número entero no negativo, a_k ($k = 0, 1, \ldots, n$), ciertos números.

Suelen decir que el polinomio (1) está dado sobre el conjunto de números complejos si $a_k \in \mathbb{C}$ y sobre un conjunto de números reales si $a_k \in \mathbb{R}$.

Los números a_k se denominan *coeficientes* del polinomio; el coeficiente a_0 se llama *término independiente*, a_n, *coeficiente de mayor grado*. Si $a_n = 1$ el polinomio lleva el nombre de *reducido*.

Si $a_n \neq 0$, el número n se llama *grado* del polinomio.

Para la anotación abreviada de los polinomios se emplean, por regla, las designaciones $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, ..., si la variable $z \in \mathbb{C}$ y $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, etc, si la variable $z = x \in \mathbb{R}$. Cuando se quiere remarcar que el polinomio $P(z)$ tiene el grado n, se escribe $P_n(z)$.

Los polinomios $P_0(z) = a_0$, $a_0 \neq 0$, es decir, los polinomios de grado nulo, son números complejos no iguales a cero. El número 0 también se considera polinomio y se denomina nulo. El polinomio nulo es el único que no tiene grado.

Los polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ se consideran *iguales* (se escribe $P_n(z) = Q_m(z)$) si son iguales los coeficientes con iguales potencias de z. Para la igualdad de los polinomios es evidente la necesidad de la igualdad de sus grados.

Para los polinomios se determinan las operaciones de adición y multiplicación. Cada una de ellas se somete a las leyes conmutativa y asociativa. Las mencionadas operaciones están ligadas entre sí con la ley distributiva.

La suma $P_n(z) + Q_m(z)$ de los polinomios

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$
$$Q_m(z) = b_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$$

es un polinomio cuyos coeficientes, con cada potencia de z, son iguales a la suma de los coeficientes con esa misma potencia de z de los polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$.

P. ej., si $P_5(z) = z^5 + 3iz^3 - 1$ y $Q_3(z) = iz^3 + z + 1$, entonces

$$P_5(z) + Q_3(z) = z^5 + 4iz^3 + z.$$

La suma de los polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ es un polinomio cuyo grado no supera el mayor de los números n y m, o bien no existe.

Se denomina *producto* $P_n(z) Q_m(z)$ de los polinomios

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$
$$Q_m(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0$$

el polinomio

$$S_{n+m}(z) = c_{m+n} z^{n+m} + \ldots + c_k z^k + \ldots + c_1 z + c_0,$$

en el que el coeficiente c_k $(0 \leqslant k \leqslant n + m)$ es igual a la suma de todos los posibles productos $a_i b_j$, donde $i + j = k$.

Con el fin de hallar el producto de los polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ es suficiente multiplicar cada término $a_k z^k$ del polinomio $P_n(z)$ por cada término $b_l z^l$ de $Q_m(z)$ y escribir la suma de todos los productos obtenidos $a_k b_l z^{k+l}$.

P. ej., si $P_4(z) = z^4 - 1$ y $Q_3(z) = 2z^3 + z$, entonces

$$P_4(z) Q_3(z) = (z^4 - 1)(2z^3 + z) = 2z^7 + z^5 - 2z^3 - z.$$

Si $N(z)$ es un polinomio nulo, para cualquier polinomio $P(z)$, por definición, se supone que

$$P(z) + N(z) = P(z), \quad P(z)\,N(z) = N(z).$$

Decimos que la *diferencia* de $P(z) - Q(z)$ de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ es tal polinomio $R(z)$ que

$$P(z) = Q(z) + R(z).$$

La diferencia existe para cualesquiera dos polinomios y se determina unívocamente.

Para cualesquiera dos polinomios $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ existen tales polinomios $T(z)$ y $R(z)$ que

$$P_n(z) = Q_m(z)\,T(z) + R(z), \tag{2}$$

con la particularidad de que bien el grado de $R(z)$ es menor que m, o bien $R(z) = 0$ (es decir, $R(z)$ es el polinomio nulo). Los polinomios $T(z)$ y $R(z)$ se determinan unívocamente; $T(z)$ se denomina *cociente* y $R(z)$, *resto* de la división del polinomio $P_n(z)$ entre el polinomio $Q_m(z)$.

Si $R(z) = 0$, decimos que $P_n(z)$ se divide entre $Q_m(z)$. En semejante caso, $Q_m(z)$ lleva el nombre de *divisor* del polinomio $P_n(z)$.

Con el fin de determinar el cociente y el resto de la división de dos polinomios existen diversos procedimientos. Con la mayor frecuencia se hace uso de la «división bajo ángulo» o bien del método de los «coeficientes indeterminados».

P. ej., la «división bajo ángulo» del polinomio $2z^4 - 5z^3 + 2z$ entre el polinomio $z^2 - 1$ se realiza así:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-\,2z^4 & -5z^3 & & +2z & & z^2-1 \\
2z^4 & & -2z^2 & & & \overline{2z^2-5z+2} \\
\hline
- & -5z^3 & +2z^2 & +2z & & \\
 & -5z^3 & & +5z & & \\
\hline
 & & -\,2z^2 & -3z & & \\
 & & 2z^2 & & -2 & \\
\hline
 & & & -3z & +2 &
\end{array}$$

Por esto,

$$2z^4 - 5z^3 + 2z = (z^2 - 1)(2z^2 - 5z + 2) + (-3z + 2),$$

es decir, el polinomio $T(z) = 2z^2 - 5z + 2$ es el cociente, en tanto que $R(z) = -3z + 2$, el resto.

Con el fin de hallar el cociente y el resto de la división de esos mismos polinomios según el método de los «coeficientes indeterminados se opera del modo siguiente. Como el primer polinomio es del grado 4 y segundo, del 2, el cociente se busca en la forma $T(z) = az^2 + bz +$

$+ c$ y el resto, en la forma $R(z) = b_1 z + c_1$. Se escribe la igualdad (2):

$$2z^4 - 5z^3 + 2z = (z^2 - 1)(az^2 + bz + c) + b_1 z + c_1.$$

Si los polinomios son iguales, también lo serán sus coeficientes con las mismas potencias de z, o sea, los coeficientes de los polinomios $T(z)$ y $R(z)$ satisfacen al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2 = a, \\ -5 = b, \\ 0 = c - a, \\ 2 = -b + b_1, \\ 0 = -c + c_1. \end{cases}$$

De este sistema hallamos $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$, $b_1 = -3$, $c_1 = 2$.

Es de particular interés la división del polinomio $P_n(z)$ entre el polinomio reducido de primer grado $z - z_0$. La igualdad (2) toma, en este caso, la forma

$$P_n(z) = (z - z_0)\, T_{n-1}(z) + w_0,$$

donde w_0 es cierto número complejo.

Si en la indicada igualdad hacemos $z = z_0$, obtendremos $P_n(z_0) = w_0$.

El número $w_0 = P_n(z_0)$ se denomina *valor de polinomio* $P_n(z)$ *con* $z = z_0$.

Así, pues, el resto de la división del polinomio $P_n(z)$ entre $z - z_0$ es igual al valor de éste con $z = z_0$ (*teorema de Bezout*).

Si $w_0 = P_n(z_0) = 0$, el polinomio $P_n(z)$ se divide entre el binomio lineal $z - z_0$, es decir, $z - z_0$ es el divisor del polinomio $P_n(z)$.

Si el valor del polinomio $P_n(z)$ con $z = z_0$ es igual a cero, es decir, $P_n(z_0) = 0$, al número z_0 se le da el nombre de *raíz del polinomio* $P_n(z)$. En tal caso, también se dice que el número z_0 es la *raíz* (o bien *solución*) *de la ecuación*

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0. \tag{3}$$

La ecuación (3) lleva el nombre de *ecuación algebraica* de *n-ésimo grado*. Resolver la ecuación (3) significa hallar todas sus raíces o bien hallar todas las raíces del polinomio $P_n(z)$, lo que es lo mismo.

Si el polinomio $P_n(z)$ se divide entre el polinomio $(z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$, pero no se divide entre el polinomio $(z - z_0)^{k+1}$, la raíz z_0 se llama raíz de *k-ésimo grado de multiplicidad* del polinomio $P_n(z)$ y raíz de k-ésimo grado de multiplicidad de la ecuación (3). La raíz de primer grado de multiplicidad se denomina con frecuencia *sim-*

ple, la raíz de k-ésimo grado de multiplicidad, con $k > 1$, recibe el nombre de *múltiple*. El polinomio

$$P_n'(z) = na_nz^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \ldots + 2a_2z + a_1$$

se llama *derivada* del polinomio $P_n(z)$. Al determinar la multiplicidad de la raíz de un polinomio, muy a menudo se utiliza la siguiente afirmación: la raíz múltiple del polinomio $P_n(z)$ es también la raíz del polinomio $P_n'(z)$.

La ecuación algebraica de grado nulo no debe tener raíces.

La ecuación algebraica de primer grado

$$az + b = 0$$

tiene una raíz

$$z = -b/a.$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado (raíces de la ecuación cuadrática)

$$az^2 + bz + c = 0$$

se hallan con ayuda de la fórmula

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

El número $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* de la ecuación cuadrática, mientras que por $\sqrt{D}$ se entiende cierto valor de la raíz. Si $D = 0$, la ecuación cuadrática tiene una sola raíz de segundo orden de multiplicidad; si $D \neq 0$, dos raíces simples.

Las raíces de la ecuación algebraica de dos términos

$$az^n + b = 0$$

se hallan con la fórmula

$$z = \sqrt[n]{-b/a}. \tag{5}$$

Si $b \neq 0$, semejante ecuación tiene n raíces simples (de primer grado de multiplicidad) que pueden ser halladas según la fórmula (13) del § 5.

En el caso general, no existen fórmulas (semejantes a las (4), (5)) que permitan expresar las raíces de una ecuación algebraica, con ayuda de sus coeficientes. Claro está, que la falta de un método general para resolver las ecuaciones algebraicas, no impide que en casos particulares se emplee uno u otro rasgo específico de la ecuación para hallar sus raíces. Ademas, al resolver muchos problemas se requiere hallar no todas las raíces de la ecuación, sino sólo aquellas que pertenecen a cierto conjunto, p. ej., al conjunto de los números reales o bien al de números enteros. Para resolver las ecuaciones con coeficientes enteros resulta ser con frecuencia útil el siguiente teorema.

Teorema. Las raíces enteras de una ecuación algebraica con coeficientes enteros son los divisores del término independiente.

La existencia de las raíces de las ecuaciones algebraicas se establece con ayuda del teorema fundamental de álgebra de los números complejos, es decir, *el teorema de Gauss.*

Teorema. La ecuación algebraica de grado n en un conjunto de números complejos tiene n raíces a condición de que cada raíz de k-ésimo grado de multiplicidad se cuenta k veces.

Del teorema de Gauss se desprende que cada polinomio $P_n(z)$ permite la representación de la forma

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_l)^{k_l}, \tag{6}$$

donde $z_1, z_2, \dots, z_l$ son diferentes raíces del polinomio, mientras que $k_1, k_2, \dots, k_l$, sus correspondientes multiplicidades, con ello

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l = n.$$

Cada polinomio $P_n(x)$ con coeficientes reales permite la representación en la forma

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_l)^{k_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_m x + q_m)^{r_m}, \tag{7}$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_l$ son diferentes raíces reales del polinomio; $k_1, k_2, \dots, k_l$ sus correspondientes multiplicidades; $p_1, q_1, \dots, p_m, q_m$, diferentes pares de números reales que satisfacen las desigualdades

$$p_1^2 - 4q_1 < 0, \ \dots, \ p_m^2 - 4q_m < 0;$$

$r_1, r_2, \dots, r_m$ son números naturales, con ello

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l + 2(r_1 + r_2 + \dots + r_m) = n.$$

Ejemplo 1. Resuelvan la ecuación

$$z^2 + 3z + 3 = 0.$$

△ Con la fórmula (4), hallamos

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}. \ ▲$$

Ejemplo 2. Resuelvan la ecuación

$$z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0.$$

△ Con la fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática, tenemos

$$z=\frac{2+i\pm\sqrt{(2+i)^2+4(1-7i)}}{2}=\frac{2+i\pm\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Con el fin de determinar cualquier valor de $\sqrt{7-24i}$ hacemos

$$\sqrt{7-24i}=x+iy.$$

Entonces

$$7-24i=x^2+2xyi-y^2$$

y, por lo tanto, x e y satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=-12, \end{cases}$$

con la particularidad de que x e y son números reales. El sistema tiene la solución $x=4$, $y=-3$. Por ello,

$$z_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=3-i,$$

$$z_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 3. Resuelvan la ecuación

$$z^3-6z-9=0.$$

△ Al analizar los divisores del término independiente nos cercioramos de que sólo $z=3$ es la raíz entera de la ecuación. Dividimos el primer miembro de la ecuación entre $z-3$:

$$\begin{array}{r|l} z^3 \qquad -6z-9 & z-3 \\ \cline{2-2} -\underline{z^3-3z^2 \qquad\quad} & z^2+3z+3 \\ 3z^2-6z-9 & \\ -\underline{3z^2-9z \quad} & \\ 3z-9 & \\ -\underline{3z-9} & \\ 0 & \end{array}$$

Así, pues,

$$z^3-6z-9=(z-3)(z^2+3z+3)$$

y, después de resolver la ecuación cuadrática

$$z^2+3z+3=0,$$

obtenemos las restantes raíces. De modo que

$$z_1=3,\quad z_2=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 4. Aclaren si existen o no raíces enteras de la ecuación

$$2z^3 - 5z^2 - 2z + 2 = 0.$$

△ Sólo pueden ser raíces enteras de la ecuación los números ± 1, ± 2. Al ponerlos en la ecuación vemos que ninguno de estos cuatro números la satisface. Es decir, la ecuación dada no tiene raíces enteras. ▲

Ejemplo 5. Resuelvan la ecuación

$$z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = 0.$$

△ Probando los divisores del término independiente, hallamos que $z = \pm 2$ son las raíces de la ecuación. Dividiendo el primer miembro de ésta entre $z^2 - 4$, llegamos a la ecuación

$$z^3 - 2z^2 - 9z + 18 = 0,$$

cuya raíz es $z = 2$. Habiendo dividido el primer miembro de la ecuación obtenida entre $z - 2$, hallamos $z^2 - 9$. Así, pues, la ecuación se puede escribir en la forma

$$(z + 3)(z + 2)(z - 2)^2(z - 3) = 0,$$

es decir, tiene tres raíces de primer grado de multiplicidad (simples) $z = -3$, $z = -2$, $z = 3$ y una raíz de segundo grado de multiplicidad $z = 2$. ▲

Ejemplo 6. Representen el polinomio

$$P(z) = z^7 + z^6 + 64z + 64$$

en forma del producto: a) de los factores lineales, b) de los factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

△ Hallemos todas las raíces del polinomio. Ya que

$$z^7 + z^6 + 64z + 64 = (z + 1)(z^6 + 64),$$

$z_1 = -1$ y con el fin de hallar las restantes raíces hay que extraer la raíz de sexto grado del número -64. Según la fórmula (13) del § 5, obtenemos

$$z_2 = \sqrt{3} + i, \quad z_3 = \sqrt{3} - i, \quad z_4 = -\sqrt{3} + i,$$
$$z_5 = -\sqrt{3} - i, \quad z_6 = 2i, \quad z_7 = -2i.$$

Por esta razón, representemos el polinomio dado en forma del producto de los siete factores lineales:

$$P(z) = (z+1)(z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i)(z + \sqrt{3} - i) \times$$
$$\times (z + \sqrt{3} + i)(z - 2i)(z + 2i).$$

Multiplicando a pares los binomios lineales correspondientes a las raíces complejamente conjugadas obtenemos la descomposición del polinomio en factores con coeficientes reales:

$$P(z) = (z+1)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 4).$$

También podríamos haber obtenido tal descomposición mediante las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} z^7 + z^6 + 64z + 64 &= (z+1)(z^6 + 64) = \\ &= (z+1)(z^2+4)(z^4 - 4z^2 + 16) = \\ &= (z+1)(z^2+4)(z^4 + 8z^2 + 16 - 12z^2) = \\ &= (z+1)(z^2+4)(z^2 + 4 - 2\sqrt{3}z)(z^2 + 4 + 2\sqrt{3}z). \blacktriangle \end{aligned}$$

2. **Fracciones racionales.** La expresión $\frac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios, con la particularidad de que $Q(z)$ es un polinomio no nulo, lleva el nombre de *fracción racional*. El polinomio $P(z)$ se denomina numerador y $Q(z)$, denominador de la fracción racional. Por lo visto, cada polinomio $T(z)$ es una fracción racional (en tal caso, $P(z) = T(z)$, $Q(z) = 1$).

Las fracciones racionales $\frac{P(z)}{Q(z)}$ y $\frac{R(z)}{S(z)}$ se consideran iguales si

$$P(z)\,S(z) = R(z)\,Q(z).$$

De aquí sigue que dos fracciones racionales con iguales denominadores son iguales si y sólo si son iguales sus numeradores.

La suma $\frac{P(z)}{Q(z)} + \frac{R(z)}{S(z)}$ de las fracciones racionales $\frac{P(z)}{Q(z)}$ y $\frac{R(z)}{S(z)}$ se denomina la fracción racional $\frac{P(z)\,S(z) + R(z)\,Q(z)}{Q(z)\,S(z)}$ y su producto $\frac{P(z)}{Q(z)}\,\frac{R(z)}{S(z)}$, la fracción racional $\frac{P(z)\,R(z)}{Q(z)\,S(z)}$.

La diferencia y el cociente de dos fracciones racionales se determina como el resultado de las operaciones inversas a la adición y multiplicación.

Las operaciones de adición y multiplicación de fracciones racionales son conmutativas y asociativas; están ligadas entre sí mediante la ley distributiva.

La fracción racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ lleva el nombre de *propia* si el grado del polinomio $P(z)$ es menor que el de $Q(z)$. Si el grado de $P(z)$ es mayor o igual que el de $Q(z)$, la fracción racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ se llama *impropia*.

Cada fracción racional impropia $\frac{P(z)}{Q(z)}$ puede representarse en forma de un polinomio o bien de la suma del polinomio y cierta fracción racional propia. En efecto, si $T(z)$ es el cociente y $R(z)$ el resto de la división del polinomio $P(z)$ entre $Q(z)$, es válida la igualdad

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=T(z)+\frac{R(z)}{Q(z)}, \tag{8}$$

donde bien la fracción $\frac{R(z)}{Q(z)}$ es propia, o bien $R(z)=0$.

La representación de una fracción impropia en la forma (8) recibe el nombre de *formación de la parte entera* de una fracción racional impropia.

Ejemplo 7. Representen la fracción racional $\frac{z^6-z^2+1}{z^3+1}$ en forma de la suma de un polinomio y una fracción propia.

△ Dividiendo el polinomio $P(z)=z^6-z^2+1$ entre el polinomio $Q(z)=z^3+1$, obtenemos el cociente $T(z)=z^3-1$ y el resto $R(z)=-z^2+2$. Por consiguiente,

$$z^6-z^2+1=(z^3+1)(z^3-1)-z^2+2,$$

de donde

$$\frac{z^6-z^2+1}{z^3+1}=z^3-1+\frac{2-z^2}{z^3+1}. \quad \blacktriangle$$

3. Descomposición de una fracción racional propia en un conjunto de números complejos en fracciones elementales. Sea $\frac{P(z)}{Q(z)}$ una fracción racional propia y supongamos que la descomposición del polinomio $Q(z)$ en los factores lineales tiene la forma (6).

Entonces existen las constantes

$$A_j^{(k)}(j=1, 2, \ldots, l;\; k=1, 2, \ldots, k_j),$$

con las que es válida la igualdad

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_j^{(k)}}{(z-z_j)^k}. \tag{9}$$

Los sumandos (no iguales a cero) del segundo miembro de la fórmula (9) se llaman *fracciones racionales elementales* (*simples*) en un conjunto de números complejos. El segundo miembro de la fórmula (9) recibe el nombre de *descomposición de una fracción racional en la suma de las fracciones racionales elementales.* Los coeficientes de la descomposición se definen de modo unívoco. Así, pues, cada fracción racional propia en un conjunto de números complejos puede ser representada, además del único modo, en forma de la suma de fracciones racionales elementales. La forma de esta suma se define plenamente con las raíces y la multiplicidad del denominador de la fracción racional. Si las raíces del denominador de semejante fracción son conocidas, los coeficientes se pueden hallar con diferentes procedimientos. Con la mayor frecuencia se calculan con ayuda del método de los «coeficientes indeterminados».

Ejemplo 8. Descompongan la fracción racional $\frac{z^2+1}{z^3-z}$ en un conjunto de números complejos en la suma de fracciones elementales.

△ El denominador de la fracción racional tiene las raíces $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$. Por esto, existen tales constantes A, B, C que es válida la igualdad

$$\frac{z^2+1}{z^3-z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-1}.$$

Con el fin de determinar los coeficientes A, B y C sumemos las fracciones en el segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{z^2+1}{z^3-z} = \frac{A(z^2-1)+Bz(z-1)+Cz(z+1)}{z^3-z}.$$

Las fracciones racionales con iguales denominadores son iguales entre sí si y sólo si son iguales sus numeradores. Por ello,

$$z^2+1 = A(z^2-1) + Bz(z-1) + Cz(z+1). \qquad (10)$$

Si dos polinomios son iguales, sus valores, con iguales valores de z, también lo son. Haciendo consecutivamente en la igualdad (10) $z = 0$, $z = -1$, $z = 1$, obtenemos $1 = -A$, $2 = 2B$, $2 = 2C$, es decir, $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. La descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{z^2+1}{z^3-z} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}. \quad ▲$$

Ejemplo 9. Descompongan la fracción racional $\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)}$ en un conjunto de números complejos en una suma de fracciones elementales.

△ El denominador de la fracción racional tiene las raíces $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$. Por ello, la descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}.$$

De esta igualdad de fracciones racionales se desprende la igualdad de los polinomios

$$z+3=A(z^2+1)+B(z-1)(z+i)+C(z-1)(z-i).$$

Haciendo consecutivamente z igual a 1, i e $-i$, obtenemos

$$4=2A,\ i+3=B(i-1)2i,\ -i+3=C(-i-1)(-2i),$$

es decir,

$$A=2,\quad B=-1+\frac{i}{2},\quad C=-1-\frac{i}{2}.$$

Así, pues,

$$\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)}=\frac{2}{z-1}+\frac{-1+\frac{i}{2}}{z-i}+\frac{-1-\frac{i}{2}}{z+i}. \ \blacktriangle$$

4. Descomposición de una fracción racional propia en un conjunto de números reales en fracciones elementales. Sean $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una fracción racional propia, $P(x)$ y $Q(x)$, polinomios con coeficientes reales, con la particularidad de que la descomposición del polinomio $Q(x)$ en los factores lineales y cuadráticos tiene la forma (7). Entonces existen las constantes reales

$$A_i^{(k)}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ k_i),$$
$$M_j^{(r)} \text{ y } N_j^{(r)}\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ r=1,\ 2,\ \ldots,\ r_j),$$

con las que es válida la igualdad

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_j^{(k)}}{(x-x_j)^k}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r_j}\frac{M_j^{(k)}x+N_j^{(k)}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}. \tag{11}$$

Los sumandos (no iguales a cero) en el segundo miembro de la fórmula (11) se llaman fracciones racionales elementales (simples) en un conjunto de números reales. El segundo miembro de la fórmula (11) denomínase descomposición de la fracción racional en la suma de fracciones racionales elementales. Los coeficientes de la descomposición se determinan unívocamente. De este modo, cada fracción racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en un conjunto de números reales puede ser representada, además de la única forma, en forma de la suma de fracciones elementales. Remarquemos que el tipo de la descomposición (11) se predetermina con raíces y la multiplicidad del denominador de la fracción racional. Los procedimentos para hallar los coeficientes de la descomposición serán mostrados en los ejemplos.

Ejemplo 10. Indiquen el tipo de descomposición en la suma de fracciones elementales en un conjunto de números reales para las fracciones racionales:

$$1)\ \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)}. \quad 2)\ \frac{x^7+x^3-13}{x^8+x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3}.$$

△ Cada una de las fracciones racionales dadas es propia y, por ello, las descomposiciones buscadas existen. El denominador de la primera fracción tiene una raíz simple $x = 2$ y una raíz de segundo grado de multiplicadad $x = -1$. Por esta razón, para la primera fracción la descomposición tiene la forma

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-2} + \frac{A_2^{(1)}}{x+1} + \frac{A_2^{(2)}}{(x+1)^2}.$$

El denominador de la segunda fracción se descompone en factores lineales y cuadráticos del modo siguiente:

$$x^8 + x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 = (x+1)x^3(x^2+1)^2.$$

Por ello, para la segunda fracción la descomposición tiene la forma

$$\frac{x^7+x^3-13}{x^8+x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3} =$$
$$= \frac{A_1^{(1)}}{x+1} + \frac{A_2^{(1)}}{x} + \frac{A_2^{(2)}}{x^2} + \frac{A_2^{(3)}}{x^3} + \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+1} + \frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+1)^2}. \ ▲$$

Ejemplo 11. Descompongan en un conjunto de números reales en fracciones elementales:

$$1)\ \frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)}. \quad 2)\ \frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2}. \quad 3)\ \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)^2}.$$

$$4)\ \frac{x^3+3}{(x+3)^{100}}. \quad 5)\ \frac{6+3x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

△ 1) El denominador de la fracción racional tiene raíces simples $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, por lo que la descomposición buscada se escribe en la forma

$$\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

De la igualdad de las fracciones racionales (por definición) se desprende la igualdad de los polinomios

$$1/2 = A_1(x-2)(x-3) + A_2(x-1)(x-3) + $$
$$+ A_3(x-1)(x-2). \quad (12)$$

Si los polinomios son iguales, también lo son sus valores con iguales valores de x. Haciendo consecutivamente en la igualdad (12) $x = 1$,

$x = 2$, $x = 3$, hallamos $1/2 = 2A_1$, $1/2 = -A_2$, $1/2 = 2A_3$, es decir,

$$A_1 = 1/4, \quad A_2 = -1/2, \quad A_3 = 1/4.$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/2}{x-2} + \frac{1/4}{x-3}.$$

2) El denominador de la fracción racional ya está descompuesto en un producto de factores lineales y cuadráticos. La descomposición en una suma de fracciones elementales tiene, en nuestro caso, la siguiente forma:

$$\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

De la igualdad de las fracciones racionales sigue la igualdad de los polinomios

$$x^3 + 7x + 32 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)\,x\,(x^2+4) + (Dx+E)\,x.$$

De la igualdad de los polinimios se deduce la de sus coeficientes con iguales potencias de x. Igualando los coeficientes con iguales potencias, obtenemos un sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ 1 = C, \\ 0 = 8A + 4B + D, \\ 7 = 4C + E, \\ 32 = 16A. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $A = 2$, $B = -2$, $C = 1$, $D = -8$, $E = 3$. Por lo tanto,

$$\frac{x^3+7x+32}{x(x^2+4)^2} = \frac{2}{x} - \frac{2x-1}{x^2+4} - \frac{8x-3}{(x^2+4)^2}.$$

3) En este caso es posible obtener la descomposición buscada sin aplicar el método de los «coeficientes indeterminados». Transformemos la fracción racional del modo siguiente:

$$\frac{2x+1}{x^2(1+x^2)^2} = (2x+1)\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2} =$$

$$= (2x+1)\left(\frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right) = (2x+1)\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} -$$

$$- \frac{2x+1}{(1+x^2)^2} = (2x+1)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{2x+1}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

La descomposición obtenida es la de la fracción racional dada en la suma de fracciones elementales.

4) Aquí, como en el anterior caso, la descomposición buscada puede ser hallada con ayuda de sencillas transformaciones. Haciendo $x+3=t$, reescribamos la fracción racional del modo siguiente:

$$\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}}=\frac{(t-3)^3+3}{t^{100}}=\frac{t^3-9t^2+27t-24}{t^{100}}=$$
$$=\frac{1}{t^{97}}-\frac{9}{t^{98}}+\frac{27}{t^{99}}-\frac{24}{t^{100}}=$$
$$=\frac{1}{(x+3)^{97}}-\frac{9}{(x+3)^{98}}+\frac{27}{(x+3)^{99}}-\frac{24}{(x+3)^{100}}.$$

La descomposición obtenida es la buscada.

5) La descomposición en fracciones elementales tiene la forma

$$\frac{6+3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

De la igualdad de las fracciones se deduce la de los polinomios

$$6+3x^3=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1).$$

Haciendo aquí consecutivamente $x=i$ y $x=2i$, obtenemos

$$\begin{cases} 6-3i=3(Ai+B), \\ 6-24i=-3(2Ci+D). \end{cases}$$

De este sistema hallamos $A=-1$, $B=2$, $C=4$, $D=-2$. Por lo tanto,

$$\frac{6+3x^3}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{2-x}{x^2+1}+\frac{4x-2}{x^2+4}. \ \blacktriangle$$

6.1. ¿Con qué valores de A, B, C, D son iguales los polinomios

$$P(z)=(Az+B)(z^2-z+1)+(Cz+D)(z^2+3)$$

y

$$Q(z)=2z^3+z^2+5z+1?$$

6.2. Elijan los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ del menor grado de forma que se verifique la igualdad

$$(z^4-2z^3-4z^2+6z+1)\,P(z)+(z^3-5z-3)\,Q(z)=z^4.$$

6.3. ¿Con qué valores de A, B, C, D es válida para los polinomios

$$P(z)=z^4+Az^3+Bz^2-8z+4 \text{ y } Q(z)=z^2+Cz+D$$

la igualdad $P(z)=Q^2(z)$?

6.4. Hallen el grado del polinomio:

1) $P(z)=z^2(z^4-1)+(1-z)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)$.

2) $$Q(z)=1-\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}-\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}-\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)},$$

z_1, z_2, z_3, son números complejos distintos a pares.

6.5. Hallen el cociente $T(z)$ y el resto $R(z)$ de la división del polinomio $P(z)$ entre el polinomio $Q(z)$:

1) $P(z)=z^3+5z^2-7z-3$, $Q(z)=z^2-8z+16$.
2) $P(z)=z^5+3z^2+7iz=1$, $Q(z)=z-i$.
3) $P(z)=z^5-z^3+1$, $Q(z)=(z-i)^3$.
4) $P(z)=z^2-1$, $Q(z)=2z^4-5z^3+2z$.
5) $P(z)=z^{30}-1$, $Q(z)=z^5+1$.

6.6. Determinen si el polinomio $Q(z)$ es el divisor del polinomio $P(z)$:

1) $P(z)=z^{100}-3z^2+2$, $Q(z)=z^2-1$.
2) $P(z)=z^{100}-3z+2$, $Q(z)=z^2-1$.
3) $P(z)=6z^5+11z^4+5z^3+5z^2-z-6$, $Q(z)=z^2+1$.

6.7. ¿Con qué valores de a y b el polinomio $Q(z)$ es el divisor del polinomio $P(z)$:

1) $Q(z)=(z-1)^2$, $P(z)=az^4+bz^3+1$.
2) $Q(z)=z^2-(1+i)z+i$, $P(z)=z^{1982}+az+b$.
3) $Q(z)=z^2+az+b$, $P(z)=z^4-1$?

6.8. ¿Con qué valores naturales de n y m $(n\geqslant m)$ el polinomio $Q(z)$ es el divisor del polinomio $P(z)$:

1) $Q(z)=z^m-a^m$, $P(z)=z^n-a^n$, $a\neq0$.
2) $Q(z)=z^m+a^m$, $P(z)=z^n+a^n$, $a\neq0$.
3) $Q(z)=z^m+a^m$, $P(z)=z^n-a^n$, $a\neq0$.
4) $Q(z)=z^2+z+1$, $P(z)=z^{3n+1}+z^{3m}+z^2$.
5) $Q(z)=z^4+z^2+1$, $P(z)=z^{3n+1}+z^{3m}+z^5$?

6.9. Hallen el polinomio de máximo grado que sea el divisor de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$:

1) $P(z)=(z^3-1)(z^2-2z+1)$, $Q(z)=(z^2-1)^3$.
2) $P(z)=z^{210}-1$, $Q(z)=z^{90}-1$.
3) $P(z)=z^{75}-z^{45}-z^{30}+1$, $Q(z)=75z^{74}-45z^{44}-30z^{29}$.

6.10. Al dividir el polinomio $P(z)$ por $z-1$ en el resto se obtiene 3, mientras que al dividirlo entre $z-2$, el resto será 4. Hallen el resto de la división $P(z)$ por z^2-3z+2.

6.11. Al dividir el polinomio $P(z)$ entre $z-i$ en el resto se obtiene i, en tanto que al dividirlo entre $z+i$, el resto será $1+i$. Hallen el resto de la división de $P(z)$ entre z^2+1.

6.12. Hallen el resto de la división del polinomio $P(z) = z^{1983} - 1$ entre el polinomio $Q(z) = (z^2 + 1)(z^2 + z + 1)$.

6.13. Resuelvan las ecuaciones:

1) $z^2 - 2z + 5 = 0$. 2) $z^2 - 2iz - 5 = 0$.

3) $z^2 - 20z + 92 + 6i = 0$.

4) $z^2 - 8z - 3iz + 13 + 13i = 0$.

5) $(3 - i) z^2 - (8 - i) z + 4 + 7i = 0$.

6.14. Resuelvan las ecuaciones:

1) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$. 2) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

3) $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^4 = i$. 4) $(z-i) z (z+i)(z+2i) = 24$.

6.15. Hallen las raíces de las ecuaciones, cuya parte real es negativa:

1) $z^6 - z^3 - 2 = 0$, 1) $z^{10} - z^5 - 992 = 0$.

6.16. Demuestren que las raíces enteras de una ecuación algebraica con coeficientes enteros son los divisores del término independiente.

6.17. Hallen las raíces enteras de las ecuaciones:

1) $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$. 2) $z^3 - 6z^2 + 15z - 14 = 0$.

3) $2z^3 - 5z^2 - 2z - 2 = 0$.

4) $z^4 + 4z^3 - 25z^2 - 16z + 84 = 0$.

5) $z^6 - 6z^5 + 11z^4 - z^3 - 18z^2 + 20z - 8 = 0$.

6.18. Demuestren que cada raíz racional de una ecuación algebraica con coeficientes enteros se representa en la forma p/q, donde p es cierto divisor del término independente y q, cierto divisor del coeficiente de mayor grado de la ecuación.

6.19. Hallen las raíces racionales de las ecuaciones:

1) $3z^3 + z^2 + z + 35 = 0$. 2) $2z^4 + 3z^3 - 46z^2 + 6z + 8 = 0$.

6.20. Resuelvan las ecuaciones:

1) $2z^3 + 12z^2 + 13z + 15 = 0$.

2) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$.

3) $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$.

4) $z^5 - 2z^4 - 13z^3 + 26z^2 + 36z - 72 = 0$.

6.21. Demuestren que si la ecuación

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

con coeficientes reales tiene una raíz z_0, el número $\overline{z}_0$ es asimismo raíz de dicha ecuación.

6.22. Demuestren que si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz $z_0 = a + bi$, el polinomio $(z - a)^2 + b^2$ es su divisor.

6.23. Cerciórense de que el número z_0 es la raíz de las ecuaciones

1) $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$, $z_0 = 1 + i$.

2) $z^6 + z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 1 = 0$. $z_0 = i$

y hallen las restantes raíces.

6.24. Demuestren que cada polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

6.25. ¿Con qué valores racionales de a y b el número $1+\sqrt{2}$ es la raíz de la ecuación

$$z^5+az^3+bz^2+5z+2=0?$$

Hallen las restantes raíces de la ecuación con los valores hallados de a y b.

6.26. Hallen las raíces comunes de las ecuaciones:

1) $z^6+2z^5+3z^4+2z^3+3z^2+2z+2=0$, $z^4+3z^3+6z^2+6z+4=0$.

2) $z^3+2z^2+2z+1=0$, $z^{1982}+z^{100}+1=0$.

6.27. Determinen la multiplicidad de la raíz z_0 para las ecuaciones:

1) $3z^4-4z^3+1=0$, $z_0=1$.

2) $z^5-5z^4+7z^3-2z^2+4z-8=0$, $z_0=2$.

3) $z^{2n}-nz^{n+1}+nz^{n-1}-1=0$, $n>1$, $z_0=1$.

6.28. ¿Con qué valores de a y b la ecuación

$$z^5+10az^3+5bz-24\sqrt{3}=0$$

tiene una raíz de multiplicidad 3?

6.29. Demuestren que la ecuación

$$\frac{z^n}{n!}+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+z+1=0$$

no tiene raíces múltiples.

6.30. Hallen el polinomio $P(x)$ de mínimo grado que tiene la raíz $x=0$ del décimo orden y tal que el polinomio $P(x)-1$ tiene la raíz $x=1$ de quinto orden.

6.31. Hallen el polinomio reducido de mínimo grado con coeficientes reales, cuyas raíces son: 1) $z_1=3$ y $z_2=2-i$, 2) $z_1=i$ (raíz de multiplicidad 2) y $z_2=-1-i$.

6.32. Hallen el polinomio reducido de mínimo grado con coeficientes racionales, cuya raíz es $z_0=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

6.33. Demuestren que las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de la ecuación

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0$$

están ligadas con sus coeficientes mediante las fórmulas de Viète:

$$z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n=-a_{n-1},$$
$$z_1z_2+z_1z_3+\ldots+z_{n-1}z_n=a_{n-2},$$
$$z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+\ldots+z_{n-2}z_{n-1}z_n=-a_{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_1z_2z_3\ldots z_n=(-1)^n a_0.$$

6.34. La ecuación $2z^3 + az^2 + bz + 12 = 0$ tiene las raíces $z_1 = 1$, $z_2 = -2$. Hallen la tercera raíz de esta ecuación.

6.35. Sean z_1, z_2, z_3 las raíces de la ecuación $z^3 - z^2 - 1 = 0$. Confeccionen una ecuación cuyas raíces fuesen los números $z_2 + z_3$, $z_3 + z_1$, $z_1 + z_2$.

6.36. ¿Con qué valores de c las raíces de la ecuación

$$z^3 + z^2 + 2z + c = 0$$

forman una progresión geométrica? Hallen las raíces con esta condición.

6.37. Hallen la suma de los cuadrados y la de los cubos de las raíces de la ecuación

$$8z^4 - 5z^2 + 2z + 1 = 0.$$

6.38. Hallen la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0 = 0.$$

6.39. Hallen la suma de los coeficientes del polinomio:

1) $(4z-5)^{16}$. 2) $\left(3\sqrt{2}z - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8$.

3) $(4z^2-2z-1)^{13}(5z^2-7)^4$.

6.40. Representen el polinomio en forma del producto de los factores lineales:

1) $z^3 + 1$. 2) $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$.
3) $6z^4 - 11z^3 - z^2 - 4$.
4) $z^5 - 4z^4 - 6z^3 + 16z^2 + 29z + 12$.
5) $z^3 + (1 - i)z^2 + (1 - 2i)z - 1 - i$.

6.41. Representen el polinomio en forma del producto de los factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales:

1) $x^4 + 4$. 2) $x^6 + 27$.
3) $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$.
4) $x^2 + (x + 1)^2 + (x^2 + x)^2$.
5) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$.
6) $x^4 - 2x^3 - 27x^2 - 44x + 7$.
7) $x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

6.42. ¿Existe un polinomio cuyo cuadrado fuese igual al polinomio

$$z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1?$$

6.43. Hallen el polinomio $P(z)$ de grado mínimo que satisfaga la condición:

1) $P(-3) = 13$, $P(4) = 13$, $P(5) = 21$.
2) $P(-1) = 4$, $P(0) = 3$, $P(1) = 0$, $P(2) = 7$.
3) $P(-1) = -1$, $P(1) = 0$, $P(3) = 1$, $P(5) = 2$.

6.44. ¿Hay un polinomio $P(z)$ con coeficientes enteros que satisfaga las condiciones $P(7) = 5$ y $P(15) = 9$?

6.45. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ números diferentes a pares. Hallen el polinomio $P_n(z)$ que tenga las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_n$ y que satisfaga la condición $P_n(z_{n+1}) = 1$.

6.46. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$ números diferentes a pares tomados al azar y $w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}$, números arbitrarios. Demuestren que existe uno y sólo un polinomio $P_n(z)$ que satisface las condiciones

$$P_n(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

6.47. Separen la parte entera de la función racional:

1) $\dfrac{z^3+3z^2+5z+7}{z^2+2}$. 2) $\dfrac{z^6-7z^4+8z^3-7z+7}{z^3+1}$.

3) $\dfrac{z^6-z^2+1}{(z-1)^5}$. 4) $\dfrac{(z^2+1)^{10}}{z^2+4}$.

6.48. Indiquen el tipo de la descomposición de una fracción racional en elementales en un conjunto: 1) de números complejos, b) de números reales:

1) $\dfrac{z^3}{z^4+18z^2+81}$. 2) $\dfrac{z+1}{2(z+1)^4-32}$. 3) $\dfrac{1}{z^6+2z^3+1}$.

6.49. Descompongan la fracción racional en fracciones elementales en un conjunto de números complejos:

1) $\dfrac{z}{4z^2-2z+1}$. 2) $\dfrac{i}{z^2+(5-2i)z+5-5i}$.

3) $\dfrac{z^4+1}{z^5+z^3}$. 4) $\dfrac{8z^2}{z^4-1}$.

5) $\dfrac{1}{z^4+1}$. 6) $\dfrac{1}{z^n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

6.50. Descompongan la fracción racional en fracciones elementales en un conjunto de números reales:

1) $\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$. 2) $\dfrac{6}{x^3-1}$.

3) $\dfrac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$. 4) $\dfrac{3}{x^3-x^5}$.

5) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-2)(x+1)^2(x-1)^3}$. 6) $\dfrac{16x^3-32x+2}{\left(\frac{x}{2}\right)^4-2\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$.

7) $\dfrac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$. 8) $\dfrac{1-2x}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

9) $\dfrac{101x}{x^{101}-1}$. 10) $\dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+1}$.

§ 7. Funciones numéricas. Sucesiones

1. Noción de función numérica. Sea dado el conjunto numérice $X \subset \mathbb{R}$ y, además, supongamos que a cada $x \in X$ se ha puesto en correspondencia el número $y \in \mathbb{R}$, entonces se dice que en el conjunto X se ha definido una *función numérica*. La regla que establece la correspondencia se designa con cierto símbolo, p. ej., f y se escribe

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

En esta anotación x se denomina *argumento* o bien variable independiente, los números del conjunto X se llaman valores del argumento, el conjunto X es llamado *campo de definición* de la función, también se designa con $D(f)$. El número y_0, que corresponde al valor del argumento x_0, lleva el nombre de *valor de la función* con $x = x_0$ (o bien valor de la función en el punto x_0) y se designa $f(x_0)$ o bien $f(x)|_{x=x_0}$. En ciertas ocasiones, el conjunto de los valores de la función se designa $E(f)$.

A veces, para indicar la función se utiliza sólo el símbolo con el que está designada la ley de correspondencia, p. ej., f.

Las funciones f y g reciben el nombre de *iguales* si $D(f) = D(g)$ y la igualdad $f(x) = g(x)$ es cierta para todo valor del argumento. Si dicha igualdad sólo es cierta en el conjunto $A \subset D(f) \cap D(g)$, las funciones f y g se llaman *iguales en el conjunto* A.

P. ej., las funciones $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (se toma el valor aritmético de la raíz) e $y = x$, $x \in \mathbb{R}$ son iguales en el conjunto $A = [0; +\infty)$. Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} \neq x$. La indicada función $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, es igual a la función $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ya que sus campos de definición también coinciden para toda $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ con } x \geqslant 0, \\ -x \text{ con } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sean dadas las funciones $y = f(x)$ y $z = F(y)$ y sea que el campo de valores de la función f está contenido en el campo de definición de la función F. La función

$$z = F(f(x)), \quad x \in D(f)$$

recibe el nombre de *función compuesta* o bien *composición* (superposición) de las funciones f y F y se designa con $F \circ f$.

P. ej., la función

$$z = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1],$$

es la composición de las funciones

$$y = 1 - x^2, \quad x \in [-1; 1], \text{ y } z = \sqrt{y}, \quad y \in [0; +\infty).$$

2. Funciones elementales. *A las funciones elementales fundamentales* se refieren las funciones constante, potencial, exponencial, logarítmica trigonométricas y trigonométricas inversas.

Recibe el nombre de *función elemental* aquella que puede ser prefijada con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas y composiciones de funciones elementales fundamentales. P. ej., son elementales las funciones:

la función lineal

$$y = ax + b, \quad x \in \mathbb{R},$$

aquí $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

la función cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

aquí $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; las funciones

$$z = \sqrt{1 - x^2}, \ x \in [-1;\ 1], \ y = x \operatorname{sen}(1/x), \ x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0, \text{ etc.}$$

Lleva el nombre de *polinomio* la función elemental de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

aquí $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Si $a_n \neq 0$, $P(x)$ se denomina polinomio de grado n, con frecuencia se designa con $P_n(x)$, en tanto que el número n se llama grado del polinomio. Si todos los coeficientes del polinomio son nulos, él recibe el nombre de polinomio nulo. Tiene lugar el teorema: dos polinomios no nulos son iguales si y sólo si sus grados son los mismos y los coeficientes con iguales potencias de x coinciden.

Damos el nombre de *racional* a una *función* elemental que puede ser dada en la forma

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ es un polinomio, $Q(x)$, un polinomio no nulo. Esta función esta definida para todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.

Llamamos *irracional* a una función elemental que no es racional y puede ser prefijada con ayuda de la composición de un número finito de funciones racionales, funciones potenciales con exponentes racionales y operaciones matemáticas. Las funciones dadas a continuación son ejemplos de funciones irracionales

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1;\ 1], \quad y = \sqrt[3]{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$y = \frac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^{2/3} + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Las funciones elementales que no son racionales o irracionales se denominan *transcendentes*. Las funciones exponencial, logarítmica, trigonométricas y trigonométricas inversas son transcendentes.

Por función prefijada con una fórmula se entiende tal función cuyo campo de definición son todos los valores del argumento para los que dicha fórmula tiene sentido y para los que el resultado de cada una de las operaciones indicadas en la fórmula es un número real.

Ejemplo 1. Hallen el campo de definición de la función prefijada con la fórmula

$$y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}}.$$

△ Los valores de $\sqrt{x}$ están sólo determinados con $x\geqslant 0$. Con $x=0$ y $x=1$ el denominador $x^2-\sqrt{x}$ es igual a cero y, por ello, hay que considerar que $x\neq 0$, $x\neq 1$. Los valores de $\sqrt[3]{a}$ están determinados para todo número real a y con toda $x>0$, $x\neq 1$, $a=\frac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}$ es un número real. Por esta razón, el campo de definición de la función que consideramos es el conjunto de todas $x>0$, $x\neq 1$. ▲

Hallen los campos de definición de las funciones dadas con fórmulas (7.1)—72):

7.1. 1) $y=\frac{x}{x+1}$. 2) $y=\frac{x+1}{x^2-1}$, 3) $y=\frac{x^3-1}{x^2-6x+8}$.
4) $y=\frac{(x+2)^2}{x^2-4x}$. 5) $y=\frac{1}{x+|x|}$. 6) $y=\frac{x^2}{2|x|-3}$.
7) $y=\frac{|x+2|+1-2x-2x^2}{|2x+2|-1}$.

7.2. 1) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$. 2) $y=\sqrt{-x^2}$. 3) $y=\sqrt[4]{2-x}$.
4) $y=\sqrt{2-x-x^2}$. 5) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 6) $y=\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x}$.
7) $y=\frac{x}{(9-x^2)^{2/3}}$. 8) $y=\sqrt{x^2(x-2)}$. 9) $y=\sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$.

7.3. Hallen la función lineal $y=ax+b$ y diseñen su gráfico si:
1) $y(1)=0$, $y(0)=-2$. 2) $y(-1)=2$, $y(1)=-1$.
3) $y(5)=3$, $y(-2)=1$. 4) $y(-1,5)=1{,}5$, $y(2{,}5)=-0{,}5$.
5) $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$.

7.4. Hallen la función cuadrática f y diseñen su gráfico si:
1) $f(-1)=0$, $f(0)=5$, $f(6)=-7$.
2) $f(-2)=2$, $f(1)=-1$, $f(3)=7$.
3) $f(-6)=7$, $f(-3)=-8$, $f(2)=7$.
4) $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$, $x_i\neq x_j$, $i, j=1, 2, 3$.

7.5. Hallen el polinomio $P(x)$ de un grado no mayor que tres que satisfaga las condiciones:

1) $P(-2)=1$, $P(-1)=6$, $P(0)=5$, $P(1)=10$.

2) $P(x_1)=y_1$, $P(x_2)=y_2$, $P(x_3)=y_3$, $P(x_4)=y_4$, $x_i\neq x_j$, $i, j=1, 2, 3, 4$.

7.6. Hallen el polinomio $P(x)$ de un grado no mayor que n que satisfaga las condiciones:

$$P(x_1)=y_1,\ P(x_2)=y_2,\ \ldots,\ P(x_n)=y_n,\ P(x_{n+1})=y_{n+1}$$

si $x_i\neq x_j$ con $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \ldots, n+1)$. Semejante polinomio se llama *interpolador*.

7.7. Hallen los campos de definición de las funciones f_1, f_2, f_1+f_2 si f_1 y f_2 están prefijadas con las fórmulas:

1) $f_1(x)=\sqrt[4]{3-x}$, $f_2(x)=\sqrt{x+1}$.

2) $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$.

3) $f_1(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$, $f_2(x)=\log(x^2-4)$.

4) $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}$, $f_2(x)=\operatorname{tg} x$.

5) $f_1(x)=\log(16-x^2)$, $f_2(x)=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$.

6) $f_1(x)=x+\sqrt{x-1}$, $f_2(x)=x-\sqrt{x-1}$.

7.8. Hallen el campo de definición de las funciones f y $1/f$ si f está dada con la fórmula:

1) $f(x)=x^2-x+1$. 2) $f(x)=|x|-2$.

2) $f(x)=\log(1-x^2)$. 4) $f(x)=x+\sqrt{x+2}$.

5) $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}$.

6) $f(x)=5^x-2^{x+1}$. 7) $f(x)=3-2\cos x$.

8) $f(x)=\sqrt{2}-2\operatorname{sen} x$. 9) $f(x)=1-\operatorname{ctg} x$.

7.9. Hallen $f(3)$, $f(a)+f(-a)$, $f(b)-1$, $f(b-1)$, $f(1/p)$, $1/f(p)$ si:

1) $f(x)=x/(x-2)$. 2) $f(x)=(1+x)^4-(1-x)^4$.

7.10. Hallen $f(-4)$, $f(-1)$, $f(-0{,}5)$, $f(1)$, $f(1984)$ si:

$$1)\ f(x)=\begin{cases} 2-|x| & \text{con}\quad -1<x<2, \\ 1 & \text{con}\quad x\leqslant -1, \\ 0 & \text{con}\quad x\geqslant 2. \end{cases}$$

$$2)\ f(x)=\begin{cases} 2x-|x| & \text{con}\quad x>-1, \\ 2^{x+1} & \text{con}\quad x\leqslant -1. \end{cases}$$

7.11. Para la función

$$f(x) = 5x^m + ax^n + bx^{-m} + 2x^{-n},$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

hallen a y b de modo que $f(x) = f(1/x)$ para toda $x \neq 0$.

7.12. Hallen $f(a) + f(-a)$ si $f(x) = x^3 + 3x - 1$.

7.13. Hallen $f(1+b) - f(1-b)$ si $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

7.14. Hallen todos los valores de a con los que la función:

1) $y = ax^2 + (a+3)x + 4a$, $x \in \mathbb{R}$ sólo tiene valores positivos.

2) $y = (a-1)x^2 + (a+1)x + a + 1$, $x \in \mathbb{R}$ sólo tiene valores negativos.

7.15. Hallen $y\left(a + \frac{1}{a}\right)$ si $y = \sqrt{x^2 - 4}$ y

1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$; 3) $-1 < a < 0$; 4) $a < -1$.

7.16. Hallen el conjunto de los valores de la función:

1) $f(x) = 2x - 5$, $x \in [-2; 2]$.

2) $f(x) = |x - 1|$, $x \in [0; 5]$.

3) $f(x) = x + \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

5) $f(x) = -2x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

6) $f(x) = 5 - 12x - 2x^2$, $x \in [-4; 1]$.

7) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

8) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$.

9) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

7.17. Hallen el conjunto de los valores de la función prefijada con la fórmula:

1) $y = \sqrt{x^2+1}$. 2) $y = \sqrt[4]{x^2-1}$. 3) $y = \sqrt{x(4-x)}$.

4) $y = \sqrt{\frac{9x^2+1}{x}}$. 5) $y = ax + \frac{b}{x}$, donde $ab > 0$.

6) $y = ax + \frac{b}{x}$, donde $ab < 0$. 7) $y = \frac{x^2+2x-2}{x^2-x+1}$.

7.18. ¿Con qué valores de a la función prefijada con la fórmula

$$y = \frac{x^3 + ax^2 + 2x}{2x - 1}$$

coincide en su campo de definición con una función cuadrática?

7.19. ¿Con cuáles a y b la función

$$y=\frac{x^3+ax^2+bx+2b}{x^2+x+1}$$

es lineal?

7.20. Los valores $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ de la función cuadrática $y(x)$ son números enteros. Demuestren que con cualquier x entera el valor de $y(x)$ es un número entero.

7.21. Sean x_1 el cero de la función $y=x^2+px+q$, x_2, el de la función $y=-x^2+px+q$. Demuestren que entre x_1 y x_2 se hallará el cero de las funciones:

1) $y=\frac{1}{9}x^2+px+q$. 2) $y=\frac{1}{2}x^2-px-q$.

7.22. Hallen las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$ e indiquen su campo de definición para las funciones prefijadas con las fórmulas:

1) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$. 2) $f(x)=g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

3) $f(x)=10^x$, $g(x)=\log x$. 4) $f(x)=x^5$, $g(x)=x+5$.

5) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;\ +\infty),\\ 0, & x\in(-\infty;\ 0),\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0;\ +\infty),\\ x^2, & x\in(-\infty;\ 0).\end{cases}$

6) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=\operatorname{sen} x$.

7.23. Escriban las fórmulas que prefijan las composiciones:

1) $u\circ v\circ w\circ y\circ z$, 2) $z\circ y\circ w\circ v\circ u$,

3) $w\circ y\circ v\circ z\circ u$, 4) $y\circ v\circ z\circ u\circ w$,

si $u=\operatorname{sen} x$, $v=\log_2 x$, $w=1+x$, $y=1/x$, $z=\sqrt{x}$.

7.24. Demuestren la *asociatividad* de la composición, es decir, que

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h).$$

7.25. Hallen cierta función f que satisfaga la condición:

1) $f(x-2)=\frac{1}{x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$.

2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

3) $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$.

4) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^4+1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

5) $f(x^2)=1-|x|^3$, $x\in\mathbb{R}$.

7.26. ¿Existe tal función $f(x)$, $x\in[0;\ +\infty)$ que satisfaga la igualdad $f(x^2)=1+x$, con cualquier $x\in\mathbb{R}$?

7.27. Sean $f(x)=\frac{x}{ax+b}$, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Hallen:

1) $f\circ f\circ f(x)$. 2) $g\circ g\circ g(x)$.

3) $f\circ f\circ\ldots\circ f(x)$ (n composiciones).

4) $g\circ g\circ\ldots\circ g(x)$ (n composiciones).

7.28. Sea $P(x)$ un polinomio y $P(x) = 0$ para toda $x \neq 0$. Demuestren que $P(0) = 0$.

7.29. Demuestren que si un polinomio es igual a cero con todo valor del argumento, todos sus coeficientes son nulos.

---

3. **Gráfico de una función.** Recibe el nombre de *gráfico de la función* $y = f(x)$, $x \in D(f)$ en el sistema de coordenadas cartesianas Oxy el conjunto de todos los puntos del plano con coordenadas $(x; f(x))$, $x \in D(f)$.

Pero no todo conjunto de puntos del plano de coordenadas es el gráfico de una función. Con el fin de que el conjunto dado sea el gráfico de la función, es necesario y suficiente que cada recta paralela al eje de ordenadas corte este conjunto en no más de un punto.

La función $y = f(x)$, definida en el conjunto X simétrico con relación a cero, se llama *par* si para toda $x \in X$ es cierta la igualdad

$$f(-x) = f(x);$$

impar si para toda $x \in X$ es cierta la igualdad

$$f(-x) = -f(x).$$

El gráfico de una función par es simétrico con relación al eje de ordenadas, mientras que el de una función impar es simétrico res-

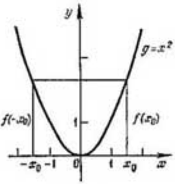


Fig. 11

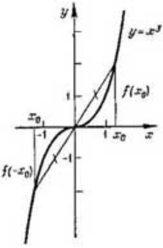


Fig. 12

pecto al origen de coordenadas. Ejemplos de gráficos de funciones par e impar se ofrecen en las figs. 11, 12.

En una serie de casos el gráfico de la función $y = g(x)$ se puede obtener transformando el gráfico conocido de otra función $y = f(x)$. En la tabla 1 se muestra uno de tales casos de mayor sencillez.

En lugar de la transformación del gráfico de la función $y = f(x)$ es posible hacer uso de la transformación del sistema de coordenadas. P. ej., el gráfico de la función $y = f(x) + c$ se obtiene si, no variando el gráfico de la función $y = f(x)$ (como conjunto de puntos en el plano), tomamos un nuevo sistema de coordenadas desplazado a $-c$ a lo largo del anterior eje de ordenadas, etc.

Tabla 1

Función $y = g(x)$	Transformación del gráfico de la función $y = f(x)$
$y = f(x) + c$	desplazamiento a lo largo del eje de ordenadas a c
$y = f(x - c)$	desplazamiento a lo largo del eje de abscisas a c
$y = f(-x)$	simetría con relación al eje de ordenadas
$y = -f(x)$	simetría con relación al eje de abscisas
$y = af(x)$	multiplicación de cada ordenada por a
$y = f(ax)$	división de cada abscisa entre a

Ejemplo 2. Según el gráfico conocido de la función $y = x^2$ (fig. 11) construyan el gráfico de la función $y = x^2 - 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

△ Como $y = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$, el gráfico buscado se obtiene desplazando la parábola $y = x^2$ (fig. 11) a 2 unidades a la derecha y, a continuación, a 2 unidades hacia abajo (fig. 13). Obtendremos ese mismo resultado si el sistema de coordenadas, en el que está construida la parábola $y = x^2$ (fig. 11), se desplaza hacia arriba a 2 unidades y a la izquierda a 2 unidades, sin tocar la parábola.

De modo análogo, del gráfico de la parábola $y = x^2$ es posible obtener el de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ después de escribirla en la forma

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Los puntos característicos de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ son el vértice con coordenadas $x_0 = -b/2a$, $y_0 = (4ac - b^2)/4a$, el punto $(0; c)$ de intersección con el eje de ordenadas y los puntos de intersección con el eje de abscisas (si ellos existen). ▲

Ejemplo 3. Según el gráfico conocido de la función $y = 1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ (hipérbola, fig. 14), construyan el gráfico de la función

$$y = \frac{x}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

△ Tenemos

$$y = \frac{x}{1-x} = -\frac{1 + (x-1)}{x-1} = -\frac{1}{x-1} - 1. \qquad (2)$$

La simetría con relación al eje de abscisas de la hipérbola $y = 1/x$ la proporciona el gráfico de la función $y = -1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ (fig. 14). Tomemos un nuevo sistema de coordenadas que se obtiene del

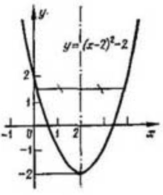


Fig. 13

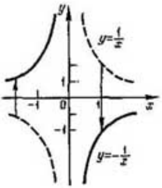


Fig. 14

anterior, en correspondencia con (2), con el desplazamiento a la izquierda a lo largo del eje de abscisas a una unidad y, a continuación, a una unidad hacia arriba por el eje de ordenadas (fig. 15).

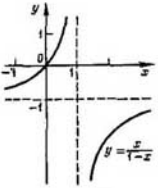


Fig. 15

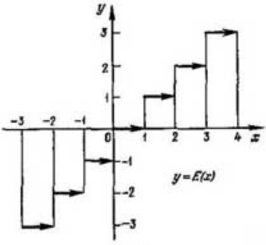


Fig. 16

La curva representada en el gráfico de la función $y = -1/x$ será en el nuevo sistema de coordenadas el gráfico de la función $y = x/(1 - x)$. ▲

Ejemplo 4. Construyan el gráfico de la función

$$y = E(x),\ x \in \mathbb{R}\ (\textit{parte entera de } x),$$

donde $E(x)$ es el número entero mayor que no sobrepasa x *).

△ En cada intervalo $[n; n+1)$, donde $n \in \mathbb{Z}$, la función dada es constante e igual a n. De acuerdo con esto se ha representado su gráfico en la fig. 16. En él, la flecha nos indica que el punto en su punta no pertenece al gráfico. ▲

7.30. ¿Cuáles de las indicadas funciones son pares, cuáles impares y, por fin, cuáles de ellas no son ni lo uno ni lo otro:

1) $y = |x|,\quad x \in \mathbb{R}$. 2) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{R}$.

3) $y = \dfrac{1}{1-x^5},\quad x \in (-1; 1)$. 4) $y = \dfrac{1}{1-x^4},\quad x \in (-1; 1)$.

5) $y = \begin{cases} x^4, & x > 0, \\ x^2, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 6) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1},\quad x \in (-\infty; 1]$.

7) $y = |x+1|,\ x \in \mathbb{R}$. 8) $y = |x+1| + |x-1|,\ x \in \mathbb{R}$.

9) $y = |10 - x| - |10 + x|,\ x \in \mathbb{R}$?

7.31. Demuestren que el producto de dos funciones pares o dos impares es una función par, mientras que el producto de una función par por una impar es una función impar.

7.32. Construyan los gráficos de las funciones:

1) $y = 2x^2 - 4x + 5$. 2) $y = 2x - x^2 - 2$.

3) $y = x^2 - 2x + c$, donde a) $c=2$; b) $c=1$; c) $c=0$; d) $c = -3$.

4) $y = \sqrt{x-2} + x + \sqrt{2-x}$.

7.33. En un sistema de coordenadas construyan el gráfico de las funciones:

1) $y = x;\ y = x^2;\ y = x^3;\ y = x^4$.

2) $y = \dfrac{1}{x};\quad y = \dfrac{1}{x^2};\quad y = \dfrac{1}{x^3}$.

3) $y = x;\quad y = x^{1/2};\quad y = x^{1/3};\quad y = x^{1/4}$.

4) $y = \dfrac{1}{x};\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{x}};\quad y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Construyan los gráficos de las funciones (**7.34**—**7.37**):

7.34. 1) $y = \sqrt{4-x^2}$. 2) $y = -\sqrt{9-x^2}$.

3) $y = 3 - \sqrt{1-x^2}$. 4) $y = \sqrt{2x-x^2} - 1$.

7.35. $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ (se lee: «signo x»).

---

*) En ocasiones esta función se designa con $y = [x]$.

7.36. 1) $y = \{x\}$, donde $\{x\} = x - E(x)$ es la *parte fraccional de* x. 2) $y = E(1/x)$.

7.37. 1) $y = |x - 1|$. 2) $y = |x + 2|$. 3) $y = |x + 1| + |x - 1|$.
4) $y = (|x + 1| - |x - 1|)/2$.
5) $y = \operatorname{sign} x - (|x + 1| - |x - 1|)/2$.
6) $y = \operatorname{sign} x^2$. 7) $y = \operatorname{sign} (x^2 - 1)$.
8) $y = \operatorname{sign} \frac{2-x}{+x}$. 9) $y = \operatorname{sign} (x^3 - 4x)$.

7.38. Construyan los gráficos de las funciones $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x) - 3$, $f(x - 3)$ si:
1) $f(x) = 2x + 6$. 2) $f(x) = 4x - x^2$.
3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. 4) $f(x) = 1/x$.

7.39. Construyan los gráficos de las funciones:
1) $y = \frac{2x-1}{x}$. 2) $y = \frac{1}{x+1}$. 3) $y = \frac{3x}{x-2}$.
4) $y = \frac{x-1}{x+2}$.

7.40. Construyan los gráficos de las funciones $f(x)$, $|f(x)|$ y $f(|x|)$ si:
1) $f(x) = 3x - 8$. 2) $f(x) = 3 - 2x$. 3) $f(x) = x^2 - x - 2$.
4) $f(x) = 6x - x^2 - 5$. 5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. 6) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$.

7.41 Continúen la función $y = f(x)$, $x \in (0; a)$ en $(-a; 0]$ de modo que la función obtenida en $(-a; a)$ sea: a) par, b) impar:
1) $y = x$, $x \in (0; +\infty)$. 2) $y = x^2$, $x \in (0; +\infty)$.
3) $y = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$. 4) $y = x + 5$, $x \in (0; +\infty)$.
5) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (0; 1)$. 6) $y = x^2 - 4x + 3$, $x \in (0; +\infty)$.
7) $y = \frac{1}{x(x+1)}$, $x \in (0; +\infty)$.

Prefijen la continuación de la fórmula y construyan el gráfico de la función obtenida.

7.42. Construyan en un sistema de coordenadas los gráficos de las funciones $f(x)$ y $1/f(x)$ si:
1) $f(x) = 3x - 2$. 2) $f(x) = x^2 + 1$.
3) $f(x) = x^2 - 1$. 4) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$.

7.43. Construyan en un sistema de coordenadas los gráficos de las funciones f_1, f_2 y $f_1 + f_2$ si:
1) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x$. 2) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -\frac{1}{x^2}$.
3) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$. 4) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$.

7.44. Construyan en un sistema de coordenadas los gráficos de las funciones f_1, f_2 y $f_1 - f_2$ si:

1) $f_1(x)=\sqrt{4-x^2}$, $f_2(x)=x^2$. 2) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=1/x$.

3) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 4x$.

4) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 1/x^2$.

---

4. Función inversa. Sea la función $y = f(x)$, $x \in D(f)$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2, \in D(f)$, de $x_1 \neq x_2$ se desprende que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Entonces, para cada $y \in E(f)$ se hallará sólo un valor de $x \in D(f)$ tal que $f(x) = y$.

La función definida en $E(f)$ y que contrapone al valor de $y \in E(f)$ tal $x \in D(f)$ que $f(x) = y$ recibe el nombre de *inversa* a la función f y se designa con f^{-1}, es decir,

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in E(f).$$

De acuerdo con la definición $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$, es decir, los conjuntos de definiciones y valores de las funciones inicial e inversa intercambian su puesto.

La función que tiene inversa se denomina *invertible*.

Cada recta $y = y_0$, donde $y_0 \in E(f)$, corta el gráfico de la función invertible en un sólo punto $(x_0; y_0)$, donde $f(x_0) = y_0$.

Designando, como se hace habitualmente, el argumento de la función inversa con x y su valor con y, se escribe en la forma

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

De la definición de la función inversa se desprende que

$$\forall\, x \in E(f)\; f(f^{-1}(x)) = x, \tag{3}$$

$$\forall\, x \in D(f)\; f^{-1}(f(x)) = x. \tag{4}$$

El gráfico de la función inversa $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})$ es simétrico al gráfico de la función $y = f(x)$, $x \in D(f)$ con relación a la recta $y = x$. En la fig. 17 está representado el gráfico de las funciones mutuamente inversas $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5. Demuestren que la función prefijada con la fórmula

$$y = x^2 - 4x + 2: \tag{5}$$

a) en $\mathbb{R}$ es ininvertible;

b) en $(-\infty; 2]$ es invertible.

En el caso b) construyan el gráfico de la función inversa.

△ a) La ecuación

$$x^2 - 4x + 2 = y_0 \tag{6}$$

tiene las raíces

$$x_1 = 2 + \sqrt{y_0 + 2} \quad \text{y} \quad x_2 = 2 - \sqrt{y_0 + 2}$$

para toda $y_0 \geqslant -2$. Con $y_0 > -2$ estas raíces son diferentes, es decir, para $y_0 > -2$ hay dos valores diferentes del argumento x_1 y x_2 tales que $y(x_1) = y(x_2)$ (cada recta $y = y_0$, $y_0 > -2$, corta el gráfico de la función en dos puntos (véase la fig. 13)). Esto significa que la función definida con la fórmula (5) por todo $\mathbb{R}$ es ininvertible.

b) Para cualquier $y_0 \geqslant -2$, la ecuación (6) sólo tiene la solución

$$x = 2 - \sqrt{y_0 + 2} \tag{7}$$

del intervalo $(-\infty; 2]$. Esto quiere decir que la función definida con la fórmula (5) en $(-\infty; 2]$ es invertible. El gráfico de esta función es la parte izquierda, respecto de la recta $x = 2$, de la pará-

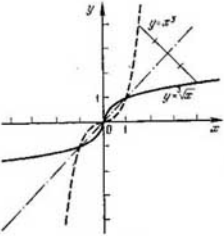


Fig. 17

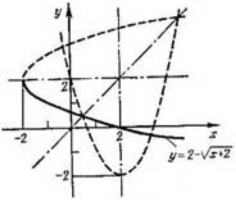


Fig. 18

bola en la fig. 18, cada recta $y = y_0$, $y_0 \geqslant -2$ corta el gráfico sólo por un punto. El campo de los valores de la función dada, es decir, el intervalo $[-2; +\infty)$, es el campo de definición de la función inversa que, de acuerdo con (7), se prefija con la fórmula

$$y = 2 - \sqrt{x + 2}. \tag{8}$$

Con el fin de obtener el gráfico de la función inversa efectuemos la simetría de la parábola $y = x^2 - 4x + 2$ (véase la fig. 13) con relación a la recta $y = x$ (fig. 18). La parte de la parábola obtenida por debajo de la recta $y = 2$ será el gráfico de la función (8). ▲

7.45. Demuestren que las funciones f y g son funciones mutuamente inversas:

1) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=\frac{x}{1-x}$.

2) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$, $g(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$.

7.46. Demuestren que el gráfico de la función f es simétrico con relación a la recta $y=x$:

1) $f(x)=\frac{a}{x}\,(a\neq 0)$. 2) $f(x)=\sqrt[7]{2-x^7}$.

7.47. ¿Son mutuamente inversas las funciones dadas con las fórmulas:

1) $y=\frac{x+1}{x-1}$, $y=\frac{x+1}{x-1}$. 2) $y=1-\sqrt[3]{x}$, $y=(1-x)^3$.

3) $y=1+\sqrt{x}$, $y=(x-1)^2$.

4) $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$?

7.48. Entre las funciones indiquen las invertibles:

1) $y=2x-1$. 2) $y=|x|$. 3) $y=1/x^3$.

4) $y=x^2+2x-3$. 5) $y=\sqrt[3]{x^5}$. 6) $y=\sqrt{x-1}$.

7) $y=\operatorname{sign} x$. 8) $y=x^2\operatorname{sign} x$.

Prefijen las funciones inversas con fórmulas y construyan sus gráficos.

7.49. 1) ¿Con qué a y b la función $y=ax+b$ tiene inversa y coincide con ella?

2) ¿Con cuáles $\alpha\in\mathbb{R}$ la función $y=x^\alpha$, $x>0$, coincide con su inversa?

---

5. Funciones acotadas y no acotadas. La función f recibe el nombre de *acotada superiormente sobre el conjunto* $X\in D(f)$ si existe un número C tal que para cualquiera $x\in X$ es cierta la desigualdad

$$f(x)\leqslant C.$$

Empleando los símbolos $\exists$ y $\forall$ esta definición se escribe de la siguiente forma:

$$\exists C\forall x\,((x\in X)\Rightarrow(f(x)\leqslant C)). \tag{9}$$

Por analogía, la función f *es acotada inferiormente sobre el conjunto* $X\subset D(f)$ si

$$\exists C\forall x\,((x\in X)\Rightarrow(f(x)\geqslant C)). \tag{10}$$

La función acotada tanto superior como inferiormente sobre el conjunto X lleva el nombre de *acotada sobre el conjunto* X. Esta definición es equivalente a la siguiente: la función f es acotada sobre el conjunto $X \subset D(f)$ si existe un número $C > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ es cierta la desigualdad $|f(x)| \leqslant C$; para abreviar

$$\exists C > 0 \forall x\, ((x \in X) \Rightarrow (|f(x)| \leqslant C)). \tag{11}$$

Si en estas definiciones $X = D(f)$, la función se denomina *superiormente acotada*, *inferiormente acotada*, *acotada*, respectivamente.

P. ej., la función $y = 1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ es acotada superiormente sobre el conjunto $X = (-\infty; 0)$, ya que $1/x < 0$ con $x < 0$, es decir, (9) se cumple para $C = 0$. Esta misma función es acotada inferiormente sobre $(0; +\infty)$, ya que (10) se verifica con $C = 0$. La función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$ es acotada inferiormente con $a > 0$, ya que para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{12}$$

y, por consiguiente, $ax^2 + bx + c \geqslant (4ac - b^2)/4a$, es decir (10) es cumplida con $C = (4ac - b^2)/4a$. Con $a < 0$ la función cuadrática es acotada superiormente, ya que de (12) se deduce que para toda $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad

$$ax^2 + bx + c \leqslant (4ac - b^2)/4a.$$

Ejemplo 6. Demuestren que la función

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

es acotada.

$\triangle$ De la desigualdad para la media proporcional y la aritmética se desprende que $|x| \leqslant (x^2 + 1)/2$. De aquí obtenemos

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, es decir, (11) se verifica con $C = 1/2$ y, por lo tanto, la función dada es acotada. $\blacktriangle$

La negación de la definición de función acotada (véase (11)) tiene la forma: la función f es *no acotada* si para cualquier $C > 0$ hay tal $x \in D(f)$ que $|f(x)| > C$; para abreviar

$$\forall C > 0\, \exists x\, ((x \in D(f)) \Rightarrow (|f(x)| > C)). \tag{13}$$

De modo análogo se enuncian las negaciones de las definiciones de función acotada superiormente (inferiormente).

Ejemplo 7. Demuestren que la función $y = 1/x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, es no acotada y construyan su gráfico.

$\triangle$ Sea C un número arbitrario positivo. La desigualdad $1/x^2 > C$ es equivalente a la desigualdad $|x| < 1/\sqrt{C}$ con $x \neq 0$. P. ej., si tomamos $x = 1/(2\sqrt{C})$ obtenemos que $1/x^2 = 4C > C$, lo que en correspondencia con (13), precisamente, significa que la función dada es no acotada.

El gráfico de la función se ofrece en la fig. 19. El es simétrico con relación al eje de ordenadas, ya que la función dada es par y se encuentra sobre el eje de abscisas en virtud de que $1/x^2 > 0$ para toda $x \neq 0$. ▲

7.50. Demuestren que las funciones son acotadas:

1) $y = x^2 - x - 1$, $x \in [-1; 5]$. 2) $y = \dfrac{1}{x-10}$, $x \in [0; 5]$.

3) $y = \dfrac{x^3}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$, 4) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4+10}}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

5) $y = \dfrac{x^2-1}{|x^3-1|}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. 6) $y = \dfrac{3x^2+6x+10}{\sqrt{0{,}1x^4+1}}$.

7.51. Enunciar y escribir, haciendo uso de los símbolos $\exists$, $\forall$, las definiciones de que la función: 1) no es acotada superiormente, 2) no es acotada inferiormente.

7.52. Demuestren que la función $y = 1/x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$: 1) no es acotada superiormente, 2) no es acotada inferiormente.

7.53. Demuestren que la función $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;\ 1)$ es acotada inferiormente y no acotada superiormente.

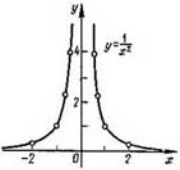


Fig. 19

7.54. Demuestren que la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$: 1) no es acotada superiormente con $a > 0$, 2) no es acotada inferiormente con $a < 0$.

7.55. Demuestren que 1) la suma, 2) la multiplicación de funciones acotadas es una función acotada.

---

6. Cotas superior e inferior, valores máximo y mínimo de la función. Funciones monótonas. La cota superior (inferior) del conjunto de todos los valores de la función $y = f(x)$, $x \in D(f)$ recibe el nombre de *cota superior (inferior) de la función* y se designa

$$\sup f,\ \sup f(x),\quad (\inf f,\ \inf f(x)).$$

Si en esta definición se consideran los valores de la función sólo sobre el conjunto $X \subset D(f)$, entonces se habla de la cota *superior (inferior) de la función sobre el conjunto* X y se escribe

$$\sup_X f,\ \sup_{x \in X} f(x)\quad (\inf_X f,\ \inf_{x \in X} f(x)).$$

El valor $f(x_0)$, donde $x_0 \in X \subset D(f)$, de la función se llama *máximo* (*mínimo*) *sobre el conjunto* X si para toda $x \in X$ es cierta la desigualdad $f(x) \leqslant f(x_0)$ (correspondientemente $f(x) \geqslant f(x_0)$). En este caso el número $f(x_0)$ se designa

$$\max_X f, \ \max_{x \in X} f(x) \text{ (en correspondencia } \min_X f, \ \min_{x \in X} f(x)).$$

Si $X = D(f)$, se habla con brevedad del *valor máximo* (*mínimo*) de la función y se designa con

$$\max f, \quad \max f(x) \quad (\min f, \ \min f(x)).$$

Si existe $\max\limits_X f$, entonces $\sup\limits_X f = \max\limits_X f$; si existe $\min\limits_X f$, entonces $\inf\limits_X f = \min\limits_X f$.

De la existencia del $\sup\limits_X f$ ($\inf\limits_X f$) finito no se deduce, hablando en general, la existencia de los valores máximo (mínimo) de la función. P. ej., la función para la que en la fig. 20 está representado su gráfico, no tiene valor máximo, pero, al mismo tiempo $\sup f = 1$.

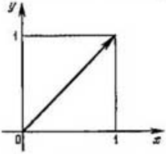


Fig. 20

La función f se denomina *creciente* (*no decreciente*) *sobre el conjunto* $X \subset D(f)$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ de la desigualdad $x_1 < x_2$ se desprende la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Esta definición puede escribirse de modo abreviado:

$$\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 \in X, \ \ x_2 \in X, \ \ x_1 < x_2) \Rightarrow \Rightarrow (f(x_1) \leqslant f(x_2))).$$

La función f se llama *decreciente* (*no creciente*) *sobre el conjunto* $X \subset D(f)$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce la desigualdad $f(x_1) \geqslant f(x_2)$; para abreviar

$$\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 \in X, \ x_2 \in X, \ x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geqslant f(x_2))).$$

Si en estas definiciones de la desigualdad $x_1 < x_2$ se desprende la desigualdad estricta $f(x_1) < f(x_2)$ (correspondientemente $f(x_1) > > f(x_2)$), la función recibe el nombre de *estrictamente creciente* (en correspondencia, *estrictamente decreciente*) *sobre el conjunto* X.

Las funciones crecientes y decrecientes se unen en la denominación *monótonas*, las estrictamente crecientes y decrecientes, en *estrictamente monótonas*.

Si $X = D(f)$, la indicación del conjunto X se omite.

Un ejemplo de función estrictamente creciente es $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ (véase la fig. 12). La función $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (véase la fig. 11), decrece estrictamente sobre $(-\infty; 0)$ y crece estrictamente sobre $(0; +\infty)$, por todo su campo de definición $\mathbb{R}$ ella no es monótona.

7.56. Hallen $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$ si:

1) $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $X = [0;\ 5]$.
2) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$, $X = [0;\ 4]$.
3) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $X = [-10;\ -3]$.
4) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4+x^2}$, $X = [-1;\ 3]$.
5) $f(x) = \dfrac{x^4+4}{x^2}$, $X = [1;\ 2]$.
6) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+9}$, $X = \mathbb{R}$.

7.57. Demuestren que si la función f es de signo constante sobre el conjunto X, entonces

$$\max_X \frac{1}{f} = \min_X f, \quad \min_X \frac{1}{f} = \max_X f.$$

7.58. Demuestren que $\max f$ y $\min f$ no existen si:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.
2) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \in (-1;\ +\infty)$. 3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

7.59. Demuestren que existe $\min f$, pero no existe $\max f$. Hallen $\min f$ si:

1) $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $f(x) = x^3 + \dfrac{8}{x^3}$, $x \in (0;\ +\infty)$.
3) $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. 4) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}$, $x \in [1;\ 2)$.

7.60. Demuestren que existe $\max f$, pero no existe $\min f$; hallen $\max f$, si:

1) $f(x) = 4x - x^2 - 6$, $x \in \mathbb{R}$.
2) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in (-8;\ 0)$.
3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$. 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x \in [0;\ 1)$.

7.61. Hallen $\sup\limits_X f$, $\inf\limits_X f$, así como $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$ si los dos últimos existen:

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $X = (0;\ +\infty)$,
2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $X = (-\infty;\ 0)$.

3) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $X=\mathbb{R}$.

4) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$, $X=\{x\in[-2;3],\ x\neq 2\}$.

5) $f(x)=x-E(x)$, $X=\mathbb{R}$.

7.62. 1) Demuestren que si existe $\max\limits_X f$, entonces

$$\sup_X f=\max_X f.$$

2) Demuestren que si existe $\min\limits_X f$,

$$\inf_X f=\min_X f.$$

7.63. Demuestren que

$$\inf_{x\in X}(-f(x))=-\sup_{x\in X}f(x).$$

7.64. Demuestren que la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$; 1) con $a>0$ estrictamente decrece sobre $(-\infty;-b/2a]$ y estrictamente crece sobre $[-b/2a;+\infty)$; 2) con $a<0$ estrictamente crece sobre $(-\infty;-b/2a]$ y estrictamente decrece sobre $[-b/2a;+\infty)$.

7.65. Demuestren que la función $y=x^3+x$ crece.

7.66. Demuestren que la función $y=(1-x^2)/x$ decrece en cualquier intervalo que no contiene cero.

7.67. Demuestren que la función $y=(1+x^2)/x$: 1) estrictamente crece sobre $(-\infty;-1]$ y sobre $[1;+\infty)$; 2) estrictamente decrece sobre $[-1;0)$ y sobre $(0;1]$.

7.68. Hallen los máximos intervalos sobre los que la función $y=x^4-2x^2-2$: 1) crece, 2) decrece.

7.69. 1) Demuestren que la función estrictamente monótona es biunívoca.

2) Aduzcan un ejemplo de una función biunívoca no monótona.

---

7) Funciones exponencial y logarítmica. Sea a el número positivo dado, $a\neq 1$. La *función exponencial*

$$y=a^x \tag{14}$$

está definida en $\mathbb{R}$, el intervalo $(0;+\infty)$ es el conjunto de sus valores. Con $a>1$ la función estrictamente crece, con $0<a<1$, estrictamente decrece (fig. 21).

La función exponencial $y=a^x$, $x\in\mathbb{R}$ es invertible. La función inversa recibe el nombre de *logarítmica* y se designa con

$$y=\log_a x, \tag{15}$$

ella está definida en el intervalo $(0;+\infty)$, el conjunto $\mathbb{R}$ es el conjunto de sus valores. Con $a>1$ la función logarítmica estrictamente crece, con $0 < a < 1$ estrictamente decrece. Los gráficos de las funciones $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $y = \log_a x$, $x \in (0; +\infty)$ son simétricos entre sí con relación a la recta $y = x$ (fig. 22, 23).

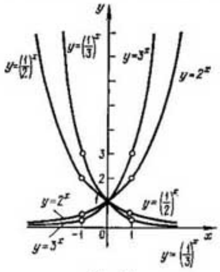


Fig. 21

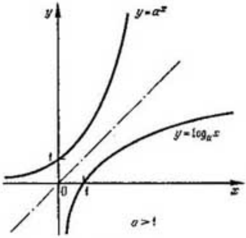


Fig. 22

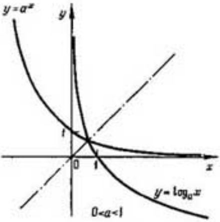


Fig. 23

Lo que las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ sean recíprocamente inversas significa que

$$\forall x \in (0; +\infty) \quad a^{\log_a x} = x, \tag{16}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a a^x = x. \tag{17}$$

Ejemplo 8. Construyan el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$y=\frac{1}{2^x-1}.$$

△ La función está definida para todas las $x \in \mathbb{R}$ tales que $2^x \neq 1$, es decir, $x \neq 0$. Al construir su gráfico es posible emplear el de la función $y = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ (fig. 24). Esta función estrictamente

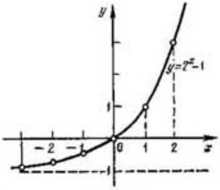


Fig. 24

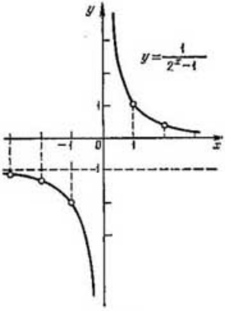


Fig. 25

crece desde -1 hasta $+\infty$. Los valores de la función dada son inversos a los de la función $y = 2^x - 1$. Sobre $(-\infty; 0)$ la función dada decrece desde -1 hasta $-\infty$ y sobre $(0; +\infty)$ decrece desde $+\infty$ hasta 0 (fig. 25). ▲

Ejemplo 9. Construyan el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$y = \log_3 (x^2 - 1).$$

△ La función está definida para todas las x tales que $|x| > 1$, es decir, en la unión de los intervalos $(-\infty; -1)$ y $(1; +\infty)$. La función es par, su gráfico es simétrico con relación al eje de ordenadas.

La función dada es la composición de las funciones $y = x^2 - 1$ (su gráfico se ofrece en la fig. 26) y la función logarítmica $y = \log_3 x$.

Sobre el intervalo $(1; +\infty)$ los valores de x^2-1 estrictamente crecen desde 0 hasta $+\infty$, por lo que los valores de $\log_3(x^2-1)$ estrictamente crecen desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El gráfico corta el eje de abscisas con $x=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$ (fig. 27). ▲

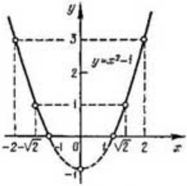


Fig. 26

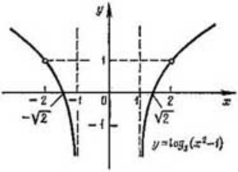


Fig. 27

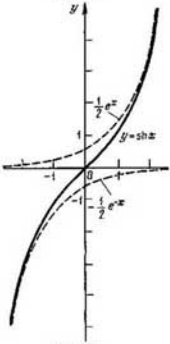


Fig. 28

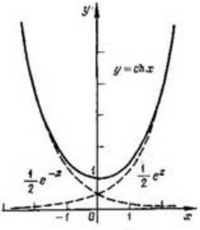


Fig. 29

8. Funciones hiperbólicas. El *seno y coseno hiperbólicos* se definen en $\mathbb{R}$ respectivamente con las fórmulas

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}. \tag{18}$$

La función $y = \operatorname{sh} x$ es impar, estrictamente creciente. La función $y = \operatorname{ch} x$ es par, estrictamente decreciente sobre $(-\infty; 0]$ y estric-

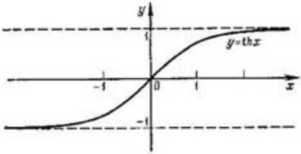


Fig. 30

tamente creciente sobre $[0; +\infty)$. Los gráficos de estas funciones están representados en las figs. 28, 29.

La tangente y cotangente hiperbólicas se definen con las fórmulas

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (19)$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0. \qquad (20)$$

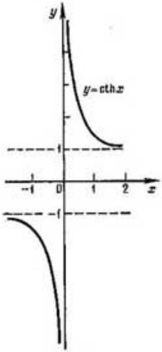


Fig. 31

Las dos funciones son impares y sus gráficos se dan en las figs. 30, 31.

Las funciones $y = \operatorname{sh} x$ e $y = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$ son invertibles, sus funciones inversas se designan, respectivamente,

$$y = \operatorname{arsh} x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (21)$$

(se lee: *seno-area hiperbólico*),

$$y = \operatorname{arth} x, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (22)$$

(se lee: *tangente-área hiperbólica*).

Ejemplo 10. Demuestren que la función inversa a la función

$$y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0; +\infty),$$

es elemental y construyan su gráfico.

△ Sobre $[0; +\infty)$ la función $y = \operatorname{ch} x$ estrictamente crece y, por ello, es invertible. El campo de definición de la función inversa será el intervalo $[1; +\infty)$ que es el conjunto de los valores de la función inicial. Para toda $y \in [1; +\infty)$ la ecuación $\operatorname{ch} x = y$, o sea,

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y$$

se reduce a la ecuación cuadrática con relación a e^x

$$(e^x)^2 - 2\,ye^x + 1 = 0.$$

De aquí hallamos $e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$, $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1})$. Sólo la raíz $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ satisface la condición $x \geqslant 0$. Así, pues, la función inversa se prefija con la fórmula

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\quad x\in[1;\ +\infty). \tag{23}$$

Vemos que esta función se obtiene con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas y composiciones de funciones potenciales y logarítmicas, es decir, es elemental.

El gráfico de la función inversa se obtiene con la simetría respecto de la recta $y = x$ del gráfico de la función $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0; +\infty)$ (fig. 32). ▲

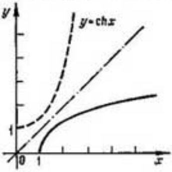


Fig. 32

7.70. Hallen el campo de definición de las funciones:

1) $y=\dfrac{1}{16^{x^2}-2^x}$. 2) $y=\sqrt{2^x-3^x}$.

3) $y = \log_2 x^2$ e $y = 2\log_2 x$.
4) $y = \log_x 5$. 5) $y = (\log(100-x))^{-1}$.
6) $y = \ln x + \ln(x-1)$ e $y = \ln x(x-1)$.
7) $y = \log_{3+x}(x^2-1)$. 8) $y = \log_3 \log_{0,5} x$.

7.71. Hallen el conjunto de los valores de las funciones:

1) $y=10^{-x^2}$. 2) $y=\dfrac{1}{1-2^{-x}}$. 3) $y=4^x-2^x+1$.

4) $y = \log(x^2+10)$. 5) $y = \log_2(4-x^4)$.
6) $y = \log_3 x + \log_x 3$.

7.72. ¿Cuáles de las funciones son pares, cuáles impares, cuáles no son ni pares ni impares:

1) $y=x\cdot 2^{-x}$. 2) $y=|\log x|$. 3) $y=\ln e^x$.

4) $y=10^{\log x}$. 5) $y=10^x+10^{-x}$.

6) $y=\dfrac{1}{3^x}-\dfrac{1}{3^{-x}}$. 7) $y=\operatorname{th} x-\sqrt{x}$.

8) $y = \ln(1-x^2)$. 8) $y = \ln \operatorname{cth} x$?

7.73. Demuestren que:
1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.
2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
3) $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.
4) $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
5) $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = (\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))/2$.
6) $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = (\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))/2$.
7) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = (\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))/2$.

7.74. Demuestren que las siguientes funciones son acotadas:
1) $y = 10^{-|x|}$. 2) $y = 0{,}3^{x^2-1}$. 3) $y = \dfrac{1}{\log(2+x^4)}$
4) $y = \log_4(x^2+5) - \log_2(1+|x|)$.
5) $y = (\log x + \log_x 10)^{-1}$.

7.75. Demuestren que las siguientes funciones son no acotadas:
1) $y = 0{,}4^x$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $y = \log_{0,1} x$, $x \in (1;\ +\infty)$.
3) $y = x^x$, $x \in (0;\ +\infty)$. 4) $y = \log_x 2$, $x \in (1;\ +\infty)$.

7.76. Demuestren que con $a > 1$:
1) $\sup\limits_{(0;\ +\infty)} a^{1/x} = +\infty$, $\inf\limits_{(0;\ +\infty)} a^{1/x} = 1$.
2) $\sup\limits_{(-\infty;\ 0)} a^{1/x} = 1$, $\inf\limits_{(-\infty;\ 0)} a^{1/x} = 0$.

7.77. Hallen $\inf f$, $\sup f$, así como $\max f$, $\min f$ si ellos existen:
1) $f(x) = 2^{-|x+2|}$. 2) $f(x) = (\sqrt{2}-1)^{1-x^2}$.
3) $f(x) = 1 - 2^{1/(x-1)}$. 4) $f(x) = 8 - 2^{x+1} - 4^x$.
5) $f(x) = \log(x^2+x-2)$. 6) $f(x) = \log_{0,1}(4x-3-x^2)$.
7) $f(x) = (\log_2(2/x))\log_2 8x$.

7.78. Demuestren que la función $y = 2^{1/x}$ decrece sobre cada intervalo que no contiene cero.

7.79. Demuestren que la función $y = \log_3(x^2-2x)$ decrece sobre $(-\infty;\ 0)$ y crece sobre $(2;\ +\infty)$.

7.80. Investigar la monotonía de las funciones:
1) $y = (2/3)^{1/x}$. 2) $x = 3^{|x|}$.
3) $y = 2^{1-x} - 2^{x-1}$. 4) $y = \log(1+x^3)$.
5) $y = \log_x 10$. 6) $y = \ln(4x-x^2)$.
7) $y = \log_{0,5}\dfrac{x}{x+1}$.

Construyan los gráficos de las funciones (**7.81—7.82**):

7.81. 1) $y = 3^{-|x+2|}$. 2) $y = 2^{1/x}$.
3) $y = \dfrac{2^x}{2^{x+1}-1}$. 4) $y = \log_4|x+1|$.

5) $y=1-2\log_{1/3}|x|$. 6) $y=|\log_{0,5}x|-1$.

7) $y=\log x^2$. 8) $=\log_{0,2}5^x$. 9) $y=8^{\log_8(x-3)}$.

7.82. 1) $y=(1,5)^{x^2-1}$. 2) $y=2^{(x+1)/x}$.

3) $y=\log_2(x^2+x-2)$. 4) $y=\log_{0,1}(4x-3-x^2)$.

5) $y=\log_3((x+2)/x)$. 6) $y=\log_x 3$.

7.83. La función dada sobre $(0; +\infty)$ ha de continuarse prefijando la fórmula sobre $(-\infty; 0]$: a) de forma par, b) de forma impar: construyan el gráfico de la función que se obtiene:

1) $y=-3\cdot 2^{x-1}$. 2) $y=1-2\log x$.

3) $y=\log_{x+2}x$. 4) $y=\operatorname{th}(x-1)$.

7.84. Hallen la función inversa a la dada, indiquen su campo de definición y construyan su gráfico:

1) $y=3^{1-x}$. 2) $y=1+\log(x+2)$.

3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$. 4) $y=\log_x 10$.

5) $y=2^{x-1}-2^{-x}$. 6) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

7.85. Para la función indicada prefijen la función inversa con la fórmula y construyan su gráfico:

1) $y=\operatorname{ch}x$, $x\in(-\infty; 0)$. 2) $y=\operatorname{sh}x$, $x\in\mathbb{R}$.

3) $y=\operatorname{th}x$, $x\in\mathbb{R}$. 4) $y=\operatorname{cth}x$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

7.86. Demuestren que el gráfico de la función $y=\ln(1-e^x)$ es simétrico con relación a la recta $y=x$.

---

9. Funciones periódicas. Funciones trigonométricas. El número $T\neq 0$ recibe el nombre de *período de la función* f si para cualquier $x\in D(f)$ se verifica

$$x+T\in D(f),\quad x-T\in D(f)\ \text{y}\ f(x+T)=f(x).$$

La función que tiene período se denomina *periódica*.

Si T es el período de una función, para toda $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$, el número nT es asimismo el período de la mencionada función.

Al desplazar T por el eje de abscisas, el gráfico de una función periódica con período T pasa a sí mismo.

Las funciones trigonométricas $y=\operatorname{sen}x$ e $y=\cos x$ son periódicas con período positivo mínimo 2π, en tanto que $y=\operatorname{tg}x$ e $y=\operatorname{ctg}x$, periódicas con el período positivo mínimo π.

Las funciones $y=\operatorname{sen}x$ e $y=\cos x$ están definidas en $\mathbb{R}$. La función $y=\operatorname{tg}x$ está definida para toda $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. La función $y=\operatorname{ctg}x$ está definida para toda $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Los gráficos de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{tg} x$, que de modo evidente muestran sus propiedades, se ofrecen en las figs. 33, 34.

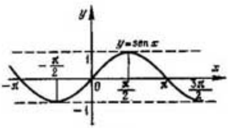


Fig. 33

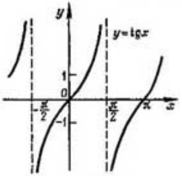


Fig. 34

De las fórmulas de reducción

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

se deduce que el gráfico de la función $y = \cos x$ se obtiene desplazando el gráfico de la función $y = \operatorname{sen} x$ a $\pi/2$ a la izquierda por el eje de abscisas (fig. 35). De la fórmula

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

se desprende que el gráfico de la función $y = \operatorname{ctg} x$ se obtiene del gráfico de la función $y = \operatorname{tg} x$ desplazándolo a $\pi/2$ a la derecha por

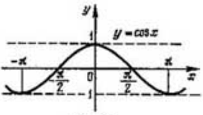


Fig. 35

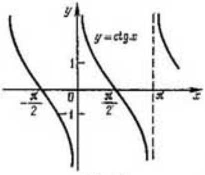


Fig. 36

el eje de abscisas y con simetría con relación a dicho eje (fig. 36). Las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ son impares, sus gráficos son simétricos respecto del origen de coordenadas. La función $y = \cos x$ es par, su gráfico, simétrico al eje de coordenadas.

Ejemplo 11. Construyan el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$y = \cos^2 x.$$

△ La función está definida sobre $\mathbb{R}$, es par, periódica con período π. Ya que,

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2,$$

su gráfico se obtiene del de la función $y = \cos x$ mediante su doble contracción a lo largo del eje Ox, desplazándolo a una unidad hacia arriba por el eje Oy y la doble contracción a lo largo del eje Oy. De acuerdo con esto el gráfico está representado en la fig. 37. ▲

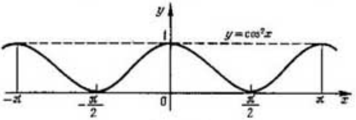


Fig. 37

Ejemplo 12. Construyan el gráfico de la función dada con la fórmula

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

△ El campo de definición de la función es el conjunto de toda $x \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sen} x \neq 0$, es decir, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. La función es impar, periódica con período 2π. Construyamos el gráfico en el intervalo $(0; \pi)$ y, a continuación, continuémoslo en $(-\pi; 0)$ simétricamente al origen de coordenadas y, más adelante, continuémoslo periódicamente con período 2π.

Si $x \in (0; \pi)$, $0 < \operatorname{sen} x < 1$ y, por lo tanto,

$$1 \leqslant \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

con la particularidad de que

$$\min \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\bigg|_{x=\pi/2} = 1.$$

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, el gráfico es simétrico con relación a la recta $x = \pi/2$. Al aumentar x desde 0 hasta $\pi/2$ los valores de $\operatorname{sen} x$ estrictamente crecen desde 0 hasta 1 y, por ello, los valores de $1/\operatorname{sen} x$ estrictamente decrecen desde $+\infty$ hasta 1 (fig. 38). ▲

Las funciones prefijadas con las fórmulas

$$y=\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad y=\frac{1}{\cos x},$$

llevan el nombre de *cosecante* y *secante*, respectivamente, y se designan

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}. \tag{24}$$

Ejemplo 13. Construyan el gráfico de la función $y = x \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

△ La función es impar, por lo que construimos su gráfico con $x \geqslant 0$ y, después, verificamos la simetría respecto del origen de

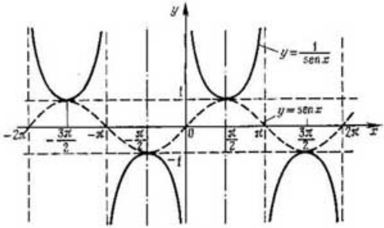


Fig. 38

coordenadas. Al construir el gráfico vamos a guiarnos del hecho de que las ordenadas de sus puntos se obtienen multiplicando las ordenadas de los puntos de los gráficos de las funciones $y = x$ e $y = \cos x$ (fig. 39).

El gráfico pasa por el origen de coordenadas, corta el eje Ox con $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (donde $\cos x = 0$). Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, con $x \geqslant 0$, tenemos

$$-x \leqslant x \cos x \leqslant x,$$

es decir, el gráfico yace entre las rectas $y = x$ e $y = -x$. Con $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (donde $\cos x = 1$) el gráfico tiene puntos comunes con la recta $y = x$, mientras que con $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (donde $\cos x = -1$), puntos comunes con la recta $y = -x$.

Si $0 < x < 1$, $0 < x \cos x < \cos x$ y $x \cos x < x$, o sea, el gráfico yace más abajo de los gráficos $y = \cos x$ e $y = x$. Con $x = 1$ los gráficos $y = x \cos x$ e $y = \cos x$ se intersecan y, con ello, $y = \cos 1 \approx 0{,}54$. Si $x > 1$, entonces $|x \cos x| > |\cos x|$ si $\cos x \neq 0$, o sea, los puntos del gráfico $y = x \cos x$ yacen más lejos del

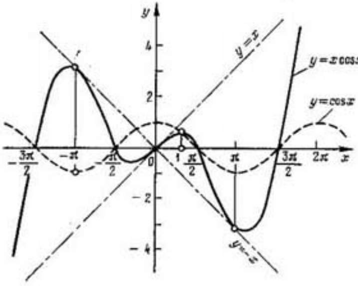


Fig. 39

eje Ox que los correspondientes puntos del gráfico $y = \cos x$. De acuerdo con esto, después de calcular y marcar varios puntos intermedios, representamos el gráfico (fig. 39). Él es una curva que oscila entre las rectas $y = x$ e $y = -x$. ▲

Ejemplo 14. Demuestren que la función $y = \operatorname{sen} x^2$, $x \in \mathbb{R}$, no es periódica.

△ Es suficiente demostrar que la función no tiene período positivo, ya que si el número $T < 0$ fuera el período, el número $-T$ sería un período positivo. Realicemos la demostración partiendo de lo contrario.

Supongamos que el número $T > 0$ es el período de la función, es decir, para toda $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x + T)^2 = \operatorname{sen} x^2.$$

Con $x = 0$ de aquí se desprende que $\operatorname{sen} T^2 = 0$, o sea, $T^2 = \pi n$, en tanto que $T = \sqrt{\pi n}$ con cierta $n \in \mathbb{N}$. Si $0 < x < \sqrt{\pi}$, $\operatorname{sen} x^2 \neq 0$ y, como $\sqrt{\pi n}$ es el período, entonces, también $\operatorname{sen}(x + \sqrt{\pi n})^2 \neq 0$. Pero si $x = \sqrt{\pi}$, $\operatorname{sen}(\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi n})^2 = \operatorname{sen}(\sqrt{\pi})^2 = 0$. Esto quiere decir que el número $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi n}$ es el más próximo por la derecha a $\sqrt{\pi n}$ con el que sen $x^2 = 0$. De aquí sigue que $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi n} \leqslant \sqrt{\pi(n+1)}$, ya que $\sqrt{\pi(n+1)} > \sqrt{\pi n}$ y sen $(\sqrt{\pi(n+1)})^2 = 0$. Pero la desigualdad $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi n} \leqslant \sqrt{\pi(n+1)}$ equivalente a la desigualdad $1 \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, no es cierta para toda $n \in \mathbb{N}$, ya que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1.$$

Esto significa que tampoco es cierta la suposición de la periodicidad de la función sen x^2, es decir, dicha función no es periódica. ▲

10. Funciones trigonométricas inversas. La función periódica no es invertible, en particular, tampoco son invertibles las funciones trigonométricas. Pero sobre ciertos subconjuntos de su campo de definición éstas funciones son invertibles.

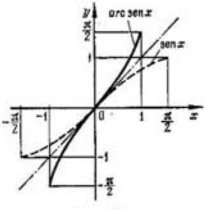


Fig. 40

La función sen x en el segmento $[-\pi/2; \pi/2]$ tiene su inversa que se designa

$$y = \operatorname{arcsen} x, \quad x \in [-1; 1]. \tag{25}$$

El conjunto de los valores de esta función es el segmento $[-\pi/2; \pi/2]$. Con relación a la recta $y = x$ su gráfico es simétrico al de la función $y = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ (fig. 40). La función $y = \operatorname{arcsen} x$ es impar.

La función $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ tiene la función inversa

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1; 1], \tag{26}$$

para la que el conjunto de sus valores es el segmento $[0; \pi]$. El gráfico de esta función se ofrece en la fig. 41. El es simétrico con relación al punto $(0; \pi/2)$. La función $y = \arccos x$ no es ni par ni impar.

La función $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ tiene la función inversa

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

para la que el conjunto de sus valores es el intervalo $(-\pi/2; \pi/2)$. La función $y = \operatorname{arctg} x$ es impar. Su gráfico se muestra en la fig. 42.

La función $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$ tiene la función inversa

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

para la que el conjunto de sus valores es el intervalo $(0; \pi)$. Esta función no es ni par ni impar. Su gráfico se muestra en la fig. 43. El es simétrico con relación al punto $(0; \pi/2)$.

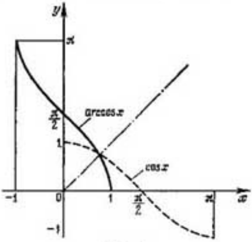


Fig. 41

Ejemplo 15. Demuestren que

$$\arcsen x + \arccos x = \pi/2, \quad x \in [-1; 1].$$

△ Las funciones $\operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2)$ y $\arcsen x$, $x \in [-1; 1]$ son recíprocamente inversas, por lo que (véase (3)) para toda $x \in$ $\in [-1; 1]$

$$\operatorname{sen} (\arcsen x) = x.$$

De aquí y de la fórmula $\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ se deduce que

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsen x\right), \quad x \in [-1; 1]. \tag{29}$$

Las funciones $\cos t$, $t \in [0; \pi]$ y $\arccos t$, $t \in [-1; 1]$ son recíprocamente inversas y, por lo tanto, (véase (4)), para toda $t \in [0; \pi]$

$$\arccos (\cos t) = t.$$

En particular esto es asimismo cierto para $t = \frac{\pi}{2} - \arcsen x$, ya que $\frac{\pi}{\alpha} - \arcsen x \in [0; \pi]$. De aquí y de la fórmula (29), obtenemos que $\arccos x = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsen x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsen x$, es decir, $\arcsen x + \arccos x = \pi/2$ para toda $x \in [-1; 1]$. ▲

Ejemplo 16. Construyan los gráficos de las funciones prefijadas con las fórmulas:

1) $y = \operatorname{sen} (\arcsen x)$; 2) $y = \arcsen (\operatorname{sen} x)$.

△ 1) Esta función está definida sobre $[-1; 1]$. La función $\operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ es inversa para $\arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, por lo que (véase (3)) para toda $x \in [-1; 1]$ es cierta la igualdad

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x.$$

De aquí se desprende que $y = x$, $x \in [-1; 1]$, es decir, el gráfico de semejante función es el segmento de la recta $y = x$ (fig. 44).

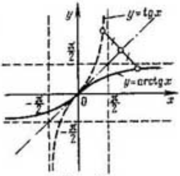


Fig. 42

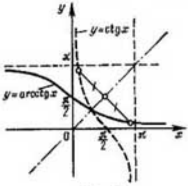


Fig. 43

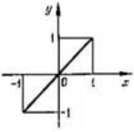


Fig. 44

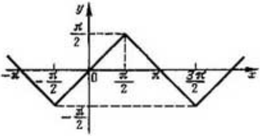


Fig. 45

2) Esta función definida sobre $\mathbb{R}$ es periódica con período 2π, ya que $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x + 2\pi)) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x).$$

En virtud de que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se deduce que

$$\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right),$$

por lo que el gráfico de la función dada es simétrico con relación a la recta $x = \pi/2$. Construyamos el gráfico en el segmento $[-\pi/2; \pi/2]$, continuémoslo simétricamente a la recta $x = \pi/2$ en el segmento $[\pi/2; 3\pi/2]$ y, a continuación, a partir del segmento $[-\pi/2; 3\pi/2]$ continuemos de forma periódica con período 2π.

La función $\arcsin x$, $x \in [-1; 1]$ es inversa respecto a la función $\operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, por lo que para toda $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ tenemos

$$\operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} x) = x.$$

Así, pues, en el segmento $[-\pi/2; \pi/2]$ el gráfico de la función dada coincide con la recta $y = x$ (fig. 45). De la simetría del gráfico con relación a la recta $x = \pi/2$ se desprende que en el segmento $[\pi/2; 3\pi/2]$ él coincide con la recta $y = \pi - x$, es decir,

$$\operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} x) = \pi - x, \quad x \in [\pi/2; 3\pi/2].$$

En este segmento la función $y = \operatorname{arcsen} x$, $x \in [-1; 1]$ no es inversa a la función $y = \operatorname{sen} x$. ▲

Ejemplo 17. Construyan el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}.$$

△ Esta función es la composición de las funciones $z = 1/x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, con el conjunto de valores $(0; +\infty)$, e $y = \operatorname{arctg} z$, $z \in \mathbb{R}$. El campo de definición de la función dada son todos los valores de $x \neq 0$. La función es par, su gráfico es simétrico con relación al eje de ordenadas.

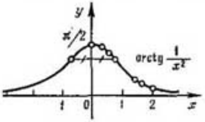


Fig. 46

De las propiedades de las funciones $z = 1/x^2$ (fig. 19) e $y = \operatorname{arctg} z$ (fig. 42) se deduce que al crecer x desde 0 hasta $+\infty$ los valores de $1/x^2$ decrecen desde $+\infty$ hasta 0, mientras que los valores de $\operatorname{arctg} (1/x^2)$ decrecen desde $\pi/2$ hasta 0. Después de calcular y marcar varios puntos intermedios trazamos el gráfico (fig. 46). El punto $(0; \pi/2)$ no entra en el gráfico. ▲

7.87. Demuestren que la función

$$y = x - E(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

es periódica y hallen su período positivo mínimo.

7.88. Demuestren que la función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es periódica y que cualquier número racional no nulo es su período, pero que ningún número irracional no lo es.

7.89. Hallen el período positivo mínimo de las funciones:
1) $y = \operatorname{sen} 3x$. 2) $y = 6 \cos (3\pi x/4)$.
3) $y = \operatorname{tg} (3x + 5)$. 4) $y = \operatorname{sen}^2 (x - 1)$.
5) $y = |\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x|$. 6) $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$.
7) $y = \cos 2x \cos 6x$.

7.90. Demuestren que las siguientes funciones no son periódicas:
1) $y = \operatorname{sen} |x|$. 2) $y = \cos (1/x)$.
3) $y = \cos x \cos \sqrt{3}x$.

7.91. Demuestren que si la función $y = f(x)$ es periódica con período T, la función $y = f(ax + b)$, $a \neq 0$ es periódica con período T/a.

7.92. Hallen el campo de definición de las funciones:

1) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{sen}(x/3)}$. 2) $y = \sqrt{\cos x}$.

3) $y = (\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^2 x)^{-3/4}$. 4) $y = \arccos (3 - x)$.

5) $y = \operatorname{arcsen} (0{,}5x - 1) + \arccos (1 - 0{,}5x)$.

6) $y = \ln \cos x$. 7) $y = \sqrt{\ln \operatorname{sen} x}$.

7.93. Hallen el conjunto de los valores de las funciones:

1) $y = 1 - 2|\cos x|$. 2) $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

3) $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$. 4) $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$.

5) $y = \arccos |x|$. 6) $y = \pi - |\operatorname{arctg} x|$.

7) $y = \cos \operatorname{arcsen} x$. 8) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

¿Cuáles de las funciones son pares, cuáles impares y cuáles ni pares ni impares (**7.94**—**7.95**)?:

7.94. 1) $y = x + \operatorname{sen} x$. 2) $y = x^2 - \cos x$.
3) $y = \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$. 4) $y = (1 - x^2) \cos x$.
5) $y = (1 + \cos x) \operatorname{ctg} x$. 6) $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$.
7) $y = \cos (x + 1)$. 8) $y = \operatorname{sen} 5x + \cos 3x$.

7.95. 1) $y = \operatorname{arcsen} x^2$; 2) $y = 2 \arccos (-x)$.
3) $y = \arccos |x|$. 4) $y = |\operatorname{arctg} x|$.
5) $y = \arccos (\cos x)$. 6) $y = \cos (\arccos x)$.
7) $y = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$.

7.96. Demuestren:
1) $\arccos (-x) = \pi - \arccos x$, $|x| \leqslant 1$.
2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$, $x \in \mathbb{R}$.
3) $\operatorname{arcctg} (-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

7.97. Utilizando las desigualdades:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x, \quad x \in (0;\ \pi/2)$$

demuestren las desigualdades:
1) $\operatorname{sen} x \geqslant x$, $x \leqslant 0$. 2) $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

3) $\operatorname{ctg} x < 1/x$, $x \in (0;\ \pi/2)$. 4) $\cos x < \frac{\pi}{2} - x$, $x \in (0;\ \pi/2)$.

5) $\operatorname{ctg} x > \frac{\pi}{2} - x$, $x \in (0;\ \pi/2)$.

6) $\operatorname{tg} x < \frac{2}{\pi - 2x}$, $x \in (0;\ \pi/2)$.

7) $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

8) $\operatorname{sen} x \geqslant x - \frac{x^3}{2}$, $x \in (0;\ +\infty)$.

9) $\operatorname{arcsen} x > x$, $x \in (0;\ 1)$.
10) $|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

7.98. Demuestren que las siguientes funciones son acotadas:

1) $y = \frac{\cos x}{1,5 - \operatorname{sen} x}$. 2) $y = \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

3) $y = \operatorname{ctg} x \operatorname{sen} 2x$. 4) $y = \cos 2x \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

5) $y = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$.

7.98a. Demuestren que las siguentes funciones no son acotadas:
1) $y = x \operatorname{sen} x$. 2) $y = 1/\cos x$.

3) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{0,5 + \operatorname{sen} x}$. 4) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

7.99. Hallen $\sup f$, $\inf f$, así como $\max f$ y $\min f$ si ellos existen:

1) $y = 4 \operatorname{sen}^2 x - 12 \operatorname{sen} x + 5$. 2) $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x}$.

3) $y = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$. 4) $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

5) $y = \cos x \operatorname{tg} x$. 6) $y = \operatorname{arctg}\ (1/x)$.
7) $y = \operatorname{arcctg} |x|$.

7.100. Investiguen la monotonía de la función:
1) $y = 1/\cos x$, $x \in [-\pi;\ \pi]$, $|x| \neq \pi/2$.
2) $y = \operatorname{sen}\ (1/x)$, $x \geqslant 2/(3\pi)$. 3) $y = \operatorname{arctg}\ (1/x)$.

4) $y = \arccos |x|$. 5) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

6) $y = \cos \frac{x^2}{1 + x^2}$. 7) $y = \operatorname{arctg} x - x$.

Construir el gráfico de las funciones (7.101—7.103):

7.101. 1) $y = \cos 3x$. 2) $y = 2 \operatorname{sen} (2x - 3)$.

3) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$. 4) $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x$.

5) $y = |\operatorname{sen} x|$. 6) $y = \operatorname{sen} |x|$. 7) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

8) $y = \cos x$ e $y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$. 9) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

7.102. 1) $y = \sec x$. 2) $y = \operatorname{sen} (\cos x)$. 3) $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$.
4) $y = 2^{\cos x}$. 5) $y = \log_2 \operatorname{sen} x$.

7.103. 1) $y = \operatorname{arcsen} (1 - x)$. 2) $y = \operatorname{arctg} |x|$.
3) $y = \operatorname{arcctg} (1/x)$. 4) $y = \cos \arccos x$.
5) $y = \arccos \cos x$. 6) $y = x - \operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} x)$.

7.104. La función prefijada mediante una fórmula con $x > 0$ ha de continuarse (prefijándola con una fórmula) para los valores de $x \leqslant 0$: a) en forma par; b) en forma impar; construyan el gráfico de la función obtenida:

1) $y = 1 + \operatorname{sen} x$. 2) $y = \operatorname{ctg} x$. 3) $= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.

4) $y = \arccos 2x$. 5) $y = \operatorname{arctg} (x - 1)$.

7.105. Expresen con funciones elementales las funciones inversas a las dadas y construyan sus gráficos:
1) $y = \operatorname{sen} x$, $x \in [-3\pi/2; -\pi/2]$.
2) $y = \cos x$, $x \in [-\pi; 0]$.
3) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (\pi/2; 3\pi/2)$.
4) $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (-\pi; 0)$.
5) $y = 2 \operatorname{sen} 3x$, $x \in [\pi/6; \pi/2]$.
6) $y = 2 \operatorname{arcsen} (x/2)$, $|x| \leqslant 2$.

7) $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 0]$.

8) $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0; 1]$.

9) $y = \operatorname{arctg} (1/x)$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

7.106. Demuestren que el gráfico de la función

$$y = \arccos (2 \operatorname{sen}^2 (x/2)), \quad x \in [0; \pi],$$

es simétrico respecto de la recta $y = x$.

---

11. Procedimiento implícito para prefijar las funciones. Se dice que una función está definida implícitamente con la ecuación $F(x, y) = 0$ (*función implícita*) si cada valor de su argumento x y el valor de la función y, correspondiente a él, son la solución de la mencionada ecuación $F(x, y) = 0$.

Lleva el nombre de gráfico de la ecuación $F(x, y) = 0$ en el sistema cartesiano de coordenadas xOy el conjunto de todos los puntos del plano, cuyas coordenadas (x, y) satisfacen dicha ecuación.

El gráfico de toda función definida implícitamente con la ecuación $F(x, y) = 0$ está contenido en el gráfico de ésta.

Mediante la ecuación $F(x, y) = 0$ es posible prefijar no una, sino todo un conjunto de funciones.

En ocasiones, se consigue pasar del procedimiento implícito de definición al explícito, es decir, dar la función con la fórmula $y = f(x)$. P. ej., la función con valores negativos, prefijada por medio de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, puede darse explícitamente en la forma $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 1]$. El gráfico de la ecuación dada es una circunferencia unitaria, mientras que el de la función que analizamos, la semicircunferencia superior (fig. 47). Esa misma ecuación prefija otras funciones. Los gráficos de dos de ellas se ofrecen en las figs. 48, 49 con línea continua.

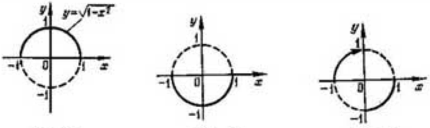


Fig. 47 Fig. 48 Fig. 49

7.107. Demuestren que con la siguiente ecuación se prefija una función y construyan su gráfico:

1) $\frac{xy-1}{y-x}=0.$ 2) $\frac{y-2x^2}{y-8}=0.$

3) $\frac{x^2+y^2-6}{\sqrt{y}+x}=0.$ 4) $\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}=0.$

5) $\frac{x^4-y^2}{\log^2 x+y^2}=0.$

7.108 Representen los gráficos de las ecuaciones:

1) $|x| + |y| = 1.$ 2) $|x| - |y| = 2.$ 3) $x^4 - y^4 = 0.$
4) $x^2 - y^4 = 0.$ 5) $x^2 + y^2 - 4y = 0.$
6) $y^2 + 2\cos 2x = 2.$ 7) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (elipse). 8) $x^2 - y^2 = x^4.$

7.109. Demuestren que el gráfico de la siguiente ecuación es la unión de los gráficos de varias funciones $y = f(x)$ o bien $x = g(y)$; construyan los gráficos de esas funciones:

1) $|y| + |x - 2| = x.$ 2) $|x + y| + |x - y| = 1.$
3) $|y| = \log_{0.5} x.$ 4) $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4.$

7.110. Construyan el gráfico de la ecuación y muestren que él no puede ser obtenido mediante la unión de un número finito de gráficos de las funciones:

1) $|x| - x = |y| - y.$ 2) $|y| = |y - \operatorname{sen} x|.$

---

12. Funciones prefijadas paramétricamente. Sea que en el conjunto T son dadas dos funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. El conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas con coordenadas $(\varphi(t); \psi(t))$, $t \in T$, recibe el nombre de *curva prefijada paramétricamente*.

P. ej., el par de funciones $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in [0; 2\pi]$ prefija paramétricamente una circunferencia unitaria.

Ejemplo 18. Construyan la curva

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

△ Con $t \geqslant 0$ la función $x = t^2$ es invertible y la función inversa a ella es $t = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. Por ello, con $t \geqslant 0$ tenemos $y = (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$, es decir, la curva coincide con el gráfico de la función $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$ (fig. 50). Con $t \leqslant 0$, por analogía, tenemos $t = -\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ e $y = (-\sqrt{x})^3 = -(x)^{3/2}$, o sea, con $t \leqslant 0$ la curva coincide con el gráfico de la función $y = -(x)^{3/2}$, $x \geqslant 0$ (fig. 50).

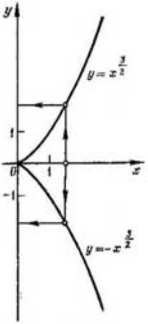


Fig. 50

Señalemos que la curva dada coincide con el gráfico de la ecuación $x^3 = y^2$, así como con el de la función $x = y^{2/3}$. ▲

Sean X e Y los conjuntos de los valores de las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, respectivamente, definidas sobre T. Para cada $t \in T$ al valor de $x = \varphi(t)$ contraponemos el valor de $y = \psi(t)$. Con ello, puede suceder que al valor $x \in X$ se ha contrapuesto más de un valor de $y \in Y$ (véase, p. ej., la fig. 50). Sea dada una regla de acuerdo con la cual, del conjunto de los valores de y, contrapuestos del modo indicado más arriba al valor de x, sólo se elige un valor. Las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, $t \in T$, junto con la mencionada regla, definen la función $y = f(x)$, $x \in X$, de la que se dice que *está prefijada paramétricamente*.

P. ej., las funciones $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in \mathbb{R}$, junto con la condición $y \geqslant 0$, prefijan paramétricamente la función $y = f(x)$, $x \geqslant 0$, la que en el caso dado puede asimismo prefijarse explícitamente en la forma $y = x^{3/2}$, $x \geqslant 0$.

7.111. ¿Cuáles de los puntos A y B pertenecen a la curva:
1) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $A(0; 0)$, $B(3; 3)$.

2) $x = \operatorname{sen} t + 1$, $y = \cos t - 1$; A (0; -1), B (1,6; $-$ 0,2).

3) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$; A (3/2; $\sqrt{3}$), B (1; 2).

4) $x = 2^t \operatorname{sen} t$, $y = 2^t \cos t$; A (2; 2), B (0; 2^π)?

7.112. Eliminando el parámetro t, obtengan la ecuación cuyo gráfico coincide con la curva; construyan dicho gráfico:

1) $x = t - 1$, $y = t^2 - 2t + 2$.

2) $x = 2 - 3\cos t$, $y = 1 + 3 \operatorname{sen} t$.

3) $x = 2\cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$. 4) $x = |\ln t|$, $y = 1 + t^3$.

5) $x = (t + 1)^2$, $y = (t - 1)^2$.

7.113. Construyan según los puntos las curvas:

1) $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$ (*cicloide*).

2) $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ (*astroide*).

---

13. Gráficos de las funciones en coordenadas polares. Fijemos en el plano el rayo l con origen en O (fig. 51). Contrapongamos al par de números (φ; r), donde $r > 0$, tal punto M del plano que

a) $|OM| = r$;

b) el ángulo de giro del rayo l hasta el rayo OM es igual a φ, con la particularidad de que si $\varphi > 0$ el giro transcurre en sentido antihorario y si $\varphi < 0$, en horario.

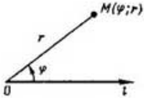


Fig. 51

A todos los pares (φ, 0) les contraponemos el punto 0.

Así, pues, a cada par de números (φ, r), $r \geqslant 0$ contraponemos un punto en el plano. Cada punto del plano, distinto de 0, resultará contrapuesto a un conjunto de pares ($\varphi + 2\pi n$; r), donde $n \in \mathbb{Z}$, $r > 0$. Estos pares de números llevan el nombre de *coordenadas polares del punto*.

Sea dada la función $r = f(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, con ello $f(\varphi) \geqslant 0$. El gráfico de esta función en coordenadas polares recibe el nombre de conjunto de todos los puntos del plano con coordenadas polares (φ, $f(\varphi)$).

Si el rayo l coincide con el rayo positivo del eje Ox del sistema cartesiano de coordenadas xOy (fig. 52), las coordenadas (x; y) y (φ, r) del punto están ligadas con las fórmulas

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\varphi. \tag{30}$$

Ejemplo 19. Construyamos el gráfico de la función $r = \varphi$, $\varphi \in [0; +\infty)$ en coordenadas polares.

$\triangle$ Con el crecimiento de φ también crecen los valores de r, es decir, la distancia de los puntos del gráfico hasta el centro O. Habiendo calculado y marcado en el plano varios puntos dibujamos el gráfico. Señalemos que cada rayo que forma con el rayo l el ángulo α ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$) corta el gráfico en un conjunto infinito de puntos de la forma ($\alpha + 2\pi n$; $\alpha + 2\pi n$), $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ (fig. 53).

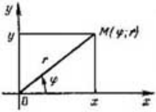


Fig. 52

El gráfico de la función dada lleva el nombre de *espiral de Arquímedes*. ▲

En ocasiones, al construir los gráficos de las funciones en coordenadas polares, es cómodo pasar a las coordenadas cartesianas. A su vez, para ciertas funciones sus gráficos en coordenadas cartesianas son más fáciles de construir al pasar a las coordenadas polares.

Ejemplo 20. Construyan en coordenadas polares el gráfico de la función prefijada con la fórmula

$$r = \frac{1}{\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi}. \tag{31}$$

△ El campo de definición de esta función son todos los valores de φ para los que

$$\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi > 0. \tag{32}$$

La función es periódica con período 2π, por lo que es suficiente considerar sólo los valores de φ del intervalo $(-3\pi/2;\ \pi/2)$ que

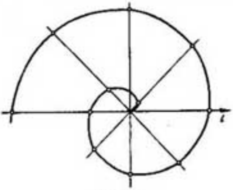


Fig. 53

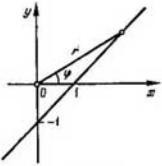


Fig. 54

satisfacen la desigualdad (32), es decir, $\varphi \in (-3\pi/4;\ \pi/4)$. Para semejantes φ tenemos $r\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi = 1$ o bien, pasando a las coordenadas cartesianas, de acuerdo con (30), $x - y = 1$, o sea, $y = x - 1$. El gráfico de la función $y = x - 1$ es una recta (fig. 54). Como fue demostrado, cada punto del gráfico de la función (31) pertenece a dicha recta. Es fácil mostrar que lo contrario también es cierto: cada punto de la recta $y = x - 1$ pertenece al gráfico de la función (31). Esto significa que el gráfico de (31) es la recta $y = x - 1$. ▲

7.114. Escriban la ecuación y construyan su gráfico en coordenadas polares: 1) $x + y + 1 = 0$. 2) $x^2 + y^2 = 2x$. 3) $2xy = x^2 - y^2$. 4) $x = y^2 - \frac{1}{4}$.

7.115. Construyan el gráfico de la función en coordenadas polares: 1) $r = 1/\varphi$ (*espiral hiperbólica*). 2) $r = e^{\varphi}$ (*espiral logarítmica*). 3) $r = 8 \operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $r = \left(\frac{1}{1 - \operatorname{sen}\varphi}\right)$.

7.116. Construyan el gráfico de la ecuación pasando a las coordenadas polares:

1) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ (*lemniscata de Bernoulli*).
2) $y^2(1 - x) = x^3$ (*cisoide*).

Hallen el campo de definición de las funciones (**7.117—7.120**):

7.117. 1) $y = \sqrt{\frac{x}{6-x}}$. 2) $y = \sqrt{3 - 5x - 2x^2}$.

3) $y = \sqrt[3]{\frac{x}{1-|x|}}$. 4) $y = \sqrt{x^2 - |x| - 2}$.

5) $y = \sqrt[4]{3+x} + \sqrt[4]{3-x}$. 6) $y = (8 - 2x - x^2)^{-3/2}$.

7.118. 1) $y = \log(x^2+1)$. 2) $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\log\cos x}}$.

3) $y = \log\frac{3x-x^2}{x-1}$. 4) $y = \sqrt{\log_3\frac{2x-3}{x-1}}$.

5) $y = \frac{\sqrt{x+5}}{\log(9-5x)}$. 6) $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\log_2(x^2+2x-3)}$.

7) $y = \log_{x+1}(x^2 - 3x + 2)$.

8) $y = \log_x \log_{0,5}\left(\frac{4}{3} - 2^{x-1}\right)$.

9) $y = \log(1{,}25^{1-x^2} - 0{,}4096^{1+x})$.

10) $y = \ln(1 - \log(x^2 - 5x + 16))$.

7.119. 1) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$. 2) $y = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}}$.

3) $y = \log(16 - x^2) + \operatorname{ctg} x$.

7.120. 1) $y = \arccos(0{,}5x - 1)$.

2) $y = \arccos x - \operatorname{arcsen}(3 - x)$.

3) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-9}$. 4) $y = \operatorname{arcsen}\frac{x^2-1}{x}$.

5) $y = \sqrt{\operatorname{arcsen} x - \arccos x}$.

6) $y = \operatorname{arcsen}(2\cos x)$. 7) $y = \operatorname{tg}(2\arccos x)$.

8) $y = \log(1 - 2\operatorname{arcctg} x)$.

9) $y=\dfrac{\arcsen(0,5x-1)}{\sqrt{x^2-3x+1}}$. 10) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsen(2-x)}$.

11) $y=\dfrac{\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$. 12) $y=\dfrac{\log_{2x}3}{\arccos(2x-1)}$.

Hallen el conjunto de los valores de las funciones (**7.121**—**7.122**):

7.121. 1) $y=\dfrac{2x}{x^2+9}$. 2) $y=\dfrac{3-x^2}{3+x^2}$.

3) $y=\sqrt{x^2+2x+2}$. 4) $y=\sqrt{8-2x-x^2}$.

5) $y=\sqrt{2x-1-x^2}$. 6) $y=2^{x^2+4x-5}$.

7) $y=\log_3(5+4x-x^2)$. 8) $y=\log_{x^2}x$.

9) $y=\sqrt{2\log_2 x-\log_2^2 x}$.

7.122. 1) $y=\operatorname{sen} x-5\cos x$.

2) $y=1-2\,|\operatorname{sen} 2x\,|$. 3) $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$.

4) $y=\dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$.

5) $y=\sqrt{\log\operatorname{sen} x}$. 6) $y=\cos^2 x-\operatorname{sen} x$.

7) $y=\log_2(\cos x+\operatorname{sen}^2 x)$.

8) $y=\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsen x\right)$. 9) $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{sen} x)$.

7.123. Demuestren que para toda $x\in\mathbb{R}$.
a) $E(x+1)=E(x)+1$;
b) $E(x+n)=E(x)+n$, $n\in\mathbb{Z}$.
2) Hallen el conjunto de los valores de la función $x-E(x-2)$.

7.124. Sean $f(x)=x+6$, $g(x)=6/(x+1)$. Hallen todos los valores de x para los que:
1) $|f(x)+g(x)|=f(x)+g(x)$.
2) $|f(x)+g(x)|=f(x)-g(x)$.
3) $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$.
4) $|f(x)+g(x)|=|f(x)|-|g(x)|$.

7.125. Haciendo uso de operaciones aritméticas y de las composiciones de funciones, expresen la función dada mediante las funciones elementales fundamentales:

1) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$. 2) $y=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$.

3) $y=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$. 4) $y=\ln^2(1+e^x)$.

5) $y=\cos\log x^2$. 6) $y=\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{arcctg} x^3)}$.

7.126. Para la función $f(x)=(x^3-1)/x^2$: a) hallen todos los valores de a para los que la ecuación $f(x)=f(a)$ tiene una sola solución; b) hallen el valor máximo de b tal que para cualquier $a \in (-\infty; b)$ la ecuación $f(x) = f(a)$ tenga en el intervalo $(-\infty; b)$ una sola solución.

7.127. ¿Con qué valores de a el campo de definición de la función f contiene el campo de definición de la función g si:

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2a+x}{a-x}}$; $\quad g(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+4a-2}$.

2) $f(x)=\log(x^2+a)$; $\quad g(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x}$.

3) $f(x)=\operatorname{arcsen}(2^x-a)$; $\quad g(x)=\log_2\left(2a+\frac{1}{2}-a\cdot 2^x\right)$?

7.128. En el trapecio isósceles $ABCD$ con bases $AD = 2$, $BC = 1$ y altura $h = 1$ se ha trazado una recta perpendicular a la base AD que la corta en el punto M. Hallen la dependencia entre el área S de la parte cortada con el vértice A y la distancia $x = AM$.

7.129. A una esfera de radio r se circunscribe un cono. Hallen la dependencia entre el volumen V de dicho cono y su altura; indiquen el campo de definición de la función obtenida.

7.130. Se consideran las secciones del tetraedro regular $ABCD$ paralelas a la arista AB y a la altura DO del tetraedro. Hallen la dependencia entre el área S de la sección y la distancia x entre el plano de la sección y la arista AB si la altura de la cara del tetraedro es igual a b. Hallen el valor máximo de S.

7.131. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo isósceles es igual a R. Hallen la dependencia entre el radio de la circunferencia inscrita y el ángulo α en el vértice del triángulo. Hallen el valor máximo de dicho radio.

7.132. En un hilo infinito con origen en O, uniformemente, a una distancia l entre ellas, están enhiladas cuentas de vidrio, la primera de las cuales se encuentra en el punto O. El hilo es homogéneo de densidad lineal ρ, y la masa de cada cuenta es igual a m. Hallen la dependencia entre la masa del sector OM del hilo y la longitud $x = OM$.

7.133. Dos rayos, entre los que el ángulo es igual a 60°, tienen origen común. Desde éste, por uno de los rayos salió una partícula a una velocidad v y, pasada una hora, por el otro rayo, la segunda partícula a velocidad $3v$. Hallen la dependencia entre la distancia entre las partículas y el tiempo de movimiento de la primera. ¿A qué distancia mínima se aproximarán las partículas después de la salida de la segunda de ellas?

7.134. La función $f(a)$ está definida para todo $a \in \mathbb{R}$, con los que la ecuación

$$(a^2-4a+9)\,|x-1| = (9-a^2)\,|x|$$

tiene solución. El valor de $f(a)$ es igual a la raíz máxima de la mencionada ecuación con la a dada (si la raíz es una sola, $f(a)$ es igual a dicha raíz). Hallen: 1) el campo de definición de la función $f(a)$; 2) $\min f(x)$.

7.135. El campo de definición de la función contiene m elementos, mientras que el campo de valores, n elementos. Demuestren que: 1) $n \leqslant m$; 2) para que la función sea biunívoca es necesario y suficiente que $n = m$.

7.136. Hallen el número de todas

1) las funciones definidas sobre el conjunto D de m elementos con valores del conjunto E de n elementos;

2) las funciones biunívocas, cuyo campo de definición y el conjunto de valores contienen n elementos cada uno.

7.137. El campo de definición de la función f es un conjunto numerable.

1) Demuestren que si la función f es biunívoca, el conjunto de sus valores también es numerable.

2) Aduzcan un ejemplo de una función f no biunívoca, cuyo conjunto de valores también es numerable.

7.138. ¿Cuáles de las funciones dadas son invertibles:

1) $y = 2 + x - x^2$, $x \in [0,5; +\infty)$.
2) $y = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.
3) $y = x^4 - 2x^2 - 8$, $x \in [0; 2]$.
4) $y = -x\,|x| - 2x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.
5) $y = 1 - \operatorname{sen} x$, $x \in [0; \pi]$.
6) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \pi)$, $x \neq \pi/2$.
7) $y = 9^x - 3^x$, $x \in \mathbb{R}$.
8) $y = \arccos(|x| - 1)$, $x \in [-1; 2]$.
9) $y = \operatorname{arcctg}(x\,|x|)$, $x \in \mathbb{R}$?

7.139. Demuestren que las funciones f y g son recíprocamente inversas:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $\quad g(x) = \dfrac{2x+1}{x}$.

2) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in (-\infty; 0]$; $g(x) = -\sqrt{x-1}$, $\quad x \in [1; +\infty)$.

3) $f(x) = -e^{(1-x^2)/2}$, $\quad x \in [0; +\infty)$;
$g(x) = \sqrt{1 - 2\ln(-x)}$, $\quad x \in [-\sqrt{e}; 0)$.

4) $f(x) = \ln \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $\quad x \in (0; +\infty)$; $\quad g(x) = f(x)$.

5) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$;
$g(x) = \pi - \operatorname{arcsen} x$, $x \in [-1; 1]$.

6) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [-\pi; 0]$, $x \neq -\pi/2$;

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x - \pi, & x \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x, & x < 0. \end{cases}$$

Expresen las funciones inversas a las dadas mediante elementales y construyan sus gráficos (**7.140—7.142**):

7.140. 1) $y=\sqrt[4]{x^3}$, $x\in[0;+\infty)$.
2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$, $x\in(-\infty;0]$, $x\neq-1$.
3) $y=x\,|x|+2x$, $x\in\mathbb{R}$.
4) $y=\dfrac{x^2+3x}{x^2-5x}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, $x\neq 5$.
5) $y=\dfrac{x^2+1}{2x}$, $x\in[1;+\infty)$.
6) $y=\dfrac{x^2+1}{2x}$, $x\in(0;1]$.
7) $y=x-\sqrt{x^2-1}$, $x\in(-\infty;-1]$.
8) $y=\sqrt{x^2-1}+x$, $x\in(-\infty;-1]$.
7.141. 1) $y=2^{x^2-2x}$, $x\in(-\infty;1]$.
2) $y=1-e^{(1-x)/(1+x)}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq-1$.
3) $y=\dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
4) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$, $x\in\mathbb{R}$.
5) $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq 1$.
7.142. 1) $y=\operatorname{sen} x$, $x\in[5\pi/2;7\pi/2]$.
2) $y=2\cos(x/2)$, $x\in[2\pi;4\pi]$.
3) $y=\operatorname{ctg} x$, $x\in(-\pi/2;\pi/2)$, $x\neq 0$.
4) $y=\operatorname{sen}^2(x/2)$, $x\in[2\pi;3\pi]$.
5) $y=1/\cos x$, $x\in[-\pi;0]$, $x\neq-\pi/2$.
6) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;1]$.
7) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1;0]$.
8) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$.

7.143. 1) Demuestren que la función $y=x^3+\frac{5}{9}x$ es invertible. Construyan en un mismo sistema de coordenadas los gráficos de la función dada y de la inversa. Hallen los puntos de intersección.

2) Demuestren que si n es un número natural impar, $p>0$, $q\in\mathbb{R}$, la función $y=x^n+px+q$ es invertible.

7.144. Demuestren que la función

$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$$

tiene su inversa y hállenla.

7.145. Sea $y=\operatorname{arch} x$, $x\geqslant 1$ una función inversa a $y=\operatorname{ch} x$, $x\geqslant 0$. Demuestren que la función

$$y=\begin{cases} 2\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arch} x\right), & x\geqslant 1,\\ 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos x\right), & -1\leqslant x<1,\end{cases}$$

es inversa a la función $y=(x^3-3x)/2$, $x\geqslant 1$.

7.146. Hallen la función inversa a la función

$$y = (x^3 + 3x)/2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.147. Hallen el intervalo máximo de la forma $[a, +\infty)$ sobre el que la función

$$y = 1 + 2 \operatorname{sen} \frac{x-1}{x+1}$$

es invertible y hallen en este intervalo la función inversa.

7.148. 1) Demuestren que la función $y = \frac{2x+3}{x-2}$ coincide con su inversa.

2) ¿Con qué condiciones sobre a, b, c, d la función $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ es inversa a sí misma?

7.149. Demuestren que el gráfico de la función $y = \log_a \frac{a^x + \alpha}{\beta a^x - 1}$, $\alpha\beta \neq 1$ es simétrico respecto de la recta $y = x$.

7.150. Sean a y b tales números que el campo de definición de la función $y = \ln (a + be^x)$ sea un conjunto no vacío. ¿Con qué valores de a y b esa función coincide con su inversa?

7.151. ¿Con qué valores de a la función

$$y = (a-1)\,|x-1| + (a+1)\,|x+1| + x$$

es invertible?

7.152. ¿Con qué valores de a, b y c la función

$$y = \operatorname{arctg}(a + b \operatorname{tg} x) + c, \quad x \in (\pi/2;\ 3\pi/2),$$

coincide con su inversa?

7.153. ¿Con qué valores de λ es invertible la función

$$y = (\operatorname{arcsen} x)^2 + \lambda \arccos x, \quad x \in [-1;\ 1]?$$

Prefijar la función inversa con una fórmula.

7.154. Demuestren que

1) $\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$, $x \in [-1;\ 1]$.

2) $\operatorname{sen}(3 \operatorname{arcsen} x) = 3x - 4x^3$, $x \in [-1;\ 1]$.

3) $\operatorname{tg}(3 \operatorname{arctg} x) = \frac{x(3-x^2)}{1-3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \neq 1/3$.

4) $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, $x \in [-1/2;\ 1/2]$.

5) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\,|\operatorname{arctg} x|$, $x \in \mathbb{R}$.

7.155. Hallen todos los valores de x para los que son ciertas las igualdades:

1) $\arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arcsen} x$.

2) $\arccos \sqrt{1-x^2} = -\operatorname{arcsen} x$.

3) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} (1/x)$. 4) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} (1/x) - \pi$.

5) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{4}$.

6) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arctg} x-\frac{3\pi}{4}$.

¿Cuáles de las funciones son pares, cuáles impares, cuáles no son ni pares ni impares (**7.156—7.159**):

7.156. 1) $y = 2x^2 - 1$. 2) $y = -5x^3$. 3) $y = 1 - x^3$.

4) $y=x^4-\frac{1}{x}$. 5) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$.

6) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}$. 7) $y=6x^2+8+(x-2)^3$.

8) $y=\left(1-\frac{1+x^2}{1+x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}\right)$?

7.157. 1) $y=\frac{2^x+2^{-x}}{3^x-3^{-x}}$. 2) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

3) $y=\operatorname{ch}(x+\operatorname{sh} x)$. 4) $y=\operatorname{th}(x+\operatorname{ch} x)$.

5) $y=\ln^2(\sqrt{x^2+1}+x)$.

6) $y=\cos x\operatorname{sh} x+\operatorname{sen} x\operatorname{ch} x$. 7) $y=\operatorname{arsh}(\operatorname{sh} x)$. 8) $y=\operatorname{th}(\operatorname{arth} x)$.

9) $y=\left|\frac{10^x+1}{10^x-1}\right|$?

7.158. 1) $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 2) $y=\operatorname{sen} x+2x^3$.

3) $y=\operatorname{tg} x-\cos x$. 4) $y=\frac{|\operatorname{sen} x|}{1-\cos x}$.

5) $y=(x-1)^2\operatorname{sen}^2 x$.

6) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

7) $y = \operatorname{sen}\ \operatorname{tg}\ x$. 8) $y = \operatorname{ctg} \cos x$?

7.159. 1) $y = \operatorname{arcsen} x^2$. 2) $y = 2 \arccos (-x)$.

3) $y=\arccos |x|$. 4) $y=\arccos x-\frac{\pi}{2}$.

5) $y = \operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} x)$. 6) $y = \operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} x)$.
7) $y = \operatorname{arcsen} (\arccos x)$. 8) $y = \operatorname{sen} (2x - \operatorname{arcctg} x)$?

7.160. Representen la función f en forma de la suma de funciones par e impar:

1) $f(x)=(x+1)^3$. 2) $f(x)=\frac{x-3}{x^4}$.

3) $f(x)=\operatorname{sen}(x+1)$. 4) $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $|x|<1$.

7.161. Demuestren que toda función definida sobre un conjunto simétrico al origen de coordenadas es representable en forma de la suma de funciones par e impar.

7.162. Representen la función en forma de la suma de funciones par e impar si:

1) $y = |x - 1|$. 2) $y = a^x$. 3) $y = \ln(1 + e^x)$.
4) $y = \operatorname{sen}(x^3 + x^2)$. 5) $y = \operatorname{tg}(x - 5)$. 6) $y = \arccos x$.
7) $y = -\operatorname{arcctg} x$. 8) $y = \operatorname{arctg}(1 - x)$.

7.163. La función f es ni par ni impar, la g, par, la h, impar. ¿Puede la suma:

1) $f + g$ ser: a) par, b) impar?
2) $f + h$ ser: a) par, b) impar?

7.164. La función f es ni par ni impar, la g, par, la h, impar y tiene sentido la composición de cualesquiera dos de estas funciones. Indiquen todas las composiciones que son: 1) funciones pares, 2) funciones impares.

7.165. 1) Demuestren que la función inversa a la impar es una función impar.

2) ¿Puede ser par una función inversa a la dada?

Demuestren que las funciones son acotadas (**7.166—7.168**):

7.166. 1) $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in [1; +\infty)$.

2) $y = \sqrt[3]{x^3 + 8} - x$. 3) $y = \sqrt[4]{x^4 + 2} - |x|$.

4) $y = \dfrac{|x^2 - 1|}{x^4 - 1}$. 5) $y = \dfrac{x - 4}{2 - \sqrt{x}}$, $x \in [0; 4)$.

6) $y = \dfrac{x + 1}{x + \sqrt[3]{x^4}}$, $x \in (-\infty; -1)$.

7) $y = \dfrac{x^{7/3} - x^2}{(x - 1)\sqrt[3]{2 + x^4}}$.

7.167. 1) $y = 2^{\operatorname{sen} x}$. 2) $y = 2^{1/x}$, $x \in (-\infty; 0)$.

3) $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{1 + 3^{|x|}}$. 4) $y = \dfrac{1}{x^2 + \ln^2 x}$.

5) $y = \log_x(1 + x)$, $x \in [2; +\infty)$.

7.168. 1) $y = \operatorname{tg} x \cos 3x$. 2) $y = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - 1}$.

3) $y = \dfrac{2\cos x}{\pi - 2x}$.

4) $y = \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $x \neq 0$.

7.169. Demuestren que las siguientes funciones son no acotadas:

1) $y = x^3 - 3x$. 2) $y = x^3/(x^2 - 1)$, $x \in (-\infty; -2]$.

3) $y = \dfrac{3^x}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$. 4) $y = \dfrac{2^x}{x}$, $x \in [1; +\infty)$.

5) $y = 2^{1/x}$, $x \in (0; +\infty)$.
6) $y = \log_x(1 + x)$, $x \in (1; 2]$.
7) $y = x \operatorname{sen} x$. 8) $y = (\cos x)/x$.
9) $y = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

7.170. Sean $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ polinomios de los grados m y n, $m \leqslant n$ y $Q_n(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demuestren que la función

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

es acotada.

7.171. Demuestren que cualquier polinomio de un grado no menor que el primero es una función no acotada.

7.172. Aduzcan un ejemplo de función definida sobre un segmento y que en él es no acotada.

7.173. Aduzcan un ejemplo de función definida sobre un segmento y que es no acotada en el entorno de cada punto del mencionado segmento.

7.174. Investiguen la monotonía de la función y construyan su gráfico:

1) $y = \frac{x-1}{|x|+1}$. 2) $y = \frac{x+2}{|x|-3}$. 3) $y = \frac{1-|x-1|}{1+|x|}$.

4) $y = \frac{|x-1|-|x+1|}{|x-1|+|x+1|}$. 5) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$. 6) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

Investiguen la monotonía de las funciones (7.175—7.176):

7.175. 1) $y = \sqrt{x^2-1}$. 2) $y = \sqrt{2x-x^2}$.

3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-5}-2}$. 4) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$.

5) $y = 1 - \sqrt[5]{x^3-1}$. 6) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-8}}$.

7) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$.

8) $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$. 9) $y = x - \sqrt{x^2-1}$.

7.176. 1) $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$, $x \in [0; \pi]$.

2) $y = \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\operatorname{sen} x}$, $x \in [0; 2\pi]$.

3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, $x \neq \pi/2$.

4) $y = 0{,}3^{(x^2-1)/x}$. 5) $y = \log_2 (8x - x^2)$.

6) $y = \ln (\sqrt{x^2+1} + x)$. 7) $y = 2 \cdot 3^{1-x} - 9^{-x}$.

8) $y = 2 \log_2 (1+x^2) - \log_2^2 (1+x^2)$.

7.177. Demuestren que la función

$$y = x - \varepsilon \operatorname{sen} x, \quad \text{donde } 0 < \varepsilon \leqslant 1$$

estrictamente crece.

7.178. Demuestren que la función $y = x^3 + x^2$: 1) crece sobre $(0; +\infty)$; 2) no es monótona sobre $[-1; 0]$.

7.179. Demuestren que la función

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x+\alpha)}{\operatorname{sen}(x+\beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

es monótona en cualquier intervalo contenido en su campo de definición.

7.180. La función $y = f(x)$ es monótona. Demuestren que: 1) la función $y = -f(x)$ es monótona; 2) si $f(x) > 0$ para toda $x \in D(f)$, la función $y = 1/f(x)$ es monótona.

7.181. Demuestren que la suma de las funciones crecientes (decrecientes) en el intervalo $(a; b)$ crece (decrece) en el intervalo $(a; b)$.

7.182. Demuestren que la composición de funciones monótonas es una función monótona.

7.183. 1) Demuestren que es creciente la función inversa a una función creciente.

2) Demuestren que es decreciente la función inversa a una función decreciente.

7.184. Haciendo uso de los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien y escriban la afirmación: 1) la función no es creciente; 2) la función no es decreciente; 3) la función no es monótona.

7.185. Aduzcan un ejemplo de dos funciones crecientes en el intervalo (a, b), cuyo producto es 1) una función creciente en $(a; b)$; 2) decreciente en $(a; b)$; 3) no monótona en $(a; b)$.

7.186. Aduzcan un ejemplo de función definida sobre $\mathbb{R}$ que no es monótona en ningún intervalo.

7.187. Recibe el nombre de creciente en el punto $x_0 \in (a; b)$ la función $f(x)$, $x \in (a; b)$, si existe tal $\delta > 0$ que $f(x) \leqslant f(x_0)$ para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f(x) \geqslant f(x_0)$ para toda $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

¿Es monótonamente creciente en $(a; b)$ la función que es creciente en cada punto del intervalo $(a; b)$?

7.188. Sea x_0 la raíz de la ecuación

$$a^x + b^x = c$$

y sea bien $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$, o bien $a > 1$ y $b > 1$. Demuestren que la ecuación aducida no tiene otras raíces.

7.189. Sean f, g y $f - g$ funciones crecientes y $f(x_0) = g(x_0)$. Demuestren que el sistema

$$\begin{cases} f(x) = g(y), \\ f(y) = g(z), \\ f(z) = g(x) \end{cases}$$

tiene una sola solución.

7.190. Sea que las funciones f y g están definidas sobre el conjunto X.

1) Sea $f(x) \geqslant g(x)$ para toda $x \in X$. Demuestren que

$$\sup_X f \geqslant \sup_X g, \quad \inf_X f \geqslant \inf_X g.$$

2) Sea $\sup\limits_X f = +\infty$, $\inf\limits_X g \neq -\infty$. Demuestren que

$$\sup_X (f+g) = +\infty.$$

3) Sea $\inf\limits_X f = -\infty$, $\sup\limits_X g \neq +\infty$. Demuestren que

$$\inf_X (f+g) = -\infty.$$

7.191. Sea impar la función f. Demuestren que

$$\inf_{x<0} f = -\sup_{x>0} f, \quad \sup_{x<0} f = -\inf_{x>0} f.$$

7.192. Empleando los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien y escriban la afirmación: 1) el número a no es la cota superior de la función; 2) el número a no es la cota inferior de la función.

7.193. Hallen $\min\limits_X f$ si:

1) $f(x) = x + \dfrac{3}{x}$, $X = (0; +\infty)$.

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, $X = (1; +\infty)$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}^2 x + 1$, $X = \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

4) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$, $X = (0; \pi/2)$.

7.194. Hallen:

1) $\min (x - 2\sqrt{x})$. 2) $\max\limits_{(0;\,\pi/2)} (3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)$.

7.195. Hallen $\max\limits_X f$ si:

1) $f(x) = 9x^5 + \dfrac{1}{x^5}$, $X = (-\infty; 0)$.

2) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$, $X = (0; +\infty)$.

3) $f(x) = x\sqrt[4]{1-x^4}$, $X = [-1; 1]$.

4) $f(x) = \log_x (x+1) + \log_{x+1} x$, $X = (0; 1)$.

7.196. Hallen $\max f$, $\min f$ si:

1) $f(x) = e^{-|x|} - e^{-2|x|}$. 2) $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 3$.

3) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 3$.

4) $f(x) = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$.

5) $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$. 6) $f(x) = \cos(1 + \operatorname{sen} x)$.

7) $f(x) = \operatorname{sen}(2\cos x - 1)$. 8) $f(x) = x^2/(x^4+1)$.

9) $f(x) = (x+1)/(x^2+3)$.

7.197. Dos cuerpos se mueven por rectas en el sentido hacia su punto de intersección A. Las velocidades de los cuerpos son constantes e iguales a v_1 y v_2, en el momento inicial los cuerpos se hallan a las distancias a y b del punto A, respectivamente. El ángulo entre las direcciones de movimiento de los cuerpos es igual a α. Hallen la distancia mínima entre ellos.

7.198. En un triángulo está inscrito un rectángulo de forma que uno de sus lados yace en uno de los lados del triángulo y dos vértices, en otros dos. Hallen el área máxima posible del rectángulo si la del triángulo es igual a S.

7.199. En la sección axial de un cono el ángulo es igual a 2α, el radio de la base, a R. Hallen el valor máximo del área de la sección trazada por el vértice del cono si 1) $2\alpha < \pi/2$; 2) $2\alpha > \pi/2$.

7.200. Hallen la distancia desde la parábola $y = x^2/4$ hasta la recta $y = -x - 2$.

7.201. Hallen el $\max\limits_X f$, $\min\limits_X f$ si:

1) $f(x) = \log_{1/3}(x^2 + x - 2)$, $X = [3; 6]$.
2) $f(x) = \log_9(8x - x^2 - 7)$, $X = [2; 5]$.
3) $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$, $X = [\pi/3; \pi]$.
4) $f(x) = (x^2 + 4)/x$, $X = [1; 3]$.
5) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x+4}$, $X = [-14; -7]$.
6) $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-4}$, $X = [-1{,}5; 1{,}5]$.

7.202. Empleando los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien y escriban la afirmación: 1) el valor de $f(x_0)$, $x_0 \in X$ no es el máximo; 2) el valor de $f(x_0)$, $x_0 \in X$ no es el valor mínimo de la función sobre el conjunto X.

7.203. Hallen el $\min(x - \sqrt{x+3})$.

7.204. Hallen el $\max f$, $\min f$ si:

1) $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$. 2) $f(x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-2}$.

7.205. Hallen el radio de la base y la altura del cilindro inscrito en una esfera de radio R, si el área de la superficie lateral del cilindro tiene el valor máximo de los posibles.

7.206. Hallen el radio de la base y la altura de un cono circunscrito a una esfera si el volumen del cono tiene el valor mínimo de los posibles y el radio de la esfera es igual a R.

7.207. Todas las aristas del prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ tienen una longitud a. Los extremos del segmento paralelo al plano ABB_1A_1 yacen en las diagonales BC_1 y CA_1 de las caras laterales. Hallen la longitud mínima de dicho segmento.

7.208. La longitud de la arista del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es igual a a. E y F son los puntos medios de las aristas BB_1 y CC_1, respectivamente. Los vértices de un triángulo son los puntos de intersección de un plano paralelo a la base del cubo con las rectas AC_1, CE, DF. Hallen el valor mínimo del área de semejante triángulo.

7.209. Hallen el valor mínimo de la suma $x^2 + y^2$ si $x + 2y = 1$.

7.210. Hallen el valor máximo del producto xy si:
1) $x + 2y = 1$. 2) $x^2 + 3y^2 = 1$.
7.211. Hallen el mín f si:
1) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
2) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.
3) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, donde $b - a = d - c$.

4) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x-a_k)^2$. 5) $f(x) = \left(\frac{2+\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2$.

7.212. Hallen

$$\min_{[0;\,1]} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.213. Demuestren:

1) Los gráficos de las funciones $y = f(x)$ e $y = f(-x)$ son simétricos respecto al eje de ordenadas.

2) Los gráficos de las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ son simétricos respecto al eje de abscisas.

3) Los gráficos de las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(-x)$ son simétricos con relación al origen de coordenadas.

4) Los gráficos de las funciones $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ son simétricos con relación a la recta $y = x$.

7.214. El gráfico de la función g es simétrico al de la f con relación a la recta $x = x_0$. Expresen los valores de la función g por medio de los valores de la función f.

7.215. El gráfico de la función g es simétrico al de la función f con relación a la recta $y = y_0$. Expresen los valores de la función g mediante los de la función f.

7.216. El gráfico de la función g es simétrico al de la función f respecto al punto $(x_0;\, y_0)$. Expresen los valores de la función g mediante los de la función f.

7.217. Según el gráfico conocido de la función $y = x^2$ construyan el gráfico de la función e indiquen los conjuntos sobre los que ella es monótona:
1) $y = 2x^2 - 8x + 4$. 2) $y = 3x - 4 - 2x^2$.
3) $y = x^2 - 3|x| - 7$. 4) $y = |5 - 4|x| - x^2|$.
7.218. Construyan el gráfico de la función (7.218—7.225):
1) $y = |x-1| + |x-2| - |x-3|$.
2) $y = |x-2| + |x| + |x+2| - 3$.
3) $y = |x - 2|x - 1||$. 4) $y = |2x - |x| - 1|$.

5) $y = \frac{1}{2a}(|x+a| - |x-a|)$, $a > 0$.

6) $y = \operatorname{sign} x - \frac{1}{2a}(|x+a| - |x-a|)$, $a > 0$.

7) $y=\left|\frac{3+2|x|}{3-2|x|}\right|$. 8) $y=\frac{|x+2|+|x-1|}{|x-2|+|x+1|}$.

7.219. 1) $y=2(x+2)^3-3$. 2) $y=1{,}2+\frac{1}{4}(1-x)^3$.

3) $y=x^3+x$. 4) $y=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}x-x^3$.

5) $y=0{,}1(1-x)^4-1$. 6) $y=2-\frac{1}{8}(x+2)^4$.

7.220. 1) $y=\sqrt{1-2x}-2$. 2) $y=3-0{,}5\sqrt{3x-2}$.

3) $y=2\sqrt[3]{3x-6}+1$. 4) $y=2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{3}x}$.

5) $y=(2x+1)^{1/4}$. 6) $y=3-\frac{1}{2}(8x-1)^{2/3}$.

7) $y=3-\frac{1}{2}x^{3/2}$. 8) $y=(x-1)^{7/2}-1$.

7.221. 1) $y=\sqrt{|3-x|}$. 2) $y=\sqrt{9-4|x|}$.

3) $y=\sqrt{8-|x-1|}$. 4) $y=\sqrt{|x+1|^3}-1$.

7.222. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$. 2) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x+8}}$.

3) $y=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$. 4) $y=\frac{2}{2\sqrt{x}+1}$. 5) $y=\frac{3}{4-2\sqrt[3]{x+1}}$.

7.223. 1) $y=\frac{x^2+4}{x}$. 2) $y=\frac{x^2-4}{2x}$.

3) $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$. 4) $y=\frac{2x}{4-x^2}$. 5) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

6) $y=\frac{1}{x^2+2x+3}$. 7) $y=\frac{1}{x^2-9}$. 8) $y=\frac{1}{x^2-2x-8}$.

7.224. 1) $y=\frac{x}{x^2+1}$. 2) $y=\frac{x}{x^2-1}$ 3) $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

4) $y=\frac{2x^2-4x+6}{x^2-2x+2}$.

7.225. 1) $y=\sqrt{5+4x-x^2}$. 2) $y=(\sqrt{1-x^2}+1)\ \mathrm{sign}\ x$.

3) $y=2-\sqrt{8-2x-x^2}$. 4) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5) $y=\frac{\mathrm{sign}\,(x-1)}{\sqrt{3x-x^2}}$. 6) $y=x\sqrt{100-x^2}$.

7) $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

7.226. ¿Con qué relación entre a, b, c, d el gráfico de la función $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ se obtiene con el desplazamiento del gráfico de las funciones:

1) $y=\frac{1}{x}$. 2) $y=\frac{x-x_1}{x-x_2}$, $x_1\neq x_2$?

7.227. Hallen el centro de simetría del gráfico de la función:

1) $y=\frac{x}{2x-1}$. 2) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$.

3) $y=x^3-6x^2$. 4) $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$.

7.228. Demuestren que los gráficos de las funciones $y=x^3-3a^2x$ e $y=x^3-3ax^2$ se obtienen uno del otro por medio del desplazamiento.

7.229. Demuestren que la función $y=x^3-3a^2x$ crece en los intervalos $(-\infty;\ -a]$ y $[a;\ +\infty)$ y decrece en $[-a;\ a]$ $(a>0)$. Construyan el gráfico de la función con $a=2$.

7.230. Demuestren que la función $y=x^3-3bx^2$ $(b>0)$ crece en $(-\infty;\ 0]$ y $[2b;\ +\infty)$ y decrece en $[0;\ 2b]$. Construyan el gráfico de esta función con $b=1$.

Construyan el gráfico de la función (7.231—7.235):

7.231. 1) $y=x^3-3x^2+2x$. 2) $y=x^3+6x^2$.

7.232. 1) $y=E(|x|)$. 2) $y=E(x^2-1)$.

3) $y=E\left(\frac{1}{x}\right)$. 4) $y=(E(x))^2-2E(x)-1$.

5) $y=|x-E(x)-0{,}5|$. 6) $y=(x-E(x))^2$.

7) $y=\frac{1}{x}\cdot E(x)$. 8) $y=(-1)^{E(1/x)}$.

7.233. 1) $y=1-3^{0{,}5x-1}$. 2) $y=\frac{1}{3}2^{1-3x}+2$.

3) $y=\log_3(0{,}5x+2)$. 4) $y=-\frac{4}{3}\log_4(1-x)$.

5) $y=3^{2-|x+3|}$. 6) $y=|0{,}5^x-2|$.

7) $y=\log(3-x)^2$. 8) $y=\log_{0{,}5}|1-2x|+2$.

9) $y=|\log_2|x||$.

7.234. 1) $y=2^{|\log_2 x|}$. 2) $y=2^{1/x}$.

3) $y=3^{(1-x)/(1+x)}$. 4) $y=0{,}5^{x^2-x}$.

5) $y=\log_{1/3}(x^2-8x)+2$. 6) $y=\log\frac{1-2x}{x+3}$.

7) $y=e^{1/(x^2-1)}$. 8) $y=\frac{1+3^{-x}}{3+3^{x+1}}$.

9) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

7.235. $y=E(2^x)$. 2) $y=2^{E(x)}$.

3) $y=2^{x-E(x)}$. 4) $y=E(\log_2 x)$. 5) $y=\log(x-E(x))$.

7.236. Demuestren que la función dada es periódica y hallen su período mínimo positivo:

1) $y=x-\alpha E(x/\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$.

2) $y=E(2x+5)-2x$.

3) $y=|\operatorname{sen}(\sqrt{2}x+1)|$. 4) $y=\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}^2 3x$.

5) $y=\operatorname{sen}4x+5\cos 6x$. 6) $y=3\operatorname{sen}4x+2\operatorname{tg}5x$.

7) $y=\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x$. 8) $y=\operatorname{tg}(x+\operatorname{sen}x)$.

9) $y=\operatorname{sen}(\cos x)$. 10) $y=\cos(\operatorname{sen}x)$.

11) $y=\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x$.

7.237. Demuestren que la función dada es no periódica:

1) $y=\operatorname{sen}\sqrt{|x|}$.

2) $y=\cos x+\cos x\sqrt{2}+\ldots+\cos x\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

3) $y=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\sqrt{2}x$.

7.238. Demuestren que si la razón entre los períodos de las funciones f y g es un número racional, las funciones $f+g$ y fg son periódicas.

7.239. Hallen el período mínimo positivo de la función:

1) $y=8\operatorname{sen}(9x/8)+2\cos(3x/2)$.

2) $y=\operatorname{sen}(3x/4)+\operatorname{sen}(9x/8)$.

3) $y=a\operatorname{sen}(p_1x/q_1)+b\cos(p_2x/q_2)$, donde $p_1, p_2, q_1, q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.

4) $y=a\operatorname{sen}(p_1x/q_1)+b\operatorname{sen}(p_2x/q_2)$, donde $p_1, p_2, q_1, q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.

5) $y=a\operatorname{sen}(p_1x/q_1)+b\operatorname{tg}(p_2x/q_2)$, donde $p_1, p_2, q_1, q_2\in\mathbb{N}$, $p_1q_2\neq p_2q_1$.

7.240. ¿Con qué a y b ($ab\neq 0$) la función $y=ax-E(bx+c)$ es periódica y cuál es su período mínimo positivo?

7.241. Aduzcan ejemplos de tales funciones no periódicas f y g que la función h: 1) $h=f+g$; 2) $h=f\cdot g$ sea periódica y tenga el período mínimo positivo.

7.242. Aduzcan ejemplos de tales funciones periódica f y no periódica g que la función h: 1) $h=f+g$; 2) $h=f\cdot g$ sea periódica y tenga el período mínimo positivo.

7.243. ¿Existe una función para la que cada número irracional es su período y cada número racional no lo es?

7.244. El gráfico de la función $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ es simétrico con relación a cada una de las rectas $x=a$ y $x=b$, $a\neq b$. Demuestren que $y=f(x)$ es una función periódica y hallen su período.

7.245. El gráfico de la función $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ es simétrico con respecto del punto $A(a;\ b)$ y la recta $x=c$ ($c\neq a$). Demuestren que $f(x)$ es una función periódica y hallen su período.

7.246. Demuestren que la función f es periódica si existe tal $T \neq 0$ que para toda $x \in D(f)$, $x+T \in D(f)$, $x-T \in D(f)$ y se cumple una de las siguientes condiciones:

1) $f(x+T) = -f(x)$. 2) $f(x+T) = \frac{1}{f(x)}$.

3) $f(x+T) = \frac{f(x)+a}{bf(x)-1}$. 4) $f(x+T) = \frac{1}{1-f(x)}$.

Hallen el período de la función f.

7.247. Sea la función g inversa a sí misma y, además, está definida la composición $g \circ f$. Sea que existe tal $T \neq 0$ que para toda $x \in D(f)$ se cumplen las condiciones $x+T \in D(f)$, $x-T \in D(f)$ y $f(x+T) = g(f(x))$. Demuestren que f es una función periódica y hallen su período.

Construyan los gráficos de las funciones (**7.248—7.249**):

7.248. 1) $y = 2\cos(2x+1)$. 2) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

3) $y = \operatorname{sen} x \operatorname{ctg} x$. 4) $y = \cos x + |\cos x|$. 5) $y = |\operatorname{sen} 2x - \cos 2x|$.

6) $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$.

7.249. 1) $y = \frac{2}{1+2\cos x}$. 2) $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

3) $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$. 4) $y = |\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x|$.

5) $y = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$.

7.250. Construyan en un mismo sistema de coordenadas los gráficos de las funciones:

1) $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\sqrt{1-\cos^2 x}$.

2) $y = \cos x$ e $y = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

3) $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

4) $y = \cos 2x$ e $y = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Construyan los gráficos de las funciones (**7.251 — 7.253**):

7.251. 1) $y = 0{,}5^{|\operatorname{sen} x|}$. 2) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.

3) $y = \log_{0,5}\cos x$. 4) $y = \log_2 \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/6)+\operatorname{sen} x}$.

5) $y = \log_{\cos x}\operatorname{sen} x$. 6) $y = 1 + \sqrt{\log\cos 2\pi x}$.

7.252. 1) $y = \cos x^2$. 2) $y = \operatorname{sen} x^2$. 3) $y = \cos(\cos x)$.

4) $y = \operatorname{sen}(2\operatorname{sen} x)$. 5) $y = \operatorname{sen}(1/x)$. 6) $y = \operatorname{tg}(\pi/x^2)$.

7) $y=\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{1+x^2}$. 8) $y=\cos\log 2\dfrac{x}{2}$.

7.253. 1) $y=x+\operatorname{sen} x$. 2) $y=x\operatorname{sen} x$.

3) $y=x^2\cos x$. 4) $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$. 5) $y=x\cos(1/x)$.

6) $y=(2\operatorname{sen} 3x)/(1+x^2)$. 7) $y=\dfrac{\cos 2x}{x^2}$.

8) $y=\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. 9) $y=(1+\cos x)\cos 4x$.

7.254. Construyan el gráfico de la función

$$f(x+2t)+f(x-2t),$$

donde

$$f(x)=\begin{cases}1+\cos x, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi,\end{cases}$$

suponiendo que: 1) $t=0$; 2) $t=\pi/6$; 3) $t=\pi/4$; 4) $t=\pi/3$; 5) $t=\pi/2$.

Construyan los gráficos de las funciones (7.255—7.258):

7.255. 1) $y=3\arccos(x/2)+1$.
2) $y=\operatorname{arcctg}|x|$. 3) $y=\operatorname{arcctg}|x|-\operatorname{arctg}|x|$.
4) $y=x+\operatorname{arctg} x$. 5) $y=\operatorname{arcsen}(1/x)$.

7.256. 1) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ e $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.
2) $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ e $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$.
3) $y=\arccos(\operatorname{sen} x)$. 4) $y=\arccos(\cos x)-x$.
5) $y=x-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. 6) $y=x\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.
7) $y=x\arccos(\cos x)$. 8) $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg}(1/x)$.
9) $y=\arccos(\cos x)-\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

7.257. 1) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

2) $y=4\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$. 3) $y=\cos(2\arccos x)$.

4) $y=\operatorname{sen}(3\operatorname{arcsen} x)$. 5) $y=\operatorname{tg}(3\operatorname{arctg} x)$.

6) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$. 7) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

7.258. 1) $y=E(\operatorname{sen} x)$. 2) $y=\cos x-E(\cos x)$.
3) $y=\operatorname{arcsen}(x-E(x))$. 4) $y=\arccos x-E(\arccos x)$.

7.259. Sean máx $\{f(x), g(x)\}$ el mayor y mín $\{f(x), g(x)\}$ el menor de dos números $f(x)$ y $g(x)$ con $x\in D(f)\cap D(g)$. Construyan el gráfico de la función:

1) $y=\text{máx}\{x^2, \sqrt{|x|}\}$. 2) $y=\text{máx}\{x^3, 1/x\}$.
3) $y=\text{máx}\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$. 4) $y=\text{mín}\{2^x, 9/(1+2^{-x})\}$.
5) $y=\text{mín}\{\cos x, \cos 2x\}$. 6) $y=\text{mín}\{\log_2 x, \log_x 2\}$.

7.260. Construyan el gráfico de la función:
1) $y=\cos(3\arccos x)$ 2) $y=\cos(4\arccos x)$.
3) $y=\operatorname{sen}(2\arccos x)$. 4) $y=\operatorname{sen}(3\arccos x)$.

7.261. Demuestren que para todo $n \in \mathbb{N}$:
1) La función $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ coincide sobre $[-1; 1]$ con un polinomio de n grado.
2) La función $\operatorname{sen}(n \arccos x)$ coincide sobre $[-1; 1]$ con la función de la forma $\sqrt{1-x^2} \cdot Q_{n-1}(x)$, donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de $n-1$ grado.

7.262. Construyan el gráfico de la ecuación:
1) $y^2 = x^2 + 4|x| + 4$. 2) $y^2 + 4|y + x| - 4x + 3 = 0$.
3) $y^2 - (5^x - 1)(y - 1) = 0$.
4) $|y| = \dfrac{1}{||x+1|-3|}$. 5) $\log(xy - 1) = \log((1-x)(1-y))$.
6) $|y| = \log_{1/3} ||x + 2| - 1|$.
7) $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$. 8) $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$.

7.263. Demuestren que la ecuación

$$\sqrt{y^3} + xy - x\sqrt{y} - x^2 = 0$$

prefija una función y construyan su gráfico.

7.264. Demuestren que el gráfico de la ecuación

$$x^3 + x^2y + xy^2 - x - y = 0$$

es la unión de los gráficos de tres funciones; constrúyanlos.

7.265. Construyan el gráfico de la ecuación:
1) $|y| = \cos x$. 2) $\cos|x| + \operatorname{sen}|y| = 0$.
3) $|\operatorname{sen} x|^y + |\cos x|^y = 1$.
4) $|y - \operatorname{sen} x + 1| + |y - \operatorname{sen} x| = 1$.

7.266. Hallen los valores de t correspondientes al punto A de la curva:
1) $A(0; 0)$; $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.
2) $A(3; 2)$; $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$.
3) $A(2; 2)$; $x = 2\operatorname{tg} t$, $y = 2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} 2t$.
4) $A(-9; 0)$; $x = 3(2\cos t - \cos 2t)$, $y = 3(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$.

7.267. ¿Qué puntos A o B pertenecen a la curva:
1) $A(5; 1)$, $B(1; -1)$; $x = 2 + 5\cos t$, $y = 5\operatorname{sen} t - 3$.
2) $A(-31; 3)$, $B(10; 8)$; $x = t^3 + t$, $y = t^2 + 2t$?

7.268. Prefijen la curva con una ecuación y constrúyanla:
1) $x = 6t - t^2$, $y = 3t$. 2) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$.
3) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} 2t$. 4) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t$.
5) $x = \operatorname{sen} 3t$, $y = \operatorname{sen} t$.

7.269. Construyan la curva:
1) $x = \dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^2}$. 2) $x = \dfrac{1}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1-t^2}$.
3) $x = \dfrac{t}{1+|t|}$, $y = \dfrac{|t|}{1+t}$. 4) $x = \left|\dfrac{t}{1-t}\right|$, $y = \dfrac{t}{1-|t|}$.
5) $x = 3\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$. 6) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$.
7) $x = \cos t$, $y = t + 2\operatorname{sen} t$. 8) $x = 2^{t-1}$, $y = (t^3 + 1)/4$.

7.270. Construyan el gráfico de la función en coordenadas polares:

1) $r=\frac{\varphi}{\varphi-\pi}$. 2) $r=2\,|\cos 3\varphi|$.

3) $\varphi=\frac{r}{r-1}$. 4) $\varphi=\operatorname{arcsen}(r-1)$.

7.271. Sea α un número irracional,

$$f(x)=\alpha x-E(\alpha x),\ x\in\mathbb{Z}.$$

Demuestren que:

1) $f(x)<1$ para toda $x\in\mathbb{Z}$.

2) $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)$ si $f(x_1)-f(x_2)>0$;
$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)-1$ si $f(x_1)-f(x_2)<0$.

3) Para toda $\varepsilon>0$ se hallará tal número $x\in\mathbb{Z}$ que $0<f(x)<\varepsilon$.

7.272. La función f se denomina *convexa hacia las y positivas (hacia las y negativas) sobre el intervalo X* si para toda $x_1, x_2\in X$ y toda $\alpha\in[0;\,1]$ es cierta la desigualdad

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

(respectivamente

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)).$$

El gráfico de la función convexa hacia las y positivas sobre el segmento $[a;\,b]$ no yace bajo la recta trazada por los puntos $(a;\,f(a))$, $(b;\,f(b))$.

Demuestren que la función:

1) $y=ax^2+bx+c$ es convexa hacia las y negativas sobre $\mathbb{R}$ con $a>0$ y hacia las y positivas sobre $\mathbb{R}$ con $a<0$.

2) $y=a^x$ es convexa hacia las y negativas sobre $\mathbb{R}$.

3) $y=\log_a x$ es convexa hacia las y positivas en $(0;\,+\infty)$ con $a>1$ y hacia las y negativas en $(0;\,+\infty)$ con $0<a<1$.

4) $y=\operatorname{sen} x$ es convexa hacia las y positivas en $[0;\,\pi]$ y hacia las y negativas en $[-\pi;\,0]$.

7.273. Indiquen los intervalos de convexidad hacia las y positivas y negativas de las funciones:

1) $y=|x|$. 2) $y=x^3$. 3) $y=1/x$. 4) $y=\frac{2x-5}{x+1}$.

5) $y=\operatorname{ch} x$. 6) $y=\operatorname{sh} x$. 7) $y=\log|x|$. 8) $y=|\ln x|$.

7.274. Demuestren que si f y g son funciones convexas hacia las y positivas, la función $\alpha f+\beta g$, donde $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, también lo es.

7.275. Demuestren que:

1) La función inversa a una función convexa hacia las y positivas estrictamente creciente, es convexa hacia las y negativas.

2) La función inversa a una función convexa hacia las y positivas estrictamente decreciente, es convexa hacia las y positivas.

7.276. Indiquen los intervalos de convexidad hacia las y positivas y hacia las y negativas de las funciones:
1) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$. 2) $y = \cos^2 x$, $x \in (0; 2\pi)$.
3) $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$. 4) $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

7.277. La función f es tal que para cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ es cierta la desigualdad

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

Demuestren que para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ es cierta la desigualdad

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) < \frac{1}{3}(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)).$$

7.278. La función f es convexa hacia las y negativas sobre $\mathbb{R}$. Demuestren que para toda $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ y toda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ es cierta la desigualdad (llamada de Jensen)

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

7.279. La función $f(x)$ está definida sobre $\mathbb{R}$ y para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

1) Demuestren que para todas las x racionales

$$f(x) = f(1) \cdot x.$$

2) Demuestren que si f es no acotada en el entorno de cierto punto, ella tampoco lo es en cualquier entorno de cualquier punto.

7.280. La función f con $D(f) \neq \{0\}$ es tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $x_1, x_2 \in D(f)$ se verifican las condiciones

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(f),$$
$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Demuestren que $D(f) = \mathbb{R}$ y que para toda $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(1)\, x.$$

7.281. Para la función f existen números $T \neq 0$ y a tales que para toda $x \in D(f)$ tiene lugar

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f)$$

y que es cierta una de las igualdades:
1) $f(x + T) = f(x) + a$, 2) $f(x + T) = f(x) + ax$.

Demuestren que, correspondientemente:

1) $f(x)=\varphi(x)+\frac{a}{T}x$,

2) $f(x)=\varphi(x)+\frac{a}{2T}(x^2-Tx)$,

donde $\varphi(x)$ es una función periódica con período T.

7.282. Para la función f existen un número $T\neq 0$ y el polinomio $Q_n(x)$ del grado n tales que para cualquiera $x\in D(f)$ tiene lugar

$$x+T\in D(f),\quad x-T\in D(f)$$

y

$$f(x+T)=f(x)+Q_n(x).$$

Demuestren que existe tal polinomio $P_{n+1}(x)$ del grado $n+1$ que

$$f(x)=\varphi(x)+P_{n+1}(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función periódica con período T.

7.283. Para la función f existen los números $T\neq 0$ y $k>0$ tales que para cualquiera $x\in D(f)$ tiene lugar

$$x+T\in D(f),\quad x-T\in D(f)$$

y

$$f(x+T)=kf(x).$$

Demuestren que existe un número $a>0$ tal que

$$f(x)=a^x\varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función periódica.

---

14. Sucesiones. Recibe el nombre de *sucesión* una función cuyo campo de definición es el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales. Los valores de semejante función se designan con x_n (o bien a_n, b_n, etc.) y se denominan *términos de una sucesión*, el número n lleva el nombre de *número* del término x_n. La sucesión se anota así

$$\{x_n\} \text{ o bien } x_n,\ n\in N, \text{ o bien } x_n,\ n=1, 2, \ldots$$

Con otras palabras, si a cada número natural n se le contrapone el número x_n, se dice que se ha prefijado la sucesión $\{x_n\}$.

En calidad de sucesión de números puede tomarse no sólo un conjunto de números naturales, sino también cualquier otro subconjunto infinito de números enteros, p. ej., un conjunto de números naturales pares (en tal caso, la sucesión se designa $\{x_{2k}\}$), un conjunto de números enteros no negativos 0, 1, 2, . . ., etc.

El conjunto de valores de una sucesión puede ser tanto finito como infinito, p. ej., el conjunto de valores de la sucesión $\{(-1)^n\}$ consta de dos números 1 y -1, el conjunto de los valores de la sucesión

$\{1/n\}$ es infinito. La sucesión cuyo conjunto de valores consta de un número recibe el nombre de *estacionaria*.

Una sucesión puede ser prefijada con ayuda de la fórmula de la forma

$$x_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{33}$$

que expresa x_n por medio de un número n, p. ej.,

$$x_n = 2^n, \quad n \in \mathbb{N};$$
$$x_n = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Semejante fórmula es llamada *fórmula del término general de la sucesión*. Con el fin de prefijar una sucesión se hace también uso de fórmulas *recurrentes*, es decir, de aquellas que expresan el n-ésimo término de la sucesión con ayuda de los términos con los números menores (los términos anteriores). De esta forma se definen las progresiones aritmética y geométrica (§ 4). Las sucesiones dadas a continuación son otros ejemplos

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = bx_{n-1} + c, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2,$$
$$x_1 = a, \ x_2 = b, \ x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2, \quad n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 3,$$

aquí a, b, c son los números prefijados. Una sucesión puede ser prefijada también con otros procedimientos, p. ej., x_n es la n-ésima cifra en la anotación decimal del número π (o sea, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, etc.).

Ejemplo 21. Hallen la fórmula del término general para las sucesiones:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ (sucesión de Fibonacci);

2) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{4} x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$;

3) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

$\triangle$1) Hallemos tal sucesión de la forma $\{\lambda^n\}$ que satisfaga la condición $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ (aquí $\lambda \neq 0$ y, hablando en general, puede asimismo ser un número complejo). Después de poner $x_n = \lambda^n$ obtenemos la ecuación $\lambda^2 = \lambda + 1$ (es llamada ecuación característica), de donde $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Cada una de las sucesiones $\{\lambda_1^n\}$ y $\{\lambda_2^n\}$ satisface la condición $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Para cualesquiera números α y β, la sucesión con término general $x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ también satisface dicha condición. Hallemos α y β de forma que

$$x_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 1, \ x_2 = \alpha\lambda_1^2 + \beta\lambda_2^2 = 1,$$

obtenemos

$$\alpha=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \beta=\frac{\lambda_1-1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Poniendo los valores de λ_1, λ_2, α y β en la fórmula $x_n = \alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n$, hallamos la fórmula del término general

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\quad n\in\mathbb{N},$$

de la sucesión definida con las condiciones 1).

2) Obrando como en el caso 1) llegaremos a la ecuación característica $4\lambda^2-4\lambda+1=0$ que tiene una raíz de segundo orden de multiplicidad $\lambda=1/2$. La sucesión $\{2^{-n}\}$ satisface la condición

$$x_n=x_{n-1}-\frac{1}{4}x_{n-2},\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3.$$

Como es fácil de comprobar, $\{n2^{-n}\}$ es otra de semejantes sucesiones. Las sucesiones de la forma $\{\alpha 2^{-n}+\beta n2^{-n}\}$ también satisfacen la indicada condición. Determinando α y β de la condición

$$x_1=\alpha\cdot\frac{1}{2}+\beta\cdot\frac{1}{2}=a,\quad x_2=\alpha\cdot\frac{1}{4}+\beta\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=b,$$

obtenemos

$$\alpha=4a-4b,\ \beta=4b-2a.$$

Es decir, la fórmula del término general de la sucesión prefijada con las condiciones 2) tiene la forma

$$x_n=(2a-2b+(2b-a)\,n)\,2^{1-n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

3) En este caso la ecuación característica $\lambda^2=\lambda-1$ tiene raíces complejas $\lambda_1=e^{i\pi/3}$ y $\lambda_2=e^{-i\pi/3}$. Busquemos la sucesión que satisfaga las condiciones 3) en la forma $x_n=\alpha e^{i\pi n/3}+\beta e^{-i\pi n/3}$ y de las condiciones $x_1=0$, $x_2=1$ hallamos que

$$\alpha=\frac{1}{i\sqrt{3}}e^{-i\pi/3},\ \beta=-\frac{1}{i\sqrt{3}}e^{i\pi/3}.$$

De aquí,

$$x_n=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(e^{i\pi(n-1)/3}-e^{-i\pi(n-1)/3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\pi(n-1)}{3},\quad n\in\mathbb{N}.\ \blacktriangle$$

La sucesión prefijada con la fórmula recurrente de la forma

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\ldots+a_kx_{n-k},$$
$$n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant k,$$

donde $a_1,\ldots,a_k$ y k son los números prefijados, $k\in\mathbb{N}$, recibe el nombre de *sucesión recíproca del grado k*.

La sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ *está acotada inferiormente* si existe un número C tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad

$$x_n \geqslant C.$$

La sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ está *acotada superiormente* si existe un número C tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad

$$x_n \leqslant C.$$

La sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ *es acotada* si existen tales números C_1 y C_2 que para todo $n \in \mathbb{N}$ son ciertas las desigualdades

$$C_1 \leqslant x_n \leqslant C_2.$$

Esta definición es equivalente a lo siguiente: la sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ es acotada si existe tal número $C > 0$ que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad $|x_n| \leqslant C$, o con mayor brevedad,

$$\exists C > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \ |x_n| \leqslant C. \tag{34}$$

Ejemplo 22. Demuestren que las sucesiones:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $x_n = \dfrac{n}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$, donde $a > 1$, son acotadas.

$\triangle$ 1) Ya que

$$|(-1)^n n + 10| \leqslant |(-1)^n n| + 10 = n + 10, \ \ \sqrt{n^2+1} > n,$$

tenemos

$$|x_n| = \frac{|(-1)^n n + 10|}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leqslant 11,$$

es decir, (34) se verifica con $C = 11$.

2) Está claro que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n}{a^n} > 0.$$

Como $a - 1 > 0$, de acuerdo con la desigualdad de Bernoulli, para todo $n \in \mathbb{N}$, tendremos

$$a^n = (1 + a - 1)^n \geqslant n(a-1),$$

de donde

$$\frac{n}{a^n} \leqslant \frac{1}{a-1}.$$

Así, pues, para cualquier n son ciertas las desigualdades

$$0 < \frac{n}{a^n} \leqslant \frac{1}{a-1},$$

es decir, la sucesión es acotada. ▲

La negación de la definición de una sucesión acotada es la siguiente: la sucesión x_n, $n \in N$ *es acotada* si para todo $C > 0$ hay tal $n \in \mathbb{N}$ que $|x_n| > C$, con mayor brevedad

$$\forall C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| > C. \tag{35}$$

De modo análogo se enuncian las negaciones de las definiciones de las sucesiones acotadas superiormente (inferiormente).

Ejemplo 23. Demuestren que las sucesiones:

1) $x_n = n^{\cos \pi n}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $x_n = \dfrac{100 - n^3}{n^2 - 10}$, $n \in \mathbb{N}$

son no acotadas.

△1) Si $n = 2k$, $\cos 2\pi k = 1$ y $x_{2k} = 2k$. Sea C un número positivo tomado al azar. Tomemos el número par $2k$ mayor que C (p.ej., $2k = 2(E(C) + 1)$), entonces $x_{2k} > C$, es decir (35) se verifica y la sucesión dada es no acotada.

2) De la fórmula del término general, tenemos

$$|x_n| = \frac{n^3 \left| \frac{100}{n^3} - 1 \right|}{n^2 \left| 1 - \frac{10}{n^2} \right|} = n \left| \frac{\frac{100}{n^3} - 1}{1 - \frac{10}{n^2}} \right|.$$

Si $n \geqslant 6$,

$$\frac{100}{n^3} < \frac{1}{2} \text{ y } 1 - \frac{100}{n^3} > \frac{1}{2},$$

pero $0 < 1 - \frac{10}{n^2} < 1$, por lo que

$$|x_n| = n \frac{1 - \frac{100}{n^3}}{1 - \frac{10}{n^2}} > n \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{n}{2}.$$

Para un número positivo arbitrario C tomemos $n > 2C$ (p.ej., $n = [2C] + 1$), entonces $|x_n| > \frac{n}{2} > C$ y, por consiguiente, la sucesión dada es no acotada. ▲

La sucesión x_n, $n \in N$ lleva el nombre de *creciente* (*no decreciente*) *comenzando desde el número* n_0 si para cualquiera $n \geqslant n_0$, $n \in N$ es cierta la desigualdad $x_{n+1} \geqslant x_n$.

La sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$ se denomina *decreciente* (*no creciente*) *comenzando desde el número* n_0, si para cualquiera $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$, es cierta la desigualdad $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Si en estas definiciones son ciertas, correspondientemente, las desigualdades $x_{n+1} > x_n$ o bien $x_{n+1} < x_n$, la sucesión lleva el nombre de *estrictamente creciente* o bien *estrictamente decreciente a partir del número* n_0.

Una sucesión creciente o decreciente a partir del número n_0 se denomina *monótona a partir del número* n_0 (estrictamente creciente o decreciente, es decir, *estrictamente monótona*).

Una sucesión creciente a partir del número $n_0 = 1$ se llama *creciente* (de modo análogo, *decreciente*, etc.).

La definición dada de la sucesión creciente a partir del número n_0 es equivalente a la definición de una función creciente sobre un conjunto de números naturales $n \geqslant n_0$, dada con anterioridad (p. 6): la sucesión x_n, $n \in \mathbb{N}$, crece a partir del número n_0, si para toda n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant n_0$, $n_2 \geqslant n_0$, de la desigualdad $n_1 < n_2$ se desprende la desigualdad $x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$. Una equivalencia análoga tiene lugar asimismo para la sucesión decreciente a partir del número n_0, etc.

Ejemplo 24. Demuestren que la sucesión

$$x_n = \frac{5^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

decrece estrictamente a partir de cierto número.

△Consideremos la razón

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, 5^n} = \frac{5}{n+1}.$$

Vemos que con $n \geqslant 5$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{5}{6} < 1$$

y, por lo tanto, $x_{n+1} < x_n$ (ya que $x_n > 0$). Así, pues, la sucesión dada decrece estrictamente a partir de $n = 5$. ▲

Ejemplo 25. Demuestren que la sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

crece estrictamente.

△Consideremos la razón

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\,(n+1)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

De la desigualdad de Bernoulli tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Por ello, para cualquier $n \in N$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

es decir, $x_{n+1} > x_n$ y, por consiguiente, la sucesión dada es estrictamente creciente. ▲

Ejemplo 26. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$, donde

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}:$$

1) crece estrictamente si $a = 0$,
2) decrece estrictamente si $a = 4$.

△ Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_{n+2}^2 = 6 + x_{n+1}$, $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$, de donde

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n. \tag{36}$$

Realicemos la demostración con ayuda del método de inducción matemática.

1) Si $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{6} > x_1$.

Supongamos que la desigualdad $x_{n+1} > x_n$ es cierta para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, de (36) se desprende que $x_{n+2}^2 > x_{n+1}^2$ y como $x_{n+2} > 0$ y $x_{n+1} > 0$, es cierta la desigualdad $x_{n+2} > x_{n+1}$. De forma que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea, la sucesión crece estrictamente.

2) En este caso, $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{10} < x_1$. Como también más arriba, es fácil demostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, de la desigualdad $x_{n+1} < x_n$ se desprende la desigualdad $x_{n+2} < x_{n+1}$. Esto significa que $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, en este caso, la sucesión decrece estrictamente. ▲

La cota superior (inferior) del conjunto de términos de la sucesión $\{x_n\}$ recibe el nombre de *cota superior (inferior) de la sucesión* y se designa

$$\sup \{x_n\} \quad (\inf \{x_n\}).$$

El término x_n de la sucesión $\{x_n\}$ se llama *máximo (mínimo)* si $x_n \leqslant x_{n_0}$ $(x_n \geqslant x_{n_0})$ para todo n y se designa

$$\text{máx } \{x_n\} \quad (\text{mín } \{x_n\}).$$

Si existe máx $\{x_n\}$ (mín $\{x_n\}$), entonces

$$\sup \{x_n\} = \text{máx } \{x_n\} \quad (\inf \{x_n\} = \text{mín } \{x_n\}).$$

De la existencia del sup $\{x_n\}$ (inf $\{x_n\}$) finito no se deduce la existencia de máx $\{x_n\}$ (mín $\{x_n\}$).

Sea x_n, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión arbitraria, en tanto que n_k, $k \in \mathbb{N}$, una sucesión estrictamente creciente de números naturales. La sucesión $y_k = x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, recibe el nombre de subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$. Se suele decir que la sucesión $\{x_n\}$ contiene la sucesión $\{x_{n_k}\}$.

Ejemplo 27. Demuestren que toda sucesión no acotada por las y positivas contiene una subsucesión estrictamente creciente.

△ El carácter no acotado de la sucesión $\{x_n\}$ significa que

$$\forall C \exists n \in \mathbb{N}:\ x_n > C. \qquad (37)$$

Sea $n_1 = 1$. Para $C = x_1$, según (37), existe tal $n_2 \in \mathbb{N}$ que $x_{n_2} > x_1$. Está claro que $n_2 > 1$. Ahora tomemos $C = \max\{x_1, \ldots, x_{n_2}\}$. De acuerdo con (37) existe tal $n_3 \in \mathbb{N}$ que $x_{n_3} > C$. Está claro que $n_3 > n_2$, ya que $x_i \leqslant C$ para $i = 1, \ldots, n_2$. Supongamos que hemos separado los términos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, $k \geqslant 2$, tales que $x_{n_{i+1}} > x_{n_i}$ y $n_{i+1} > n_i$ para $i = 1, \ldots, k-1$. Tomemos $C = \max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n_k} \{x_p\}$. Según (37) existe tal $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ que $x_{n_{k+1}} > C$. Con ello, $n_{k+1} > n_k$, ya que $x_i \leqslant C$ para $i = 1, \ldots, n_k$. Así, pues, de la sucesión no acotada $\{x_n\}$ se ha separado la sucesión creciente x_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, en la que $n_{k+1} > n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De modo que $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$.

7.284. ¿Cuáles de los números a, b son términos de la sucesión $\{x_n\}$ si:

1) $a = 1215$, $b = 12\,555$; $x_n = 5 \cdot 3^{2n-3}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $a = 6$, $b = 8$; $x_n = \sqrt{n^2 + 32n} - n$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $a = 6$, $b = 11$; $x_n = (n^2 + 11)/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

4) $a = 248$, $b = 2050$; $x_n = 2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$?

7.285. ¿Para qué términos x_n de la sucesión $\{(-3)^{3-2n}\}$ se cumple la desigualdad $|x_n| > 0{,}001$?

7.286. Indiquen cierto número N tal que para todo $n \geqslant N$ los términos de la sucesión $\{x_n\}$ satisfagan la desigualdad prefijada:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n - 3}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n| < 0{,}1$.

2) $x_n = \dfrac{n+3}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n - 1| < 0{,}01$.

3) $x_n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 + 2^n}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n + 2| < 0{,}001$.

4) $x_n = \sqrt[n]{1{,}5}$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n - 1| < 0{,}1$.

5) $x_n = (\log_2 n)/n$, $n \in \mathbb{N}$; $|x_n| < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$.

Indicación. Demuestren y hagan uso de la desigualdad

$$2^{1/k} - 1 > \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

7.287. Hallen el término máximo de la sucesión:

1) $\{21/(3n^2 - 14n - 17)\}$. 2) $\{n/(n^2 + 9)\}$.

3) $\{2^{-n} - 3 \cdot 4^{-n}\}$. 4) $\{n^2/2^n\}$.

7.288. Hallen el término mínimo de la sucesión:

1) $\{(2n-5)(2n-11)\}$. 2) $\left\{n + \frac{5}{n}\right\}$.

3) $\{\log_3^2 n - 3\log_3 n\}$. 4) $\{1, 4^n/n\}$.

7.289. Sea $s(p)$ la suma de las cifras del número natural p (si $p \leqslant 9$, $s(p) = p$).

1) Demuestren que si $p \geqslant 100$, $s(p) < p/10$.

2) Sea $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = s(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que hay tal número n_0 que todos los números de x_n con números $n \geqslant n_0$ son iguales.

3) Sea $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = s(s(x_n) + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Hallen x_{1984} si: a) $x_1 = 1983$; b) x_1 es múltiplo de 9 y $x_2 \leqslant 1985$; c) $x_1 = 1984$.

7.290. ¿Es la sucesión $\{y_k\}$ una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ si:

1) $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$; a) $y_k = k^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$; b) $y_k = k^2 - 4k + 5$, $k \in \mathbb{N}$.

2) $x_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$; a) $y_k = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$; b) $y_k = 2(k + (-1)^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

3) $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$; a) $y_k = 1/(k - \cos \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$; b) $y_k = 1/(3k - \cos \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$?

7.291. Sea $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$. Demuestren que $n_k \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}$.

7.292. Aduzcan un ejemplo de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_k\}$ que $\forall k \exists n_k$: $y_k = x_{n_k}$, pero de forma que $\{y_k\}$ no sea subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$.

7.293. Aduzcan un ejemplo de la sucesión $\{x_n\}$ que satisfaga la condición:

1) $\forall m \exists n$: $x_m \neq x_n$.

2) $\exists N \forall n \geqslant N$: $x_n < x_N$.

3) $\exists N_1 \forall n \geqslant N_1$: $x_{N_1} > x_n$ y $\exists N_2 \forall n \geqslant N_2$: $x_{N_2} < x_n$.

4) $\exists N \forall n > N \forall m > n$: $x_n < x_m$.

5) $\forall n \exists m > n \forall k > n$: $x_m < x_n < x_k$.

7.294. Indiquen la fórmula del término general de la sucesión cuyos primeros términos son los números:

1) $\{8;\ 14;\ 20;\ 26;\ 32;\ \ldots\}$.

2) $\{-0{,}5;\ 1{,}5;\ -4{,}5;\ 13{,}5;\ -40{,}5;\ \ldots\}$.

3) $\{2;\ 3/2;\ 4/3;\ 5/4;\ 6/5;\ \ldots\}$.

4) $\{1;\ 3;\ 1;\ 3;\ 1;\ \ldots\}$.

5) $\{5;\ 7;\ 11;\ 19;\ 35;\ \ldots\}$.

6) $\{1;\ 2;\ 6;\ 24;\ 120;\ \ldots\}$.

7) $\{-2;\ -1/2;\ -4/3;\ -3/4;\ -6/5;\ \ldots\}$.

8) $\{0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ 0{,}33333;\ \ldots\}$.

9) $\{1/2;\ 1/2;\ 3/8;\ 1/4;\ 5/32;\ \ldots\}$.

7.295. De acuerdo con tres términos x_1, x_2, x_3 conocidos de una sucesión hallen la fórmula del término general en la forma $x_n = f(n)$, donde $f(x)$ es un polinomio no mayor del segundo grado.

7.296. Demuestren que si $x_1 = a^{1/k}$ $(a > 0)$

$$x_{n+1}=(a/x_n)^{1/k},\quad n\in\mathbb{N},\ \text{entonces}$$
$$x_n=a^{(1-(-k)^{-n})/(k+1)}.$$

7.297. Sea

$$x_0=1,\quad x_1=a,\quad x_n=(\alpha+\beta)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}\beta^k x_{n-k}x_k,$$
$$n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant 2,$$

donde a, α, β son números positivos. Hallen la fórmula del término general de esta sucesión y el número de término máximo.

7.298. 1) Hallen el término general de la sucesión $\{x_n\}$ si $x_1=a$ y $x_{m+n}=x_m+x_n+mn$ para cualesquiera m, $n\in\mathbb{N}$.

2) ¿Existe tal sucesión $\{x_n\}$ que para cualesquiera m, $n\in N$ es cierta la igualdad $x_{m+n}=x_m+x_n+m+n$?

7.299. Hallen la fórmula del término general de la sucesión prefijada por procedimiento recurrente (a, b, α, β son los números dados):

1) $x_1=0,\ x_{n+1}=(x_n+1)/(n+1),\ n\in\mathbb{N}.$
2) $x_1=a,\ x_{n+1}=(n+1)(x_n+1),\ n\in\mathbb{N}.$
3) $x_1=1/2,\ x_{n+1}=1/(2-x_n),\ n\in\mathbb{N}.$
4) $x_1=a,\ x_{n+1}=\alpha x_n+\beta 2^n,\ \alpha\neq 2,\ n\in\mathbb{N}.$
5) $x_1=1/2,\ x_{n+1}=2/(3-x_n),\ n\in\mathbb{N}.$
6) $x_1=0,\ x_2=1,\ x_{n+2}=(3x_{n+1}-x_n)/2,\ n\in\mathbb{N}.$
7) $x_1=a,\ x_2=b,\ x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n,\ n\in\mathbb{N}.$

7.300. Hallen la fórmula del término general para las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ si $x_1=a$, $y_1=b$

$$x_{n+1}=(2x_n+y_n)/3,\quad y_{n+1}=(x_n+2y_n)/3,\quad n\in\mathbb{N}.$$

7.301. La sucesión $\{x_n\}$ ha sido prefijada según procedimiento recurrente: $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n$, $n\in\mathbb{N}$; a, b, p, q son los números dados.

1) Demuestren que si la ecuación $\lambda^2=p\lambda+q$ tiene diferentes raíces λ_1 y λ_2, el término general de la sucesión $\{x_n\}$ tiene la forma

$$x_n=\frac{(\lambda_2 a-b)\lambda_1^{n-1}-(\lambda_1 a-b)\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2-\lambda_1},\quad n\in\mathbb{N}.$$

2) Demuestren que si la ecuación $\lambda^2=p\lambda+q$ tiene la raíz múltiple $\lambda\neq 0$, el término general de la sucesión $\{x_n\}$ tiene la forma

$$x_n=(2a\lambda-b+n(b-a\lambda))\lambda^{n-2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

7.302. La sucesión $\{x_n\}$ ha sido prefijada con procedimiento recurrente:

$$x_1=a,\ x_2=b,\ x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n+r,\ n\in\mathbb{N};$$

a, b, p, q, r son los números dados. Hallen la fórmula del término general si

1) la ecuación $\lambda^2 = p\lambda + q$ tiene diferentes raíces λ_1 y λ_2;

2) la ecuación $\lambda^2 = p\lambda + q$ tiene raíz múltiple $\lambda_0 \neq 0$.

7.303. Hallen la fórmula del término general de una sucesión prefijada según procedimiento recurrente:

1) $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = 0{,}5\ (x_{n+1} + x_n) + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

7.304. Hallen la fórmula del término general de la sucesión $\{x_n\}$ si $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = 1/(1 + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

7.305. Hallen todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que las fórmulas $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(2 + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ prefijan la sucesión. Hallen la fórmula del término general de esta sucesión.

7.306. Sean $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(4 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Demuestren que si $a \notin [3; 4]$, dichas fórmulas prefijan una sucesión y hallen la fórmula del término general.

2) Hallen todos los valores de a con los que dichas fórmulas no determinan una sucesión.

7.307. Hallen la fórmula del término general de la sucesión prefijada por procedimento recurrente (a, b, c, d son los números dados):

1) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n/(b + x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $x_1 = a$, $x_{n+1} = bx_n/(c + dx_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

7.308. Sean $x_1 = p$, $p \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que existe una subsucesión de esta sucesión en la que todos los términos se dividen entre 3.

7.309. Sean

$$S_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad a_n = 3 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2!} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3!} - \dots - \frac{1}{(n-1)\,n\cdot n!}.$$

Demuestren que

$$a_n = S_n + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

7.310. Demuestren que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas, también lo son las sucesiones

1) $\{x_n \cdot y_n\}$; 2) $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

7.311. Aduzcan un ejemplo de tales sucesiones acotadas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, que la sucesión $\{x_n/y_n\}$ no es acotada.

7.312. La sucesión $\{x_n\}$ es acotada, $\{y_n\}$ satisface la condición: existe tal $C > 0$ que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad $|y_n| \geqslant C$. Demuestren que la sucesión $\{x_n/y_n\}$ es acotada.

7.313. La sucesión $\{x_n\}$ es no acotada. Demuestren que ella contiene tal subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que $x_{n_k} > k$, $k \in \mathbb{N}$, o bien $x_{n_k} < -k$, $k \in \mathbb{N}$.

7.314. Demuestren la acotación de las sucesiones:
1) $\left\{\frac{2n^2-1}{2+n^2}\right\}$. 2) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$. 3) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\right\}$.
4) $\left\{\frac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}\right\}$. 5) $\left\{\frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)}\right\}$.

7.315. Demuestren que las siguientes sucesiones son no acotadas:
1) $\{(-1)^n n\}$. 2) $\{n^2-n\}$. 3) $\{(1-n)/\sqrt{n}\}$.
4) $\{n+(-1)^n n\}$. 5) $\{n^{(-1)^n}\}$. 6) $\{(1-n)^{\operatorname{sen}(\pi n/2)}\}$.
7) $\{n^3/(n^2+1)\}$. 8. $\{(n-n^4)/(n+2)^3\}$.

7.316. Sean P_k y Q_l polinomios de grado k y l, respectivamente, $Q_l(n)\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Demuestren que la sucesión $\{P_k(n)/Q_l(n)\}$: 1) es acotada si $k\leqslant l$; 2) no es acotada si $k>l$.

7.317. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:

$$1)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},\quad n\in\mathbb{N}.\qquad 2)\ x_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!},\quad n\in\mathbb{N}.$$

$$3)\ x_n=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j,\quad n\in\mathbb{N}.$$

7.318. Demuestren que si $a_1=1$, $a_{n+1}=(n+1)(a_n+1)$, $n\in\mathbb{N}$, la sucesión $x_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$ es acotada *).

7.319. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$ es acotada y hallen $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$ si:

$$1)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)},\ n\in\mathbb{N}.\qquad 2)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1},\ n\in\mathbb{N}.$$

$$3)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k},\ n\in\mathbb{N}.\qquad 4)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k},\ n\in\mathbb{N}.$$

Demuestren que las sucesiones (**7.320—7.322**) son acotadas:

7.320. 1) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\,2k}$, $n\in\mathbb{N}$.

2) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+(k-1)d)(a+kd)}$, $n\in\mathbb{N}$.

---

*) $\prod\limits_{k=1}^{n} c_k$ es el producto de los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

3) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$, $n \in \mathbb{N}$. 4) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

5) $x_n = \log_2 \left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

7.321. 1) $\left\{ \frac{3n+5}{\sqrt{4n^2-1}} \right\}$. 2) $\left\{ \frac{\sqrt{n^3+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)} \right\}$.

3) $\left\{ \frac{\sqrt[3]{n^4+2n} + \sqrt{n^3+2}}{3n-2n^2} \right\}$.

7.322. 1) $\{\sqrt{n^2+1} - n\}$. 2) $\{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}\}$.

3) $\{n(\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4-n})\}$.

4) $\{\sqrt[3]{9n-n^3} + \sqrt[3]{9n+n^3}\}$.

5) $\{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2-1}\}$. 6) $\left\{ \sqrt{\frac{n^4+n^3}{n^2+1}} - \sqrt{n^2-1} \right\}$.

7.323. Demuestren que las siguientes sucesiones son no acotadas:

1) $\{\sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1}\}$.

2) $\{\sqrt{n^2+(-1)^n \sqrt{n^3}} - n\}$.

7.324. ¿Con cuáles p, q, $0 \leqslant q < p$ es acotada la sucesión:

1) $\{\sqrt{n^p+n^q+1} - \sqrt{n^p-n^q+1}\}$.

2) $\{\sqrt[3]{n^p-n^q+1} - \sqrt[3]{n^p+1}\}$.

3) $\{\sqrt[k]{n^p+an^q+1} - \sqrt[k]{n^p+bn^q+1}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $a \neq b$?

7.325. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:

1) $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$. 2) $\{\sqrt[n]{n}\}$. 3) $\left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right) \right\}^n$, $x > 0$.

7.326. 1) Demuestren que la sucesión $\{(\ln n)/n\}$ es acotada superiormente con el número $\ln 2$.

2) Hallen $\sup \{(\ln n)/n\}$.

7.327. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:

1) $\left\{ \frac{2^n+1}{3^n-2} \right\}$. 2) $\left\{ \frac{5^{2n+1}+2^n}{1-25^n} \right\}$.

3) $\left\{ \frac{\ln^2 n+10}{\ln^2 n^2+2} \right\}$. 4) $\{\log(3n+5) - \log(n+1)\}$.

5) $\{\ln(\sqrt{2n^2+1} - n) - \ln n\}$. 6) $\left\{ \frac{\ln(n^2+1) - \ln(n+1)}{\ln(n+0{,}5)} \right\}$.

7) $\left\{ \frac{n+\ln n}{n+1} \right\}$. 8) $\left\{ n \ln \frac{n+1}{n} \right\}$. 9) $\{\ln^2(n+1) - \ln^2 n\}$.

7.328. Demuestren que las siguientes sucesiones son no acotadas:

1) $\{5^n-4^n\}$. 2) $\left\{\frac{3^n-2^n}{2^n+1}\right\}$. 3) $\sqrt[n]{n!}$. 4) $\left\{\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}^{*)}$.

5) $\{2^n/n^2\}$. 6) $\{a^n/n^k\}$, $|a|>1$, $k\in\mathbb{R}$. 7) $\left\{\frac{n+1}{\log_2(n+1)}\right\}$.

7.329. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:

1) $\{n/3^n\}$. 2) $\{n^2/2^n\}$. 3) $\{n^p/2^n\}$, $p\in\mathbb{R}$.

4) $\{nq^n\}$, $|q|<1$. 5) $\{n^pq^n\}$, $p\in\mathbb{R}$, $|q|<1$.

7.330. Demuestren:

1) Que la siguiente sucesión es acotada:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n} kq^k,\quad n\in\mathbb{N},\quad |q|<1.$$

2) Que la siguiente sucesión no es acotada:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n} kq^{n-k},\quad n\in\mathbb{N},\quad q\in\mathbb{R},\quad q\neq 0.$$

7.331. Demuestren que una sucesión $\{x_n\}$ tal que

$$x_1=2,\ x_{n+1}=\frac{x_n^4+1}{5x_n},\quad n\in\mathbb{N},$$

1) es acotada inferiormente con el número 1/5; 2) es acotada superiormente con el número 2.

7.332. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:

1) $x_1=a>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{b^2}{x_n}\right)$.

2) $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=(x_{n+1}+x_n)/2$.

7.333. Demuestren que las siguientes sucesiones son no acotadas:

1) $x_1=x_2=1$, $x_{n+2}=x_{n+1}+6x_n$.

2) $x_1=-4$, $x_2=3$, $x_{n+2}=x_{n+1}+\frac{3}{4}x_n$.

7.334. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_1=x_2=1$,

$$x_{n+2}=x_{n+1}+\frac{x_n}{2^n},\ n\in\mathbb{N},\ \text{es acotada.}$$

7.335. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números naturales tal que la sucesión

$$S_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n},\ n\in\mathbb{N},$$

es acotada. Demuestren que la sucesión

$$y_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right),\quad n\in\mathbb{N},$$

es acotada.

---

*) $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\ \dots\ 2n$; $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\ \dots\ (2n-1)$.

7.336. Demuestren que la sucesión es no acotada

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.337. 1) Demuestren que si la sucesión $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$ es acotada, la sucesión $\{x_n\}$ también lo es.

2) ¿Es cierto que si la sucesión $\{x_n\}$ es no acotada, también lo será la sucesión $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$, $n \in \mathbb{N}$?

7.338. Demuestren que las siguientes sucesiones son acotadas:
1) $\{n(a^{1/n} - 1)\}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
2) $\left\{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2} - \sqrt{n}\right\}$.
3) $\{n^{\alpha}(\sqrt[n]{n} - 1)\}$, $\alpha < 1$.

Demuestren que la sucesión dada es monótona a partir de cierto número (7.339—7.341):

7.339. 1) $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$. 2) $\left\{\frac{3n+4}{n+2}\right\}$. 3) $\left\{\frac{100n}{n^2+16}\right\}$.
4) $\{n^3 - 6n^2\}$. 5) $\left\{\frac{n^2+24}{n+1}\right\}$. 6) $\left\{\frac{n^3}{n^2-3}\right\}$.
7) $\left\{\frac{n^2}{n^3+32}\right\}$. 8) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n}}\right\}$.

7.340. 1) $\{\sqrt{3n-2}\}$. 2) $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\}$.
3) $\{\sqrt[3]{n^3-1} - n\}$. 4) $\{\sqrt{n^2+n} - n\}$. 5) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}}\right\}$.
6) $\left\{\frac{n-3}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$.

7.341. 1) $\{2^n - 100n\}$. 2) $\{3^n - 2^n\}$. 3) $\{2^{n+1} - 3^{n-2}\}$.
4) $\left\{\frac{6^{n+1} - 5^{n+1}}{6^n + 5^n}\right\}$. 5) $\left\{\frac{4^{n-1} + 3^{n-1}}{4^n + 3^n}\right\}$.
6) $\left\{\frac{100^n}{n!}\right\}$. 7) $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}$. 8) $\{\log(n+1) - \log n\}$.
9) $\{\ln(n^2 + 9n) - 2\ln n\}$.

7.342. Demuestren que la sucesión $\{nq^n\}$, $0 < q < 1$ es monótona a partir de cierto número; indiquen cuál es éste.

7.343. ¿Con qué relaciones entre a, b, c, d la sucesión $\left\{\frac{an+b}{cn+d}\right\}$ será, a partir de cierto número: 1) creciente; 2) decreciente?

7.344. Demuestren que la sucesión

$$x_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

es monótona.

7.345. Demuestren que la sucesión

$$x_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!, \quad n \in \mathbb{N},$$

es creciente y acotada. Hallen inf $\{x_n\}$, sup $\{x_n\}$.

7.346. Empleando los símbolos $\exists$, $\forall$ enuncien la afirmación:
1) La sucesión $\{x_n\}$ no es creciente.
2) La sucesión $\{x_n\}$ no es decreciente.

7.347. Demuestren que la sucesión dada no es monótona:

1) $\{(-1)^n\}$. 2) $\left\{\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}\right\}$.

3) $\{n+(-1)^n\}$. 4) $\{\operatorname{sen} n\}$.

5) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n},\ n \in \mathbb{N}$.

7.349. Demuestren que si $\{x_n\}$ es una sucesión monótona, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right\}$ también lo es.

7.348. Demuestren que la sucesión dada decrece a partir de cierto número:

1) $\{n/4^n\}$. 2) $\{(3n+1)^2/3^n\}$. 3) $\{n^3/2^n\}$. 4) $\{n^{1/n}\}$.

7.350. Demuestren la monotonía de la sucesión:

1) $\{n-6\log n\}$. 2) $\{\log n - n\}$. 3) $\{(\log n)/n\}$.

7.351. Demuestren que la sucesión:

1) $\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right\}$ crece; 2) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ decrece.

7.352. Demuestren que con toda $x > 0$:

1) La sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ crece.

2) La sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+l}\right\}$, donde, $l \in \mathbb{N}$, $l > x$, decrece.

7.353. Demuestren que con $a \neq 1$, $a > 0$ la sucesión:

1) $\left\{\frac{a^n-1}{n}\right\}$, 2) $\{n(1-a^{1/n})\}$ crece.

7.354. Demuestren que la sucesión $x_1 = -10$, $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, decrece a partir de cierto número, indiquen ese número.

7.355. Sean $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 0{,}5x_n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestren que esta sucesión: 1) es inferiormente acotada, pero no acotada superiormente; 2) crece.

7.356. Sean $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 0{,}5x_n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$.
1) Demuestren que esta sucesión es acotada.
2) Demuestren que las subsucesiones $\{x_{2k}\}$ y $\{x_{2k-1}\}$ de la sucesión son monótonas a partir de cierto número.

7.357. Demuestren que la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_1=4$, $x_{n+1}=$ $=\frac{2+x_n^2}{2x_n}$, $n\in\mathbb{N}$, decrece.

7.358. Las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ están prefijadas por procedimiento recurrente: $x_1=a>0$, $y_1=b>0$,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n),\ y_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Demuestren que: 1) $y_n\geqslant x_n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$; 2) la sucesión $\{x_n\}$ crece $(n\geqslant 2)$; 3) la sucesión $\{y_n\}$ decrece $(n\geqslant 2)$; 4) $|y_{n+1}-x_{n+1}|\leqslant$ $\leqslant|b-a|/4^n$.

7.359. Demuestren que si $x_1=a>0$, $y_1=b>0$,

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=0{,}5(x_n+y_n),\quad n\in\mathbb{N},$$

1) la sucesión $\{x_n\}$ crece e $\{y_n\}$ decrece; 2) ambas sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son acotadas; 3) $|y_{n+1}-x_{n+1}|\leqslant|b-a|/2^n$.

7.360. Demuestren que toda sucesión contiene una subsucesión monótona.

7.361. Sean $C_\alpha^0=1$, $C_\alpha^n=C_\alpha^{n-1}\cdot\frac{\alpha-n+1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, donde $\alpha\in\mathbb{R}$. Demuestren que:

1) $C_\alpha^n=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$;

2) las sucesiones $\{C_{3/2}^n\}$, $\{C_{1/2}^n\}$, $\{C_{-1/2}^n\}$, $\{C_{-1}^n\}$ son acotadas;

3) las sucesiones $\{C_{-2}^n\}$, $\{C_{-3,5}^n\}$ son no acotadas;

4) la sucesión $\{C_\alpha^n\}$ es acotada con $\alpha\geqslant-1$;

5) la sucesión $\{C_\alpha^n\}$ es no acotada con $\alpha<-1$;

6) la sucesión $\{|C_\alpha^n|\}$ decrece (en amplio sentido) con $\alpha\geqslant-1$ a partir de cierto número.

7) la sucesión $\{|C_\alpha^n|\}$ crece (en amplio sentido) con $\alpha<-1$ a partir de cierto número;

8) la sucesión $\{C_\alpha^n\cdot q^n\}$ es acotada con $\alpha<-1$, $|q|<1$.