

# Cálculo I

Carmem S. Comitre Gimenez  
Rubens Starke

2ª Edição  
Florianópolis, 2011





## **Governo Federal**

**Presidente da República:** Dilma Vana Rousseff

**Ministro de Educação:** Fernando Haddad

**Secretário de Ensino a Distância:** Carlos Eduardo Bielschowky

**Coordenador Universidade Aberta do Brasil:** Celso José da Costa

## **Universidade Federal de Santa Catarina**

**Reitor:** Alvaro Toubes Prata

**Vice-Reitor:** Carlos Alberto Justo da Silva

**Secretário de Educação a Distância:** Cícero Barbosa

**Pró-Reitora de Ensino de Graduação:** Yara Maria Rauh Müller

**Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão:** Débora Peres Menezes

**Pró-Reitor de Pós-Graduação:** Maria Lúcia de Barros Camargo

**Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social:** Luiz Henrique Vieira Silva

**Pró-Reitor de Infra-Estrutura:** João Batista Furtuoso

**Pró-Reitor de Assuntos Estudantis:** Cláudio José Amante

**Centro de Ciências da Educação:** Wilson Schmidt

**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas:** Tarciso Antônio Grandi

**Centro de Filosofia e Ciências Humanas:** Roselane Neckel

## **Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância**

**Coordenação de Curso:** Neri Terezinha Both Carvalho

**Coordenação de Tutoria:** Jane Crippa

**Coordenação Pedagógica/CED:** Roseli Zen Cerny

**Coordenação de Ambientes Virtuais/CFM:** Nereu Estanislau Burin

## **Comissão Editorial**

Antônio Carlos Gardel Leitão

Albertina Zatelli

Elisa Zunko Toma

Igor Mozolevski

Luiz Augusto Saeger

Roberto Corrêa da Silva

Ruy Coimbra Charão

## Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

### Coordenação Pedagógica

**Coordenação Geral:** Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

**Núcleo de Formação:** Nilza Godoy Gomes, Marina Bazzo de Espíndola

**Núcleo de Pesquisa e Avaliação:** Daniela Karine Ramos

### Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

#### Design Gráfico

**Coordenação:** Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

**Projeto Gráfico Original:** Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart  
Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

**Redesenho do Projeto Gráfico:** Laura Martins Rodrigues,  
Thiago Rocha Oliveira

**Diagramação:** Karina Silveira, Thiago Felipe Victorino,  
Kallani Maciel Bonelli, Laura Martins Rodrigues

**Ilustrações:** Gabriela Dal Toé Fortuna, Flaviza Righeto, Karina Silveira,  
Rafael de Queiroz Oliveira, Kallani Maciel Bonelli

**Capa:** Alexandre dos Santos Oliveira

#### Design Instrucional

**Coordenação:** Elizandro Maurício Brick

**Design Instrucional:** Gislaine Teixeira Borges Guérios

**Revisão do Design Instrucional:** Dyan Carlo Pamplona, Maria Carolina  
Machado Magnus, Jaqueline Luiza Horbach

**Revisão Gramatical:** Mirna Saily, Renata de Almeida

*Copyright © 2011, Universidade Federal de Santa Catarina/CFM/CED/UFSC*

*Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Coordenação Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância.*

## Ficha Catalográfica

---

G491c Gimenez, Carmem Suzane Comitre  
Cálculo I / Carmem Suzane Comitre Gimenez, Rubens Starke. —  
2. ed. — Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2011.  
275 p. : il. ; graf. , tabs.

Inclui bibliografia  
UFSC. Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância  
ISBN 978-85-8030-012-3

1. Cálculo. 2. Sequências (Matemática). 3. Ensino a distância.  
I. Starke, Rubens. II. Título.

CDU: 517.1

# Sumário

|   |            |
|---|------------|
| <b>Apresentação .....</b>                             | <b>7</b>   |
| <b>1. Sequências .....</b>                            | <b>9</b>   |
| 1.1 Progressões aritméticas .....                     | 11         |
| 1.1.1 Soma dos termos de uma P.A. ....                | 14         |
| 1.2 Progressões geométricas .....                     | 17         |
| 1.2.1 Soma dos termos de uma P.G. ....                | 22         |
| 1.3 Sequências infinitas .....                        | 31         |
| 1.3.1 Subsequências.....                              | 35         |
| 1.3.2 Sequências limitadas .....                      | 37         |
| 1.3.3 Sequências monótonas .....                      | 37         |
| 1.3.4 Limite de uma sequência .....                   | 40         |
| 1.3.5 Limites infinitos .....                         | 57         |
| 1.3.6 Algumas propriedades dos limites infinitos..... | 58         |
| 1.3.7 Indeterminação .....                            | 60         |
| <b>2. Limite de uma Função .....</b>                  | <b>71</b>  |
| 2.1 Conceito de limite .....                          | 73         |
| 2.2 Propriedades do limite .....                      | 76         |
| 2.2.1 Operações com limites .....                     | 77         |
| 2.3 Definição formal de limite .....                  | 80         |
| 2.4 Indeterminação.....                               | 85         |
| 2.5 Limites laterais .....                            | 89         |
| 2.6 Limites no infinito.....                          | 94         |
| 2.6.1 Cálculo de limites no infinito .....            | 97         |
| 2.7 Limites infinitos .....                           | 100        |
| 2.8 Limites fundamentais .....                        | 111        |
| 2.8.1 Primeiro limite fundamental .....               | 111        |
| 2.8.2 Segundo limite fundamental .....                | 115        |
| 2.8.3 Terceiro limite fundamental.....                | 117        |
| <b>3. Funções Contínuas .....</b>                     | <b>127</b> |
| 3.1 Valores máximos e mínimos de uma função .....     | 139        |
| <b>4. Derivada.....</b>                               | <b>145</b> |
| 4.1 Conceito de derivada .....                        | 147        |
| 4.1.1 Reta tangente a uma curva .....                 | 148        |
| 4.1.2 Velocidade instantânea.....                     | 155        |

|  |            |
|--|------------|
| 4.2 Definição de derivada.....                             | 157        |
| 4.2.1 Derivadas laterais.....                              | 159        |
| 4.2.2 Derivabilidade e continuidade.....                   | 161        |
| 4.3 Cálculo das derivadas – regras de derivação .....      | 162        |
| 4.3.1 Derivada da função composta – a regra da cadeia..... | 169        |
| 4.3.2 Derivada da função inversa .....                     | 174        |
| 4.3.3 Derivada da função exponencial .....                 | 178        |
| 4.3.4 Derivada da função logarítmica .....                 | 179        |
| 4.3.5 Derivada das funções trigonométricas .....           | 181        |
| 4.3.6 Derivada das funções trigonométricas inversas.....   | 187        |
| 4.4 Derivada de funções implícitas.....                    | 192        |
| 4.4.1 Derivada da função exponencial geral.....            | 195        |
| 4.4.2 Resumo das fórmulas de derivação.....                | 196        |
| 4.5 Derivadas sucessivas (ou de ordem superior) .....      | 198        |
| <b>5. Aplicações da Derivada .....</b>                     | <b>205</b> |
| 5.1 Taxa de variação .....                                 | 207        |
| 5.2 Taxas relacionadas .....                               | 209        |
| 5.3 Máximos e mínimos .....                                | 214        |
| 5.4 Extremos absolutos em intervalos fechados.....         | 219        |
| 5.5 Funções crescentes e decrescentes.....                 | 224        |
| 5.6 Extremos relativos – critérios para encontrá-los ..... | 225        |
| 5.7 Problemas que envolvem máximos e mínimos .....         | 232        |
| 5.8 Concavidade e pontos de inflexão .....                 | 238        |
| 5.9 Assíntotas verticais e horizontais .....               | 244        |
| 5.10 Esboço de gráficos .....                              | 247        |
| 5.11 Regra de L'Hospital .....                             | 256        |
| 5.12 Fórmula de Taylor .....                               | 262        |
| <b>Referências .....</b>                                   | <b>275</b> |

## Apresentação

Esta disciplina, Cálculo I, continua uma jornada que começou com as disciplinas Fundamentos de Matemática I e Introdução ao Cálculo (estudo dos conjuntos numéricos e funções). As disciplinas de Cálculo, mais precisamente Cálculo Diferencial e Integral, que se iniciam com o Cálculo I têm como objetivo estudar o comportamento das funções, fazendo uso de conceitos até então não abordados: limites, derivada, continuidade, integral, séries. Estes conceitos foram desenvolvidos no século XVII por dois grandes matemáticos, independentemente: Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). O que Newton e Leibniz fizeram foi universalizar as regras para lidar com problemas de áreas, taxas de variação, máximos e tangentes, que até então eram tratados para casos particulares de funções.

A disciplina de Cálculo I vai estudar os conceitos de limites, derivadas e continuidade. No capítulo 1, estudaremos seqüências (um conceito fundamental em Matemática), como uma introdução ao estudo de limites. Começaremos com as progressões aritméticas e geométricas (já conhecidas) para generalizar a idéia de seqüência infinita e o estudo de sua convergência. O conceito de limite de uma seqüência é o objetivo principal deste capítulo, e de sua compreensão depende o desenvolvimento dos capítulos posteriores. No capítulo 2, apresentaremos o conceito de limite de uma função, que determina como se comportam os valores  $f(x)$  de uma função  $f$  quando  $x$  toma valores arbitrariamente próximos de um determinado ponto  $x_0$  de seu domínio. Esta idéia estará presente ao longo de todas as disciplinas de Cálculo. No capítulo 3, será estudada uma classe de funções “bem comportadas”: as funções contínuas. A continuidade confere à função uma especial regularidade de comportamento e seu estudo depende do conceito de limite. Algumas conseqüências da continuidade serão apresentadas, incluindo um teorema essencial para o Cálculo: o Teorema do Valor Intermediário. No capítulo 4, será estudada a derivada de uma função. O conceito de derivada também depende do conceito de limite, e está relacionado ao comportamento de uma função. Este capítulo estuda a derivada de uma função de modo geral e o cálculo da derivada das funções elementares, já previamente estudadas em Introdução ao Cálculo.

É no capítulo 5 que todos os conceitos já vistos serão utilizados no estudo das funções. Já vimos que as funções servem de modelo para a descrição de situações reais. O estudo do comportamento das funções por meio da derivada e dos limites constitui uma poderosa ferramenta para o estudo destas situações, e entendê-la é o objetivo do capítulo 5. Serão estudadas as taxas de variação, taxas relacionadas e problemas de máximos e mínimos, a regra de L'Hospital para o cálculo de limites de funções usando derivada e a Fórmula de Taylor. Ainda neste capítulo você verá que com a utilização de limites e da derivada é possível fazer um gráfico mais preciso de uma função. Através do uso de derivadas reconhecemos os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função, seus pontos de máximo e de mínimo, e também detectamos aspectos às vezes sutis do gráfico, como a sua concavidade.

Cabe ressaltar que, até aproximadamente a metade do século XX, as primeiras noções dos conceitos de limites, derivada e integral eram estudadas no então Científico, curso que correspondia ao atual Ensino Médio. Com as reformas na educação em meados dos anos sessenta, estes conceitos deixaram de ser estudados neste nível de ensino e começaram a ser estudados na primeira fase dos cursos da área de exatas (engenharias, matemática, física, química), estendendo-se por quatro ou cinco semestres. Desde então, as disciplinas de Cálculo (juntamente com Álgebra Linear) constituem o fundamento dos cursos de graduação em Matemática, tanto na Licenciatura como no Bacharelado.

*Carmem S. Comitre Gimenez*

*Rubens Starke*



# Capítulo 1

## Sequências





# Capítulo 1

## Sequências

*Neste capítulo serão estudadas as progressões aritméticas e geométricas, suas propriedades e aplicações na resolução de problemas. Serão apresentados e desenvolvidos os conceitos de sequências infinitas, subsequências, sequências limitadas e sequências monótonas. Será estudada, ainda, a convergência de uma sequência.*

### 1.1 Progressões aritméticas

Muitas situações podem ser descritas através de um modelo matemático que consiste num conjunto ordenado de números, em que a diferença entre dois termos consecutivos é constante.

**Exemplo 1.** Você adquire mensalmente 2 livros. Então, a sua coleção aumenta em duas unidades a cada mês.

**Exemplo 2.** Um compartimento de uma fábrica tem 1000 peças à disposição para matéria-prima. Um robô ajusta 5 peças por minuto. A quantidade de peças que permanece como matéria-prima diminui em 5 por minuto.

**Definição 1.** Uma progressão aritmética (P.A.) de razão  $r$  é um conjunto ordenado de números reais  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  chamados termos da progressão, satisfazendo  $a_{n+1} - a_n = r$ , para todo número natural  $n$ .

**Exemplo 3.** A sequência  $(5, 8, 11, 14, 17)$  é uma P.A. finita de razão 3.

**Exemplo 4.** A sequência  $(4, 4, 4, 4, \dots)$  é uma P.A. de razão 0.

**Exemplo 5.** A sequência  $(12, 7, 2, -3, -8)$  é uma P.A. finita de razão  $-5$ .

**Exemplo 6.** A sequência  $(1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2}, \dots)$  é uma P.A. de razão  $\sqrt{2}$ .

**Observação.** Três termos consecutivos de uma P.A. de razão  $r$  podem ser representados por  $x$ ,  $x + r$ ,  $x + 2r$ . No entanto, para resolver certos problemas é conveniente representá-los por  $x - r$ ,  $x$ ,  $x + r$ .

## Exercício resolvido

- 1) Os lados de um triângulo retângulo formam uma P.A. Sabendo que o perímetro do triângulo vale 24 m, calcule o comprimento de cada lado.

**Resolução.** Seja  $r$  a razão da progressão. Representando os lados do triângulo por  $x - r$ ,  $x$ ,  $x + r$ , temos que:

$$\begin{aligned}(x - r) + x + (x + r) &= 24 \\ 3x &= 24 \\ x &= 8.\end{aligned}$$

A razão não pode ser zero, pois neste caso o triângulo seria equilátero, e não retângulo. Considerando  $r > 0$ , a hipotenusa corresponde a  $x + r$ . Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}(x + r)^2 &= x^2 + (x - r)^2 \\ (8 + r)^2 &= 8^2 + (8 - r)^2 \\ 64 + 16r + r^2 &= 64 + 64 - 16r + r^2 \\ 32r &= 64 \\ r &= 2.\end{aligned}$$

Logo,  $x - r = 6$ ,  $x = 8$  e  $x + r = 10$ .

**Resposta.** Os lados do triângulo medem 6, 8 e 10 metros. (Note que, caso considerássemos  $r < 0$ , obteríamos o mesmo resultado).

A proposição a seguir estabelece uma relação entre um termo de uma P.A. e a sua posição na progressão.

**Proposição 1.** Seja  $a_n$  um termo de uma P.A. de razão  $r$  cujo primeiro termo é  $a_1$ . Então,  $a_n = a_1 + (n - 1)r$  para todo número natural  $n$ .

**Demonstração.** Sabemos que  $a_n$  é o termo da P.A. que ocupa a posição  $n$ . Queremos provar que este termo se relaciona com o primeiro termo e com a razão através da igualdade  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ . De fato, usando a definição de P.A., temos:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r \\ a_3 - a_2 &= r \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= r. \end{aligned}$$

Somando ambos os lados destas igualdades:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = \underbrace{r + r + \cdots + r}_{n-1 \text{ vezes}}.$$

Observe que  $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  e seus opostos  $-a_2, -a_3, \dots, -a_{n-1}$  aparecem como parcelas no membro da esquerda. Como a soma de um número com seu oposto é zero, teremos após a soma:  $a_n - a_1 = (n-1)r$ .

Logo,  $a_n = a_1 + (n-1)r$ . ■

**Observação.** Ao termo  $a_n$ , que ocupa a posição  $n$ , chamamos de termo geral da P.A. Assim, a expressão do termo geral da P.A. é dada por  $a_n = a_1 + (n-1)r$ .

## Exercícios propostos

- 1) O primeiro termo de uma P.A. vale  $\frac{4}{3}$  e a razão  $\frac{1}{9}$ . Calcule o décimo sexto termo.
- 2) Sabendo que o primeiro termo de uma P.A. é 4 e o vigésimo primeiro termo é  $-4$ , calcule a razão da progressão.
- 3) O décimo segundo termo de uma P.A. vale 52, e o vigésimo quinto termo vale 117. Calcule o primeiro termo e a razão.

## Exercício resolvido

- 2) No início do ano, João possuía R\$ 400,00 guardados e foi contemplado com uma bolsa de estudos. A partir de janeiro começou a guardar R\$ 50,00 por mês. Quantos reais João terá acumulado no final de 2 anos?

**Resolução.** Os valores que João acumula a partir de janeiro formam uma P.A. de razão  $r = 50$ . O primeiro termo dessa P.A. corresponde ao valor que ele acumula no primeiro mês, ou seja,  $a_1 = 400 + 50 = 450$ . A quantia acumulada no segundo mês corresponde a  $a_2$  e assim sucessivamente.

Portanto, o valor em reais que ele terá acumulado após 2 anos corresponde ao termo  $a_{24}$ , o vigésimo quarto termo da P.A.

Utilizando a igualdade dada pela Proposição 1, a saber,

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

temos:

$$a_{24} = 450 + 23 \times 50$$

$$a_{24} = 1600.$$

**Resposta.** Ao final de 2 anos, João terá acumulado R\$ 1600,00.

### 1.1.1 Soma dos termos de uma P.A.

**Curiosidade.** Quando o grande matemático Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) tinha 7 anos de idade, seu professor pediu para os alunos da sua classe somarem todos os números naturais de 1 a 100, ou seja,  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ .

O professor ficou surpreso, quando, em poucos minutos, Gauss anunciava o resultado.

Ele percebeu que  $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 50 + 51$ . Quer dizer, a soma total corresponde a 50 somas, cada uma destas valendo 101. Portanto, o resultado é  $50 \times 101 = 5050$ .

A ideia de Gauss naquele caso particular pode ser generalizada, como mostra a proposição seguinte.

**Proposição 2.** A soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A. com termo inicial  $a_1$  é dada por  $S_n = n \cdot \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right)$ .

**Demonstração.** Vamos escrever  $S_n$  de duas maneiras:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Somando ambos os lados destas igualdades, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \quad (1)$$

Seja  $r$  a razão da P.A. Então,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n + (r - r) = a_1 + a_n.$$

Da mesma forma,

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + a_n.$$

De modo geral, se  $1 \leq k \leq n$ , então

$$a_k + a_{n-(k-1)} = (a_1 + (k-1)r) + (a_n - (k-1)r) = a_1 + a_n.$$

Portanto, no membro da direita de (1) somam-se  $n$  parcelas, cada uma com soma  $a_1 + a_n$ .

Logo, (1) é equivalente a:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_n = n \cdot \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right).$$

■

## Exercícios resolvidos

- 3) Calcule a soma de todos os múltiplos naturais de 6 que possuem 3 algarismos em sua representação decimal.

**Resolução.** A diferença entre dois múltiplos de 6 consecutivos é constante e é 6. Devemos, pois, achar a soma dos termos de uma P.A. finita de razão 6.

Para aplicar a fórmula dada pela Proposição 2, a saber,

$$S_n = n \cdot \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right),$$

devemos achar  $a_1$ ,  $a_n$  e  $n$ .

Como os números naturais com três algarismos são maiores ou iguais a 100, temos que:

- O menor múltiplo de 6, maior do que 100, é 102.  
Assim,  $a_1 = 102$ .
- O maior múltiplo de 6, menor do que 1000, é 996.  
Assim,  $a_n = 996$ .

Pela fórmula do termo geral,  $a_n = a_1 + (n-1)r$ . Então,

$$\begin{aligned} 996 &= 102 + (n-1) \cdot 6 \\ 6 \cdot (n-1) &= 894 \\ n-1 &= 149 \\ n &= 150. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } S_{150} = \left( \frac{102+996}{2} \right) \cdot 150 = 82350.$$

**Resposta.** A soma pedida é 82350.

- 4) Calcule a soma dos números naturais menores do que 500, que na divisão por 5 deixam resto 2.

**Resolução.** Se um número deixa resto 2 na divisão por 5, ele é da forma  $5k+2$ , para algum  $k$  natural.

O primeiro número que deixa resto 2 na divisão por 5 é 2, pois  $2 = 5 \cdot 0 + 2$ .

O último número a ser considerado (menor do que 500) é 497, pois  $497 = 495 + 2$ , ou seja,  $497 = 5 \cdot 99 + 2$ .

Portanto, devemos achar a soma dos termos de uma P.A. de razão 5, cujo primeiro termo é 2 e o último termo é  $a_n = 497$ .

Para achar  $n$ , observe que  $497 = a_1 + (n-1)r$ .

$$\begin{aligned} 497 &= 2 + (n-1) \cdot 5 \\ 5 \cdot (n-1) &= 495 \\ n-1 &= 99 \\ n &= 100. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } S_{100} = \left( \frac{2+497}{2} \right) \cdot 100 = 24950.$$

**Resposta.** A soma pedida é 24950.

## Exercícios propostos

- 4) Calcule a soma dos duzentos primeiros termos da P.A.:

$$\left( -\frac{199}{200}, -\frac{198}{200}, -\frac{197}{200}, \dots \right).$$

- 5) Calcule a soma dos números naturais inferiores a mil que não são múltiplos de 7.



## Exercício resolvido

- 5) Determine a P.A. em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650.

**Resolução.** Devemos determinar  $a_1$  e  $r$ , sabendo que

$$a_{20} = a_1 + 19r = 2 \quad (1)$$

e

$$S_{50} = \left( \frac{a_1 + a_{50}}{2} \right) \cdot 50 = 650 \Rightarrow a_1 + a_{50} = 26$$

$$\Rightarrow a_1 + a_1 + 49r = 26 \Rightarrow 2a_1 + 49r = 26. \quad (2)$$

Resolvendo o sistema com as equações (1) e (2):

$$\begin{cases} a_1 + 19r = 2 \\ 2a_1 + 49r = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 38r = -4 \\ 2a_1 + 49r = 26 \end{cases}$$

$$11r = 22 \Rightarrow r = 2 \quad e \quad a_1 = 2 - 38 = -36.$$

**Resposta.** A P.A. é  $(-36, -34, -32, \dots)$ .

## 1.2 Progressões geométricas

Uma grandeza pode variar de modo que sua *taxa de crescimento* seja constante.

**Definição 2.** A taxa de crescimento de uma grandeza é o quociente entre o aumento sofrido e o valor inicial, ou seja, se a grandeza passa do valor  $A_0 \neq 0$  para o valor  $A$ , então sua taxa de crescimento é

$$\frac{A - A_0}{A_0}. \text{ Se este quociente é negativo, houve um decréscimo.}$$

**Exemplo 7.** Se determinada grandeza passa do valor 4 ao valor 5, sua taxa de crescimento é  $\frac{5-4}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$  ou 25%.

**Exemplo 8.** Estima-se que a população de certo país crescerá nos próximos anos a uma taxa constante de 2% ao ano. Seja  $P_1$  a população do país hoje e  $P_2$  a população daqui a um ano. Então, como 2%

corresponde a  $\frac{2}{100}$ , temos que

$$\begin{aligned}\frac{P_2 - P_1}{P_1} &= \frac{2}{100} \\ P_2 - P_1 &= 0,02P_1 \\ P_2 &= 1,02P_1.\end{aligned}$$

Se  $P_3$  representa a população daquele país daqui a 2 anos, temos:

$$\begin{aligned}\frac{P_3 - P_2}{P_2} &= 0,02 \\ P_3 &= 1,02P_2.\end{aligned}$$

De maneira análoga conclui-se que se  $P_{k+1}$  representa a população daqui a  $k$  anos, então  $P_{k+1} = 1,02P_k$ .

Note que os números  $P_1, P_2, P_3, \dots$  formam uma sequência que obedece à seguinte regra:

“O quociente entre dois termos consecutivos é constante.”

De fato,  $\frac{P_{k+1}}{P_k} = 1,02, \forall k \geq 1$ .

**Exemplo 9.** Suponha que uma bomba a vácuo retira a cada sucção 3% do líquido existente em uma câmara. Seja  $L_0$  a quantidade inicial e  $L_1$  a quantidade de líquido que permanece na câmara após a primeira sucção. Então,

$$\begin{aligned}\frac{L_1 - L_0}{L_0} &= -\frac{3}{100} = -0,03 \\ L_1 &= 0,97L_0.\end{aligned}$$

Houve um decréscimo da quantidade de líquido na câmara.

Analogamente, após a  $n$ -ésima sucção, a quantidade de líquido na câmara será  $L_n = 0,97L_{n-1}$ . A sequência  $L_0, L_1, L_2, \dots$  também obedece

à regra  $\frac{L_{n+1}}{L_n} = 0,97$  (constante),  $\forall n \geq 0$ .

**Proposição 3.** Uma sequência de números  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$  tem taxa de crescimento constante  $i$  se, e somente se,  $P_{n+1} = (1+i)P_n, \forall n \geq 1$ .

**Demonstração.** Observe que neste resultado aparece a expressão “se, e somente se”. Isso significa que devemos provar duas implicações:

- 1) Se uma seqüência de números  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$  tem taxa de crescimento constante  $i$ , então  $P_{n+1} = (1+i)P_n, \forall n \geq 1$ .
- 2) Se para uma seqüência de números  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$  tem-se  $P_{n+1} = (1+i)P_n$  para todo  $n \geq 1$ , então essa seqüência tem taxa de crescimento constante igual a  $i$ .

**(1) Hipótese.** A seqüência de números  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$  tem taxa de crescimento constante  $i$ .

**Tese.**  $P_{n+1} = (1+i)P_n, \forall n \geq 1$ .

Da Definição 2 decorre:

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} &= i \\ P_{n+1} - P_n &= iP_n \\ P_{n+1} &= (1+i)P_n.\end{aligned}$$

**(2) Hipótese.**  $P_{n+1} = (1+i)P_n, \forall n \geq 1$ .

**Tese.** A seqüência de números  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$  tem taxa de crescimento constante  $i$ .

Por definição, a taxa de crescimento é dada por:

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \frac{(1+i)P_n - P_n}{P_n} = \frac{(1+i-1)P_n}{P_n} = i, \text{ portanto, constante.}$$

■

**Tarefa.** Volte agora aos Exemplos 8 e 9 e verifique a validade da Proposição 3.

**Definição 3.** Uma progressão geométrica (P.G.) é uma seqüência  $P_1, P_2, P_3, \dots$  de números reais satisfazendo:  $P_{n+1} = qP_n$ , para todo  $n \geq 1$ , sendo  $q$  uma constante chamada razão.

**Observações:**

- 1) De acordo com a Proposição 3, toda seqüência com taxa de crescimento constante  $i$  é uma P.G. de razão  $1+i$  e toda P.G. de razão  $q$  tem taxa de crescimento constante igual a  $q-1$ .

- 2) Se um dos termos de uma P.G. é zero, então todos, exceto talvez o primeiro, são iguais a zero. De fato, se  $P_n q = 0$  para algum  $n \geq 1$ , então ou  $q = 0$ , ou  $P_n = 0$ . Se  $q = 0$ , a P.G. tem a forma  $P_1, 0, 0, \dots$ . Se  $q \neq 0$ , conclui-se que  $P_n = 0$  para todo  $n$  e trata-se da P.G. nula  $0, 0, 0, \dots$ . Neste contexto, vamos excluir este caso.
- 3) Decorre da Definição 3 que uma P.G. de razão  $q$  é uma sequência numérica na qual o quociente da divisão de um termo pelo seu antecedente é constante e vale  $q$ .

**Exemplo 10.** A sequência  $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$  é uma P.G. finita de razão  $q = \frac{3}{2}$ .

Sua taxa de crescimento é  $i = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$  ou 50%.

**Exemplo 11.** A sequência  $\left(60, 20, \frac{20}{3}, \frac{20}{9}, \dots\right)$  é uma P.G. infinita de razão  $q = \frac{1}{3}$  e taxa de crescimento  $i = -\frac{2}{3}$  ou -66,66%.

**Exemplo 12.** A sequência  $(5, 5, 5, \dots)$  é uma P.G. infinita de razão  $q = 1$  e taxa de crescimento  $i = 0$ .

A proposição seguinte fornece a expressão do termo geral de uma P.G.

**Proposição 4.** Se  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$  é uma P.G. de razão  $q$ , então  $P_n = P_1 \cdot q^{n-1}$  para todo  $n \geq 1$ .

**Demonstração.** Decorre da definição de P.G. que:

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= q \\ \frac{P_3}{P_2} &= q \\ &\vdots \\ \frac{P_n}{P_{n-1}} &= q. \end{aligned}$$

Multiplicando estas igualdades obtém-se:

$$\frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_4}{P_3} \cdot \dots \cdot \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \cdot \frac{P_n}{P_{n-1}} = \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-1 \text{ vezes}}$$

No membro esquerdo da igualdade, cada termo, exceto  $P_1$  e  $P_n$ , é cancelado, por ser multiplicado pelo seu inverso.

Portanto,  $\frac{P_n}{P_1} = q^{n-1}$ , isto é,  $P_n = P_1 \cdot q^{n-1}$ . ■

## Exercício resolvido

- 6) A população de uma cidade é de 350.000 habitantes e a sua taxa de crescimento é constante e igual a 3,5% ao ano. Qual será a sua população daqui a 10 anos? E daqui a 20 anos?

**Resolução.** Seja  $P_1$  a população atual:  $P_1 = 350.000$ . Após um ano, a população será de:

$$P_2 = P_1 + \frac{3,5}{100} P_1 = P_1 (1 + 0,035) = 1,035 P_1.$$

Após 2 anos, será de:  $P_3 = P_2 + \frac{3,5}{100} P_2 = 1,035 P_2$ .

Após  $k$  anos, será de:  $P_{k+1} = P_k + \frac{3,5}{100} P_k = 1,035 P_k$ .

Portanto,  $P_1, P_2, P_3, \dots$  formam uma P.G. de razão 1,035.

O problema pede os valores de  $P_{11}$  e  $P_{21}$ .

Aplicando a Proposição 4, temos:

$$P_{11} = 350.000 \times (1,035)^{10} = 493.709$$

$$P_{21} = 350.000 \times (1,035)^{20} = 696.426.$$

**Resposta.** Daqui a 10 anos a população será de 493.709 habitantes e daqui a 20 anos será de 696.426 habitantes.

**Observação.** Note que nos primeiros 10 anos a população deverá crescer em:  $493.709 - 350.000 = 143.709$  habitantes. Já nos 10 anos seguintes deverá crescer em:  $696.426 - 493.709 = 202.717$  habitantes. Conclui-se que o crescimento não é linear.

## Exercícios propostos

- 6) Uma pessoa aplica R\$ 1.000,00 durante 10 meses, recebendo juros de 2% ao mês. Use a fórmula do termo geral de uma P.G. para calcular a valor que esta pessoa terá após os 10 meses.
- 7) O primeiro termo de uma P.G. é 64 e sua razão é  $-\frac{1}{4}$ . Calcule o quarto e o sétimo termo.
- 8) Em uma P.G. de termos positivos sabe-se que o sétimo termo é o dobro do quinto termo e que o décimo termo vale 96. Calcule a razão e o primeiro termo da progressão.

### 1.2.1 Soma dos termos de uma P.G.

**Proposição 5.** A soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.G. de razão  $q \neq 1$  e termo inicial  $P_1$  é dada por:  $S_n = P_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)$ .

**Demonstração.** Usando a expressão do termo geral de uma P.G., temos:

$$S_n = P_1 + P_1q + P_1q^2 + \dots + P_1q^{n-2} + P_1q^{n-1}. \quad (1)$$

Multiplicando a igualdade por  $q$ :

$$qS_n = P_1q + P_1q^2 + P_1q^3 + \dots + P_1q^{n-1} + P_1q^n. \quad (2)$$

Subtraindo (2) de (1):

$$S_n(1-q) = P_1 - P_1q^n$$

$$S_n = \frac{P_1 - P_1q^n}{1-q} \quad \text{ou} \quad S_n = P_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right).$$

■

### Exercício resolvido

- 7) Considere a P.G. *infinita*:  $\left( 6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots \right)$ .
  - a) Calcule a soma dos cinco primeiros termos.
  - b) Expresse em função de  $n$  a soma dos  $n$  primeiros termos.
  - c) Observe o resultado obtido no item (b). O que você pode dizer sobre o valor desta soma quando  $n$  é muito grande?

**Resolução.**

- a) Esta P.G. tem termo inicial  $P_1 = 6$  e razão  $q = \frac{1}{3}$ . Conforme a Proposição 5, temos:

$$S_5 = 6 \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^5}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{242}{27} \cong 8,96.$$

**Resposta.** A soma pedida é  $\frac{242}{27}$ , que é aproximadamente 8,96.

$$\begin{aligned} \text{b) } S_n &= 6 \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \cdot \frac{3}{2} = 9 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right). \end{aligned}$$

**Resposta.** A soma dos  $n$  primeiros termos da P.G. é dada pela expressão  $9 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$  para  $n \geq 1$ .

- c) Se  $n$  é muito grande, então  $3^n$  é bem maior e o seu inverso  $\frac{1}{3^n}$  é muito pequeno, próximo de zero. Logo, a soma  $S_n$  tem um valor muito próximo de 9 e o termo  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  pode até ser "desprezado" em

$$\text{(b), ou seja, } S_n = 6 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 9.$$

**Comentário.** No próximo exercício, é possível concluir que esta soma pode ter valores arbitrariamente próximos de 9, desde que  $n$  seja suficientemente grande.

- 8) Considere a P.G. do exercício anterior.

- a) Determine um número natural  $n$  tal que  $|S_n - 9| < \frac{1}{10.000}$ , ou seja,  $|S_n - 9| < 10^{-4}$ .
- b) Determine um número natural  $k$  tal que  $|S_k - 9| < 10^{-10}$ .

**Resolução.**

a) A expressão obtida no Exercício Resolvido 7 é  $S_n = 9 - \frac{9}{3^n}$ .

$$\text{Então, } |S_n - 9| = \left| 9 - \frac{9}{3^n} - 9 \right| = \left| -\frac{9}{3^n} \right| = \frac{9}{3^n}.$$

Precisamos encontrar um número natural  $n$  tal que  $\frac{9}{3^n} < 10^{-4}$ .

Vamos resolver esta inequação:

$$\frac{9}{3^n} < 10^{-4}$$

$$\frac{3^n}{9} > 10^4$$

$$3^n > 9 \times 10^4.$$

Para explicitar  $n$ , apliquemos o logaritmo na base 10 a ambos os lados da inequação. Lembre-se de que, como a função  $y = \log_{10} x$  (ou simplesmente  $\log x$ ) é crescente, a desigualdade deve ser mantida. Assim:

$$\log 3^n > \log(9 \times 10^4)$$

$$n \log 3 > \log 9 + 4$$

$$n > \frac{\log 9 + 4}{\log 3}.$$

Utilizando uma calculadora, obtém-se

$$\frac{\log 9 + 4}{\log 3} \cong 10,38.$$

Como  $n$  deve ser natural e maior do que 10,38, podemos ver que 11 é o menor número natural que satisfaz estas condições. De fato, se calcularmos  $S_{11}$  até a sexta casa decimal, obteremos  $S_{11} = 8,999949$  e  $|S_n - 9| \cong 5 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$ .

**Resposta.** Para  $n = 11$  ou qualquer número natural maior do que 11, tem-se  $|S_n - 9| < \frac{1}{10.000}$ .

b) Precisamos encontrar  $k$  tal que:  $|S_k - 9| < 10^{-10}$ , ou seja, tal que



$$\frac{9}{3^k} < 10^{-10}$$

$$\frac{3^k}{9} > 10^{10}$$

$$3^k > 9 \times 10^{10}$$

$$k \log 3 > \log 9 + 10$$

$$k > \frac{\log 9 + 10}{\log 3}.$$

Verifica-se que  $\frac{\log 9 + 10}{\log 3} \cong 22,96$ . Então, podemos tomar  $k = 23$ .

**Resposta.** Para  $k = 23$  ou qualquer número natural maior do que 23, tem-se  $|S_k - 9| < 10^{-10}$ .

**Observação.** O Exercício Resolvido 8 mostra que, para a P.G. do Exercício Resolvido 7, de razão  $q = \frac{1}{3}$ , a soma  $S_n$  dada por  $S_n = P_1 \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$  aproxima-se cada vez mais do valor  $\frac{P_1}{1 - q}$ , à medida que  $n$  aumenta. Isso porque  $q^n$  torna-se muito pequeno à medida que  $n$  aumenta.

Vamos mostrar agora que, se  $|q| < 1$ , isto é, se  $-1 < q < 1$ , então de fato para  $n$  muito grande, o valor de  $q^n$  é tão pequeno que pode ser “desprezado” na fórmula de  $S_n$ .

Antes de generalizar, tomemos, por exemplo,  $q = \frac{5}{6}$ .

**Tarefa.** Pegue uma calculadora e calcule:

$\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ,  $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ ,  $\left(\frac{5}{6}\right)^{20}$ ,  $\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$ . O que você observa?

**Pergunta.** Será que existe algum número natural  $n_0$  tal que  $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 10^{-10}$  para todo  $n \geq n_0$ ?

Vamos responder à pergunta resolvendo a inequação:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 10^{-10}.$$

Aplicando logaritmo na base 10, obtemos:

$$n \log\left(\frac{5}{6}\right) < -10$$

$$n > \frac{-10}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}. \quad (\text{Lembre-se de que } \log x < 0 \text{ se } x < 1).$$

Ao calcular o valor aproximado de  $\frac{-10}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$ , obtém-se 126,29. O

menor natural maior do que 126,29 é 127. Portanto,  $n_0 = 127$ .

De fato, ao calcular  $\left(\frac{5}{6}\right)^{127}$ , obtém-se aproximadamente  $8,8 \times 10^{-11}$  que é menor do que  $10^{-10}$ .

Use os mesmos argumentos para resolver o exercício seguinte.

### Exercício proposto

- 9) Encontre um número natural  $n_0$  tal que  $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 10^{-60}$  para todo  $n \geq n_0$ .

Você já percebeu que, procedendo como nos exercícios anteriores, pode-se determinar  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$  o número  $\left(\frac{5}{6}\right)^n$  seja menor do que  $10^{-100}$ ,  $10^{-1000}$ ,  $10^{-10.000}$ , etc.

Provaremos agora que  $\left(\frac{5}{6}\right)^n$  torna-se menor do que *qualquer* número positivo, por menor que seja, desde que  $n$  seja suficientemente grande.

Para tal, empregaremos a letra grega  $\varepsilon$  (épsilon) que representa um número positivo *qualquer*, porém, supostamente muito pequeno, próximo do zero ( $0 < \varepsilon < 1$ ).

Vamos determinar  $n_0$  (em função de  $\varepsilon$ ) tal que  $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ .

Resolvendo a inequação  $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \varepsilon$ , encontra-se  $n > \frac{\log \varepsilon}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$ .

Portanto, se  $n_0$  é o menor número natural maior do que  $\frac{\log \varepsilon}{\log \left(\frac{5}{6}\right)}$ , então  $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ .

A proposição seguinte é uma generalização deste resultado:

**Proposição 6.** Se  $q$  é um número real e  $|q| < 1$ , isto é, se  $-1 < q < 1$  e se  $\varepsilon$  é um número positivo qualquer, então existe um número natural  $n_0$  tal que  $|q|^n < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ .

**Demonstração.** Se  $q = 0$ , então  $q^n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e o resultado é óbvio. Suponhamos  $q \neq 0$ . Seja  $\varepsilon > 0$  fixo, porém arbitrário. Para este  $\varepsilon$ , temos que encontrar um número natural  $n_0$  tal que  $|q|^n < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ .

$$\begin{aligned} |q|^n &< \varepsilon \\ \log(|q|^n) &< \log \varepsilon \\ n \log |q| &< \log \varepsilon \\ n &> \frac{\log \varepsilon}{\log |q|}. \end{aligned}$$

(Podemos aplicar a **Função Logaritmo**, pois  $|q| > 0$  e  $\varepsilon > 0$ ).

Este número,  $\frac{\log \varepsilon}{\log |q|}$ , existe e é positivo, pois  $|q| < 1$  e  $\varepsilon$  é supostamente muito pequeno, menor do que 1.

Portanto, basta tomar  $n_0$  como o menor número natural maior do que  $\frac{\log \varepsilon}{\log |q|}$ . Revertendo o processo anterior, obteremos  $|q|^n < \varepsilon$ .

Observe que para todo  $n \geq n_0$  teremos  $|q|^n < |q|^{n_0}$ , pois  $|q| < 1$ . Assim,  $|q|^n < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Como  $\varepsilon > 0$  foi tomado arbitrário, a afirmação vale para todo  $\varepsilon$ , por menor que seja. ■

**Consequência.** Se  $|q| < 1$  e se  $n$  for muito grande, então  $q^n$  torna-se desprezível na fórmula

$$S_n = P_1 \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right).$$

Assim, a soma de todos os termos da P.G. infinita de razão  $q$ , com  $|q| < 1$ , é dada por  $S = \frac{P_1}{1 - q}$ .

Por que razão houve a troca do sinal na desigualdade?

Para recordar o estudo sobre a Função Logaritmo, recorra ao seu material de Introdução ao Cálculo.

## Exercícios resolvidos

- 9) Determine o valor da soma  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ .

**Resolução.** Trata-se da soma de todos os termos da P.G. de termo inicial  $P_1 = 1$  e razão  $q = \frac{1}{3}$ .

$$\text{Como } |q| < 1, \text{ temos } S = \frac{P_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

**Resposta.** A soma é  $\frac{3}{2}$ .

- 10) Determine a geratriz da dízima periódica  $0,5373737\dots$ .

**Resolução.** Note que:

$$\begin{aligned} 0,5373737\dots &= 0,5 + 0,0373737\dots \\ &= 0,5 + 0,037 + 0,00037 + 0,000037 + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{37}{10^3} + \frac{37}{10^5} + \frac{37}{10^7} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + S. \end{aligned}$$

Sendo  $S$  a soma de todos os termos da P.G. de termo inicial  $\frac{37}{1000}$  e razão  $\frac{1}{100}$ , temos:

$$S = \frac{P_1}{1-q} = \frac{\frac{37}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{37}{1000} \times \frac{100}{99} = \frac{37}{990}.$$

$$\text{Logo, } 0,5373737\dots = \frac{1}{2} + \frac{37}{990} = \frac{266}{495}.$$

- 11) Calcule o valor de  $A = \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}\dots}}$ .

**Resolução.** Podemos escrever:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{6} \times \sqrt{\sqrt{6}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}} \times \dots \\ &= 6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{4}} \times 6^{\frac{1}{8}} \times \dots \times 6^{\frac{1}{2^n}} \times \dots \\ &= 6^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}. \end{aligned}$$

O expoente de 6 é igual a soma  $S$  de todos os termos da P.G. infinita de termo inicial  $\frac{1}{2}$  e razão  $\frac{1}{2}$ . Como  $S = \frac{P_1}{1-q}$ , temos  $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ . Logo,  $A = 6^1 = 6$ .

**Resposta.**  $A = 6$ .

- 12) Simplifique a expressão abaixo, sabendo que  $x$  é um número real maior do que 1.

$$\frac{x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2k}} + \dots}$$

**Resolução.** O numerador é a soma dos cinco primeiros termos da P.G. de termo inicial  $x$  e razão  $x^2$ :

$$S_5 = x \left( \frac{1 - (x^2)^5}{1 - x^2} \right) = x \left( \frac{1 - x^{10}}{1 - x^2} \right).$$

(Observe que, sendo  $x > 1$ , temos  $1 - x^2 \neq 0$ .)

O denominador é a soma da P.G. infinita de termo inicial  $\frac{1}{x^2}$  e razão  $\frac{1}{x^2}$ . Note que, sendo  $x > 1$ , segue que  $x^2 > 1$  e, portanto,  $\frac{1}{x^2} < 1$ .

Então, esta soma é dada por  $S = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 - 1}$ . (Novamente, note que  $x^2 - 1 = -(1 - x^2) \neq 0$ .)

A expressão pode então ser escrita assim:

$$\frac{x(1 - x^{10})}{1 - x^2} (x^2 - 1) = \frac{x(1 - x^{10})}{-(x^2 - 1)} (x^2 - 1) = -x(1 - x^{10}) = x^{11} - x.$$

**Resposta.** A forma simplificada da expressão acima é  $x^{11} - x$ .

## Exercícios propostos

- 10) Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G.:

$$\left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right)$$

- 11) Quantos termos da P.G. (1, 3, 9, 27, ...) devem ser somados para que a soma dê 3280?
- 12) A soma de seis termos de uma P.G. de razão 2 é 1197. Qual é o primeiro termo da P.G.?
- 13) Oito irmãs têm de repartir entre si  $1\frac{2}{3}$  minas (unidade monetária ou de peso utilizada pelos babilônios) de prata. Cada irmã, por sua vez, recebe mais que a anterior, mantendo-se constante a diferença entre as quantidades que, sucessivamente, cada uma recebe. Se a segunda irmã receber 6 siclos, qual será a diferença constante, em grãos?  
*(Observação: Um talento vale 60 minas; uma mina vale 60 siclos; um siclo vale 60 grãos).*
- 14) Em uma P.A. o primeiro termo é inteiro e a razão é 2. A soma dos  $n$  primeiros termos é 153. Determine os possíveis valores de  $n$ .
- 15) Determine o 1993º algarismo após a vírgula, na representação decimal de  $\frac{3}{101}$ .  
*(Sugestão: Note que a representação decimal de  $\frac{3}{101}$  é uma dízima periódica).*
- 16) A soma de três números em P.G. é 19. Subtraindo-se 1 do primeiro, eles passam a formar uma P.A. Calcule esses números.
- 17) Se  $(a_n)$  é uma P.G. de termos positivos, prove que  $(b_n)$ , definida por  $b_n = \log a_n$ , é uma P.A.
- 18) Escrevem-se duas progressões de mesmo número de termos, ambas iniciadas por 3 e terminadas por 192. Uma das progressões é aritmética, a outra é geométrica e o produto das razões é 252. Escreva as progressões.
- 19) A soma de cinco números inteiros em P.A. vale 25 e o seu produto,  $-880$ . Determine esses números.
- 20) Prove: Em qualquer P.A. as diferenças dos quadrados de dois termos consecutivos formam também uma P.A. Qual a relação entre as razões dessas duas progressões?
- 21) Os lados de um triângulo retângulo formam uma P.G. Calcule a sua razão.

22) Determine os valores de  $x$ , em radianos, de modo que  $\frac{\operatorname{sen} x}{2}$ ,  $\operatorname{sen} x$ ,  $\operatorname{tg} x$  formem uma P.G.

23) Verifique se as duas sequências de números formam uma P.A. ou uma P.G. Qual a razão de cada uma delas?

a)  $(\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(x + \pi), \operatorname{sen}(x + 2\pi), \dots, \operatorname{sen}(x + k\pi), \dots)$

b)  $(\ln 5, \ln 50, \ln 500, \ln 5000, \dots)$

24) Calcule o valor da soma:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{(2^n + 1)^2} + \frac{1}{(2^n + 1)^3} + \dots\right) + \dots$$

25) Considere a P.G. cujo termo inicial é  $\frac{3}{2}$  e a razão  $\frac{5}{4}$ . Determine o menor número  $k$  tal que a soma dos  $k$  primeiros termos seja maior do que 1000.

## 1.3 Sequências infinitas

Na linguagem cotidiana, o termo *sequência* é usado para designar uma sucessão de coisas que se encontram numa ordem bem determinada.

Em matemática, o termo *sequência* representa uma sucessão de números, ordenados segundo uma determinada regra.

Neste texto, serão estudadas sequências *infinitas*, que chamaremos simplesmente de sequências. Informalmente, uma sequência é uma sucessão interminável de números, estes chamados termos, que têm uma ordem definida (primeiro, segundo, etc.) e não são necessariamente distintos.

Vamos representar por  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais.

**Exemplo 13.** São sequências:

a)  $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ ;

- b)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right)$ ;
- c)  $(3, 6, 9, 12, 15, \dots)$ ;
- d)  $(0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$ .

Em cada uma dessas sequências é fácil deduzir qual é a *regra* que relaciona cada termo com a sua posição na sequência. Com essa regra é possível acrescentar outros termos, bem como saber qual é o termo que ocupa determinada posição.

Por exemplo: a sequência do Exemplo 13 (c):

| Posição | Termo            |  |
|---------|------------------|--|
| 1       | $3 = 3 \cdot 1$  | ...ou seja, temos uma função:<br>$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$<br>$f(n) = 3n$ |
| 2       | $6 = 3 \cdot 2$  |  |
| 3       | $9 = 3 \cdot 3$  |  |
| 4       | $12 = 3 \cdot 4$ |  |

De modo geral, como a cada número natural  $n$  corresponde um único termo da sequência, aquele que ocupa a  $n$ -ésima posição na sequência, temos uma *função* definida no conjunto  $\mathbb{N}$ .

Isso motiva a seguinte definição de sequência:

**Definição 4.** Uma sequência de números reais  $x_1, x_2, x_3, \dots$  é uma função de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{R}$ ,  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

O valor  $f(n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é representado por  $x_n$ , ou seja:  $f(n) = x_n$  e é chamado de termo geral da sequência. Note que  $f(1) = x_1$ ,  $f(2) = x_2$ ,  $f(3) = x_3$ , isto é,  $f(n)$  é o termo da sequência que ocupa a posição  $n$ . Escrevemos  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  ou simplesmente  $(x_n)$  para indicar a sequência  $f$ .

**Exemplo 14.**

- a)  $(4n-1)$  é a sequência  $(3, 7, 11, 15, \dots)$  cujo termo geral é  $4n-1$ . O vigésimo termo dessa sequência, por exemplo, vale  $4 \cdot 20 - 1 = 79$ , enquanto o centésimo vale 399.
- b)  $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ .



- c)  $(8) = (8, 8, 8, 8, \dots)$  (sequência constante).
- d)  $\left(\frac{-3n+2}{4n+1}\right) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{4}{9}, -\frac{7}{13}, -\frac{10}{17}, \dots\right)$ .
- e)  $\left(3 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) = \left(3 + \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{8}, 3 - \frac{1}{16}, \dots\right)$ .
- f)  $\left(1, 6 - \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 6 - \frac{1}{16}, \frac{1}{5}, 6 - \frac{1}{36}, \dots\right)$ .

O termo geral desta sequência é:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 6 - \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

**Observação 1.** Para muitas sequências, é impossível determinar a expressão que caracteriza o seu termo geral. Por exemplo, a sequência cujo  $n$ -ésimo termo é o  $n$ -ésimo algarismo na representação decimal de  $\pi$ :  $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, \dots)$ . Outro exemplo é a sequência dos números primos:  $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ .

**Observação 2.** Progressões aritméticas e geométricas são exemplos de sequências, desde que tenham uma infinidade de termos.

## Exercícios resolvidos

13) Considere a sequência  $(x_n)$ , sendo  $x_n = \frac{n + (-1)^{n+1} \cdot n}{n+1}$ .

- a) Escreva os cinco primeiros termos de  $(x_n)$ .
- b) Escreva os termos de ordem 85 e 120.

**Resolução.**

- a) Basta atribuir a  $n$  os valores 1, 2, 3, 4, 5:

$$x_1 = \frac{1 + (-1)^{1+1} \times 1}{1+1} = \frac{1 + (-1)^2 \times 1}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{2 + (-1)^3 \times 2}{2+1} = \frac{0}{3} = 0;$$

$$x_3 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; \quad x_4 = \frac{0}{5} = 0; \quad x_5 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

**Resposta.** Os cinco primeiros termos da sequência são

$$1, \quad 0, \quad \frac{3}{2}, \quad 0, \quad \frac{5}{3}.$$

b) Basta calcularmos os referidos termos:

$$x_{85} = \frac{85 + (-1)^{86} \times 85}{85+1} = \frac{170}{86} = \frac{85}{43}$$

$$x_{120} = \frac{120 + (-1)^{121} \times 120}{120+1} = \frac{0}{121} = 0.$$

**Resposta.**  $x_{85} = \frac{85}{43}$ ;  $x_{120} = 0$ .

14) Escreva o termo geral de cada uma das sequências abaixo.

a)  $\left( -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \dots \right)$

b)  $\left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots \right)$

**Resolução.**

a) Observe a tabela a seguir:

|       |                  |                 |                  |                 |                  |     |
|-------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-----|
| $n$   | 1                | 2               | 3                | 4               | 5                | ... |
| $x_n$ | $\frac{-1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{-1}{2^4}$ | $\frac{1}{2^5}$ | $\frac{-1}{2^6}$ | ... |

O numerador é 1 se  $n$  é par, e  $-1$  se  $n$  é ímpar. Isso é representado por  $(-1)^n$ . Já o denominador é sempre uma potência de 2, sendo o expoente uma unidade maior do que  $n$ .

Portanto, o termo geral é  $\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ .

**Resposta.**  $x_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ .

b) Observe a tabela a seguir:

|       |               |               |               |               |                |     |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|-----|
| $n$   | 1             | 2             | 3             | 4             | 5              | ... |
| $x_n$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{9}{10}$ | ... |

Comparando  $n$  com  $x_n$ , conclui-se que o termo geral da sequência é

$$x_n = \frac{2n-1}{2n}.$$

## Exercícios propostos

26) Escreva os cinco primeiros termos da sequência

$$\left( \frac{(-1)^n + n}{n+2} \right).$$

27) Escreva o termo geral da sequência:

$$\left( \frac{1}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{16}{9}, \frac{25}{11}, -\frac{36}{13}, \dots \right).$$

### 1.3.1 Subseqüências

Consideremos a sequência dos números ímpares:  $(1, 3, 5, 7, \dots)$ , cujo termo geral é  $x_n = 2n - 1$ . Ao escrevermos os termos  $x_2, x_4, x_6, x_8, \dots, x_{2k}, \dots$ , ou seja,  $3, 7, 11, 15, \dots$  aparece uma outra sequência “dentro” de  $(x_n)$ .

Note que o conjunto de índices  $\mathbb{N}' = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2k, \dots\}$  é infinito e ordenado.

A mesma situação ocorre se considerarmos o conjunto de índices  $\mathbb{N}'' = \{3, 6, 9, 12, \dots, 3k, \dots\}$  e tomarmos os termos  $x_3, x_6, x_9, \dots$ , ou seja,  $5, 11, 17, \dots$ .

**Definição 5.** Seja  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência com termo geral  $x_n$ . Uma subseqüência dessa sequência é uma restrição da função  $f$  a um subconjunto infinito e ordenado  $\mathbb{N}'$  de  $\mathbb{N}$ .

Se  $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}$ , com  $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$ , escrevemos:

$$f|_{\mathbb{N}'}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f|_{\mathbb{N}'}(n_i) = x_{n_i}$$

Essa notação  $f|_{\mathbb{N}'}$  representa a restrição da função  $f$  ao conjunto  $\mathbb{N}'$ .

Portanto, os termos da subsequência são:  $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$

**Notação.** Para representar a subsequência  $(x_n)$ , cujos índices pertencem ao subconjunto  $\mathbb{N}'$  de  $\mathbb{N}$ , escrevemos  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$ .

**Exemplo 15.** Seja  $x_n = (-1)^n$  o termo geral da sequência  $(x_n)$ .

- a) Se  $\mathbb{N}' = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$ , então a subsequência  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$  é:  $(x_2, x_4, x_6, \dots)$ , ou seja,  $(1, 1, 1, \dots)$ , (sequência constante).
- b) Se  $\mathbb{N}'' = \{2k-1; k \in \mathbb{N}\}$ , então a subsequência  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}''}$  é:  $(x_1, x_3, x_5, \dots)$ , ou seja,  $(-1, -1, -1, \dots)$  (sequência constante).

**Exemplo 16.** Seja  $y_n = \frac{1}{n}$  e  $\mathbb{N}' = \{4k; k \in \mathbb{N}\}$ . Então a subsequência  $(y_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$  é:  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \dots\right)$ .

**Exemplo 17.** Seja  $(z_n)$  a sequência:

$(1, 2, 3, -1, -2, -3, 1, 2, 3, -1, \dots)$  e seja  $\mathbb{N}' = \{3k-2; k \in \mathbb{N}\}$ . Então a subsequência  $(z_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$  é:  $(x_1, x_4, x_7, x_{10}, \dots)$ , ou seja,  $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ .

## Exercício resolvido

- 15) Tome a sequência  $(n^2 + (-1)^n \times n)$  e o conjunto  $\mathbb{N}' = \{2k-1; k \in \mathbb{N}\}$ . Escreva os cinco primeiros termos da subsequência  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$ .

**Resolução.** O conjunto dos índices dos termos da subsequência é  $\mathbb{N}' = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ . Portanto, a subsequência consiste nos termos:  $x_1, x_3, x_5, \dots$ . Os cinco primeiros são: 0, 6, 20, 42, 72.

### 1.3.2 Sequências limitadas

**Definição 6.** Dizemos que a sequência  $(x_n)$  é limitada quando existem números reais  $A$  e  $B$ , tais que  $A \leq x_n \leq B$  para todo  $n$ . Quer dizer,  $(x_n)$  é limitada quando *todos* os seus termos pertencem a algum intervalo fechado.

**Exemplo 18.** A sequência  $((-1)^n)$  é limitada. Basta tomar  $A = -1$  e  $B = 1$  e teremos  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ . Observe que também podemos considerar  $A$  como sendo qualquer número real menor do que  $-1$  e  $B$  como sendo qualquer número real maior do que  $1$ .

**Exemplo 19.** A sequência  $\left(\frac{1}{n}\right)$  é limitada, pois  $0 < x_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Assim, todos os seus termos estão, por exemplo, no intervalo  $[0,1]$ .

**Exemplo 20.** As sequências  $(n), (n^2)$  e  $(-3n+1)$  não são limitadas, pois não existe intervalo do tipo  $[a,b]$  que contenha todos os seus termos.

### 1.3.3 Sequências monótonas

**Definição 7.** Uma sequência  $(x_n)$  chama-se:

- i) crescente quando  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ , isto é,  $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- ii) decrescente quando  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ , isto é  $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- iii) não decrescente quando  $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- iv) não crescente quando  $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

As sequências crescentes, decrescentes, não crescentes e não decrescentes chamam-se sequências monótonas.

**Observação.** Da definição, segue que  $(x_n)$  é:

- i) crescente se, e somente se,  $x_{n+1} - x_n > 0$  para todo  $n$ ;
- ii) decrescente se, e somente se,  $x_{n+1} - x_n < 0$  para todo  $n$ ;
- iii) não decrescente se, e somente se,  $x_{n+1} - x_n \geq 0$  para todo  $n$ ;
- iv) não crescente se, e somente se,  $x_{n+1} - x_n \leq 0$  para todo  $n$ .

**Exemplo 21.** A sequência  $(x_n)$ , sendo  $x_n = 5n - 3$ , é crescente, pois  $x_{n+1} - x_n = [5(n+1) - 3] - (5n - 3) = 5 > 0$  para todo  $n$ .

**Exemplo 22.** A sequência  $(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$  é não decrescente, pois  $x_{n+1} - x_n$  ora vale 0, ora vale 1, isto é,  $x_{n+1} - x_n \geq 0$  para todo  $n$ .

**Exemplo 23.** As sequências  $((-1)^n), \left((-1)^{n+1} \frac{n^2}{n+1}\right), \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$  não são monótonas, pois os seus termos são alternadamente positivos e negativos.

**Observação:** Muitas sequências são monótonas a partir de certo termo. Por exemplo, a sequência:

$$(-3, 2, 0, 4, 5, \frac{1}{2}, 0, 2, 4, 6, 8, \dots)$$

é crescente a partir do sétimo termo. Portanto, não devemos tirar conclusões a partir da listagem de alguns termos da sequência, mas sim usar as definições. É preciso avaliar o sinal algébrico da diferença  $x_{n+1} - x_n$ .

## Exercício resolvido

16) Dada a sequência  $\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)$ , verifique:

- a) se ela é monótona;
- b) se ela é limitada.

**Resolução.**

a) Vamos avaliar o sinal algébrico de  $x_{n+1} - x_n$ .

$$\text{Temos: } x_n = \frac{3n+1}{2n-1}; \quad x_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{2(n+1)-1}, \text{ isto é, } x_{n+1} = \frac{3n+4}{2n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{(3n+4)(2n-1) - (3n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} \\ &= \frac{-5}{(2n+1)(2n-1)}. \end{aligned}$$

Note que o denominador desta fração é positivo para todo número natural  $n$ . Segue que  $x_{n+1} - x_n < 0$ , ou seja,  $x_{n+1} < x_n$  para todo  $n$ . Conforme a definição, a sequência é decrescente.

b) Observe que  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Como  $(x_n)$  é decrescente, tem-se  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ , isto é,  $x_n \leq x_1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Concluímos que  $(x_n)$  é limitada, pois todos os termos estão no intervalo  $[0, x_1]$ .

**Resposta.** A sequência é monótona decrescente e limitada.

Lembremos que  
 $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$   
 e, por consequência,  
 $(n+1)! = (n+1)n!$

17) Verifique se a sequência  $\left(\frac{n!}{12^n}\right)$  é monótona.

**Resolução.** Seja  $x_n = \frac{n!}{12^n}$ . Então,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{(n+1)!}{12^{n+1}} - \frac{n!}{12^n} = \frac{(n+1)! - 12n!}{12^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n! - 12n!}{12^{n+1}} = \frac{n!(n+1-12)}{12^{n+1}} \\ &= \frac{n!(n-11)}{12^{n+1}}. \end{aligned}$$

O denominador é positivo para todo  $n$ . Já o numerador é negativo para  $n \leq 10$ , zero para  $n = 11$  e positivo para  $n \geq 12$ .

Logo, a sequência é crescente a partir do décimo segundo termo.

**Resposta.** A sequência decresce do primeiro ao décimo primeiro termo, estabiliza-se, pois  $x_{11} = x_{12}$ , e cresce definitivamente a partir do décimo segundo termo.

## Exercícios propostos

28) Dada a sequência  $\left(\frac{6^n}{(n+1)!}\right)$ , verifique:

- a) se ela é monótona;
- b) se ela é limitada.

**Observação.** Há sequências cujos termos são indexados a partir de  $n = 2$  ou de outro valor qualquer. Por exemplo,  $\left(\frac{1}{n-1}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ . Para essas sequências não faz sentido  $n = 1$ .

- 29) Escreva os seis primeiros termos da subsequência dos termos de ordem par da sequência cujo termo geral é  $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ .
- 30) Dada a sequência  $(1, 1, -1, 2, 2, -2, 3, 3, -3, \dots)$ , construa a subsequência dos termos cuja ordem é múltiplo de três  $(a_3, a_6, a_9, \dots)$ . Explícite o termo geral dessa subsequência.
- 31) Verifique se as sequências abaixo são limitadas justificando.
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$
  - $(a_n)$  cujo termo geral é  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ .
  - $(a_n)$  definida por:  $a_1 = 1, a_{n+1} = n + a_n$ .
- 32) Verifique quais sequências  $(a_n)$  são monótonas justificando.
- $a_n = \left(3 + \frac{1}{n}\right)^2$ ;
  - $a_n = \frac{n-1}{n}$ ;
  - $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ ;
  - $\left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \dots\right)$ ;
  - $a_n = \text{sen } n$ ;
  - $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$ .

### 1.3.4 Limite de uma sequência

Em muitas situações, é preciso saber como se comportam os termos de uma sequência  $(x_n)$  quando  $n$  atinge valores extremamente grandes. Observe estes exemplos mais simples:

- Os termos da sequência  $(n^2 + 5)$  crescem sem limitação.
- Os termos da sequência  $((-1)^n)$  oscilam sempre entre 1 e  $-1$ .



- c) Os termos da sequência  $\left(4 + \frac{1}{n^2}\right)$  aproximam-se arbitrariamente de 4.
- d) Os termos da sequência  $\left(6 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$  também se aproximam arbitrariamente de 6, embora de maneira oscilatória.
- e) A sequência definida por

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ 5 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

possui duas subsequências, sendo que os termos de uma delas se aproximam de 0 e os da outra de 5.

Informalmente, dizemos que uma sequência tem limite  $L$  (ou converge para  $L$ ) quando, a partir de determinado termo, todos os demais termos estão arbitrariamente próximos de  $L$ .

**Definição 8.** Dizemos que a sequência  $(x_n)$  tem limite  $L$  (ou converge para  $L$ ) quando *para todo* número real positivo  $\varepsilon$  existe um número natural  $n_0$ , que depende de  $\varepsilon$  tal que  $|x_n - L| < \varepsilon$  *para todo*  $n \geq n_0$ .

**Observação.** Lembre que, por uma propriedade do módulo,  $|x_n - L| < \varepsilon$  é equivalente a  $-\varepsilon < x_n - L < \varepsilon$ . Somando  $L$  a todos os membros destas desigualdades, obtemos:

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon.$$

Isso é equivalente a afirmar que  $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

Portanto, podemos também dizer que  $(x_n)$  tem limite  $L$ , quando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  para todo  $n \geq n_0$ .

Escrevemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  ou simplesmente  $\lim x_n = L$ .

**Exemplo 24.** A sequência constante  $(a, a, a, \dots)$  tem limite  $a$ . De fato, observe que  $|x_n - a| = |a - a| = 0$ . Logo, para todo  $n \geq 1$ ,  $|x_n - a| < \varepsilon$ , seja qual for  $\varepsilon > 0$ .

**Exemplo 25.** Sequências como  $(n^2)$ ,  $(4n+3)$ ,  $(\ln n)$ ,  $(e^n)$ ,  $((-5)^n)$  não têm limite, pois os termos não se aproximam de valor algum. Neste caso, dizemos que a sequência *diverge*.

**Exemplo 26.** A sequência  $\left(\frac{1}{n}\right)$  converge e tem limite zero.

Vamos provar isso usando a definição:

Seja  $\varepsilon > 0$ . Devemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n \geq n_0$ , então

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ . Ora,  $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$  é equivalente a  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  que por sua vez é equivalente a  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Quer dizer, se  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , então  $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ . Portanto, basta tomar como  $n_0$  o menor número natural maior do que  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Exemplo 27.** A sequência  $(x_n)$  definida por:

$$x_n = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ 5 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é divergente. De fato, por maior que seja o número natural  $n_0$ , sempre haverá termos  $x_n$  próximos de 3 e outros próximos de 5, com  $n \geq n_0$ .

## Exercícios resolvidos

18) Considere a sequência  $(x_n)$  tal que  $x_n = \frac{10n}{3+2n}$ .

a) Calcule  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - 5| < \frac{1}{10}$ ,  $\forall n \geq n_0$ .

b) Calcule  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - 5| < \frac{1}{100}$ ,  $\forall n \geq n_0$ .

c) Demonstre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5$ .

**Resolução.**

$$\begin{aligned} \text{a) } |x_n - 5| < \frac{1}{10} &\Leftrightarrow \left| \frac{10n}{3+2n} - 5 \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{-15}{3+2n} \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \frac{3+2n}{15} > 10 \\ &\Leftrightarrow n > 73,5. \end{aligned}$$

Portanto, se  $n > 73,5$ , então  $|x_n - 5| < \frac{1}{10}$ . Tomando  $n_0 = 74$ , temos  $|x_n - 5| < \frac{1}{10}$  para todo  $n \geq n_0$ .

**Resposta.**  $n_0 = 74$

$$\text{b) } |x_n - 5| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left| \frac{10n}{3+2n} - 5 \right| < \frac{1}{100}$$

Efetuada os cálculos análogos ao item (a), obtém-se

$$\frac{3+2n}{15} > 100, \quad n > 748,5.$$

Portanto, se  $n > 748,5$ , então  $|x_n - 5| < \frac{1}{100}$ . Tomando  $n_0 = 749$ , temos  $|x_n - 5| < \frac{1}{100}$  para todo  $n \geq n_0$ .

**Resposta.**  $n_0 = 749$ .

$$\text{c) } \lim x_n = 5.$$

**Demonstração.** Seja  $\varepsilon > 0$ . Devemos achar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - 5| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ .

Ora,

$$|x_n - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{10n}{3+2n} - 5 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{15}{3+2n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3+2n}{15} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{15}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$$

Portanto, se  $n > \frac{15}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$ , então  $|x_n - 5| < \varepsilon$ . Assim, basta tomar  $n_0$  como o menor número natural maior do que  $\frac{15}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$ , o que sempre será possível. Logo,  $\lim \frac{10n}{3+2n} = 5$ .

19) Seja  $x_n = 9 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n^2}$ .

- a) Encontre um número natural  $n_0$  tal que, se  $n \geq n_0$ , então  $x_n \in (8,999; 9,001)$ .
- b) Demonstre que  $\lim x_n = 9$ .

**Resolução.**

- a) Repare que o intervalo pode ser escrito como

$$\left(9 - \frac{1}{1000}, 9 + \frac{1}{1000}\right). \text{ Devemos, então, achar } n_0 \text{ tal que}$$

$$|x_n - 9| < \frac{1}{1000} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Ora,

$$\begin{aligned} |x_n - 9| < \frac{1}{1000} &\Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^{n+1}}{5n^2} \right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{5n^2} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 5n^2 > 1000 \\ &\Leftrightarrow n^2 > 200 \Leftrightarrow n > \sqrt{200}. \end{aligned}$$

Como  $14 < \sqrt{200} < 15$ , concluímos que  $n \geq 15$ . Tomando  $n_0 = 15$  tem-se  $|x_n - 9| < \frac{1}{1000}$  para todo  $n \geq n_0$ .

**Resposta.**  $n_0 = 15$ .

- b)  $\lim x_n = 9$ .

**Demonstração.** Seja  $\varepsilon > 0$ . Devemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - 9| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ .

Ora,

$$|x_n - 9| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(-1)^{n+1}}{5n^2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{5n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow 5n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{5\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{5\varepsilon}}.$$

Sempre é possível encontrar esse valor, pois  $\varepsilon > 0$ . Assim, basta tomar  $n_0$  como sendo o menor número natural maior do que  $\frac{1}{\sqrt{5\varepsilon}}$  e então  $|x_n - 9| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Logo,  $\lim x_n = 9$ .

## Exercício proposto

- 33) Considere a sequência  $(x_n)$ , sendo  $x_n = \frac{3n-1}{2n+5}$ .
- a) Encontre  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100}$ ,  $\forall n \geq n_0$ .
- b) Prove que  $\lim x_n = \frac{3}{2}$ .

O próximo teorema estabelece a unicidade do limite, ou seja, uma sequência convergente tem um *único* limite.

**Teorema 1.** Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente. Se  $\lim x_n = A$  e  $\lim x_n = B$ , então  $A = B$ .

**Demonstração.** A ideia é mostrar que a distância entre  $A$  e  $B$ ,  $|A - B|$ , é menor do que qualquer número positivo. Seja  $\varepsilon$  um número positivo *qualquer*. Então,  $\frac{\varepsilon}{2}$  também é um número positivo.

Por ser  $\lim x_n = A$ , segue da Definição 8 que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \geq n_0$ .

Por ser  $\lim x_n = B$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \geq n_1$ .

Seja  $n_2 = \max \{n_0, n_1\}$ , isto é,  $n_2$  é o maior elemento do conjunto  $\{n_0, n_1\}$ . Note que, se for  $n \geq n_2$ , será também  $n \geq n_0$  e  $n \geq n_1$ .

Seja  $n \geq n_2$ . Então,  $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|x_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - x_n + x_n - B| = |(A - x_n) + (x_n - B)| \leq \\ &\leq |A - x_n| + |x_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto,  $|A - B| < \varepsilon$ .

Como  $|A - B|$  é não negativo e menor do que qualquer número positivo, só pode ser igual a zero. Concluimos que  $A = B$ . ■

Foi usada a desigualdade triangular (lembra dela?).

**Teorema 2.** Toda sequência convergente é limitada.

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência cujo limite é  $L$ . Então, para todo número positivo  $\varepsilon$  existe algum número natural  $n_0$  tal que  $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  para todo  $n \geq n_0$ . Em particular, para  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0$  tal que  $x_n \in (L - 1, L + 1)$  para todo  $n \geq n_0$ .

Seja  $X$  o conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, L - 1, L + 1\}$ .

Este conjunto é finito, pois tem no máximo  $n_0 + 1$  elementos. Dessa forma,  $X$  possui um elemento mínimo  $A$  e um elemento máximo  $B$ . Como todos os termos  $x_n$ , com  $n \geq n_0$ , estão no intervalo  $(L - 1, L + 1)$ , podemos afirmar que  $A \leq x_n \leq B$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $(x_n)$  é limitada. ■

**Exemplo 28.** Considere a sequência  $x_n = \begin{cases} n & \text{se } 1 \leq n \leq 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \geq 11 \end{cases}$ .

Note que, apesar de os termos de  $x_1$  a  $x_{10}$  estarem “espalhados”, a partir de  $x_{11} = 1 + \frac{1}{11}$  os termos se acumulam aproximando-se de 1:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1 + \frac{1}{11}, 1 + \frac{1}{12}, 1 + \frac{1}{13}, \dots$$

Assim, a sequência  $(x_n)$  converge para 1. (*Prove isso!*)

Para ilustrar a demonstração do Teorema 2, note que, para  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in (1 - 1, 1 + 1) = (0, 2)$ . Observe que  $n_0 = 11$  e o conjunto  $X$  será dado por:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 0\}$$

O máximo de  $X$  é 10 e o mínimo é 0. Assim, todos os termos da sequência pertencem ao intervalo  $[0, 10]$ . Logo,  $(x_n)$  é limitada.

**Observação:**

- 1) Do teorema segue que toda sequência não limitada diverge. Assim, sequências como  $(n^2)$ ,  $(4n + 1)$ ,  $(\ln n)$ ,  $((-2)^n)$  divergem.
- 2) A recíproca do teorema é falsa. Por exemplo, a sequência  $((-1)^n)$  é limitada, mas não converge.

Uma sequência monótona pode não convergir, como acontece, por exemplo, com a sequência  $(n^2)$ .

O próximo teorema estabelece que, se a sequência for monótona e limitada, então converge.

Atenção: este teorema vale também para sequências que são monótonas a partir de certo termo.

**Teorema 3.** Toda sequência monótona e limitada converge.

**Demonstração.** Será omitida neste momento, pois necessita da compreensão dos conceitos de supremo e ínfimo, que serão estudados num curso de análise. ■

**Exemplo 29.** Analisaremos detalhadamente a sequência  $(x_n)$ , sendo  $x_n = 6 - \frac{1}{2n}$ . Essa sequência é limitada, pois  $6 - \frac{1}{2n} > 0$  e também  $6 - \frac{1}{2n} < 6$  para todo  $n$ . Assim,  $x_n \in [0, 6], \forall n \in \mathbb{N}$ .

Para verificar se  $(x_n)$  é monótona, examinaremos a diferença  $x_{n+1} - x_n$ :

$$x_{n+1} - x_n = \left(6 - \frac{1}{2n+2}\right) - \left(6 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{2}{2n(2n+2)},$$

que é sempre positiva. Logo,  $(x_n)$  é crescente.

Agora note que sempre podemos encontrar termos da sequência arbitrariamente próximos de 6. Por exemplo, se tomarmos o intervalo  $\left(6 - \frac{1}{1000}, 6\right]$ , o elemento  $x_{1000} = 6 - \frac{1}{2000}$  pertence ao intervalo. Além disso, como  $(x_n)$  é crescente, todos os termos  $x_n$ , com  $n > 1000$ , pertencem ao intervalo.

Vamos agora **provar** que  $\lim x_n = 6$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , devemos achar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - 6| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ .

$$\text{Mas } |x_n - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Portanto, se  $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ , então  $|x_n - 6| < \varepsilon$ . Logo, basta tomar  $n_0$  como o menor número natural maior do que  $\frac{1}{2\varepsilon}$ . Isso prova que  $\lim x_n = 6$ .

## Exercício resolvido

20) Verifique se a sequência  $\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)$  converge usando o Teorema 3.

**Resolução.**

(1) Vamos verificar se a sequência é monótona.

Seja  $x_n = \frac{2n+5}{3n-1}$ . Então,  $x_{n-1} - x_n = \frac{-17}{(3n+2)(3n-1)}$  é sempre nega-

tivo (*Verifique isso!*). Logo,  $(x_n)$  é decrescente.

(2) A sequência é limitada?

Note que:  $x_n > 0$  para todo  $n$ . Além disso, sendo  $(x_n)$  decrescente, todos os seus termos são menores do que  $x_1 = \frac{7}{2}$ . Portanto,  $0 < x_n \leq \frac{7}{2}$  para todo  $n$ , e a sequência é limitada. Conclui-se que ela converge.

**Exemplo 30.** A sequência  $\left(\frac{15^n}{n!}\right)$  é decrescente a partir do décimo quinto termo (*Verifique isso!*). Podemos então concluir que é limitada (*Por quê?*). Logo, pelo Teorema 3, ela converge.

**Teorema 4.** Se a sequência  $(x_n)$  converge para  $L$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  converge para  $L$ .

**Demonstração.** Seja  $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \dots\}$  um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ , com  $n_1 < n_2 < \dots$ .

Seja  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$  uma subsequência de  $(x_n)$ . Vamos provar que  $\lim x_{n_i} = L$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Deveremos encontrar  $n_j \in \mathbb{N}'$  tal que, se  $n_i \in \mathbb{N}'$  e  $n_i \geq n_j$ , então  $|x_{n_i} - L| < \varepsilon$ .

Como  $\lim x_n = L$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - L| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Sendo  $\mathbb{N}'$  infinito, existe  $n_j \in \mathbb{N}'$  tal que  $n_j \geq n_0$ . Então, para todo  $n_i \in \mathbb{N}'$  tal que  $n_i \geq n_j$ , temos  $n_i \geq n_0$  e, portanto,  $|x_{n_i} - L| < \varepsilon$ . Isso prova que  $\lim x_{n_i} = L$ . ■



**Observação.** Conclui-se do teorema que, se uma sequência possui duas subsequências convergindo para valores distintos, ela diverge. Por exemplo, a sequência:

$$x_n = \begin{cases} 3 - \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 + \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Essa sequência diverge, pois possui subsequências convergindo para 3 e 1 respectivamente.

No próximo teorema, veremos que, se numa sequência *monótona* identificamos uma subsequência que converge para  $L$ , então a própria sequência converge para  $L$ . Para demonstrá-lo, precisamos do seguinte lema:

**Lema.** Se uma sequência monótona possui uma subsequência limitada, então ela mesma é limitada.

A prova é análoga se a sequência  $(x_n)$  for não crescente.

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência monótona. Suponhamos, **não decrescente**.

Então,  $x_1 \leq x_2 \leq \dots$  e, portanto,  $x_1 \leq x_n$  para todo  $n$ , o que mostra que  $(x_n)$  é limitada inferiormente. Falta mostrar que  $(x_n)$  é limitada superiormente.

Por hipótese,  $(x_n)$  possui uma subsequência  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$  limitada. Então, existe  $B \in \mathbb{R}$  tal que  $x_1 \leq x_{n_i} \leq B$  para todo  $n_i \in \mathbb{N}'$ .

Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\mathbb{N}'$  é infinito, existe  $n_j \in \mathbb{N}'$  tal que  $n_j > n$ . Por ser  $(x_n)$  não decrescente, segue que  $x_n \leq x_{n_j} \leq B$ . Mas  $n$  é genérico e, assim,  $x_1 \leq x_n \leq B$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Concluimos que  $(x_n)$  é limitada. ■

**Teorema 5.** Se uma sequência é monótona e possui uma subsequência que converge para  $L$ , então a sequência também converge para o mesmo  $L$ .

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência monótona e  $(x_{n_i})$  uma subsequência convergente que tem limite  $L$ . Vamos mostrar que  $(x_n)$  também tem limite  $L$ .

Se  $(x_n)$  convergente, é também limitada. Pelo Lema, a sequência  $(x_n)$  é limitada. Pelo Teorema 3, ela converge, digamos, para  $M$ . Pelo Teorema 4,  $M = L$  e, portanto,  $(x_n)$  converge para  $L$ .

■

**Observação.** Uma sequência limitada pode também ser caracterizada assim:  $(x_n)$  é limitada se existe  $k > 0$  tal que  $|x_n| < k, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 6.** Se  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são sequências tais que  $(y_n)$  é limitada e  $\lim x_n = 0$ , então  $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$ .

**Demonstração.** Por hipótese,  $(y_n)$  é limitada e, assim, existe  $k > 0$  tal que  $|y_n| < k, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim x_n = 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n| < \frac{\varepsilon}{k}$  para todo  $n \geq n_0$ .

Para  $n \geq n_0$ , temos:  $|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k}$ , ou seja,

$|x_n \cdot y_n - 0| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Logo,  $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$ .

■

Atenção: este teorema garante a convergência do produto de duas sequências, mesmo que uma delas não seja convergente.

**Exemplo 31.**

a)  $\lim \left( \frac{\text{sen } n}{n} \right) = \lim \left( \frac{1}{n} \cdot \text{sen } n \right)$ . Como a sequência  $\left( \frac{1}{n} \right)$  tem limite zero e a sequência  $(\text{sen } n)$  é limitada, segue que  $\lim \left( \frac{\text{sen } n}{n} \right) = 0$ .

b) Da mesma forma,  $\lim \frac{\cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{3} \right]}{n^2 + 1} = 0$ .

**Observação.** Se  $(y_n)$  não é limitada e  $\lim x_n = 0$ , então a sequência  $(x_n \cdot y_n)$  pode convergir para um número real *qualquer* ou divergir, mesmo sendo  $\lim x_n = 0$ . Veja alguns exemplos:

**Exemplo 32.**

a) Se  $y_n = n^2$  e  $x_n = \frac{-8}{n^2}$ , então  $x_n \cdot y_n = -8$ , ou seja,  $(x_n \cdot y_n)$  é a sequência constante, que converge para  $-8$ .

- b) Se  $y_n = n^2$  e  $x_n = \frac{1}{n}$ , então  $x_n \cdot y_n = n$  e a sequência  $(x_n \cdot y_n)$  diverge.
- c) Se  $y_n = n^2$  e  $x_n = \frac{1}{n^3}$ , então  $x_n \cdot y_n = \frac{1}{n}$  e a sequência  $(x_n \cdot y_n)$  converge para zero.

Em muitas situações, uma sequência pode ser escrita como soma, produto ou quociente de outras sequências. O próximo teorema estabelece um resultado a respeito da convergência de tais sequências.

**Teorema 7.** Se  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são sequências que convergem para  $A$  e  $B$  respectivamente, então:

- a) a sequência  $(x_n + y_n)$  converge para  $A + B$ ;
- b) a sequência  $(cx_n)$  converge para  $cA$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ ;
- c) a sequência  $(x_n \cdot y_n)$  converge para  $A \cdot B$ ;
- d) a sequência  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  converge para  $\frac{A}{B}$  desde que  $B \neq 0$ .

**Demonstração.**

a) Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim x_n = A$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \geq n_1$ .

Como  $\lim y_n = B$ , existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \geq n_2$ .

Seja  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  e  $n \geq n_0$ . Então,  $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (A + B)| &= |(x_n - A) + (y_n - B)| \\ &\leq |x_n - A| + |y_n - B| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ou seja, se  $n \geq n_0$ , então  $|(x_n + y_n) - (A + B)| < \varepsilon$ . Isso prova que  $\lim(x_n + y_n) = A + B$ .

- b) Para  $c = 0$ , a igualdade é óbvia, pois a sequência constante  $(0)$  converge para  $0 = 0 \cdot A$ .

Suponhamos  $c \neq 0$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Por ser  $\lim x_n = A$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|}$  para todo  $n \geq n_0$ .

Logo, para  $n \geq n_0$ , temos:  $|cx_n - cA| = |c| \cdot |x_n - A| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$ , ou seja,  $|cx_n - cA| < \varepsilon$ .

Concluimos que  $\lim(cx_n) = cA$ .

Antes de provar (c), observe que:  $\lim z_n = l$  é equivalente a  $\lim(z_n - l) = 0$ .

c) Vamos escrever a expressão  $x_n y_n - AB$  de forma que possamos usar as hipóteses:  $\lim x_n = A$  e  $\lim y_n = B$ . Para tal, observe que, ao somar e subtrair a expressão,  $x_n B$  obtemos:

$$x_n y_n - AB = x_n y_n - x_n B + x_n B - AB = x_n (y_n - B) + B(x_n - A).$$

Por ser convergente,  $(x_n)$  é limitada. Por hipótese,  $\lim y_n = B$ .

Pelo Teorema 6,  $\lim x_n (y_n - B) = 0$ .

Por hipótese,  $\lim(x_n - A) = 0$  e pelo item (b) anterior,

$$\lim B(x_n - A) = 0.$$

Logo,

$$\lim(x_n y_n - AB) = \lim x_n (y_n - B) + \lim B(x_n - A) = 0 + 0 = 0.$$

E, portanto,  $\lim x_n y_n = AB$ .

d) Provaremos que  $\lim \left( \frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} \right) = 0$ .

Temos:  $\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{Bx_n - Ay_n}{By_n} = \frac{1}{By_n} (Bx_n - Ay_n)$ , para todo  $n$  tal que

$y_n \neq 0$ . A ideia é usar novamente o Teorema 6.

Decorre dos itens (a) e (b) e da hipótese que:

$$\lim(Bx_n - Ay_n) = B \lim x_n - A \lim y_n = BA - AB = 0.$$

Falta mostrar que a sequência  $\left( \frac{1}{By_n} \right)$  é limitada.

Como  $\lim By_n = B \lim y_n = B^2$ , segue da definição de limite de uma sequência que: para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|By_n - B^2| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Ou seja,  $-\varepsilon < By_n - B^2 < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Em

particular, para  $\varepsilon = \frac{B^2}{2}$ , temos:  $-\frac{B^2}{2} < By_n - B^2 < \frac{B^2}{2}$ .

Somando  $B^2$  aos membros dessa desigualdade, temos

$\frac{B^2}{2} < By_n < \frac{3B^2}{2}$ , ou seja,  $By_n > \frac{B^2}{2}$ . Como  $By_n > 0$ , segue que

$0 < \frac{1}{By_n} < \frac{2}{B^2}$  para todo  $n \geq n_0$ .

O conjunto  $\left\{ \frac{1}{By_1}, \frac{1}{By_2}, \dots, \frac{1}{By_{n_0-1}} \right\}$  é finito e, portanto, limita-

do. Logo, a sequência  $\left( \frac{1}{By_n} \right)$  é limitada. Segue do Teorema 6 que:

$\lim \frac{1}{By_n} (Bx_n - Ay_n) = 0$  e, portanto,  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$ .

## Exercícios resolvidos

21) Calcule o limite de cada uma destas sequências:

- a)  $\left( \frac{5}{n} \right)$ ;                      b)  $\left( \frac{1}{n^2} \right)$ ;  
 c)  $\left( \frac{7n^2 + 5n + 3}{3n^2 - 8} \right)$ ;              d)  $\left( \frac{2n^2 + 5}{1 - n^6} \right)$ .

**Resolução.**

a) Pelo item (b) do Teorema 7,  $\lim \frac{5}{n} = 5 \times \lim \frac{1}{n} = 5 \times 0 = 0$ .

b) Pelo item (c) do Teorema 7,

$$\lim \frac{1}{n^2} = \lim \left( \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \right) = \left( \lim \frac{1}{n} \right) \times \left( \lim \frac{1}{n} \right) = 0.$$

c) Para usar os itens do Teorema 7, vamos dividir numerador e denominador do termo geral por  $n^2$ , o que não o altera:

$$\frac{7n^2 + 5n + 3}{3n^2 - 8} = \frac{7 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 - \frac{8}{n^2}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim \frac{7n^2 + 5n + 3}{3n^2 - 8} &= \lim \frac{7 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 - \frac{8}{n^2}} = \frac{\lim \left( 7 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim \left( 3 - \frac{8}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{\lim 7 + \lim \frac{5}{n} + \lim \frac{3}{n^2}}{\lim 3 - \lim \frac{8}{n^2}} = \frac{7 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

d) Vamos também dividir numerador e denominador pela maior potência de  $n$  presente na expressão, a saber,  $n^6$ .

$$\text{Então, } \lim \left( \frac{2n^2 + 5}{1 - n^6} \right) = \lim \left( \frac{\frac{2}{n^4} + \frac{5}{n^6}}{\frac{1}{n^6} - 1} \right) = \frac{0 + 0}{0 - 1} = 0.$$

**Observação:** Já foi mencionado que progressões infinitas, tanto aritméticas quanto geométricas, são sequências. Os próximos exercícios tratam sobre a convergência destas sequências.

22) Seja  $a_1$  um número real qualquer. Prove: Para todo número real  $r \neq 0$ , a sequência  $(a_1 + nr)$  diverge.

**Resolução.** Suponhamos  $r > 0$ . O caso  $r < 0$  é tratado de maneira análoga. Mostraremos que a sequência não é limitada.

Seja  $M$  um número positivo qualquer. Basta mostrar que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $(a_1 + nr) > M$ .

$$\text{Ora, } a_1 + nr > M \Leftrightarrow nr > M - a_1 \Leftrightarrow n > \frac{M - a_1}{r}.$$

Portanto, se  $n > \frac{M - a_1}{r}$ , então  $a_1 + nr > M$ . Sendo  $M$  arbitrário, conclui-se que a sequência não é limitada.

Pelo Teorema 2 ela diverge.

23) Sejam  $a_0$  e  $q$  números reais não nulos. Prove que a sequência  $(a_0 q^n)$  converge se  $|q| < 1$  ou se  $q = 1$  e diverge se  $|q| > 1$  ou se  $q = -1$ .

**Resolução.** Se  $|q| < 1$ , já foi provado (Proposição 6) que  $\lim q^n = 0$ . Logo,  $\lim a_0 q^n = a_0 \cdot \lim q^n = 0$ .

- Se  $q = 1$ , resulta a sequência constante  $(a_0)$  que converge para  $a_0$ .
- Se  $q = -1$ , trata-se da sequência alternada  $-a_0, a_0, -a_0, \dots$  que diverge.
- Se  $|q| > 1$ , vamos provar que a sequência  $(a_0 q^n)$  não é limitada.

Seja  $K$  um número positivo qualquer. Basta mostrar que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_0 q^n| > K$ .

$$\begin{aligned} \text{Ora, } |a_0 q^n| > K &\Leftrightarrow |a_0| \cdot |q^n| > K \Leftrightarrow |q|^n > \frac{K}{|a_0|} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n \log |q| > \log \left( \frac{K}{|a_0|} \right) \Leftrightarrow n > \frac{1}{\log |q|} \cdot \log \left( \frac{K}{|a_0|} \right). \end{aligned}$$

Portanto, se  $n > \frac{1}{\log |q|} \cdot \log \left( \frac{K}{|a_0|} \right)$ , então  $|a_0 q^n| > K$ . Como  $K$  é arbitrário, a sequência  $(|a_0 q^n|)$  não é limitada, e o mesmo acontece com a sequência  $(a_0 q^n)$ .

Pelo Teorema 2 ela diverge. Provamos, assim, que a P.G. infinita de razão  $q$  converge, se, e somente se,  $|q| < 1$  ou  $q = 1$ .

**Teorema 8. (Teorema do Confronto).** Sejam  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  e  $(z_n)$  sequências cujos termos gerais a partir de certo índice  $n_0$  satisfazem:  $x_n \leq z_n \leq y_n$ . Se  $\lim x_n = L$  e  $\lim y_n = L$ , então também  $\lim z_n = L$ .

**Demonstração.** Temos por hipótese que  $x_n \leq z_n \leq y_n$  para todo  $n \geq n_0$  e ainda que  $\lim x_n = \lim y_n = L$ . Vamos provar que  $\lim z_n = L$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Por ser  $\lim x_n = L$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  para todo  $n \geq n_1$ .

Por ser  $\lim y_n = L$ , existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $y_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  para todo  $n \geq n_2$ .

Seja  $M^* = \max \{n_0, n_1, n_2\}$ . Então, para todo  $n \geq M^*$  temos  $L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < L + \varepsilon$ , ou seja,  $z_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

Logo,  $\lim z_n = L$ .

■

**Exemplo 33.**

- a) A sequência  $\left(\frac{1}{n!}\right)$  converge? Qual o seu limite? Note que  $n! \geq n$ , para todo  $n \geq 1$ . Logo,  $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$  para  $n \geq 1$ . A sequência  $(0)$ , bem como a sequência  $\left(\frac{1}{n}\right)$ , converge para  $0$ . Pelo Teorema 8,  $\lim \frac{1}{n!} = 0$ .
- b) E a sequência  $\left(\frac{\text{sen } 2n}{n}\right)$ ? Ora, como  $-1 \leq \text{sen } 2n \leq 1$ , temos que  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\text{sen } 2n}{n} \leq \frac{1}{n}$  para todo  $n \geq 1$ . Tanto  $\left(-\frac{1}{n}\right)$  como  $\left(\frac{1}{n}\right)$  têm limite  $0$ . Pelo Teorema 8,  $\lim \frac{\text{sen } 2n}{n} = 0$ .

**Teorema 9. (Teorema de Bolzano-Weierstrass).** Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

**Demonstração.** Será omitida, pois necessita da compreensão de conceitos que serão estudados num curso de Análise.

Este teorema é usado para demonstrar muitos outros resultados importantes. Pode ser utilizado também para obter o limite de algumas sequências.

**Observação.** Sem a hipótese de ser limitada, uma sequência pode não possuir uma subsequência convergente. Uma sequência não limitada também pode ter subsequências convergentes.

**Exemplo 34.** As sequências  $(n)$  e  $(-n^2)$  não possuem subsequência convergente.

**Observação.** Uma sequência limitada pode ter mais do que uma subsequência convergente.

**Exemplo 35.** A sequência  $((-1)^n)$  tem duas subsequências convergentes. Já a sequência  $(x_n)$ , definida por:

$$x_n = \begin{cases} 4 - \frac{1}{n} & \text{se } n = 3k; \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n = 3k + 1; \quad k \in \mathbb{N} \\ 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n = 3k + 2; \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$



possui três subsequências convergentes. (Quais são e para que valores convergem?)

**Exemplo 36.** A sequência  $(x_n)$ , sendo

$$x_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

possui uma subsequência que converge para zero, apesar de não ser limitada.

### 1.3.5 Limites infinitos

Entre as sequências divergentes existem aquelas cujos termos, a partir de certo índice, tornam-se arbitrariamente grandes em módulo.

**Definição 9.** Dizemos que uma sequência  $(x_n)$  *tende a infinito* quando para qualquer número positivo  $M$  existe um número natural  $n_0$  tal que  $x_n > M$  para todo  $n \geq n_0$ .

**Notação.**  $x_n \rightarrow +\infty$  ou simplesmente  $x_n \rightarrow \infty$ .

A definição diz que  $x_n \rightarrow \infty$  se, dado um número positivo  $M$ , arbitrariamente grande, existe um número  $n_0$  tal que *todos* os termos da sequência com índice maior ou igual a  $n_0$  são maiores do que  $M$ .

**Definição 10.** Dizemos que a sequência  $(x_n)$  *tende a menos infinito* quando para qualquer número negativo  $B$  existe um número  $n_0$  tal que  $x_n < B$  para todo  $n \geq n_0$ .

**Observação.** Os símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$  não podem ser tratados como números, pois não pertencem a conjunto numérico algum.

**Exemplo 37.**

- a) Sequências como  $(n^k)$  com  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(2^n)$ ,  $(\sqrt{n})$  e  $(n!)$  obviamente tendem a infinito.
- b) A sequência  $10 - 4n^2$  tende a  $-\infty$ .

Para mostrar isso, seja  $B < 0$ . Devemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $10 - 4n^2 < B$  para todo  $n \geq n_0$ . Temos:

$$\begin{aligned} 10 - 4n^2 < B &\Leftrightarrow -4n^2 < B - 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 > \frac{10 - B}{4} \Leftrightarrow n > \frac{\sqrt{10 - B}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, se  $n > \frac{\sqrt{10 - B}}{2}$ , então  $10 - 4n^2 < B$ . Basta tomar  $n_0$  como o menor número natural maior do que  $\frac{\sqrt{10 - B}}{2}$ .

Conclui-se que  $10 - 4n^2 \rightarrow -\infty$ .

**Exemplo 38.** Seja  $x_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Não é verdade que  $x_n \rightarrow \infty$ , pois, por maior que seja  $n_0$ , sempre haverá termos  $x_n$  iguais a 1 para  $n \geq n_0$ .

**Exemplo 39.** Seja  $a_n = (-1)^n \cdot n$ . Também não podemos dizer que  $a_n \rightarrow \infty$ . Na verdade,  $(a_n)$  possui uma subsequência que tende a menos infinito e outra que tende a infinito.

**Tarefa.** Se a sequência  $(b_n)$  é dada por  $b_n = \begin{cases} -n^2 & \text{se } n \leq 10000 \\ 2n & \text{se } n > 10000 \end{cases}$ , podemos dizer que  $b_n \rightarrow \infty$ ? Ou que  $b_n \rightarrow -\infty$ ?

### 1.3.6 Algumas propriedades dos limites infinitos

**Propriedade 1.** Se  $x_n \rightarrow \infty$  e  $(y_n)$  é limitada inferiormente, então  $(x_n + y_n) \rightarrow \infty$ .

**Justificativa.** Por ser  $(y_n)$  limitada inferiormente, existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $y_n \geq k$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Seja  $M$  um número real positivo qualquer. Devemos mostrar que  $x_n + y_n$  é maior do que  $M$  a partir de certo índice  $n_0$ . Como, ainda por hipótese,  $x_n \rightarrow \infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$ ,  $x_n > M - k$ . Logo, para todo  $n \geq n_0$ , temos  $x_n + y_n > (M - k) + k = M$ , ou seja,  $x_n + y_n > M$ . Concluímos que  $(x_n + y_n) \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 40.**

- a) Seja  $x_n = n^2$  e  $y_n = 2n^2$ . Observe que  $x_n \rightarrow \infty$  e que  $(y_n)$  é limitada inferiormente. Então,  $x_n + y_n = 3n^2$ , que tende a infinito.
- b) Seja  $x_n = n^2$  e  $y_n = -n^2$ . Note que  $(y_n)$  não é limitada inferiormente. Agora, temos  $x_n + y_n = 0$  e a sequência constante (0) não tende a infinito.
- c) Seja  $x_n = 2n^2$  e  $y_n = -n^2$ . Dessa vez,  $x_n + y_n = n^2$  e, portanto,  $(x_n + y_n) \rightarrow \infty$ , apesar de  $(y_n)$  não ser limitada inferiormente. Esse exemplo mostra que a recíproca da propriedade 1 é falsa.

**Propriedade 2.** Se  $x_n \rightarrow \infty$  e  $(y_n)$  é limitada inferiormente por um número positivo, então  $(x_n \cdot y_n) \rightarrow \infty$ .

**Justificativa.** Por hipótese, existe  $c > 0$  tal que  $y_n \geq c, \forall n \in \mathbb{N}$ . Seja  $M$  um número real positivo. Por hipótese, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n > \frac{M}{c}$  para todo  $n \geq n_0$ . Logo, se  $n \geq n_0$ , então  $x_n \cdot y_n > \frac{M}{c} \cdot c = M$ , ou seja,  $x_n \cdot y_n > M$ . Concluimos que  $x_n \cdot y_n \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 41.**

- a) Seja  $x_n = n$  e  $y_n = 2 + \frac{1}{n}$ . Note que  $x_n \rightarrow \infty$  e  $y_n \geq 2, \forall n$ .  
Então,  $x_n \cdot y_n = n \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = 2n + 1$  tende a infinito.
- b) Seja  $x_n = n$  e  $y_n = \frac{1}{n}$ . Dessa vez,  $(y_n)$  não satisfaz a hipótese, pois não existe  $c > 0$  tal que  $y_n \geq c, \forall n \in \mathbb{N}$ .  
Temos:  $x_n \cdot y_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$  e a sequência constante (1) não tende a infinito.
- c) Seja  $x_n = n^2$  e  $y_n = \frac{1}{n}$ . Agora  $x_n \cdot y_n = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$  e, portanto,  $x_n \cdot y_n \rightarrow \infty$ . Esse exemplo mostra que a recíproca é falsa, pois  $(y_n)$  não é limitada inferiormente por um número positivo.

**Propriedade 3.** Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  seqüências de números reais positivos. Se  $(x_n)$  é limitada inferiormente por um número positivo e se  $\lim y_n = 0$ , então  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$ .

**Justificativa.** Existe, por hipótese,  $c > 0$  tal que  $x_n \geq c$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $M > 0$ . Note que  $\frac{c}{M}$  é um número positivo e, como  $\lim y_n = 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < y_n < \frac{c}{M}$  para todo  $n \geq n_0$ .

Então, para todo  $n \geq n_0$ , temos:  $x_n \geq c$  e  $\frac{1}{y_n} > \frac{M}{c}$ .

Logo,  $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} > c \cdot \frac{M}{c} = M$ , isto é,  $\frac{x_n}{y_n} > M$ ,  $\forall n \geq n_0$ .

Concluimos que:  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 42.**

a) Seja  $x_n = 3 + \frac{1}{n}$  e  $y_n = \frac{1}{n}$ . Então,  $x_n \cdot y_n = \left(3 + \frac{1}{n}\right)n = 3n + 1$ , que tende a infinito.

b) Seja  $x_n = \frac{1}{n}$  e  $y_n = \frac{1}{n}$ . Note que  $(x_n)$  não satisfaz a hipótese de ser limitada inferiormente por um número positivo.

Agora,  $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$  e a seqüência constante (1) não tende a infinito.

c) Seja  $x_n = \frac{1}{n}$  e  $y_n = \frac{1}{n^2}$ . Dessa vez,  $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n$  e a seqüência  $(n)$  tende a infinito. Esse exemplo mostra que a recíproca também não é válida.

### 1.3.7 Indeterminação

Observe com atenção cada uma das quatro situações abaixo, em que  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são seqüências com limites infinitos.

i) Se  $x_n \rightarrow \infty$  e  $y_n \rightarrow -\infty$ , então nada podemos afirmar sobre o limite da seqüência  $(x_n + y_n)$ . Veja os exemplos:

**Exemplo 43.**

- a)  $x_n = n^2$ ;  $y_n = -n$ . Então,  $x_n + y_n = n^2 - n = n(n-1)$ . Logo,  $x_n + y_n \rightarrow \infty$ .
- b)  $x_n = n$ ;  $y_n = -n^2$ . Então,  $x_n + y_n = n(1-n)$  e, portanto,  $x_n + y_n \rightarrow -\infty$ .
- c)  $x_n = n + 23$ ;  $y_n = -n$ . Então,  $x_n + y_n = 23$ , ou seja,  $(x_n + y_n)$  é a sequência constante (23) que tem limite 23.
- d)  $x_n = n$ ;  $y_n = (-1)^n - n$ . Então,  $x_n + y_n = (-1)^n$ , que é uma sequência oscilante e divergente.

Esses exemplos mostram que nesta situação a sequência  $(x_n + y_n)$  pode convergir para um número real qualquer, pode divergir, pode tender a  $-\infty$  ou pode tender a  $+\infty$ .

Por isso, escreve-se: “ $\infty - \infty$  é indeterminado” ou “ $\infty - \infty$  é uma indeterminação”.

- ii) Se  $x_n \rightarrow \infty$  (ou  $-\infty$ ) e se  $y_n \rightarrow \infty$  (ou  $-\infty$ ), nada podemos afirmar sobre o limite da sequência  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ .

**Exemplo 44.**

- a)  $x_n = n^2$ ;  $y_n = -n$ . Então,  $\frac{x_n}{y_n} = -n$  e, portanto,  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty$ .
- b)  $x_n = 6n^2$ ;  $y_n = n^2$ . Então,  $\frac{x_n}{y_n} = 6$ , ou seja,  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  é a sequência constante (6) que converge para 6.

Escreve-se: “ $\frac{\infty}{\infty}$  é uma indeterminação”.

- iii) Se  $\lim x_n = 0$  e  $y_n \rightarrow \infty$  (ou  $-\infty$ ), nada podemos dizer sobre o limite da sequência  $(x_n \cdot y_n)$ .

**Exemplo 45.**

- a)  $x_n = \frac{1}{n}$ ;  $y_n = 5n$ . Então,  $x_n \cdot y_n = 5$ , ou seja,  $(x_n \cdot y_n)$  é a sequência constante (5) que converge.

b)  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ;  $y_n = n^3$ . Então,  $x_n \cdot y_n = n$ , portanto,  $x_n \cdot y_n \rightarrow \infty$ .

Escreva-se: “ $0 \cdot \infty$  é uma indeterminação”.

iv) Se  $\lim x_n = 0$  e  $\lim y_n = 0$ , então nada podemos dizer sobre o limite da sequência  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ .

## Exercícios propostos

- 34) Dê quatro exemplos de sequências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  tais que ambas converjam para zero; no entanto as sequências  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  têm diferentes comportamentos quanto ao limite.

Escreva-se: “ $\frac{0}{0}$  é uma indeterminação”.

- 35) Escreva os cinco primeiros termos das sequências a seguir.

a)  $\left(\frac{1+(-1)^n}{2^n}\right)$

b)  $x_n = \begin{cases} n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) & \text{se } n \text{ é par} \\ \sec\left(\frac{\pi}{n-2}\right) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

c)  $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{3(n+1)}$

d)  $\left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right)$

e)  $\left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{2^j}\right)$

$\left(\begin{array}{l} \text{Note que } a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \\ a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}, \text{ etc.} \end{array}\right)$

- 36) Escreva o termo geral das seguintes sequências.

a)  $(6, 10, 14, 18, \dots)$       b)  $\left(\frac{2}{4}, \frac{-5}{8}, \frac{8}{16}, \frac{-11}{32}, \frac{14}{64}, \dots\right)$

c)  $\left(5 + \frac{1}{2}, 5 - \frac{1}{4}, 5 + \frac{1}{8}, 5 - \frac{1}{16}, \dots\right)$

- 37) Considere a sequência  $(x_n)$ , sendo  $x_n = n^2$ ; sejam  $\mathbb{N}_1 = \{3k ; k \in \mathbb{N}\}$ ;  $\mathbb{N}_2 = \{-3 + 4k ; k \in \mathbb{N}\}$  subconjuntos de  $\mathbb{N}$ . Escreva os cinco primeiros termos das subsequências  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}_1}$  e  $(x_{m_i})_{m_i \in \mathbb{N}_2}$ .
- 38) Considere a sequência do Exercício 35 (a).
- a) Sendo  $\mathbb{N}' = \{2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$  e  $\mathbb{N}'' = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ , escreva o termo geral das subsequências  $(x_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}'}$  e  $(x_{m_i})_{m_i \in \mathbb{N}''}$ .
- b) Essas subsequências convergem?
- 39) Considere a sequência  $\left( n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right)$ . Liste alguns termos para compreendê-la.
- a) É monótona? Justifique!
- b) É limitada? Justifique!
- c) Converge? Justifique!
- d) Ela possui subsequências convergentes? Quais?
- 40) Justifique porque a sequência  $(n \cdot \operatorname{cosec} n)$  diverge.
- 41) A sequência  $(x_n)$  abaixo converge? Justifique através de algum teorema.

$$x_n = \begin{cases} 5 - \frac{1}{n} & \text{se } n = 3k; \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{5n+1}{n+4} & \text{se } n = 3k-1; \quad k \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{n^2} & \text{se } n = 3k-2; \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 42) Seja  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$  e seja  $x_0 = 0,2$ . A sequência  $(f(x_0), f \circ f(x_0), f \circ f \circ f(x_0), \dots)$  converge? Justifique!

- 43) Verifique se a sequência é monótona e a partir de qual termo:
- a)  $\left( \frac{2n+6}{5n} \right)$ ;      b)  $\left( \frac{n^n}{n!} \right)$ ;

c)  $\left(\frac{306^n}{(2n)!}\right);$       d)  $(\operatorname{arctg} n).$

(Na última sequência não faça contas. Observe o gráfico de  $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ).

44) Considere a sequência  $(n^2 + (-1)^n \cdot n).$

- Escreva os seis primeiros termos.
- Prove que a sequência é monótona.
- A sequência converge? Por quê?

45) Mostre que a sequência  $\left(\frac{50^n}{(n+3)!}\right)$  é limitada.

46) Seja  $x_n = \frac{4-n^2}{3n^2+2}.$

- Calcule  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que a distância entre  $x_n$  e  $-\frac{1}{3}$  seja menor do que  $\frac{1}{200}$  para todo  $n \geq n_0.$

b) Calcule  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_n \in \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{1000}, -\frac{1}{3} + \frac{1}{1000}\right), \quad \forall n \geq n_0$$

c) Prove que  $\lim x_n = -\frac{1}{3}.$

47) Prove que a sequência  $\left(6 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)$  converge para 6.

48) Prove: Se  $(x_n)$  converge para  $L$ , então a sequência  $(|x_n|)$  converge para  $|L|$ . (Use a desigualdade  $\left||a| - |b|\right| \leq |a - b|$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ). A recíproca é verdadeira? Prove-a ou dê um contraexemplo.

49) Examine as sequências abaixo quanto à convergência. Caso converjam, calcule o seu limite.

a)  $\left(\frac{e^n}{\sqrt{2}}\right);$       b)  $\left(\frac{2n^3 + 2n - 70}{6 - n^2 - 9n^3}\right);$



$$\begin{array}{ll} \text{c)} \left( \frac{4n-2}{1-n^3} \right); & \text{d)} \left( \frac{\pi^n}{4^n} \right); \\ \text{e)} \left( \frac{(-1)^n \cdot 8n}{7n-5} \right); & \text{f)} \left( \frac{(-1)^n}{n} + \ln n \right); \\ \text{g)} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n+11} \right); & \text{h)} \left( \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n} \right); \\ \text{i)} \left( \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1} \right). \end{array}$$

50) Análogo ao Exercício 49:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \left( \frac{\text{sen}(\sqrt{n\pi})}{2n} \right); \\ \text{b)} \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\right)}{8 - 3n^2} \right); \\ \text{c)} \left( \frac{n^3}{\text{arc cotg } n} \right). \end{array}$$

51) Prove: Se  $x_n \rightarrow +\infty$  e  $(y_n)$  é limitada superiormente e tem todos os termos positivos, então  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$ .

52) Use a definição de limite para provar que: Se  $(x_n), (y_n), (z_n)$  convergem para  $A, B, C$  respectivamente, então a sequência  $(x_n + y_n + z_n)$  converge para  $A + B + C$ .

53) Das sequências seguintes, apenas duas fazem sentido. Quais? Para cada uma destas, verifique se é: monótona, limitada, convergente.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (\text{arc sen } n); & \text{b)} (\text{arc cos } \frac{1}{n}); \\ \text{c)} (\text{arc sec } \frac{1}{n}); & \text{d)} (\text{arc sen}(\ln n)); \\ \text{e)} (\text{arccos sec } n). \end{array}$$

54) Em cada item dê um exemplo de seqüências  $(x_n), (y_n)$  tais que:

a)  $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$  e  $\lim(x_n - y_n) = \frac{3}{4}$ .

b)  $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$  e  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 21$ .

c)  $\lim(x_n) = 0, \lim(y_n) = 0$  e  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty$ .

55) A respeito de uma seqüência  $(a_n)$  de termos negativos sabe-se que:

i)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

ii)  $(a_n)$  possui uma subsequência que converge para  $-10$ .

Pergunta-se:

a)  $(a_n)$  é monótona?

b)  $(a_n)$  converge? Justifique!

56) Um número real chama-se “valor de aderência” ou “ponto de acumulação” de uma seqüência  $(x_n)$  se ele for o limite de alguma subsequência de  $(x_n)$ . Por exemplo, se

$$x_n = \begin{cases} 4 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

então 0 e 4 são os pontos de acumulação de  $(x_n)$ .

a) Escreva o termo geral de uma seqüência que tem como pontos de acumulação  $-5, 12$  e  $33$ .

b) V ou F? Justifique! “Uma seqüência monótona pode ter dois valores de aderência”.

c) Construa uma seqüência cujo conjunto de valores de aderência seja o conjunto  $\mathbb{N}$ .

57) Resolva os itens a seguir.

a) Existe alguma seqüência cujos termos são todos positivos, porém o seu limite é zero?

b) Prove: Se  $(x_n)$  é uma sequência que converge para  $L$  e  $L > 0$ , então existe um natural  $n_0$  tal que  $x_n > 0, \forall n \geq n_0$ .

*Sugestão para b): Comece assim: por hipótese, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - L| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$ . Em particular, para  $\varepsilon = \frac{L}{2}$ , existe  $n_0$  tal que...*

58) Se  $(x_n)$  é convergente e  $x_n \leq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\lim x_n \leq 0$ . Prove! Sugestão: Negue a tese e use o Exercício 57.

59) Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente satisfazendo  $x_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}$ , sendo  $A$  um número real. Prove que  $\lim x_n \leq A$ .

*Sugestão: Tome a sequência  $(y_n)$  tal que  $y_n = x_n - A$  e use o Exercício 58.*

60) Dê um exemplo de sequência  $(z_n)$  tal que  $\lim z_n = 7$ , porém  $z_n > 7, \forall n \in \mathbb{N}$ .

61) Prove ou dê um contraexemplo: "O limite de uma sequência convergente de números irracionais é irracional".

62) Prove:

a) Se  $(x_n)$  é limitada e  $y_n \rightarrow +\infty$ , então  $\lim \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 0$ .

b) Se  $(x_n)$  é limitada e  $y_n \rightarrow -\infty$ , então  $\lim \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 0$ .

63) Para cada uma das sequências  $(x_n)$  abaixo, escolha a alternativa correta:

(a)  $(x_n)$  converge.

(b)  $x_n \rightarrow +\infty$ .

(c)  $x_n \rightarrow -\infty$ .

(d) Nenhuma destas.

i)  $x_n = 1 - \frac{3}{\sqrt{n} - 25^8}$ ;

ii)  $x_n = \text{sen } n - n^2$ ;

$$\text{iii) } x_n = \log_{\frac{1}{2}} \left[ \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right]; \quad \text{iv) } x_n = \operatorname{cosec} \left[ \pi + \frac{(-1)^n}{n} \right];$$

$$\text{v) } x_n = 6 - (\ln 2)^n; \quad \text{vi) } x_n = \ln(e^{n-n^2}).$$

- 64) Apresente duas seqüências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  tais que:
- $\lim x_n = 0$ .
  - $(x_n \cdot y_n)$  é decrescente.
  - $\lim x_n \cdot y_n = 43$ .
- 65) Determine a geratriz da dízima periódica 3,629979797... usando a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita.
- 66) Determine um número natural  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  valha  $\left(\frac{3}{5}\right)^n < 10^{-8}$ .
- 67) Considere a P.G. cujo termo inicial é 6 e cuja razão é  $\frac{7}{9}$ .
- Calcule a soma de todos os seus termos.
  - Seja  $S_n$  a soma dos  $n$  primeiros termos. Determine um número natural  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  a diferença entre  $S_n$  e 27 seja menor do que um milésimo.
  - Seja  $\varepsilon$  um número real positivo, supostamente pequeno. Determine  $n_0$ , em função de  $\varepsilon$ , tal que para todo  $n \geq n_0$  tenha-se  $|S_n - 27| < \varepsilon$ .

## Respostas dos exercícios propostos

- |                                   |                                       |                                    |
|-----------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $a_{16} = 3$                   | 2) $r = -\frac{2}{5}$                 | 3) $a_1 = -3; r = 5$               |
| 4) $-\frac{199}{2}$               | 5) 428.429                            | 6) R\$1.219,00                     |
| 7) $a_4 = -1; a_7 = \frac{1}{64}$ |                                       | 8) $q = \sqrt{2}; a_1 = 3\sqrt{2}$ |
| 9) $n_0 = 758$                    | 10) $S_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2^9}$ | 11) 8 termos                       |
| 12) $a_1 = 19$                    | 13) 156 grãos                         | 14) 1,3,9,17,51,153                |

- 15) Zero
- 16) 9, 6, 4
- 18) P.A.: 3, 66, 129, 192      P.G.: 3, 12, 48, 192
- 19) Os números são  $-1, 2, 5, 8, 11$ .
- 20) Se  $r_1$  é a razão da P.A. e  $r_2$  a razão da P.A. obtida pela diferença dos quadrados, temos  $r_2 = 2r_1^2$ .

21)  $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

22)  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

- 23) a) P.G. de razão  $-1$ , para  $x \neq k\pi$ , sendo  $k \in \mathbb{Z}$   
 b) P.A. de razão  $\ln 10$

24) A soma é 1.      25)  $k = 23$       26)  $0, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}$ .

27)  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{2n+1}$

- 28) a) Decrescente a partir do quinto termo.  
 b) Limitada, pois todos os termos estão no intervalo  $[0, x_4]$ .

29)  $\left( \frac{2}{5}, \frac{4}{17}, \frac{6}{37}, \frac{8}{65}, \frac{10}{101}, \frac{12}{145} \right)$

- 31) a) Limitada      b) Limitada      c) Não limitada

33)  $n_0 = 423$

35) b)  $-1, 2, -1, 2\sqrt{2}, 2$       d)  $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$

e)  $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ ,

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$

- 36) a)  $(4n+2)$                       c)  $\left(5 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$
- 37) 9,36,81,144,225;  
1,25,81,169,289.
- 38) a)  $0$  e  $\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)$     b) Sim, para zero.
- 39) a) Não                      b) Não                      c) Não                      d) Sim
- 41) Diverge                      42) Não
- 43) a) Decrescente a partir do 1º termo  
c) Decrescente a partir do 9º termo
- 46) a)  $n_0 = 18$                       b)  $n_0 = 40$
- 49) a)  $D$                       b)  $C$                       c)  $C$                       d)  $C$                       e)  $D$   
f)  $D$                       g)  $C$                       h)  $C$   
i)  $C$  (A sequência do item (i) converge para  $-\frac{1}{2}$ )
- 50) a) Converge para 0                      b) Converge para 0                      c) Diverge
- 65)  $\frac{359368}{99000}$                       66)  $n_0 = 37$
- 67) b)  $n_0 = 41$   
c)  $n_0$  é o menor número natural maior do que  $\frac{\log \varepsilon - \log 27}{\log 7 - \log 9}$

# Capítulo 2

## Limite de uma Função







# Capítulo 2

## Limite de uma Função

*Neste capítulo, objetivamos estudar e desmistificar o conceito de limite de uma função, apresentar técnicas para o cálculo dos limites e aprimorar a ideia de “infinito”.*

### 2.1 Conceito de limite

Consideremos a função  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ .

Poderíamos escrever também:  $f(x) = x + 3$ , para  $x \neq 3$ .

Nosso propósito é examinar o comportamento de  $f(x)$  quando  $x$  toma valores arbitrariamente próximos de 3, porém diferentes de 3. Para tal, utilizaremos sequências  $(x_n)$  tais que  $x_n \neq 3$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim x_n = 3$ . Examinaremos em cada caso a sequência cujo termo geral é  $f(x_n)$ , isto é, a imagem de  $x_n$ .

- a) Seja  $x_n = 3 - \frac{1}{n}$ . Note que  $x_n \neq 3$  e que  $\lim x_n = 3$ . Observe os valores de  $n$ ,  $x_n$  e  $f(x_n)$  na tabela:

|          |   |     |      |      |     |     |      |         |
|----------|---|-----|------|------|-----|-----|------|---------|
| $n$      | 1 | 2   | 3    | 4    | 5   | 10  | 100  | 50.000  |
| $x_n$    | 2 | 2,5 | 2,67 | 2,75 | 2,8 | 2,9 | 2,99 | 2,99998 |
| $f(x_n)$ | 5 | 5,5 | 5,67 | 5,75 | 5,8 | 5,9 | 5,99 | 5,99998 |

A tabela de valores nos leva a crer que  $\lim f(x_n) = 6$ . De fato, como  $x_n \neq 3$ , temos:

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \frac{(x_n)^2 - 9}{x_n - 3} = \lim (x_n + 3) = \lim \left( 3 - \frac{1}{n} + 3 \right) = \\ &= \lim \left( 6 - \frac{1}{n} \right) = \lim 6 - \lim \frac{1}{n} = 6\end{aligned}$$

b) Seja  $x_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

Novamente  $x_n \neq 3$  e  $\lim x_n = 3$ . Observe os valores na tabela abaixo:

|          |   |      |      |      |      |           |           |
|----------|---|------|------|------|------|-----------|-----------|
| $n$      | 1 | 2    | 3    | 4    | 5    | 1000      | 1001      |
| $x_n$    | 2 | 3,25 | 2,89 | 3,06 | 2,96 | 3,0000001 | 2,9999999 |
| $f(x_n)$ | 5 | 6,25 | 5,89 | 6,06 | 5,96 | 6,0000001 | 5,9999999 |

Neste caso, também a tabela nos leva a crer que  $\lim f(x_n) = 6$ .

De fato, como  $x_n \neq 3$ , temos:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \frac{(x_n)^2 - 9}{x_n - 3} = \lim (x_n + 3) = \lim \left( 3 - \frac{1}{n} + 3 \right) = \\ &= \lim \left( 6 - \frac{1}{n} \right) = \lim 6 - \lim \frac{1}{n} = 6 \end{aligned}$$

Note que as seqüências  $(f(x_n))$  dos itens (a) e (b) são distintas, porém convergem para o mesmo valor: 6.

- c) Seja  $(x_n)$  uma seqüência *qualquer* que satisfaz as condições:  $x_n \neq 3$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim x_n = 3$ . O que acontece com o  $\lim f(x_n)$ ?

Ora,  $\lim f(x_n) = \lim (x_n + 3) = \lim x_n + \lim 3 = 3 + 3 = 6$ .

Podemos, pois, afirmar que: Se  $(x_n)$  é uma seqüência tal que  $x_n \neq 3$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim x_n = 3$ , então  $\lim f(x_n) = 6$ .

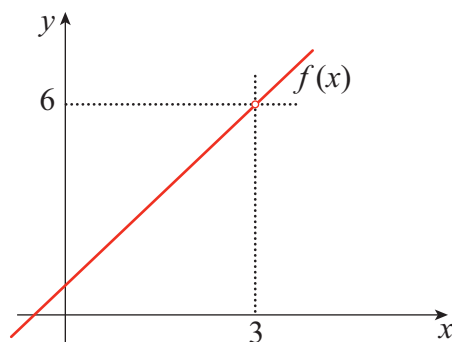


Figura 2.1

**Definição 11.** Seja  $f$  uma função definida em todos os pontos de um intervalo aberto que contém o ponto  $b$ , exceto eventual-

mente no próprio  $b$ . Dizemos que o *limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $b$*  é  $L$  quando para *toda* sequência  $(x_n)$  tal que  $x_n \neq b$  e  $\lim x_n = b$ , ocorre  $\lim f(x_n) = L$ .

Escreve-se:  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$ .

**Observação.** Faz sentido falar no  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  mesmo quando  $f$  não está definida em  $b$ . Observe isso no exemplo anterior. A função

$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  não está definida no ponto 3, porém existe o  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

## Exercícios resolvidos

1) Seja  $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ . Quanto vale o  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ?

**Resolução.** Seja  $(x_n)$  uma sequência tal que  $x_n \neq 2$  e  $\lim x_n = 2$ .

Então,  $f(x_n) = 3(x_n)^2 - 5x_n + 1$ , e assim:

$$\lim f(x_n) = 3(\lim x_n)^2 - 5 \lim x_n + 1 = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 1 = 3.$$

Segue da definição que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ .

2) Seja  $g(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{se } x \neq -2 \\ 8 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ . Quanto vale  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ ?

**Resolução.** Seja  $(x_n)$  uma sequência tal que  $x_n \neq -2$  e  $\lim x_n = -2$ .

Então,  $g(x_n) = 3x_n + 7$ , e assim:

$$\lim g(x_n) = 3 \lim x_n + \lim 7 = 3 \cdot (-2) + 7 = 1.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 1$ .

Repare que o valor da função  $g$  no ponto  $-2$  não interferiu no cálculo do limite de  $g$  no ponto  $-2$ . De fato, calcular o limite de uma função num ponto  $b$  é examinar o comportamento da função em pontos extremamente próximos de  $b$ , mas jamais no próprio  $b$ .

Então, reforçaremos que, para calcular o  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ , não importa o valor de  $f$  em  $b$  nem tampouco se  $f$  está definida em  $b$ .

## Exercício proposto

- 1) Sendo  $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{5x - 1}$ , determine o  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  e o  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x)$ .

**Observação.** O limite de uma função num ponto pode não existir. Considere, por exemplo, a função

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 1 \\ 4x - 5 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

O que se pode dizer sobre o  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$ ?

**Resolução.** Tomemos inicialmente uma sequência  $(x_n)$  tal que  $x_n < 1$  e  $\lim x_n = 1$ . Então,  $\lim F(x_n) = \lim(2x_n + 1) = 3$ . Tomemos agora uma sequência  $(x_n)$  tal que  $x_n > 1$  e  $\lim x_n = 1$ .

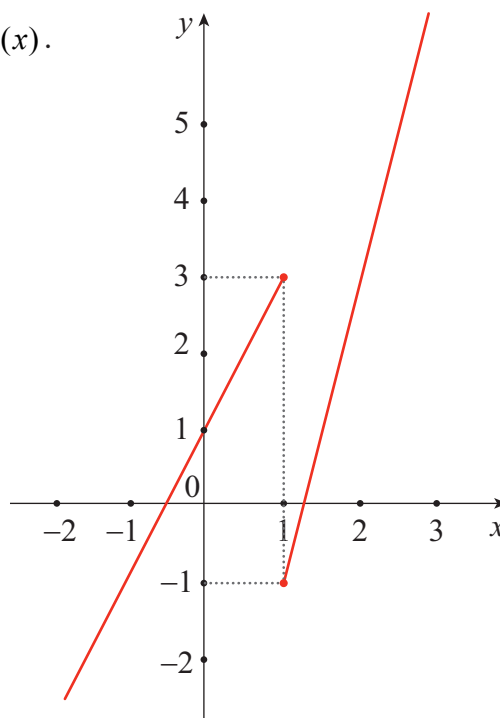
Neste caso,  $\lim F(x_n) = \lim(4x_n - 5) = -1$ .

Observamos que o  $\lim F(x_n)$  depende da sequência  $(x_n)$ . Mas, conforme a Definição 11, o  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$  existe

quando para *toda* sequência  $(x_n)$  que converge para 1, sendo  $x_n \neq 1$ , a sequência  $(F(x_n))$  converge para o mesmo valor.

Concluimos que o  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$  *não existe*.

Sugerimos que o leitor faça um gráfico da função  $g$  do Exercício Resolvido 2 e da função  $F$  acima e observe o comportamento de cada uma para valores de  $x$  próximos a  $-2$  e 1 respectivamente.



## 2.2 Propriedades do limite

**Unicidade do limite:** Será que uma função pode ter dois ou mais limites distintos num ponto? O próximo teorema afirma que não!

**Teorema 10.** Se o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, então ele é único.

**Demonstração.** Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ . Vamos provar que  $L_1 = L_2$ . Seja  $(x_n)$  uma sequência de pontos do domínio de  $f$  satisfazendo:  $\lim x_n = a$  e  $x_n \neq a$ ,  $\forall n$ . Conforme nossa suposição,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x_n) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x_n) = L_2$ .

Pelo teorema da unicidade do limite de uma sequência (Teorema 1), segue que  $L_1 = L_2$ . ■

## 2.2.1 Operações com limites

Os exemplos anteriormente desenvolvidos mostram que é possível calcular o limite de uma função num ponto a partir da definição. Mas queremos fazê-lo de forma mais direta.

Para isso, precisamos de alguns teoremas semelhantes aos que já foram demonstrados para sequências.

**Teorema 11.** Se  $a, b, c$  são números reais, então  $\lim_{x \rightarrow a} (bx + c) = ba + c$ .

**Demonstração.** Seja  $f(x) = bx + c$  e  $(x_n)$  uma sequência satisfazendo:  $x_n \neq a, \forall n$  e  $\lim x_n = a$ . Então,  $f(x_n) = bx_n + c$  e:

$$\lim f(x_n) = \lim (bx_n + c) = b \lim x_n + c = ba + c.$$

Segue da Definição 11 que  $\lim_{x \rightarrow a} (bx + c) = ba + c$ . ■

**Consequências:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  (é só tomar  $b = 1$  e  $c = 0$ ).
- b)  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$  (é só tomar  $b = 0$ ).

**Exemplo:**  $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (6x - 5) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 5 = -1$ .

**Teorema 12.** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ , então:

- a)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot L_1 \quad \forall c \in \mathbb{R}$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ , desde que  $L_2 \neq 0$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ , desde que  $L_1 > 0$  quando  $n$  for par.

- f)  $\lim_{x \rightarrow a} \sin[f(x)] = \sin L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} \cos[f(x)] = \cos L_1$ .
- g)  $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{L_1}$ .
- h)  $\lim_{x \rightarrow a} \ln[f(x)] = \ln L_1$ , desde que  $L_1 > 0$ .

A demonstração dos itens: (a), (b), (c), (d) decorre do Teorema 7. Demonstraremos apenas o item (a). Já a demonstração dos demais itens não será feita agora, pois necessita do conceito de função contínua. Posteriormente será demonstrado um teorema mais geral, no qual estão inseridos estes itens.

**Demonstração de (a).** Seja  $(x_n)$  uma sequência tal que  $x_n \neq a$ ,  $\forall n$  e  $\lim x_n = a$ . Por hipótese,  $\lim f(x_n) = L_1$  e  $\lim g(x_n) = L_2$ . Pelo item 1 do Teorema 7, temos que:

$$\lim[f(x_n) + g(x_n)] = \lim f(x_n) + \lim g(x_n) = L_1 + L_2.$$

Pela Definição 11,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$ .

**Observação (1):** Dos itens (a) e (b) decorre:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$$

De fato,  $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$ .

**Observação (2):** Tomando  $g = f$  no item (c), obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2 = (L_1)^2$$

Por indução, conclui-se que: se  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = (L_1)^n$ .

## Exercícios resolvidos

- 3) Calcule o  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2 + 2x - 5}}{4x - \cos(\pi x)}$ .

**Resolução.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2 + 2x - 5}}{4x - \cos(\pi x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + 2x - 5}}{\lim_{x \rightarrow 2} [4x - \cos(\pi x)]} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 2x - 5)}}{\lim_{x \rightarrow 2} [4x - \cos(\pi x)]} \\ &= \frac{\sqrt{3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 5}}{4 \lim_{x \rightarrow 2} x - \cos(\lim_{x \rightarrow 2} \pi x)} = \frac{\sqrt{3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 5}}{4 \cdot 2 - \cos(2\pi)} = \frac{\sqrt{11}}{7}. \end{aligned}$$

A igualdade (1) segue do item (d), a igualdade (2) segue do item (e) e a igualdade (3) segue dos itens (a), (b) e (f) do Teorema 12.

$$4) \text{ Seja } f(t) = \begin{cases} e^{t^2} + 5\text{sen}(2t) & \text{se } t \neq 0 \\ -3 & \text{se } t = 0 \end{cases}. \text{ Calcule } \lim_{t \rightarrow 0} f(t).$$

**Resolução.**

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} [e^{t^2} + 5\text{sen}(2t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{t^2} + 5 \lim_{t \rightarrow 0} \text{sen}(2t) \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} t^2} + 5 \text{sen}(\lim_{t \rightarrow 0} 2t) = e^0 + 5 \text{sen} 0 = 1 \end{aligned}$$

## Exercícios propostos

Calcule os limites:

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{(x+3)^4 - 6x + 5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{3x^2 - 2 + 14}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 4x + \ln(2x^2 - 1)}{x^3 - \text{sen}(\pi x)}$$

Teorema análogo ao Teorema 6 estudado no capítulo anterior.

**Teorema 13.** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e se  $g$  é limitada num intervalo aberto que contém o ponto  $a$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ .

**Demonstração.** Seja  $I$  um intervalo que contém o ponto  $a$  e tal que  $g$  seja limitada em  $I$ .

Seja  $(x_n)$  uma sequência satisfazendo:  $x_n \neq a$ ,  $\forall n$  e  $\lim x_n = a$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in I$  para todo  $n \geq n_0$ .

Das hipóteses do teorema seguem os seguintes fatos:  $\lim f(x_n) = 0$  e a sequência  $(g(x_n))$  é limitada.

Pelo Teorema 6, temos que  $\lim f(x_n) \cdot g(x_n) = 0$ . Da Definição 11, segue que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ . ■

## Exercícios resolvidos

5) Calcule o  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**Resolução.** Note que não podemos usar o Teorema 12 (c) (*Por quê?*).

Mas  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  e a função  $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  é limitada, pois sua imagem está contida no intervalo  $[-1, 1]$ . Pelo Teorema 13,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ .

Teorema análogo ao Teorema 8 estudado no capítulo anterior.

**Teorema 14. (Teorema do Confronto).** Seja  $I$  um intervalo aberto que contém o ponto  $a$  e  $f, g, h$  funções satisfazendo:  $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$  para to-do  $x$  em  $I$ , exceto eventualmente para  $x = a$ . Se  $\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = L$ , então  $\lim h(x_n) = L$ .

**Demonstração.** Seja  $(x_n)$  uma sequência satisfazendo:  $\lim x_n = a$  e  $x_n \neq a, \forall n$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in I$  para todo  $n \geq n_0$ . Por hipótese,  $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n), \forall n \geq n_0$  e  $\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = L$ .

Do Teorema 8, segue que  $\lim h(x_n) = L$  e, usando a Definição 11, concluímos que  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ .

■

6) Calcule o  $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ .

**Resolução.** Sabemos que  $0 \leq \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1, \forall x \neq 0$ .

Multiplicando a desigualdade por  $x^4$ , temos:  $0 \leq x^4 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^4$ .

Agora,  $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ . Pelo Teorema 14,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0$ .

## 2.3 Definição formal de limite

Já definimos o limite de uma função num ponto usando sequências. A definição que será apresentada a seguir é a que tradicionalmente se encontra nos livros de cálculo. No próximo teorema, estabeleceremos que as duas definições são equivalentes.



Para compreender melhor esta outra definição, vamos explorar um exemplo:

Seja  $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ . Pelo Teorema 11,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$ .

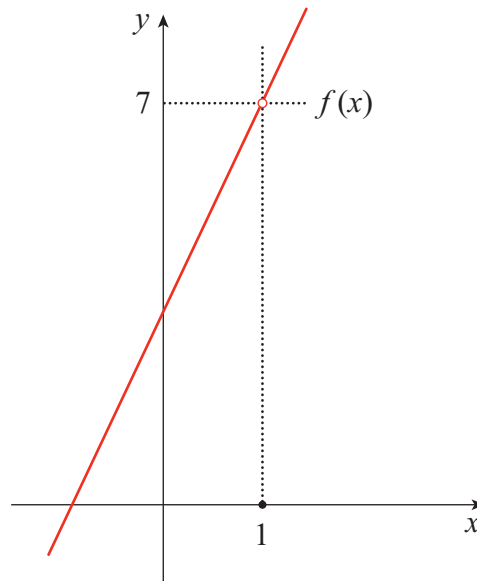


Figura 2.2

Isso significa que é possível conseguir  $f(x)$  tão próximo de 7 quanto desejarmos, desde que tomemos  $x$  suficientemente próximo de 1.

Em outras palavras, podemos tornar a *distância* entre  $f(x)$  e 7 tão pequena quanto desejarmos, desde que a distância entre  $x$  e 1 seja suficientemente pequena, mas não nula.

Lembrando que as distâncias entre  $f(x)$  e 7 e entre  $x$  e 1 são dadas respectivamente por  $|f(x) - 7|$  e  $|x - 1|$ , o que foi escrito acima é equivalente a:

“Podemos tornar  $|f(x) - 7|$  tão pequeno quanto desejarmos, desde que tornemos  $|x - 1|$  suficientemente pequeno, mas não nulo.” (1)

Por exemplo, se desejarmos que  $|f(x) - 7| < \frac{1}{100}$ , ou seja, que  $f(x) \in (6,99; 7,07)$ , quais os valores de  $x$  em torno de 1 que devemos tomar?

Ora,

$$|f(x) - 7| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow |4x + 3 - 7| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow |4x - 4| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 4|x - 1| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{1}{400}.$$

Portanto, precisamos tomar  $x$  tal que  $|x - 1| < \frac{1}{400}$  e  $x \neq 1$ , ou seja,  
 $0 < |x - 1| < \frac{1}{400}$ .

O leitor pode verificar que caso desejássemos que  $|f(x) - 7| < \frac{1}{2500}$ , teríamos que tomar  $x$  tal que  $0 < |x - 1| < 10^{-4}$ .

Vamos agora empregar as letras  $\varepsilon$  e  $\delta$  para representarem números positivos arbitrariamente pequenos.

Dessa forma, o que foi dito em (1) se expressa assim:

Dado qualquer número positivo  $\varepsilon$ , supostamente muito pequeno, é possível tornar  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , desde que se tome  $|x - 1| < \delta$  e  $x \neq 1$ , para algum número positivo  $\delta$ .

Isso, por sua vez, pode ser também expresso assim:

Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - 1| < \delta$ . O número  $\delta$  depende do valor de  $\varepsilon$ .

**Definição 12.** Seja  $f$  uma função definida em todos os pontos de um intervalo aberto que contém  $b$ , exceto eventualmente em  $b$ . Dizemos que o limite de  $f$ , quando  $x$  tende a  $b$ , é  $L$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - b| < \delta$ .

**Observação:** A desigualdade  $|f(x) - L| < \varepsilon$  é equivalente a  $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$  que é equivalente a  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ , ou seja,  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Também  $|x - b| < \delta$  é equivalente a  $x \in (b - \delta, b + \delta)$ .

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$  quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \text{ sempre que } x \in (b - \delta, b + \delta) \text{ e } x \neq b.$$

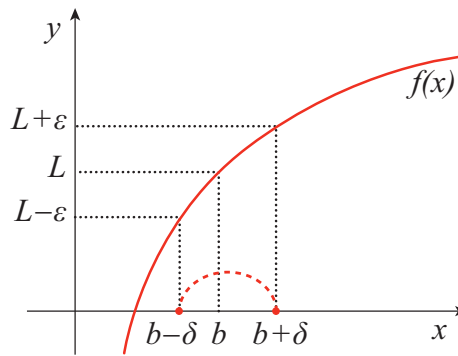


Figura 2.3

Note que para todo  $x \in (b - \delta, b + \delta)$  e  $x \neq b$  tem-se  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Quando para todo  $\varepsilon > 0$  for possível determinar um tal  $\delta$ , então  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$ .

## Exercício resolvido

7) Seja  $f(x) = 4x - 5$ .

- Encontre  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - 3| < 0,1$  sempre que  $0 < |x - 2| < \delta$ .
- Encontre um intervalo  $I$  centrado em 2 tal que  $|f(x) - 3| < 0,02$  sempre que  $x \in I - \{2\}$ .
- Prove, usando esta definição, que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ .

### Resolução.

a) Para  $x \neq 2$ , temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| < 0,1 &\Leftrightarrow |4x - 5 - 3| < 0,1 \Leftrightarrow |4x - 8| < 0,1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |4(x - 2)| < 0,1 \Leftrightarrow 4|x - 2| < 0,1 \Leftrightarrow |x - 2| < 0,025. \end{aligned}$$

Portanto, quando  $0 < |x - 2| < 0,025$ , então  $|f(x) - 3| < 0,1$ .

Logo,  $\delta = 0,025$ .

b) Para  $x \neq 2$ , temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| < 0,02 &\Leftrightarrow 4|x - 2| < 0,02 \Leftrightarrow |x - 2| < 0,005 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,005 < x - 2 < 0,005 \Leftrightarrow 1,995 < x < 2,005 \end{aligned}$$

Portanto,  $I = (1,995, 2,005)$ .

c) Dado  $\varepsilon > 0$ , devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - 3| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - 2| < \delta$ .

Tomando  $x \neq 2$ , temos:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x - 2| < \varepsilon \mid x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Portanto, quando  $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$ , então  $|f(x) - 3| < \varepsilon$ . Basta tomar

$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ , qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ . Logo,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ .

## Exercício proposto

5) Prove, usando esta última definição, que  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 5) = -8$ .

**Teorema 15.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto que contém o ponto  $a$ , exceto talvez em  $a$ . As afirmações seguintes são equivalentes:

- a) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .
- b) Para toda sequência  $(x_n)$ , tal que  $\lim x_n = a$  e  $x_n \neq a$  para todo  $n$ , tem-se  $f(x_n) = L$ .

### Demonstração:

**(1)** Vamos provar que (a)  $\Rightarrow$  (b), isto é, nossa hipótese é a afirmação (a) e nossa tese é a afirmação (b).

Seja  $(x_n)$  uma sequência tal que  $\lim x_n = a$  e  $x_n \neq a$  para todo  $n$ . Seja  $\varepsilon > 0$ . Por hipótese, existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x$  satisfazendo  $0 < |x - a| < \delta$ , tem-se  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Como  $\lim x_n = a$  e  $x_n \neq a$  para  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < |x_n - a| < \delta$  para todo  $n \geq n_0$ . Logo,  $|f(x_n) - L| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ , o que prova que  $\lim f(x_n) = L$ .

**(2)** Provaremos que (b)  $\Rightarrow$  (a), isto é, nossa hipótese é a afirmação (b) e nossa tese é a afirmação (a).

Suponhamos, por contraposição, que (a) é falso. Quer dizer, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe  $x$  satisfazendo  $0 < |x - a| < \delta$  e  $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ . (Veja a observação após a demonstração.)

Este teorema estabelece a equivalência das duas Definições (11 e 12) de limite aqui apresentadas.

Em particular, para  $\delta = \frac{1}{n}$ , sendo  $n$  qualquer natural, existe  $x_n$  tal que  $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$  e  $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ . Dessa forma, obtivemos uma sequência  $(x_n)$  tal que  $\lim x_n = a$  e  $x_n \neq a$ , mas  $\lim f(x_n)$  não é  $L$ . Isso contradiz a hipótese.

Portanto, nossa suposição é falsa, o que prova a veracidade da afirmação (a). ■

**Observação.** A afirmação (a) do teorema é do tipo: Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  que satisfaz  $P(x)$ , sendo  $P(x)$ : se  $x$  satisfaz  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

A negação desta afirmação é: Existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , não é verdade que  $P(x)$  vale.

E negar  $P(x)$  é dizer: Existe  $x$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$  e  $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ .

Portanto, a negação da afirmação (a) é: Existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , existe  $x$  satisfazendo  $0 < |x - a| < \delta$  e  $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ .

## 2.4 Indeterminação

Já tratamos ligeiramente deste assunto no último item do capítulo anterior. Lá apresentamos quatro símbolos que representam indeterminações:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$  e  $\infty - \infty$ . No presente contexto, será necessário um estudo mais aprofundado.

O item (d) do Teorema 12 estabelece que, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$  e se  $L_2 \neq 0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Começemos com o seguinte exemplo:

Como calcular o  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ?

Não é possível aplicar o teorema, pois  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ . Note que  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)$  também é zero.

Caso não percebêssemos a priori que o denominador tende a zero e aplicássemos o Teorema 12 (d), encontraríamos a expressão  $\frac{0}{0}$ . Esta não possui um valor determinado e não nos fornece qualquer pista sobre a existência e o valor do limite.

Por isso, diz-se que  $\frac{0}{0}$  é indeterminado ou uma indeterminação.

Para calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ , é preciso fatorar e simplificar a expressão:

$$\text{Para } x \neq 2, \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

**Observação (1):** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , então nada se pode afirmar, a priori, sobre o  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Observação (2):** Além de  $\frac{0}{0}$  existem outras seis expressões que são **indeterminações**:  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$  e  $\infty^0$ .

Por exemplo, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , então o  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$  conduz à indeterminação  $0^0$ .

Acompanhe os exercícios:

## Exercícios resolvidos

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{3x^2 - 12}.$$

**Resolução.** Como  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 16) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 12) = 0$ , temos uma indeterminação  $\frac{0}{0}$ .

Vamos fatorar os polinômios do numerador e denominador respectivamente e simplificar a expressão:

$$\frac{x^4 - 16}{3x^2 - 12} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{3(x^2 - 4)} = \frac{x^2 - 4}{3} \text{ para } x \neq \pm 2.$$

Ao nos depararmos com qualquer uma destas indeterminações, devemos tentar usar outra estratégia para calcular o limite. Normalmente procura-se escrever a expressão da função cujo limite se deseja calcular de outra forma equivalente.

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{3}.$$

Agora podemos aplicar o Teorema 12 (d), obtendo  $\frac{8}{3}$ .

$$\text{Resposta. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{3x^2 - 12} = \frac{8}{3}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^2 - 4x - 5}.$$

**Resolução.** Sendo  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 4x^2 - x - 4) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 4x - 5) = 0$ , temos outro caso de indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .

**Como podemos fatorar os dois polinômios?** Repare que  $-1$  é raiz de ambos. Fazendo a divisão de  $x^3 + 4x^2 - x - 4$  e  $x^2 - 4x - 5$  por  $x + 1$ , obtêm-se os quocientes  $x^2 + 3x - 4$  e  $x - 5$  respectivamente.

Assim,

$$\frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^2 - 4x - 5} = \frac{(x^2 + 3x - 4)(x + 1)}{(x - 5)(x + 1)} = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 5}$$

para  $x \neq -1$  e  $x \neq 5$ .

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 5} = \frac{-6}{-6} = 1.$$

$$10) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+y} - \sqrt{5}}{y}.$$

**Resolução.** Novamente chega-se na indeterminação. Desta vez não se trata de quociente de polinômios. Para conseguir simplificar a expressão e aplicar o Teorema 12 (d), **devemos multiplicar o numerador e o denominador por  $\sqrt{5+y} + \sqrt{5}$** :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5+y} - \sqrt{5}}{y} &= \frac{\sqrt{5+y} - \sqrt{5}}{y} \times \frac{\sqrt{5+y} + \sqrt{5}}{\sqrt{5+y} + \sqrt{5}} \\ &= \frac{5 + y - 5}{y(\sqrt{5+y} + \sqrt{5})} = \frac{y}{y(\sqrt{5+y} + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5+y} + \sqrt{5}} \end{aligned}$$

para  $y \neq 0$ .

$$\text{Logo, } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+y} - \sqrt{5}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{5+y} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Um teorema de álgebra diz que "O número  $a$  é a raiz de um polinômio  $p(x)$  se, e somente se,  $p(x)$  for divisível por  $(x - a)$ ".

Não adote este procedimento para raízes de índice maior do que dois.

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{9-x}-2}.$$

**Resolução.** Outro caso de indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Aqui faremos uma **mudança de variável**:

Seja  $u = \sqrt[3]{9-x}$ . Devemos agora escrever o limite proposto usando apenas a variável  $u$ .

De  $u = \sqrt[3]{9-x}$  segue que  $x = 9 - u^3$ .

Se  $x$  tende a 1, então  $u$  tende a  $\sqrt[3]{9-1} = 2$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{9-x}-2} &= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{9-u^3-1}{u-2} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{8-u^3}{u-2} = -\lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^3-8}{u-2} = \\ &= -\lim_{u \rightarrow 2} \frac{(u-2)(u^2+2u+4)}{u-2} = -\lim_{u \rightarrow 2} (u^2+2u+4) = -12 \end{aligned}$$

$$12) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t}-1}{\sqrt[4]{t}-1}.$$

**Resolução.** Mais uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Faremos também

uma mudança de variável. Para transformar a expressão num quociente de polinômios, devemos igualar  $t$  a uma potência de  $u$ , cujo expoente seja múltiplo de 3 e de 4.

Façamos  $t = u^{12}$ . Se  $t \rightarrow 1$ , então  $u \rightarrow 1$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t}-1}{\sqrt[4]{t}-1} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{u^{12}}-1}{\sqrt[4]{u^{12}}-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4-1}{u^3-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u^2-1)(u^2+1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u+1)(u^2+1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u+1)(u^2+1)}{u^2+u+1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

A expressão obtida após fazer a mudança de variável é um quociente de polinômios.

## Exercícios propostos

Calcule o valor de cada um dos limites:

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 + 10x^2 + 7x - 2}{x^5 + 2x^4 + x^2 - 5x - 14} \quad 7) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h}$$



8) 
$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{3t^3 - t - 2}{t^4 - 1}$$

9) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16-x} - 4}{x}$$

10) 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x+12} - 2}{x-1}$$

11) 
$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sqrt{q} - 1}{\sqrt[3]{q} - 1}$$

12) 
$$\lim_{t \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3t^2 - 8} + t}{2t + 4}$$

## 2.5 Limites laterais

Para avaliar o  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ , vimos que é necessário examinar o comportamento de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $b$  por valores menores bem como por valores maiores do que  $b$ . Existem situações em que é preciso analisar separadamente os casos em que  $x$  se aproxima de  $b$  por valores menores do que  $b$  (pela esquerda) e por valores maiores do que  $b$  (pela direita), ou analisar apenas um desses casos.

**Definição 13.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $(b, c)$ . Dizemos que o *limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $b$  pela direita* é  $L$  quando, para toda sequência  $(x_n)$  contida em  $(b, c)$  e que converge para  $b$ , tem-se que  $(f(x_n))$  converge para  $L$ .

**Notação:**  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L$ .

Em termos de  $\varepsilon$  e  $\delta$ , temos a seguinte definição equivalente:  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $b < x < b + \delta$ .

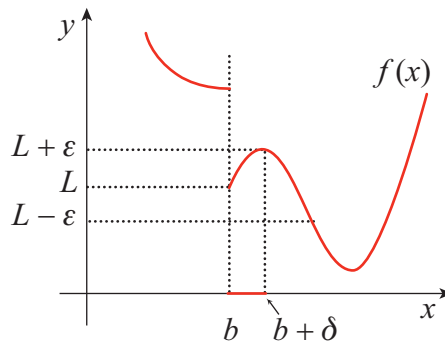


Figura 2.4

A partir do intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  obtivemos um intervalo  $(b, b + \delta)$  cuja imagem está contida no intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

**Definição 14.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $(a, b)$ . Dizemos que o *limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $b$  pela esquerda é  $L$*  quando, para toda sequência  $(x_n)$  contida em  $(a, b)$ , tal que  $\lim x_n = b$ , tem-se  $\lim f(x_n) = L$ .

**Notação.**  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$ .

Em termos de  $\varepsilon$  e  $\delta$ :  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$  quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $b - \delta < x < b$ .

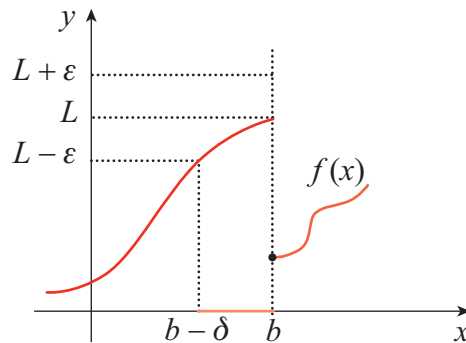


Figura 2.5

A partir do intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  obtivemos um intervalo  $(b - \delta, b)$  cuja imagem está contida no intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

## Exercícios resolvidos

13) Seja  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 3 - 2x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ .

Sugerimos ao leitor fazer um gráfico de  $f$  e, através deste, determinar o valor de  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  e de  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ .

**Resolução.** Vamos calcular estes limites laterais usando a definição:

a) Seja  $(x_n)$  uma sequência tal que  $x_n < 2$  e  $\lim x_n = 2$ . Então,

$$\lim f(x_n) = \lim (x_n^2 - 1) = (\lim x_n)^2 - \lim 1 = 4 - 1 = 3.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ .

b) Seja  $(x_n)$  uma sequência tal que  $x_n > 2$  e  $\lim x_n = 2$ .

Então,  $\lim f(x_n) = \lim(3 - 2x_n) = \lim 3 - 2 \lim x_n = 3 - 4 = -1$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$ .

**Observação:** Todas as propriedades vistas, referentes a limites, valem também para limites laterais, e suas demonstrações são análogas.

Podemos então calcular os limites laterais da função acima fazendo:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3 - 2x) = 3 - 4 = -1.$$

14) Seja  $g(x) = 2x - \sqrt{x-4}$ . Faz sentido falar em  $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x)$  e em  $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$ ?

**Resolução.** Como  $g$  está definida para  $x \geq 4$ , só faz sentido o  $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$ , que vale 8.

15) Seja  $h(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$ . Determine  $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$ .

**Resolução.** Em primeiro lugar, devemos escrever  $h(x)$  sem usar valor

absoluto. Lembremos que  $|x - 2| = \begin{cases} -(x - 2) & \text{se } x < 2 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ .

$$\text{Logo, } h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{-(x - 2)} & \text{se } x < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

E como  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ , temos enfim:

$$h(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{se } x < 2 \\ x + 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Agora é fácil:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x - 2) = -4$  e

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4.$$

**Resposta.**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = -4$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 4$ .

$$16) \text{ Seja } F(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{se } x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ x^3 - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}. \text{ Determine } \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$$

$$\text{Resolução. } \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 5) = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 3) = -2.$$

$$\text{Resposta. } \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = -2; \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = -2.$$

O próximo teorema estabelecerá a relação entre os *limites laterais* de uma função num ponto e o *limite* da função neste ponto.

**Teorema 16.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $(a, b)$  e também num intervalo  $(b, c)$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L$ .

**Demonstração.** Devemos demonstrar duas afirmações:

$$1) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = L, \text{ então } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L.$$

Seja  $\varepsilon > 0$ . Existe, por hipótese,  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in (a, c)$  e  $0 < |x - b| < \delta$ . Mas  $0 < |x - b| < \delta \Leftrightarrow x \in (b - \delta, b + \delta)$  e  $x \neq b$ .

Portanto, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in (a, b)$  e  $b - \delta < x < b$  e  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in (b, c)$  e  $b < x < b + \delta$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L$ .

$$2) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L, \text{ então } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = L.$$

Seja  $\varepsilon > 0$ . Por hipótese, existem  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que:  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in (a, b)$  e  $b - \delta_1 < x < b$  e  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in (b, c)$  e  $b < x < b + \delta_2$ .

Seja  $\delta$  o mínimo entre  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Então,  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in (a, b)$  e  $b - \delta < x < b$  e  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in (b, c)$  e  $b < x < b + \delta$ , ou seja,  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in (a, c)$  e  $0 < |x - b| < \delta$ .

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow b} F(x) = L.$$

■

Retomando as funções  $h$  e  $F$  dos Exercícios Resolvidos 15 e 16, concluímos que:

- O  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$  não existe, pois os limites laterais de  $h$  no ponto 2 são diferentes.
- Já o  $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$  existe e é igual a  $-2$ .

**Observação.** Os limites laterais de uma função num ponto podem não existir.

**Exemplo.** Considere a função:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Vamos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  não existe. De maneira análoga se mostra que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  também não existe.

Basta exibir duas sequências  $(x_n)$  e  $(z_n)$ , ambas com termos positivos e convergindo para zero, porém com  $\lim f(x_n) \neq \lim f(z_n)$ .

$$\text{Seja } x_n = \frac{1}{n\pi} \text{ e } z_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Temos:  $x_n > 0$  e  $z_n > 0$  para todo  $n$ ,  $\lim x_n = 0$  e  $\lim z_n = 0$ .

$$\text{Mas } \lim f(x_n) = \lim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim \operatorname{sen}(n\pi) = \lim 0 = 0.$$

$$\text{E } \lim f(z_n) = \lim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z_n}\right) = \lim \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim 1 = 1.$$

Concluimos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  não existe.

## Exercícios propostos

Para cada uma das funções seguintes, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

$$13) f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 1; \end{cases} \quad a = 1$$

$$14) f(x) = \frac{3x}{2x - |x|}; \quad a = 0.$$

$$15) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x - 2 & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \\ \cos 2x & \text{se } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad a = \frac{\pi}{2}.$$

## 2.6 Limites no infinito

Até aqui, analisamos o comportamento de uma função  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de algum ponto.

Analisaremos agora o comportamento de  $f(x)$  quando  $x$  assume valores positivos arbitrariamente grandes ou negativos arbitrariamente grandes em módulo.

Considere por exemplo:

$$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

|        |   |     |      |       |         |
|--------|---|-----|------|-------|---------|
| $x$    | 1 | 10  | 100  | 1000  | 50.000  |
| $f(x)$ | 3 | 2,1 | 2,01 | 2,001 | 2,00002 |

Observando a tabela, percebe-se que, à medida que  $x$  assume valores arbitrariamente grandes,  $f(x)$  se aproxima arbitrariamente de 2.

Se desejarmos que  $|f(x) - 2| < 0,05$ , basta tomar  $x > 20$ , pois

$$|f(x) - 2| < 0,05 \Leftrightarrow \left| 2 + \frac{1}{x} - 2 \right| < 0,05 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0,05 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0,05 \text{ (pois } x > 0) \Leftrightarrow x > 20$$

Se quiséssemos  $|f(x) - 2| < 0,0004$ , bastaria tomar  $x > 2500$ , pois

$$|f(x) - 2| < 0,0004 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{4}{10.000} \Leftrightarrow x > 2500.$$

Se  $\varepsilon$  representa um número positivo arbitrariamente pequeno, é possível obter-se  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ ?

$$\text{Ora, } |f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Portanto, basta tomar  $x > \frac{1}{\varepsilon}$  para que seja  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ .

**Definição 15.** Seja  $X$  um conjunto não limitado superiormente e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  cresce ilimitadamente é  $L$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que se  $x \in X$  e  $x > M$ , então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Ao escrever  $x \rightarrow +\infty$ , a variável  $x$  não se aproxima de valor algum, pelo contrário, aumenta ilimitadamente.

Escrevemos:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .

**Observação (1).** A Definição 15 diz que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que se  $x > M$ , então  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . (Veja a figura).

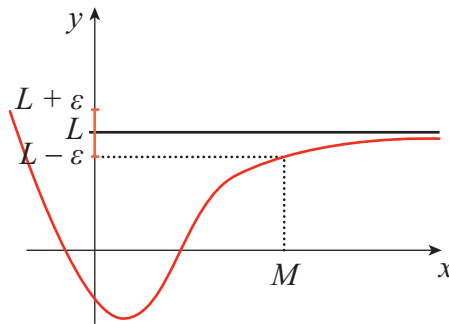


Figura 2.6

Em nosso exemplo anterior  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$  já ficou provado que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$ . Desenhe o gráfico da função e determine  $M$  em função de  $\varepsilon$ .

Consideremos agora a função:

$$f: (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

|        |    |     |      |       |         |
|--------|----|-----|------|-------|---------|
| $x$    | -1 | -10 | -100 | -1000 | -50.000 |
| $f(x)$ | 1  | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 1,99998 |

Observando a tabela, percebe-se que, à medida que  $x$  assume valores negativos arbitrariamente grandes em módulo,  $f(x)$  se aproxima arbitrariamente de 2.

Por exemplo, se precisarmos que a diferença entre  $f(x)$  e 2 seja menor do que 0,05, basta tomar  $x < -20$ .

Com efeito,

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| < 0,05 &\Leftrightarrow \left| 2 + \frac{1}{x} - 2 \right| < \frac{1}{20} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{20} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{x} < \frac{1}{20} \text{ (pois } x < 0) \Leftrightarrow -x > 20 \Leftrightarrow x < -20 \end{aligned}$$

E se  $\varepsilon$  representa um número positivo muito pequeno, quando é que teremos  $|f(x) - 2| < \varepsilon$  para  $x < 0$ ?

Vejamos:

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow -x > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Portanto, para todo  $x$  menor do que  $-\frac{1}{\varepsilon}$ , teremos  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ .

**Definição 16.** Seja  $X$  um conjunto não limitado inferiormente e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  cresce ilimitadamente é  $L$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N < 0$  tal que se  $x \in X$  e  $x < N$ , então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Escrevemos:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .

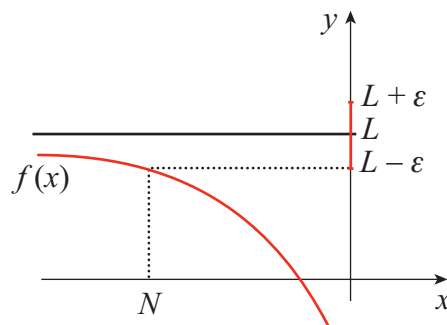


Figura 2.7



A figura mostra o gráfico de uma função  $f$  para a qual  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ . Note que se  $x < N$ , então  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

Em nosso exemplo  $f : (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$  já ficou provado que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$  (pois dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $N = -\frac{1}{\varepsilon}$ ). Desenhe o gráfico desta função.

**Observação.** Das definições anteriores segue que não existe o  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  nem o  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ , pois  $y = \sin x$  é uma função periódica cujos valores variam entre  $-1$  e  $1$  em qualquer intervalo de comprimento  $2\pi$ .

## 2.6.1 Cálculo de limites no infinito

As propriedades para calcular limites permanecem inalteradas quando substituímos " $x \rightarrow a$ " por " $x \rightarrow -\infty$ " ou " $x \rightarrow +\infty$ ". Mas precisamos de um teorema adicional:

**Teorema 17.** Para todo número natural positivo  $k$ , tem-se:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0. \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

**Demonstração.** A demonstração do item (a) é análoga e fica como exercício.

b) Seja  $\varepsilon > 0$ . Devemos encontrar  $N < 0$  tal que se  $x < N$ , então

$$\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| < \varepsilon. \text{ Ora,}$$

$$\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^k} < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^k > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}.$$

Naturalmente vamos supor  $x < 0$  e, assim, a última desigualdade é equivalente a  $-x > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ , que equivale a  $x < -\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ . Portanto, se  $x < -\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ , então  $\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| < \varepsilon$ . Basta, pois, tomar  $N = -\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ .

Fica provado que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ . ■

## Exercícios resolvidos

17) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 8x - 5}{4 - x^3}$ .

**Resolução.** Aqui surge uma indeterminação do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . A fim de usar o Teorema 17, vamos dividir o numerador e o denominador da fração por  $x^3$ . Isso é possível, pois  $x \neq 0$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 8x - 5}{4 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{\frac{4}{x^3} - 1} \stackrel{(1)}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^3} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 1} \stackrel{(2)}{=} \frac{0 + 0 - 0}{0 - 1} = 0$$

Nas etapas (1) e (2), utilizamos os Teoremas 12 e 17, respectivamente.

**Resposta.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 11}{3x^2 + x - 7} = 0$ .

18) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 11}{3x^2 + x - 7}$ .

**Resolução.** Dividindo o numerador e o denominador por  $x^2$  e aplicando os Teoremas 12 e 17, chega-se ao resultado  $\frac{4}{3}$ .

19) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3} + 5x}{1 - 2x}$ .

**Resolução.** Para que possamos usar o Teorema 17, dividimos os dois termos da fração por  $x$ . Lembremos que se  $a$  e  $b$  são positivos, então  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  e  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

Como  $x$  é positivo,  $x = \sqrt{x^2}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3} + 5x}{1 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2 - 3}}{\sqrt{x^2}} + \frac{5x}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2 - 3}{x^2}} + 5}{\frac{1}{x} - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}} + 5}{\frac{1}{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{3}{x^2}} + 5}{\frac{1}{x} - 2} = \frac{2 + 5}{-2} = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

20) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3} + 5x}{1 - 2x}$ .

**Resolução.** Mesmo procedimento que no exemplo anterior, só que dessa vez  $x$  é negativo e, assim,  $x = -\sqrt{x^2}$ . (Por exemplo, se  $x = -2$ , então  $-2 = -\sqrt{(-2)^2} = -\sqrt{4}$ , pois  $\sqrt{4} = +2$ ).

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3} + 5x}{1 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2 - 3}}{-\sqrt{x^2}} + \frac{5x}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}} + 5}{\frac{1}{x} - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 - \frac{3}{x^2}} + 5}{\frac{1}{x} - 2} = \frac{-2 + 5}{-2} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

21) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{2x + x^2})$ .

**Resolução.** Neste exemplo, surge uma indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ .

Vamos multiplicar e dividir a expressão  $x + \sqrt{2x + x^2}$  por  $x - \sqrt{2x + x^2}$ .

Então, para  $x \neq 0$ , temos:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{2x + x^2} &= \frac{(x + \sqrt{2x + x^2})(x - \sqrt{2x + x^2})}{x - \sqrt{2x + x^2}} = \\ &= \frac{x^2 - (2x + x^2)}{x - \sqrt{2x + x^2}} = \frac{-2x}{x - \sqrt{2x + x^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{2x + x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x - \sqrt{2x + x^2}}$ .

Dividindo os termos da fração por  $x$  e lembrando que, por ser  $x < 0$ ,  $x = -\sqrt{x^2}$ , chega-se a:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1 + \sqrt{\frac{2}{x} + 1}} = \frac{-2}{1 + 1} = -1.$$

## Exercícios propostos

Calcule os limites:

$$16) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x - 5x^3}{x^3 - 12x^2 + 27}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{1 + x^2}}{x + 1}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{1 + x^2}}{x + 1}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{5x - \sqrt[3]{x^3 + 1}}$$

## 2.7 Limites infinitos

Consideremos a função  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ .

Tomemos valores para  $x$  que se aproximam cada vez mais de 2 pela direita e observemos as suas imagens:

|        |   |     |     |        |           |
|--------|---|-----|-----|--------|-----------|
| $x$    | 3 | 2,5 | 2,1 | 2,01   | 2,001     |
| $f(x)$ | 1 | 4   | 100 | 10.000 | 1.000.000 |

Note que, quanto mais próximo de 2 for o valor de  $x$ , maior é  $f(x)$ , aumentando ilimitadamente.

Tomemos agora valores para  $x$  que se aproximam de 2 pela esquerda:

|        |   |     |     |        |           |
|--------|---|-----|-----|--------|-----------|
| $x$    | 1 | 1,5 | 1,9 | 1,99   | 1,999     |
| $f(x)$ | 1 | 4   | 100 | 10.000 | 1.000.000 |

Observando a tabela, chega-se à mesma conclusão.

Podemos então dizer que, à medida que  $x$  se aproxima de 2, quer pela esquerda ou pela direita,  $f(x)$  assume valores positivos cada vez maiores, ultrapassando qualquer valor pré-fixado.

Por exemplo, se desejarmos que  $f(x)$  seja maior do que  $10^{10}$ , basta tomar  $x$  no intervalo  $\left(2 - \frac{1}{10^5}, 2 + \frac{1}{10^5}\right)$ , mas  $x \neq 2$ .

Com efeito,

$$f(x) > 10^{10} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > 10^{10} \text{ e } x \neq 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{1}{10^{10}} \text{ e } x \neq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{10^5} \text{ e } x \neq 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{10^5} < x < 2 + \frac{1}{10^5} \text{ e } x \neq 2.$$

Se  $M$  representa qualquer número arbitrariamente grande, podemos ter  $f(x) > M$ , tomando  $x$  suficientemente próximo de 2?

Vejam os:

$$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > M \text{ e } x \neq 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{1}{M} \text{ e } x \neq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ e } x \neq 2.$$

Portanto,  $f(x) > M$  desde que  $0 < |x-2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ , ou seja, desde que  $x \in \left(2 - \frac{1}{\sqrt{M}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{M}}\right) - \{2\}$ .

**Definição 17.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto  $I$  que contém o ponto  $b$ , exceto eventualmente em  $b$ . Dizemos que “o limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $b$  é  $+\infty$ ” se para todo  $M > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > M$  sempre que  $x \in I$  e  $0 < |x-b| < \delta$ .

**Escreve-se:**  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ .

Atenção: Reforçamos que  $+\infty$  não é número, mas um símbolo que, nesta definição, significa que, dado qualquer número positivo, por maior que seja, existem valores  $f(x)$  maiores do que este número, para  $x$  suficientemente próximo de  $b$ .

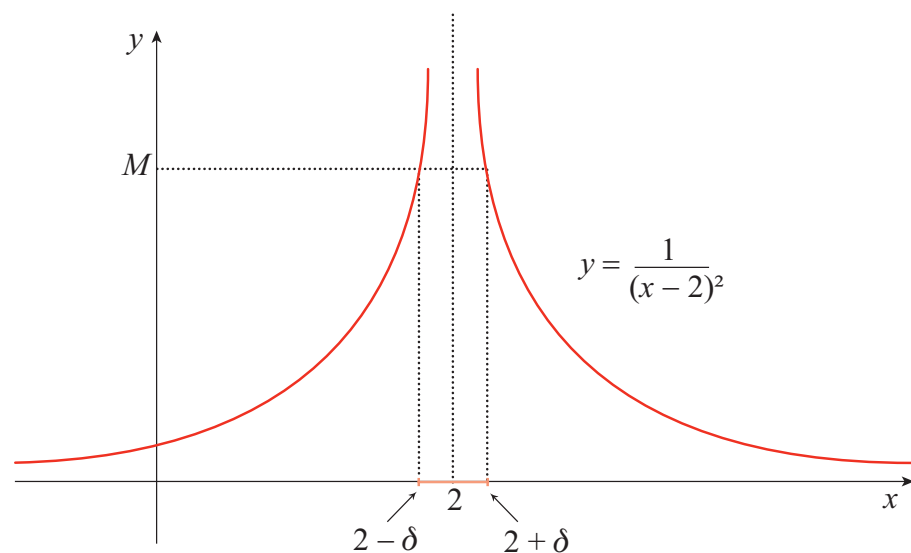


Figura 2.8

Ficou provado que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ .

De fato, dado  $M$ , basta tomar  $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$  e teremos  $f(x) > M$  sempre que  $x \in (2-\delta, 2+\delta)$  e  $x \neq 2$ . (Veja a figura).

Considerando a função  $g(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$ , esta tem comportamento semelhante ao da função  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ . A diferença é que para  $x$  arbitrariamente próximo de 2,  $g(x)$  é arbitrariamente grande em módulo, porém negativo.

**Definição 18.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto  $I$  que contém o ponto  $b$ , exceto eventualmente em  $b$ . Dizemos que “o limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $b$  é  $-\infty$ ” se para todo  $B < 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < B$  sempre que  $x \in I$  e  $0 < |x-b| < \delta$ .

Escreve-se:  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$ .

Vamos provar que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$ .

Seja  $B < 0$ . Devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $\frac{-1}{(x-2)^2} < B$  sempre que  $0 < |x-2| < \delta$ .

Ora,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(x-2)^2} < B \text{ e } x \neq 2 &\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{-1} > \frac{1}{B} \text{ e } x \neq 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{-1}{B} \text{ e } x \neq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\frac{-1}{B}} \text{ e } x \neq 2 \Leftrightarrow 0 < |x-2| < \sqrt{\frac{-1}{B}}. \end{aligned}$$

Basta tomar  $\delta = \sqrt{\frac{-1}{B}}$ . Note que  $\frac{-1}{B} > 0$ , pois  $B < 0$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$ .

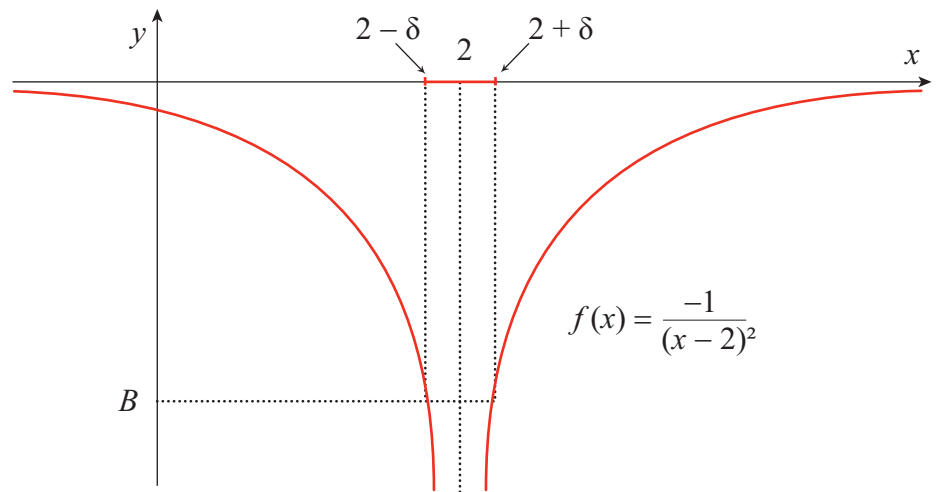


Figura 2.9

A figura exhibe um valor de  $B$  e o correspondente valor de  $\delta$  que satisfaz:  $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow f(x) < B$ .

Também podemos definir limites laterais infinitos:

**Definição 19.** Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $(b, c)$ . Dizemos que “o limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $b$  pela direita é  $-\infty$ ” se para todo  $B < 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < B$  sempre que  $b < x < b + \delta$ .

**Notação.**  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = -\infty$ .

Como exercício, defina  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ .

Finalmente, devemos considerar os limites no infinito que são infinitos.

**Definição 20.** Seja  $X$  um conjunto não limitado superiormente. Então,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  quando para todo  $M > 0$  existe  $A > 0$  tal que  $f(x) > M$  sempre que  $x \in X$  e  $x > A$ . E  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  quando para todo  $B < 0$  existe  $A > 0$  tal que  $f(x) < B$  sempre que  $x \in X$  e  $x > A$ .

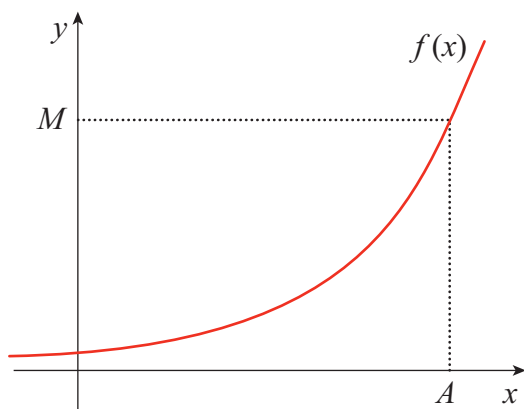


Figura 2.10 -  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

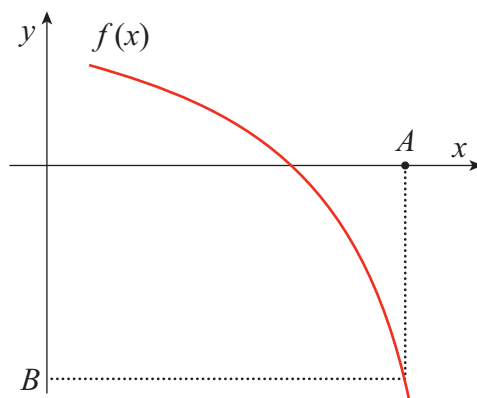


Figura 2.11 -  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Como exercício, defina  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**Exemplos.** Observando os gráficos das funções tangente, logarítmica e exponencial, podemos constatar intuitivamente que:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

**Observação.** Se  $P(x)$  é um polinômio, então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$  depende apenas do monômio de maior grau de  $P(x)$ , ou seja, se  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$ . Vamos provar esta afirmação:



$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0) &= \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n (1 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n.
\end{aligned}$$

Observação análoga vale para  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$ .

**Exemplo.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^5 - 10x^4 - 8x^3 - 35x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^5 = +\infty$ .

**Teorema 18.** Se  $n$  é um número natural, então:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

**Demonstração.**

a) Seja  $M > 0$ . Devemos obter  $\delta > 0$  tal que  $\frac{1}{x^n} > M$  sempre que  $0 < x < \delta$ . Mas

$$\frac{1}{x^n} > M \text{ e } x > 0 \Leftrightarrow x^n < \frac{1}{M} \text{ e } x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt[n]{M}}.$$

Portanto, tomando  $\delta = \frac{1}{\sqrt[n]{M}}$  tem-se  $\frac{1}{x^n} > M$  sempre que  $0 < x < \delta$ .

Assim,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ .

b) Vamos provar que, para  $n$  ímpar, temos  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ .

A demonstração do caso  $n$  par fica como exercício.

Seja  $B < 0$ . Devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $\frac{1}{x^n} < B$  sempre que  $-\delta < x < 0$ . Seja  $x < 0$  e  $n$  ímpar. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^n} < B &\Leftrightarrow x^n > \frac{1}{B} \text{ e } x < 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{x^n} > \sqrt[n]{\frac{1}{B}} \text{ e } x < 0 \\
&\Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[n]{B}} \text{ e } x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{B}} < x < 0.
\end{aligned}$$

Tomemos  $-\delta = \frac{1}{\sqrt[n]{B}}$ , isto é,  $\delta = \frac{-1}{\sqrt[n]{B}}$ , ou melhor,  $\delta = \frac{1}{\sqrt[n]{|B|}}$  (pois  $B < 0$ ).

Assim, para  $\delta = \frac{1}{\sqrt[n]{|B|}}$ , teremos  $\frac{1}{x^n} < B$  sempre que  $-\delta < x < 0$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ .

■

### Exemplos.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

**Teorema 19:** Seja  $a$  um número real qualquer e  $f, g$  funções tais que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , sendo  $c \neq 0$ . Então:

a) Se  $c > 0$  e  $f(x) > 0$  para todo  $x$  próximo de  $a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

b) Se  $c > 0$  e  $f(x) < 0$  para todo  $x$  próximo de  $a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

c) Se  $c < 0$  e  $f(x) > 0$  para todo  $x$  próximo de  $a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

d) Se  $c < 0$  e  $f(x) < 0$  para todo  $x$  próximo de  $a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

Demonstraremos apenas o item (a). Temos por hipótese que:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $f(x) > 0$  para todo  $x$  próximo de  $a$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$  e  $c > 0$ .

Com o auxílio deste teorema, poderemos calcular alguns limites infinitos. Saliemos que ele também vale se " $x \rightarrow a$ " for substituído por  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ .

Significa que  $x$  pertence a um intervalo aberto centrado em  $a$ , com  $x$  diferente de  $a$ .

**Tese.**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$ .

**Demonstração.** Existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $f(x) > 0$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_1$ . Seja  $M > 0$ . Devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $\frac{g(x)}{f(x)} > M$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , em particular para  $\varepsilon = \frac{c}{2}$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $|g(x) - c| < \frac{c}{2}$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_2$ .

Mas

$$|g(x) - c| < \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{-c}{2} < g(x) - c < \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{2} \leq g(x) \leq \frac{3c}{2}.$$

Portanto,  $g(x) \geq \frac{c}{2}$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_2$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , em particular para  $\varepsilon = \frac{c}{2M}$ , existe  $\delta_3 > 0$  tal que  $|f(x) - 0| < \frac{c}{2M}$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_3$ .

Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Então, para  $0 < |x - a| < \delta$ , temos:  $f(x) > 0$ ,

$g(x) > \frac{c}{2}$  e  $|f(x)| < \frac{c}{2M}$ . De  $f(x) > 0$  segue que  $f(x) < \frac{c}{2M}$ , ou seja,  $\frac{1}{f(x)} > \frac{2M}{c}$ .

Logo,  $\frac{g(x)}{f(x)} > \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{f(x)} > \frac{c}{2} \cdot \frac{2M}{c} = M$ . Assim,  $\frac{g(x)}{f(x)} > M$  sempre que

$0 < |x - a| < \delta$ .

Conclui-se que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$ . ■

## Exercícios resolvidos

Para os exercícios 22 ao 26, calcule:

$$22) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln(3x-1)}{|1-2x|}.$$

**Resolução.**  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln(3x-1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} |1-2x| = 0$ .

Mas  $|1 - 2x|$  tende a zero por valores positivos. Pelo Teorema 19, concluímos que  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln(3x-1)}{|1-2x|} = -\infty$ .

$$23) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{x^2 + 2x - 3}.$$

**Resolução.**  $\lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3 > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x - 3) = 0$ .

Precisamos saber qual é o sinal de  $x^2 + 2x - 3$  para  $x$  muito próximo de 1 e menor do que 1. Para isso, fatoramos este polinômio:  $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ . Agora fica fácil perceber que  $x-1 < 0$  e  $x+3 > 0$ . Pelo Teorema 19,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$ .

$$24) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{e^{4x}}{x^3 + x^2 - 6x}.$$

**Resolução.**  $\lim_{x \rightarrow -3^+} e^{4x} = e^{-12}$  que é positivo;  $\lim_{x \rightarrow -3^+} (x^3 + x^2 - 6x) = 0$ .

Fatoramos o denominador:

$$x^3 + 2x^2 - 6x = x(x^2 + 2x - 6) = x(x+3)(x-2).$$

Se  $x$  está muito próximo de  $-3$  e é maior do que  $-3$ , então  $x < 0$ ,  $x+3 > 0$  e  $x-2 < 0$ , o que implica  $x^3 + x^2 - 6x > 0$ .

Pelo Teorema 19,  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{e^{4x}}{x^3 + x^2 - 6x} = +\infty$ .

$$25) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos x}{\sin 2x}.$$

**Resolução.**  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (-1 \cos x) = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin 2x = 0$ .

Se  $x \rightarrow \pi^-$ , então  $2x \rightarrow 2\pi^-$ , ou seja,  $2x$  corresponde a um ângulo do quarto quadrante, cujo seno é negativo. Pelo Teorema 19,

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos x}{\sin 2x} = -\infty.$$

$$26) \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^4 + 2y - 1}{5 + 8y^3}.$$

**Resolução.** Dividindo numerador e denominador por  $y^4$ , temos:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^4 + 2y - 1}{5 + 8y^3} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{y^3} - \frac{1}{y^4}}{\frac{5}{y^4} + \frac{8}{y}};$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{2}{y^3} - \frac{1}{y^4} \right) = 1; \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( \frac{5}{y^4} + \frac{8}{y} \right) = 0.$$

Escrevendo  $\frac{5}{y^4} + \frac{8}{y} = \frac{1}{y} \left( \frac{5}{y^3} + 8 \right)$ , observa-se que, se  $y \rightarrow -\infty$ , então

$\frac{1}{y} < 0$  e  $\frac{5}{y^3} + 8 > 0$ , pois  $\frac{5}{y^3}$  está bem próximo de 0. Assim,

$$\frac{5}{y^4} + \frac{8}{y} < 0. \text{ Logo, } \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^4 + 2y - 1}{5 + 8y^3} = -\infty.$$

Este teorema é intuitivamente óbvio. Salientamos que " $x \rightarrow a$ " pode ser substituído por  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow -\infty$  ou  $x \rightarrow +\infty$ .

## Exercícios propostos

Calcule cada um dos limites:

20)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2\sqrt{x}}{(x-3)^2};$

21)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2 - 2x - 3};$

22)  $\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{t+2}{4-t^2};$

23)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x}{3-x};$

24)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8-x-x^3}{2x^2-49x}.$

**Teorema 20.** Sejam  $f, g, u, v$  funções tais que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} v(x) = c,$$

sendo  $c$  uma constante não nula. Então:

a)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot u(x) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + v(x)] = +\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow a} [u(x) + v(x)] = -\infty$

$$f) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot v(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } c < 0 \\ +\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{v(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{se } c < 0 \\ +\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x)}{f(x)} = 0$$

**Demonstração (a):** Demonstraremos apenas o item (a).

Por hipótese,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ . A tese é:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Seja  $M > 0$ . Devemos mostrar que existe  $\delta > 0$  tal que

$f(x) + g(x) > M$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ . Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $f(x) > \frac{M}{2}$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_1$ .

Por ser  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $g(x) > \frac{M}{2}$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta_2$ .

Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Então,  $f(x) > \frac{M}{2}$  e  $g(x) > \frac{M}{2}$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .

Logo,  $f(x) + g(x) > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$  sempre que  $0 < |x - a| < \delta$ . Concluímos que  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$ . ■

## Exercícios resolvidos

Para os exercícios de 27 ao 29, calcule:

$$27) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{sen} x - 3)^3}.$$

**Resolução.**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} (\operatorname{sen} x - 3)^3 = -8$ . Pelo

item (g) do Teorema 20,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{sen} x - 3)^3} = -\infty$ .

$$28) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \operatorname{cotg} x$$

**Resolução.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty$ . Pelo item

(c) do Teorema 20,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cotg x = -\infty$ .

$$29) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x^3 + \frac{4x}{1+3x} \right)$$

**Resolução.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{1+3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+3} = \frac{4}{3}$ . Pelo item (e)

do Teorema 20, o limite proposto vale  $-\infty$ .

## Exercícios propostos

Calcule:

$$25) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^x;$$

$$26) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left( \frac{\pi}{4} \right)^x;$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 3^-} \left( \frac{1}{x^2 - 9} + \frac{2x}{x^2 + 4} \right);$$

$$28) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{4x+5}{1-\cos x} + \frac{3x-4}{1+\operatorname{sen} x} \right) e^{\frac{-1}{x}}.$$

## 2.8 Limites fundamentais

São três os chamados limites fundamentais.

**2.8.1 Primeiro limite fundamental:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

**Demonstração.** Provaremos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ .

Seja  $x$  a medida em radianos de um ângulo do primeiro quadrante. (Veja a figura.)

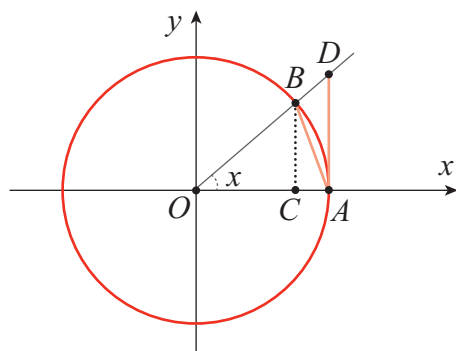


Figura 2.12

Observe que o triângulo  $AOB$  está contido no setor circular  $AOB$ , que está contido no triângulo  $AOD$ . Assim, se  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  representam, respectivamente, as áreas do triângulo  $AOB$ , do setor circular  $AOB$  e do triângulo  $AOD$ , temos:  $S_1 \leq S_2 \leq S_3$ . Mas

$$S_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{CB}}{2} = \frac{1 \cdot \text{sen } x}{2} = \frac{\text{sen } x}{2}.$$

Lembre que a área do setor circular de raio  $r$  e ângulo central  $\theta$  é dada por  $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ .

$$\text{Assim, } S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x = \frac{x}{2} \text{ e } S_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{1 \cdot \text{tg } x}{2} = \frac{\text{tg } x}{2}.$$

$$\text{Logo, } \frac{\text{sen } x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\text{tg } x}{2}, \text{ ou seja, } \text{sen } x \leq x \leq \frac{\text{sen } x}{\cos x}.$$

Vamos dividir cada membro da desigualdade por  $\text{sen } x$ , sabendo que  $\text{sen } x > 0$ . Obtém-se:

$$1 \leq \frac{x}{\text{sen } x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Invertendo cada membro da desigualdade, temos:  $1 \geq \frac{\text{sen } x}{x} \geq \cos x$ , ou melhor,  $\cos x \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq 1$ . Sendo  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ , segue,

pele teorema do confronto, que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ .

De maneira análoga, prova-se que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

■



## Exercícios resolvidos

30) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 6x}{6x}$ .

**Resolução.** Seja  $u = 6x$ . Se  $x \rightarrow 0$ , então  $u \rightarrow 0$  e o limite proposto pode ser escrito como  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u}$ , que é exatamente o limite fundamental. Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 6x}{6x} = 1$ .

31) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{3x}$ .

**Resolução.** Não é a mesma situação do exemplo anterior.

Para  $x \neq 0$ ,  $\frac{\text{sen } 4x}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{sen } 4x}{x}$ .

Mas no denominador da última fração não temos  $4x$ . Então, vamos multiplicá-la e dividi-la por 4:

$$\frac{\text{sen } 4x}{x} = 4 \cdot \frac{\text{sen } 4x}{4x}.$$

Usando o argumento do exercício anterior, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{3x} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{4x} = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

32) Calcule:  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(t^2 - 1)}{t - 1}$ .

**Resolução.** Para  $t \neq 1$ , temos:

$$\frac{\text{sen}(t^2 - 1)}{t - 1} = \frac{(t + 1)\text{sen}(t^2 - 1)}{(t + 1)(t - 1)} = \frac{(t + 1)\text{sen}(t^2 - 1)}{t^2 - 1}.$$

Claro que  $\lim_{t \rightarrow 1} (t + 1) = 2$ .

Para calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(t^2 - 1)}{t^2 - 1}$ , façamos  $u = t^2 - 1$ , obtendo

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} = 1.$$

Logo,  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(t^2 - 1)}{t^2 - 1} = 2 \cdot 1 = 2$ .

33) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$  ( $a, b \neq 0$ ).

**Resolução.** Vamos dividir numerador e denominador por  $x$ , ou seja, para  $x \neq 0$ ,

$$\frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \frac{\frac{\operatorname{sen} ax}{x}}{\frac{\operatorname{sen} bx}{x}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} ax}{x} \cdot a}{\frac{\operatorname{sen} bx}{x} \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen} ax}{bx}.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$ .

34) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$ .

**Resolução.** Com o propósito de usar o primeiro limite fundamental, multipliquemos numerador e denominador por  $1 + \cos 2x$ , obtendo:

$$\frac{(1 - \cos 2x) \cdot (1 + \cos 2x)}{3x^2 \cdot (1 + \cos 2x)} = \frac{1 - \cos^2 2x}{3x^2(1 + \cos 2x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{3x^2(1 + \cos 2x)},$$

que podemos escrever estrategicamente como

$$\frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 2x}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{2}$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

35) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x}{x - 2x^3}$ .

**Resolução.** Usaremos a relação trigonométrica  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ :

$$\frac{\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x}{x - 2x^3} = \frac{\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x - 2x^3} = \frac{\operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x}{(x - 2x^3) \cos 3x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2x^2} \cdot \frac{1}{\cos 3x \cdot \cos x}$$

Agora,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2x^2} = \frac{0}{1} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x \cdot \cos x} = 1$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} x}{x - 2x^3} = 3 \cdot 0 \cdot 1 = 0$ .

## Exercícios propostos

Calcule os limites:

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{6x};$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{3x^2 - 2x};$$

Sugestão: Divida numerador e denominador por  $x$ .

$$32) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 t}{t^2};$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{tg} x};$$

$$34) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sec \theta - 1}{4\theta^2}.$$

Neste limite, " $x \rightarrow +\infty$ " pode ser substituído por " $x \rightarrow -\infty$ " sem alterar o resultado.

### 2.8.2 Segundo limite fundamental: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

**Observação.** Este limite pode ser escrito de outra forma, fazendo a mudança de variável  $y = \frac{1}{x}$ , pois: se  $x \rightarrow +\infty$ , então

$$y \rightarrow 0^+ \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e; \text{ se } x \rightarrow -\infty, \text{ então } y \rightarrow 0^- \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e. \text{ Assim, } \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

## Exercícios resolvidos

$$36) \text{ Calcule: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x}.$$

**Resolução.** Através da mudança de variável  $u = 4x$ , obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

$$37) \text{ Calcule: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x.$$

**Resolução.** Dessa vez, o expoente  $x$  não é igual ao denominador  $3x$ . Faremos a seguinte manipulação algébrica:

$$\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

38) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$ .

**Resolução.** Inicialmente escreveremos a expressão  $1 - \frac{3}{x}$  na forma

$$1 + \frac{1}{v(x)}: \quad 1 - \frac{3}{x} = 1 + \left(\frac{-3}{x}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{-x}{3}}.$$

Assim,  $\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{-x}{3}}\right)^{\frac{-x}{3}}\right]^{-6}$  e então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{-x}{3}}\right)^{\frac{-x}{3}}\right]^{-6} = e^{-6}.$$

39) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$ .

**Resolução.**  $(1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1 + 3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3 = e^3.$$

40) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} (1 + \cos x)^{\sec x}$

**Resolução.** Seja  $u = \cos x$ . Se  $x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$ , então  $u \rightarrow 0^+$ .

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} (1 + \cos x)^{\sec x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

## Exercícios propostos

Calcule os limites:

35)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}};$

36)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{6x};$

$$37) \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{t}{4}\right)^{-\frac{1}{t}}; \quad 38) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2};$$

$$39) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + cx)^{\frac{1}{x}} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

### 2.8.3 Terceiro limite fundamental

Seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ .

**Justificativa.** Faremos a mudança de variável:  $y = a^x - 1$ . Então,  $a^x = y + 1$  e, aplicando o logaritmo natural a ambos os lados da igualdade, temos:  $x \ln a = \ln(y + 1)$ , ou seja,  $x = \frac{\ln(y + 1)}{\ln a}$ .

Se  $x \rightarrow 0$ , então  $y \rightarrow a^0 - 1 = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\ln(y + 1)}{\ln a}} = \ln a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y + 1)} = \ln a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(y + 1)}{y}} = \ln a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{y} \cdot \ln(y + 1)} = \\ &= \ln a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(y + 1)^{\frac{1}{y}}} \quad (\text{Propriedade do Logaritmo}) \\ &= \ln a \cdot \frac{1}{\ln \left[ \lim_{y \rightarrow 0} (y + 1)^{\frac{1}{y}} \right]} \quad (\text{Teorema 12 - itens (d) e (h)}) \\ &= \ln a \cdot \frac{1}{\ln e} = \ln a \quad (\text{Segundo Limite Fundamental}). \end{aligned}$$

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ .

**Caso Especial:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , pois  $\ln e = 1$ .

### Exercícios resolvidos

$$41) \text{ Calcule: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x}.$$

**Resolução.** Fazendo  $u = 3x$ , temos:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2^u - 1}{u} = \ln 2$

42) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 4\sqrt{x}}$ .

**Resolução.** O denominador  $x - 4\sqrt{x}$  pode ser fatorado como  $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4)$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 4\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} - 4} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ .

43) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 3^{5x}}{x}$ .

**Resolução.** Coloquemos  $3^{5x}$  em evidência:  $\frac{3^{2x} - 3^{5x}}{x} = 3^{5x} \left( \frac{3^{-3x} - 1}{x} \right)$ .  
Então:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 3^{5x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3^{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{-3x} - 1}{-3x} \cdot (-3) = 1 \cdot \ln 3 \cdot (-3) = -3 \ln 3$$

ou  $\ln\left(\frac{1}{27}\right)$ .

44) Calcule:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ .

**Resolução.** Seja  $y = x - \frac{\pi}{2}$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} - 1}{y}$ .

Aplicamos a fórmula  $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$  a

$$\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) : \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -\operatorname{sen} y.$$

Assim,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} y} - 1}{y}$ .

Dividindo numerador e denominador por  $-\operatorname{sen} y$ , obtém-se:

$$\frac{e^{-\operatorname{sen} y} - 1}{y} = \frac{\frac{e^{-\operatorname{sen} y} - 1}{-\operatorname{sen} y}}{\frac{y}{-\operatorname{sen} y}} = \frac{e^{-\operatorname{sen} y} - 1}{-\operatorname{sen} y} \cdot \left(-\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right).$$

Para calcular  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} y} - 1}{-\operatorname{sen} y}$ , basta fazer  $u = -\operatorname{sen} y$  e obter

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1. \text{ Já } \lim_{y \rightarrow 0} \left( -\frac{\operatorname{sen} y}{y} \right) = -1 \text{ (Primeiro Limite Fundamental).}$$

Logo, o limite proposto vale  $1 \cdot (-1) = -1$ .

## Exercícios propostos

Calcule os limites:

$$40) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{-x} - 1}{2x};$$

$$41) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{5x-1} - 0,1}{10x};$$

$$42) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^{3x}}{x^2 - 2x};$$

$$43) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{1 - x^2};$$

Sugestão: Use mudança de variável.

$$44) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(kx)}{(1+k^2)(x^2-x)} \quad (k \in \mathbb{R}^*);$$

$$45) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x};$$

$$46) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x;$$

$$47) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x};$$

$$48) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{x-1} - \frac{1}{7}}{x};$$

$$49) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{\frac{x}{2}} - 1}.$$

$$50) \text{ Tome } f(x) = \begin{cases} 2 + x^3 & \text{se } x \neq 1 \\ -3 & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

- Faça o gráfico de  $f$  (use o gráfico de  $y = x^3$ ).
- Tome sequências distintas  $(x_n)$  e  $(z_n)$  tais que  $x_n \neq 1$  e  $z_n \neq 1$  para todo  $n$ , mas  $\lim x_n = 1$  e  $\lim z_n = 1$ . Calcule  $\lim f(x_n)$  e  $\lim f(z_n)$ .
- Quanto vale o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? Prove a sua afirmação usando a definição de sequências.

$$51) \text{ Seja } h(x) = \frac{|x+4|}{x+4}.$$

- Faça o gráfico de  $h$ .

- b) Note que  $h$  não está definida em  $-4$ .
- c) Defina sequências  $(s_n)$  e  $(t_n)$  tais que:  $s_n < -4, \forall n \in \mathbb{N}$  e  $\lim s_n = -4$ ;  $t_n > -4, \forall n \in \mathbb{N}$  e  $\lim t_n = -4$ . Agora calcule  $\lim h(s_n)$  e  $\lim h(t_n)$ .
- d) Quanto vale o  $\lim_{x \rightarrow -4} h(x)$ ? Por quê?

$$52) \text{ Seja } g(x) = \begin{cases} \frac{|x+4|}{x+4} & \text{se } x \neq -4 \\ a & \text{se } x = -4 \end{cases}.$$

Para que valor(es) de  $a$  existe o  $\lim_{x \rightarrow -4} g(x)$ ?

- 53) Seja  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . Considere as sequências

$$x_n = \frac{-1}{2n\pi}; y_n = \frac{1}{(2n-1)\pi}; z_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}.$$

Note que  $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n = 0$ . Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x_n)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(y_n)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(z_n)$ . O que você conclui sobre o  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ?

De 54 a 59, calcule o valor do limite:

$$54) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg}(2\pi - t) - \sqrt[3]{\sec^2 t + \frac{20}{3}}}{e^{\cos 3t} + \operatorname{sen} 2t};$$

$$55) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^8 - 1}{1 - x^2};$$

$$56) \lim_{u \rightarrow 4} \frac{u^3 - u^2 - 2u - 40}{2u - 8};$$

$$57) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6 - 12x}{4x^2 - 1};$$

$$58) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - |5x| + 3}{x^2 - |x|};$$

$$59) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 12}{x^3 - x^2 - 18}.$$



60) Seja  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{se } x \neq 4 \\ -1 & \text{se } x = 4 \end{cases}$ . Faça um gráfico de  $f$  usando régua. Dado  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , calcule  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < |x - 4| < \delta$ , então  $|f(x) - 3| < \varepsilon$ . Em outros termos, se  $x \in (4 - \delta, 4 + \delta)$  e  $x \neq 4$ , então  $f(x) \in (2,5, 3,5)$ . Em seguida, coloque estes intervalos de raios  $\varepsilon$  e  $\delta$  no seu gráfico e comprove a sua resposta.

61) Seja  $f(x) = 14 - 5x$ .

a) Determine um intervalo  $I = (2 - \delta, 2 + \delta)$  tal que a imagem de qualquer ponto de  $I - \{2\}$  esteja no intervalo  $(3,95; 4,05)$ .

b) Prove, usando a definição em termos de  $\varepsilon$  e  $\delta$ , que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ .

De 62 a 67, calcule o valor do limite:

62)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + 5x + 4x^2} - 3}{x}$ ;      63)  $\lim_{y \rightarrow 3} \ln \left( \frac{y - 3}{\sqrt{y + 6} - 3} \right)$ ;

64)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{t + 1}}{\sqrt{4 + t} - 2}$ ;      65)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[4]{5x + 1} - x + 1}{x - 3}$ ;

66)  $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{2u - 2}{\sqrt[3]{26 + u} - 3}$ ;      67)  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ( $b, c \in \mathbb{R}$ ).

Sugestão: Divida numerador e denominador por  $t$ .

Nos exercícios de 68 a 70, faça um gráfico da função  $f$ , determine  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  se existirem.

68)  $f(x) = \begin{cases} 5 - \frac{x^2}{2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{3x - 5}{2} & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ -1 & \text{se } x = 3 \\ -x + 5 & \text{se } x > 3 \end{cases}$ . Sendo  $x_0 = -1$ ;  $x_0 = 3$ .

69)  $f(x) = 3 - |2x + 1|$ ;  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .

$$70) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + |3x|}{x}; \quad x_0 = 0.$$

$$71) \text{ Calcule } \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2s+14} - 4}{s-1}.$$

$$72) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 3x + 5x^2}{12x^4 - x^3 + 4} \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + 2x - 50}{1 - x - x^3}.$$

De 73 a 76, calcule os limites quando  $x \rightarrow +\infty$  e quando  $x \rightarrow -\infty$  da função dada:

$$73) f(x) = \frac{1-3x}{4x - \sqrt{9x^2 - x}};$$

$$74) g(t) = \frac{5t + 4\sqrt{t^2 - 2t - 15}}{6t + 5};$$

$$75) h(y) = \frac{5y + 2}{2\sqrt[3]{2y^3 + y^2 + 1 - y}};$$

$$76) f(x) = \left( \frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right).$$

$$77) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x - \sqrt{7}} + 2x).$$

$$78) \text{ Considere } f(x) = \frac{10}{(x-4)^2}.$$

a) Determine um intervalo aberto  $J$ , centrado em 4, tal que, se  $x \in J$  e  $x \neq 4$ , então  $f(x) > 16000$ ;

b) Prove que  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$ .

79) Examine o gráfico de cada função e diga o quanto vale o limite:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \operatorname{tg} x \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cotg} x \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi^-}{2}} \operatorname{sec} x$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \operatorname{cossec} x \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg} x \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x$$

Sugestão: Multiplique e divida por uma expressão adequada.

De 80 a 83, calcule o limite proposto:

$$80) \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos y}{y^3 - y};$$

$$81) \lim_{m \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{\ln |m|}{8m^2 + 6m + 1};$$

$$82) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\cos x}{x - \sqrt{x}} - \frac{\sec x}{x - x^2} \right); \text{ (Analise cada membro separadamente)}$$

$$83) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \text{ sendo } f(x) = \frac{4x^4 - 2x + 17}{1 + 3x - x^3}.$$

De 84 a 87, calcule o limite pedido, caso exista.

$$84) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e}{\sqrt{2}} \right)^x;$$

$$85) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}};$$

$$86) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x), \text{ sendo } f(x) = \left( \frac{5}{7} \right)^{\frac{4}{1-2x}};$$

$$87) \lim_{u \rightarrow 2} \left( \frac{u^2 + 1}{u + 1} \right)^{\frac{1}{u-2}}.$$

## Resposta dos exercícios propostos

$$1) -2 \text{ e } \frac{83}{4}$$

$$2) 3$$

$$3) 0$$

$$4) -2$$

$$6) \frac{3}{7}$$

$$7) \frac{1}{12}$$

$$8) 2$$

$$9) -\frac{1}{8}$$

$$10) \frac{1}{8}$$

$$11) \frac{3}{2}$$

$$12) -1$$

$$13) 3, 3, 3$$

$$14) 1, 3, \exists$$

$$15) -1, -1, -1$$

$$16) -5$$

$$17) 1$$

$$18) 3$$

$$19) 1$$

20)  $+\infty$

21)  $+\infty$

22)  $-\infty$

23)  $-\infty$

24)  $+\infty$

25)  $+\infty$

26)  $-\infty$

27)  $-\infty$

28)  $-\infty$

29)  $+\infty$

30)  $\frac{1}{3}$

31)  $-2$

32)  $2$

33)  $2$

34)  $\frac{1}{8}$

35)  $\sqrt{e}$

36)  $e^{-2}$

37)  $e^{-\frac{1}{4}}$

38)  $e$

39)  $e^c$

40)  $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

41)  $\frac{\ln 10}{20}$

42)  $2$

43)  $-\ln 2$

44)  $\frac{-k}{1+k^2}$

45)  $\frac{\pi}{2}$

46)  $e^{-3}$

47)  $e^6$

48)  $\frac{1}{7} \ln 7$

49)  $-6$

55)  $-4$

56)  $19$

57)  $-3$

58)  $-1$

59)  $\frac{29}{21}$

61) a)  $(1, 99, 2, 01)$

62)  $\frac{5}{6}$

63)  $\ln 6$

64)  $-2$

65)  $-\frac{27}{32}$

66)  $54$

67)  $-\frac{c}{b}$

71)  $\frac{1}{4}$

73)  $-3, -\frac{3}{7}$

74)  $\frac{3}{2}, \frac{1}{6}$

75)  $\frac{5}{2\sqrt[3]{2}}, \frac{5}{2\sqrt[3]{2}}$

76)  $\frac{2}{9}, \frac{2}{9}$

77)  $\frac{1}{4}$

- 78) a)  $(3,975, 4,025)$     80)  $+\infty$     81)  $+\infty$
- 82)  $-\infty$     83)  $+\infty, -\infty$     84) 0
- 85) 1    86)  $0, +\infty$     87) Não existe.



# Capítulo 3

## Funções Contínuas







# Capítulo 3

## Funções Contínuas

Neste capítulo, objetivamos estudar a continuidade de uma função e algumas de suas consequências, além de apresentar e aplicar um teorema fundamental para o Cálculo, o Teorema do Valor Intermediário.

Observe atentamente os gráficos das funções  $f, g, h$ :

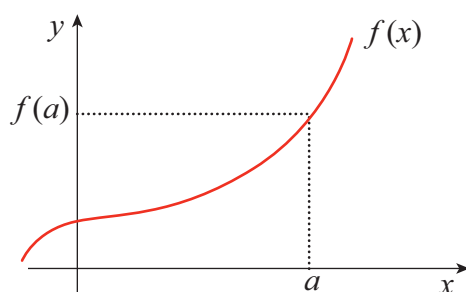


Figura 3.1

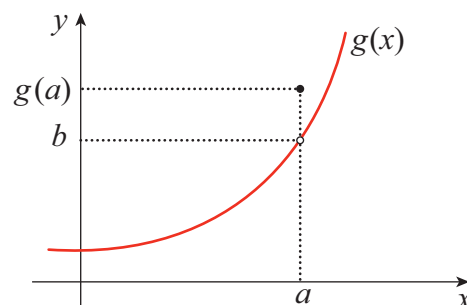


Figura 3.2

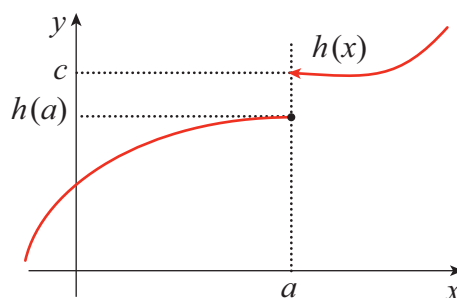


Figura 3.3

Note que cada uma está definida no ponto  $a$ . Porém, somente a função  $f$  satisfaz o seguinte: Se  $x$  está muito próximo de  $a$ , então a imagem de  $x$  está muito próxima da imagem de  $a$ . Em outras palavras,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Quanto às funções  $g$  e  $h$ , repare que:  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  e  $b \neq g(a)$ , enquanto o  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$  sequer existe.

**Definição 21.** Seja  $f$  uma função e  $a$  um ponto do domínio de  $f$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $a$  quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Quando  $f$  não é contínua em  $a$ , dizemos que  $f$  é descontínua em  $a$  e que  $a$  é um ponto de descontinuidade de  $f$ .

**Observação.** Das três funções representadas nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3, apenas  $f$  é contínua em  $a$ , enquanto  $g$  e  $h$  são descontínuas em  $a$ .

**Observação.** Somente faz sentido analisar a continuidade da função  $f$  no ponto  $a$  se este pertencer ao domínio de  $f$ , isto é, se  $f(a)$  existe. Caso contrário, não se trata de ponto de continuidade nem de descontinuidade de  $f$ .

**Observação.** Se o domínio de  $f$  é o intervalo  $[a, b]$ , então  $f$  é contínua em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  e  $f$  é contínua em  $b$  se  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

**Definição 22.** Dizemos que  $f$  é uma *função contínua* quando  $f$  é contínua em todos os pontos do seu domínio.

**Exemplo.** Seja  $f(x) = ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e seja  $k \in \mathbb{R}$ . Então,  $k$  pertence ao domínio de  $f$  e  $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (ax + b) = ak + b = f(k)$ .

Portanto,  $f$  é contínua em  $k$ , qualquer que seja o número real  $k$ . Conforme a Definição 22,  $f$  é uma função contínua.

De maneira análoga, comprova-se que qualquer polinômio é uma função contínua.

**Teorema 21.** Se  $f$  e  $g$  são contínuas no ponto  $a$ , então as funções  $f + g$ ,  $f - g$  e  $f \cdot g$  são contínuas em  $a$ . Se  $g(a) \neq 0$ , então a função  $\frac{f}{g}$  também é contínua em  $a$ .

**Demonstração.** Decorre imediatamente da Definição 21 e do Teorema 12. Vamos demonstrar apenas a continuidade da função  $f + g$ . Para isso, basta mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = (f + g)(a)$ .

Ora,  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

(por hipótese e item (a) do Teorema 12)  $= f(a) + g(a)$  (por hipótese e Definição 21)  $= (f + g)(a)$ .

Logo,  $(f + g)$  é contínua em  $a$ . ■

**Observação.** Como consequência dos Teoremas 12 e 21, as funções racionais, trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante), logarítmicas e exponenciais são funções contínuas.

Este exemplo mostra que o gráfico de uma função contínua pode não ser uma "linha contínua" no sentido de se conseguir fazê-lo sem tirar a caneta do papel.

**Exemplo.** Vamos examinar algumas funções quanto à continuidade:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x}.$$

O domínio de  $f$  é  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Se  $a \neq 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{1}{a} = f(a)$ .

Logo,  $f$  é contínua em  $a$ , e conforme a Definição 22,  $f$  é uma função contínua.

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

O domínio de  $g$  é  $\mathbb{R}$ . Se  $a \neq 0$ , então  $g$  é contínua em  $a$ . No ponto 0:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ . Portanto, o  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  não existe, o que mostra que 0 é ponto de descontinuidade de  $g$ . Logo,  $g$  não é uma função contínua.

$$\text{c) } h(t) = \begin{cases} t + \frac{t}{|t|} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}.$$

O domínio de  $h$  é  $\mathbb{R}$ . Lembrando que  $|t| = \begin{cases} -t & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$ ,

$$\text{escrevemos: } h(t) = \begin{cases} t - 1 & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ t + 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}.$$

Se  $a < 0$ , então  $\lim_{t \rightarrow a} h(t) = \lim_{t \rightarrow a} (t - 1) = a - 1 = h(a)$ .

Também se  $a > 0$ , tem-se  $\lim_{t \rightarrow a} h(t) = h(a)$ . Assim,  $h$  é contínua em  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

No ponto 0:  $\lim_{t \rightarrow 0^-} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} (t - 1) = -1$ ;  $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t + 1) = 1$ .

Logo,  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t)$  não existe. Concluimos que  $h$  é descontínua em 0 e, assim,  $h$  não é uma função contínua.

$$d) F(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < -1 \\ \sqrt{2x^2 + 7} & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}.$$

O domínio de  $F$  é  $\mathbb{R}$ . Você pode, sem dificuldade, verificar que  $F$  é contínua em  $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$ . Devemos examinar separadamente os pontos -1 e 3.

$$\text{Ponto -1: } \lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2) = 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{2x^2 + 7} = 3.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -1} F(x) = 3.$$

Como  $F(-1) = \sqrt{2(-1)^2 + 7} = 3$ , concluimos que  $F$  é contínua em -1.

$$\text{Ponto 3: } \lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{2x^2 + 7} = 5;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 1) = 5.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 3} F(x) = 5.$$

Mas  $F(3) = 4$  e, dessa forma,  $F$  é descontínua em 3. Novamente não se trata de uma função contínua.

$$e) u(x) = \begin{cases} x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

O domínio de  $u$  é  $\mathbb{R}$ . Se  $a \neq 0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right) = u(a).$$

Portanto,  $u$  é contínua em  $a$ .

**No ponto 0:**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ . (Por quê?) Sendo  $u(0) = 0$ , concluimos que  $u$  é contínua em 0.

Logo,  $u$  é uma função contínua.

**Definição 23.** Seja  $a$  um ponto de descontinuidade de  $f$ . Dizemos que  $f$  tem uma *descontinuidade de primeira espécie* em  $a$  quando existem e são finitos ambos os limites laterais de  $f$  em  $a$ . Caso contrário, dizemos *descontinuidade de segunda espécie*.

**Exemplo.** A função  $g$  do exemplo anterior tem uma descontinuidade de segunda espécie em 0. As funções  $h$  e  $F$  têm uma descontinuidade de primeira espécie.

## Exercício resolvido

1) Determine o conjunto dos pontos em que a função

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{3x^2 + 2x} \text{ é contínua.}$$

**Resolução.** Sendo  $f$  uma função racional, é uma função contínua, ou seja,  $f$  é contínua exatamente nos pontos do seu **domínio**.

Ora,  $3x^2 + 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(3x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ e } x \neq -\frac{2}{3}$ . Portanto,  $f$  é contínua no conjunto  $\mathbb{R} - \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$ .

## Exercício proposto

1) Seja  $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{cotg} 3x$ . Determine o conjunto dos pontos em que  $f$  é contínua.

**Observação.** Seja  $f$  uma função contínua em  $a$ . A definição de limite de uma função num ponto em termos de  $\varepsilon$  e  $\delta$  (Definição 12) estabelece que:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

O domínio de  $f$  é formado pelos números reais que não anulam o denominador.

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta. \quad (1)$$

Mas se  $x = a$ , então a desigualdade  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  é obviamente verdadeira. Portanto, não é preciso exigir que  $x \neq a$ , ou seja, que  $0 < |x - a|$  em (1).

Temos, então, a seguinte definição de continuidade em termos de  $\varepsilon$  e  $\delta$ :

**Definição 24.** Seja  $f$  uma função definida em  $a$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $a$  quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  sempre que  $|x - a| < \delta$ .

O próximo teorema estabelece o limite da função composta que justifica os itens  $e, f, g, h$  do Teorema 12.

**Teorema 22.** Sejam  $f, g$  funções tais que o conjunto imagem de  $g$  está contido no domínio de  $f$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  e se  $f$  é contínua em  $b$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = f(b)$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = f \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$ .

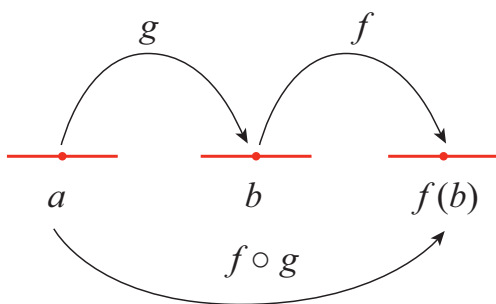


Figura 3.4

**Demonstração.** Dado  $\varepsilon > 0$ , devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f \circ g(x) - f(b)| < \varepsilon$ . Seja pois  $\varepsilon > 0$ . Por ser  $f$  contínua em  $b$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que, se  $|y - b| < \delta_1$ , então

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon \quad (2)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , existe para este  $\delta_1$  um  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|g(x) - b| < \delta_1$ . Para tais valores  $g(x)$ , te-

mos, devido a (2):  $|f[g(x)] - f(b)| < \varepsilon$ . Portanto, encontramos  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f \circ g(x) - f(b)| < \varepsilon$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = f(b).$$

■

**Observação.** Este teorema estabelece, por exemplo, que  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(2x + \pi) = \text{sen}\left[\lim_{x \rightarrow 0} (2x + \pi)\right]$  devido à continuidade da função seno.

O teorema seguinte estabelece a continuidade da função composta.

**Teorema 23.** Sejam  $f, g$  funções tais que o conjunto imagem de  $g$  está contido no domínio de  $f$ . Se  $g$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $g(a)$ , então a função  $f \circ g$  é contínua em  $a$ .

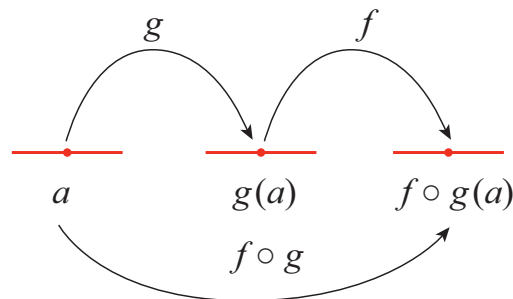


Figura 3.5

**Demonstração.** Por hipótese,  $g$  é contínua em  $a$  e assim

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Ainda por hipótese,  $f$  é contínua em  $g(a)$ .

Por meio do Teorema 22, conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = f\left[\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right] = f \circ g(a).$$

Logo, a função  $f \circ g$  é contínua em  $a$ .

■

**Exemplo.** A função  $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$  é uma função contínua, pois  $h = f \circ g$ , sendo  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $g(x) = 9 - x^2$ . E tanto  $f$  quanto  $g$  são contínuas em seus domínios. Logo,  $h$  é contínua em seu domí-

nio, a saber,  $[-3,3]$ . Por argumentos análogos justifica-se a continuidade de funções, como:  $y = \sqrt[3]{\sin x}$ ,  $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$ ,  $y = e^{x \cdot \lg x}$ ,  $y = \operatorname{arctg}(x^{-1})$ , etc.

## Exercícios resolvidos

$$2) \text{ Seja } f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ e^{2x} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x^3 + 1} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{se } 2 < x < 5 \end{cases} .$$

a) Determine o conjunto dos pontos em que  $f$  é contínua.

b) Determine o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$ .

**Resolução.** O domínio de  $f$  é o intervalo  $[-3,5)$ . No ponto  $-3$   $f$  é contínua porque  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (2-x) = 5$  e  $f(-3) = 5$ . No intervalo  $(-3, -1)$ ,  $f$  é contínua por ser polinomial. Nos intervalos  $(-1, 0)$  e  $(0, 2)$ , o Teorema 23 e a observação após o Teorema 21, garantem a continuidade de  $f$ . No intervalo  $(2, 5)$ ,  $f$  é contínua por ser polinomial. Os pontos  $-1$ ,  $0$ ,  $2$  serão analisados separadamente:

**Ponto  $-1$ :**  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2-x) = 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{2x} = e^{-2}$ .

Como  $3 \neq e^{-2}$ , o  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  não existe. Logo,  $f$  é descontínua em  $-1$ .

**Ponto  $0$ :**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^3 + 1} = 1$ . Por-

tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Mas  $f(0) = 0$ . Logo,  $f$  é descontínua em  $0$ .

**Ponto  $2$ :**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x^3 + 1} = 3$ ;

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x + 3) = 3$ . Portanto,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ . Sendo

$f(2) = 3$ , concluímos que  $f$  é contínua em  $2$ .



**Respostas. (a)** O conjunto dos pontos em que  $f$  é contínua é  $[-3, 5) - \{-1, 0\}$ .

**(b)** O conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$  é  $\{-1, 0\}$ .

- 3) Determine, se existirem, valores para  $a$  e  $b$  de modo que  $f$  seja uma função contínua:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{se } x < -2 \\ 3ax + b & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2b & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

**Resolução.** Nos intervalos  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 1)$  e  $(1, +\infty)$ ,  $f$  é contínua, sejam quais forem os valores de  $a$  e  $b$ . Examinaremos os pontos  $-2$  e  $1$ :

**Ponto -2:**  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 2a) = -2 + 2a$ ;

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3ax + b) = -6a + b.$$

Para que  $f$  seja contínua em  $-2$ , é preciso que  $-2 + 2a = -6a + b$ , ou seja,  $8a - b = 2$ .

**Ponto 1:**  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3ax + b) = 3a + b$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2b) = 3 - 2b.$$

Para  $f$  ser contínua em  $1$ , é preciso que  $3a + b = 3 - 2b$ , ou seja,  $3a + 3b = 3$ .

Para encontrar os possíveis valores de  $a$  e  $b$  que tornam  $f$  contínua em  $-2$  e  $1$ , devemos resolver o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 8a - b = 2 \\ 3a + 3b = 3 \end{cases}$$

Este sistema tem solução única:  $a = \frac{1}{3}$  e  $b = \frac{2}{3}$ .

**Resposta.**  $f$  é uma função contínua se, e somente se,  $a = \frac{1}{3}$  e  $b = \frac{2}{3}$ .

## Exercícios propostos

- 2) Verifique se a função  $f$  é contínua no ponto 4:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{se } x < 4 \\ x^2-4x+3 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

- 3) Verifique se a função  $g$  é contínua nos pontos 0 e 1:

$$g(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^3+2x+4 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3x+4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- 4) Determine, se possível, o valor de  $a$  para que  $f$  seja contínua

no ponto -1:  $f(x) = \begin{cases} x^2-2ax+3 & \text{se } x < -1 \\ 4ax-3 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ .

- 5) Determine, se possível, o valor de  $k$  para que  $f$  seja contínua

no ponto 1:  $f(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos x & \text{se } x < 1 \\ k & \text{se } x = 1 \end{cases}$

**Nos exercícios 6 e 7, determine:**

- a) O conjunto dos pontos em que  $f$  é contínua.  
b) O conjunto dos pontos em que  $f$  é descontínua.

$$6) f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & \text{se } x < -1 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)}{x} & \text{se } 0 < x < \pi \\ \cos x & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ \frac{e^x - e}{x^2 - 1} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{x-3} & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ \ln(2x-5) & \text{se } 3 \leq x < 5 \\ -2 \ln 25 & \text{se } x = 5 \end{cases}$$

## 3.1 Valores máximos e mínimos de uma função

Consideremos duas funções muito parecidas:

$$\begin{array}{ll} f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R} & g : [-1, 3) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 & g(x) = x^2 \end{array}$$

Sugerimos ao leitor fazer o gráfico dessas funções para constatar que o conjunto imagem de  $f$  é  $[0, 9]$ , enquanto o de  $g$  é  $[0, 9)$ .

Uma diferença relevante entre  $f$  e  $g$  é que o conjunto imagem de  $f$  possui um elemento maximal (maior elemento) que é 9, o que não acontece com o conjunto imagem de  $g$ .

Em outras palavras, existe um elemento do domínio de  $f$ , que é 3, satisfazendo:  $f(3) \geq f(x)$  para todo  $x$  pertencente ao domínio de  $f$ . Mas não existe um elemento  $c$  no domínio de  $g$  tal que  $g(c) \geq g(x)$  para todo  $x$  pertencente ao domínio de  $g$ .

### Definição 25.

- a) Dizemos que a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , assume um máximo em  $A$  quando existe  $c \in A$  tal que  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x$  em  $A$ . Nesse caso,  $f(c)$  chama-se valor máximo de  $f$  em  $A$ .
- b) Dizemos que a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  assume um mínimo em  $A$  quando existe  $d \in A$  tal que  $f(d) \leq f(x)$  para todo  $x$  em  $A$ . Nesse caso,  $f(d)$  chama-se valor mínimo de  $f$  em  $A$ .

**Observação.** A respeito das funções  $f$  e  $g$  apresentadas anteriormente, podemos dizer que:  $f$  assume um máximo no ponto 3 e seu valor máximo é 9. Mas  $g$  não assume máximo. As funções  $f$  e  $g$  assumem um mínimo no ponto 0, e o valor mínimo de ambas é zero.

**Observação.** Existem funções que não assumem máximo nem mínimo. Por exemplo:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 \text{ como também } g : [-1, 1] - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}.$$

O leitor pode verificá-lo sem dificuldade fazendo o gráfico de  $f$  e de  $g$ .

O teorema seguinte estabelece condições suficientes para que uma função assuma máximo e mínimo.

**Teorema 24. (Teorema de Weierstrass).** Seja  $f$  uma função contínua definida no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então,  $f$  assume um máximo e um mínimo em  $[a, b]$ .

**Demonstração.** A demonstração desse teorema necessita dos conceitos de supremo e ínfimo, que serão vistos em análise, em que também será feita a demonstração do teorema.

**Exemplos.** Para compreender melhor os exemplos a seguir, sugerimos que o leitor faça o gráfico de cada uma das funções.

a)  $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - x^2$ .

Observe que  $f$  é contínua no intervalo  $[-2, 1]$  e de fato assume seu valor máximo 3 no ponto 0 e seu valor mínimo  $-1$  no ponto  $-2$ .

b)  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$ .

Essa função é contínua, porém o intervalo não é fechado. Então, não podemos aplicar o Teorema 24. De fato,  $f$  assume um máximo no ponto 1, mas não assume mínimo.

c)  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e se } x = 1 \end{cases}$ .

Esta função está definida num intervalo fechado, mas não é contínua. Note que ela não assume máximo ou mínimo.

d)  $f : (-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } -2 < x \leq -1 \\ x^2 - 3 & \text{se } -1 < x \leq 2 \end{cases}$ .

Apesar de  $f$  não estar definida num intervalo fechado e de não ser contínua, assume o seu mínimo  $-3$  no ponto 0 e seu máximo 1 nos pontos  $-1$  e 2. Lembre que as hipóteses do Teorema 24 são suficientes, mas não necessárias para a existência de máximo e mínimo.

**Teorema 25. (Teorema do Valor Intermediário).** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então,  $f$  assume todos os valores entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , isto é, se  $z$  está entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = z$ .

**Demonstração.** A demonstração desse teorema necessita dos conceitos de supremo e ínfimo, que serão vistos em análise, em que também será feita a demonstração do teorema.

**Exemplo.** Considere  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x$ .

Como  $f$  é polinomial, é contínua em  $[0, 2]$ . Assim, podemos aplicar o teorema do valor intermediário (TVI) a  $f$  nesse intervalo e concluir que  $f$  assume todos os valores entre  $f(0) = 0$  e  $f(2) = 8$ .

Tomemos, por exemplo,  $z = 3$ . Então, pelo TVI, existe  $c \in (0, 2)$  tal que  $f(c) = 3$ . De fato,  $f(c) = 3 \Leftrightarrow c^2 + 2c = 3 \Leftrightarrow c = 1$  ou  $c = -3$ . Desprezando  $-3$ , que está fora do intervalo  $(0, 2)$ , temos  $c = 1$ .

**Corolário.** Se  $I$  é um intervalo e  $f$  é uma função contínua em  $I$ , então  $f(I)$  é um intervalo.

**Demonstração.** Basta mostrar que se  $z$  e  $s$  são pontos quaisquer de  $f(I)$ , com  $z < s$ , então o intervalo  $[z, s]$  está contido em  $f(I)$ . Sejam, pois  $z, s \in f(I)$ , com  $z < s$ . Existem  $a, b \in I$  tais que  $f(a) = z$  e  $f(b) = s$ .

Seja  $p$  qualquer ponto entre  $z$  e  $s$ , isto é,  $f(a) < p < f(b)$ . Pelo TVI, existe  $c$  entre  $a$  e  $b$  tal que  $f(c) = p$ , ou seja,  $p \in f(I)$ .

Logo, todo elemento entre  $z$  e  $s$  pertence a  $f(I)$ , o que leva a concluir que  $[z, s] \subset f(I)$ .

Assim,  $f(I)$  é um intervalo. ■

**Consequência do Teorema 25.** Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e se  $f(a)$  e  $f(b)$  tiverem sinais algébricos contrários, então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

## Exercícios resolvidos

- 4) Verifique que o polinômio  $4x^4 - 3x^3 + 5x - 5$  tem pelo menos uma raiz real no intervalo  $(0,1)$ .

**Resolução.** De fato,  $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5x - 5$  é contínua em  $[0,1]$ .

Ainda,  $f(0) = -5$  e  $f(1) = 1$ . Pelo TVI, existe  $c \in (0,1)$  tal que  $f(c) = 0$ .

- 5) Verifique que a equação  $x - \cos^2 x = 0$  possui pelo menos uma raiz real no intervalo  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Resolução.** De fato,  $f(x) = x - \cos^2 x$  é uma função contínua, e

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{4} = \frac{4\pi - 18}{24} < 0.$$

Por outro lado,  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4} > 0$ . Pelo TVI,

concluimos que existe  $c \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$  tal que  $f(c) = 0$ .

## Exercícios propostos

- 8) Defina uma função contínua no intervalo  $(0,1)$  que assuma máximo e mínimo nesse intervalo.
- 9) Defina uma função  $f$  no intervalo  $[0,3]$  que tenha pelo menos um ponto de descontinuidade e que satisfaça: se  $z$  está entre  $f(0)$  e  $f(3)$ , então existe  $c \in (0,3)$  tal que  $f(c) = z$ .
- 10) Mostre que o polinômio  $2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$  tem pelo menos uma raiz real no intervalo  $(1,2)$ .
- 11) Mostre que a equação  $\sqrt{x^2 + 3} = 1 + x + x^2$  tem pelo menos uma raiz real em  $(0,1)$ .
- 12) Seja  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$  a função maior inteiro, definida em  $\mathbb{R}$  assim: Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existe um único inteiro  $n$  tal que  $n \leq x < n+1$ . Definimos  $\llbracket x \rrbracket = n$ . Por exemplo,  $\llbracket 3 \rrbracket = 3$ ,  $\llbracket [6,17] \rrbracket = 6$ ,  $\llbracket [0,8] \rrbracket = 0$ ,  $\llbracket [-2,5] \rrbracket = -3$ . Qual é o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$ ? Faça um gráfico de  $f$ .

- 13) Determine os valores de  $c$  e  $k$  que tornam  $f$  uma função contínua.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+2c & \text{se } x < -2 \\ 3cx+k & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x-2k & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2kx-3cx^2+2 & \text{se } x < -1 \\ 2x+kx^3 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -kx-6cx^2+11 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Sugestão: Suponha por absurdo que  $f+g$  é contínua em  $a$  e use o Teorema 21.

- 14) **Prove:** Se  $f$  é contínua em  $a$  e  $g$  é descontínua em  $a$ , então  $f+g$  é descontínua em  $a$ .
- 15) Dê um exemplo de funções  $f$  e  $g$ , ambas descontínuas no ponto 1, mas tais que  $f+g$  seja contínua em 1.
- 16) Mostre que o polinômio  $5x^4 + 12x^3 - 87x^2 + 83x - 17$  tem pelo menos 2 raízes reais entre 0 e 1.

- 17) Seja  $f: (0, 4) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 10-2x & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Determine, se houver, os pontos em que  $f$  atinge o seu valor máximo. Quem é este valor máximo? Idem para o mínimo.

- 18) Sejam  $f, g$  funções satisfazendo:  $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Sabe-se que  $g$  é contínua e que  $g(0) = 0$ . Prove que  $f$  é contínua em 0.

## Respostas dos exercícios propostos

1)  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Não.

3) Descontínua em 0 e contínua em 1.

4)  $a = \frac{-7}{6}$

5) 0

6) a)  $\mathbb{R} - \{0, \pi\}$

b)  $\{0\}$

7) a)  $(-1, 5) - \{0, 1\}$

b)  $\{0; 1, 5\}$

13) a)  $c = \frac{1}{3}, k = \frac{2}{3}$

b) Nenhum valor de  $c$  e de  $k$  tornam  $f$  uma função contínua.

17)  $f$  atinge valor de máximo em  $x = 2$ . Valor máx = 6; não atinge valor mínimo.



# Capítulo 4

## Derivada





# Capítulo 4

## Derivada

*Os objetivos do capítulo são estudar o conceito de derivada de uma função; estudar a derivada das funções elementares; apresentar e estudar um dos teoremas mais importantes do Cálculo, o Teorema da Regra da Cadeia, que ensina a derivar uma função composta.*

### 4.1 Conceito de derivada

São três os conceitos fundamentais em Cálculo: limite, derivada e integral. Mas é a partir do estudo da derivada que efetivamente se “mergulha” no Cálculo Diferencial e Integral.

Lembramos que, ao escrever  $y = f(x)$ ,  $x$  é a variável independente e  $y$  é a variável dependente, ou seja, depende de  $x$ .

Ao utilizar funções de uma variável para descrever e resolver problemas oriundos das ciências naturais ou sociais, é de fundamental importância estudar o efeito provocado na imagem da função por uma ligeira perturbação da variável independente.

Por exemplo: o lucro de uma fábrica pode, grosso modo, ser considerado uma função da quantidade  $x$  de peças produzidas mensalmente. De que maneira o lucro é afetado por pequenas variações de  $x$ ?

Outro exemplo: o volume  $V$  de um balão esférico é uma função do raio  $R$ . (Qual é esta função?)

Se o raio sofre um acréscimo (ou decréscimo)  $\Delta R$ , então  $V$  sofre um acréscimo (ou decréscimo)  $\Delta V$ .

Como se relaciona  $\Delta V$  com  $\Delta R$ ? Mais precisamente, quanto vale a razão  $\frac{\Delta V}{\Delta R}$ ? E o que acontece com essa razão quando  $\Delta R$  tende

a zero? Essas ideias serão amadurecidas e tratadas com rigor durante o estudo deste capítulo.

Como motivação, trataremos inicialmente de dois conceitos: reta tangente a uma curva e velocidade instantânea. Somente depois definiremos a derivada.

### 4.1.1 Reta tangente a uma curva

Seja  $C$  uma circunferência e  $P \in C$ . Você lembra como se define a reta tangente a  $C$  no ponto  $P$ ?

É fácil! Podemos dizer que se trata da reta que passa por  $P$  e toca a circunferência apenas neste ponto. Mas também podemos afirmar que é a reta que passa por  $P$  e é perpendicular ao raio  $\overline{OP}$ , sendo  $O$  o centro da circunferência.

Eis um desafio: definir a reta tangente a uma curva  $C$  no ponto  $P \in C$ , sendo  $C$  o gráfico de alguma função contínua  $y = f(x)$ .

As ideias expostas para definir a tangente a uma circunferência não podem ser aproveitadas. Com efeito, se a curva não é parte de uma circunferência, não faz sentido falar em centro e raio. Por outro lado, a reta tangente a uma curva qualquer  $C$  pode sim intersectar a própria curva em outro ponto. Veja a figura:

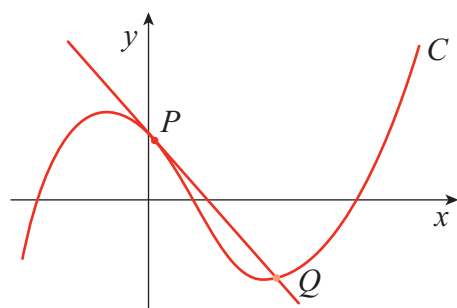


Figura 4.1

Consideremos a curva  $C$  como sendo o gráfico da função contínua  $y = f(x)$ , definida num intervalo  $I$ .

Seja  $x_0$  um ponto de  $I$  e  $P = (x_0, f(x_0))$  um ponto de  $C$ . A questão é: definir a reta tangente a  $C$  no ponto  $P$ .

Podemos definir uma reta conhecendo um ponto da reta e o seu coeficiente angular. O ponto é  $P$ . O problema todo é definir o coeficiente angular  $m$  da reta tangente.

Tomemos um ponto  $x_1 = x_0 + \Delta x$  tal que  $x_1 \in I$ , sendo  $\Delta x$  chamado de *incremento* de  $x$ , que pode ser positivo ou negativo. Suponhamos aqui  $\Delta x$  positivo. Observe a figura:

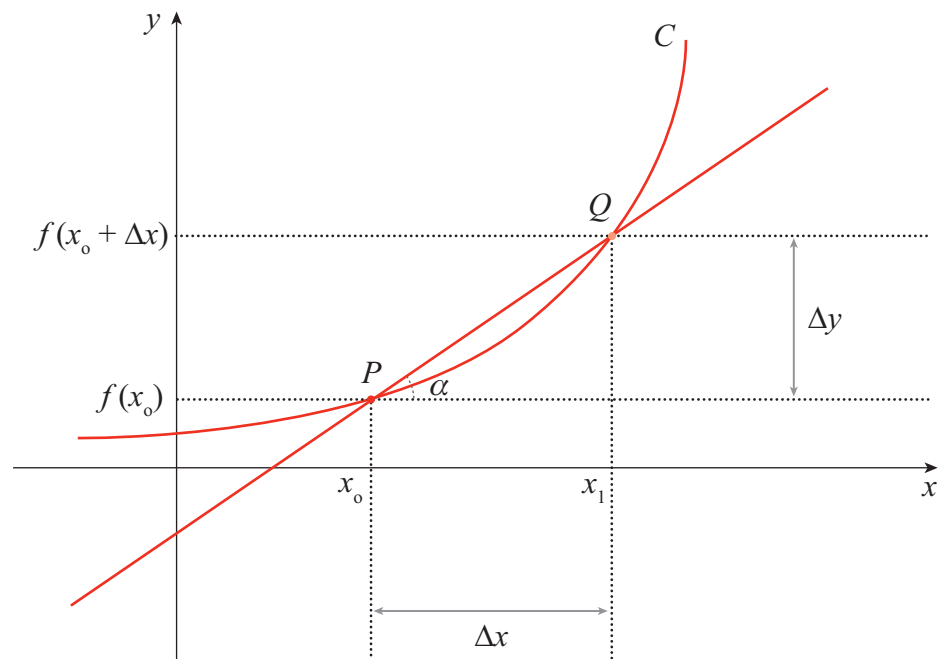


Figura 4.2

O incremento de  $y$  ou *incremento da função* é

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Como se percebe, este último representa a variação sofrida pela função devido à variação  $\Delta x$  sofrida por  $x$ . Seja

$$Q = (x_1, f(x_1)) = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)).$$

A reta *secante* à curva  $C$ , que passa por  $P$  e por  $Q$ , tem coeficiente angular

$$m_{PQ} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Imagine agora o ponto  $Q$  deslizando sobre a curva  $C$ , em direção ao ponto  $P$ . Observe a Figura 4.3. As retas secantes, à medida

que  $Q$  se aproxima de  $P$ , tendem a uma posição limite, que é a reta  $t$  da figura.

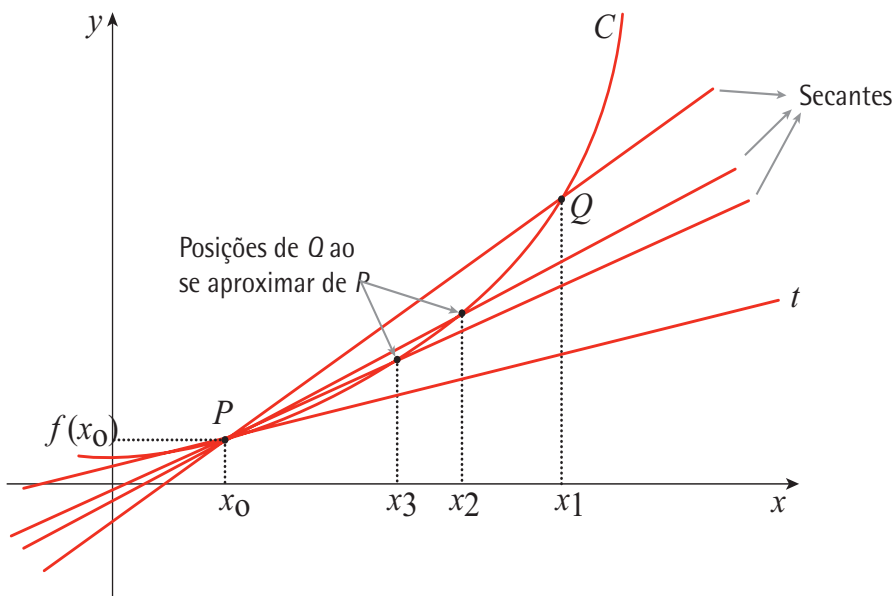


Figura 4.3

Para cada posição de  $Q$ , o coeficiente angular  $m_{PQ}$  da secante é dado pela razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Se essa razão tender a um número real  $m$ , à medida que  $\Delta x$  tender a zero, então definimos a reta tangente a  $C$  no ponto  $P$  como sendo a reta cujo coeficiente angular é dado pelo seguinte limite:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Definição 26.** A reta tangente à curva  $C$  no ponto  $P = (x_0, f(x_0))$  é a reta que passa por  $P$  e tem coeficiente angular igual ao

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se este limite existir e for finito. Se os limites laterais  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  forem infinitos (não importa o sinal), então a reta tangente a  $C$  em  $P$  será a reta vertical  $x = x_0$ . Ocorrendo qualquer outra

situação em relação ao  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , dizemos que o gráfico de  $f$  não admite reta tangente nesse ponto.

Na figura anterior, a reta tangente a  $C$  em  $P$  é a reta  $t$ .

## Exercícios resolvidos

- 1) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função  $y = x^2 - 4$  no ponto  $(2, 0)$ .

**Resolução.** Temos  $x_0 = 2$ ;  $P = (2, 0)$ . Examinemos o

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} :$$

$$\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4 - 0}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

(pois  $\Delta x \neq 0$ ). Logo,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$ .

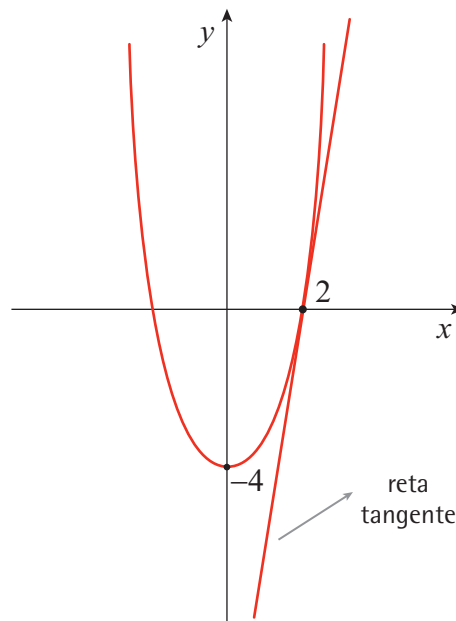


Figura 4.4

A reta tangente em questão é aquela que passa por  $(2, 0)$  e tem coeficiente angular 4.

Sua equação é  $y - 0 = 4(x - 2)$ , ou seja,  $y = 4x - 8$ .

- 2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $y = \sqrt[3]{x}$  no ponto  $(0, 0)$ .

**Resolução.** Temos:  $P = (0, 0)$ ;  $x_0 = 0$ ;  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x} \cdot \sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Note que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  não é um número real.

Vamos analisar os limites laterais:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty;$$

Conforme a Definição 26, a reta tangente procurada é  $x = 0$ , ou seja, o eixo  $Y$ .

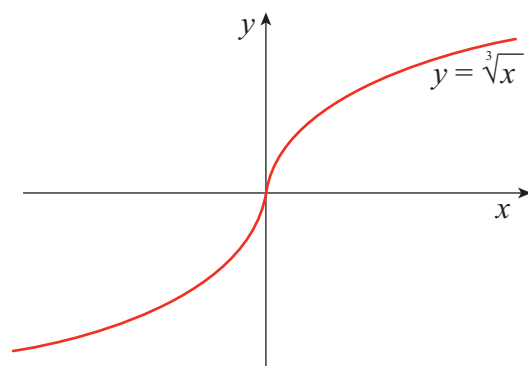


Figura 4.5

**Observação.** Neste exemplo, a reta tangente “corta” o gráfico exatamente no ponto de tangência.

- 3) Verifique se o gráfico da função  $y = |x|$  admite reta tangente no ponto  $(0, 0)$ .

**Resolução.** Seja  $f(x) = |x|$  e  $x_0 = 0$ . Então,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1 & \text{se } \Delta x < 0 \\ 1 & \text{se } \Delta x > 0 \end{cases}.$$



Logo,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ , enquanto  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ .

Conforme a Definição 26, o gráfico da função  $y = |x|$  não admite reta tangente no ponto  $(0, 0)$ .

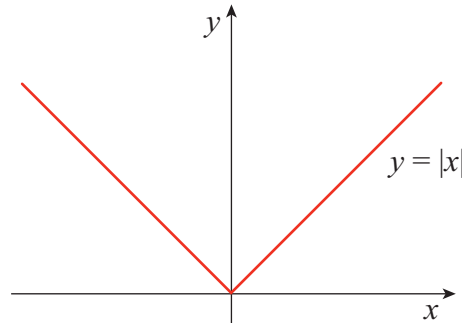


Figura 4.6

- 4) Verifique se o gráfico da função  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$  admite reta tangente no ponto  $(2, 2)$ .

**Resolução.** A função está definida através de duas sentenças, uma para os pontos que estão à esquerda e outra para os pontos que estão à direita de 2. Por isso, temos que calcular os limites laterais:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ e } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Para  $\Delta x < 0$ , temos  $2 + \Delta x < 2$  e então

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{(2 + \Delta x)^2}{2} - 2}{\Delta x} = \frac{4 + \Delta x}{2}.$$

$$\text{Logo, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{4 + \Delta x}{2} = 2.$$

Para  $\Delta x > 0$ , temos  $2 + \Delta x > 2$  e então

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{-\frac{(2 + \Delta x)^2}{2} + 4 - 2}{\Delta x} = \frac{-4 - \Delta x}{2}.$$

$$\text{Logo, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-4 - \Delta x}{2} = -2.$$

Concluimos que o gráfico dessa função não admite reta tangente no ponto  $(2, 2)$ .

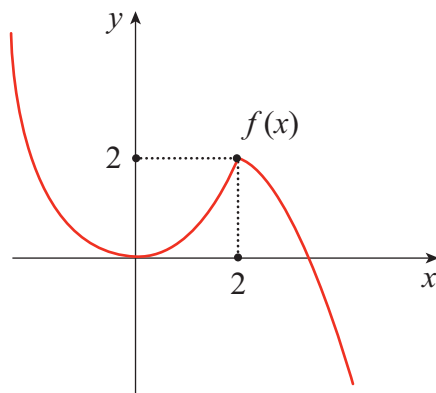


Figura 4.7

**Observação.** A figura mostra que no ponto  $(2, 2)$ , em que o gráfico não admite reta tangente, a curva perde a “suavidade”. Isso acontece de modo geral com o gráfico de uma função contínua nos pontos em que a reta tangente não está definida.

## Exercícios propostos

- 5) a) Verifique se o gráfico de  $f$  admite reta tangente no ponto  $P$ . Em caso afirmativo, escreva a sua equação.
- b) Faça um gráfico de  $f$ , destacando a reta tangente, caso exista.

1.1)  $f(x) = \sqrt{x} - 3$ ;  $P = (4, -1)$

1.2)  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ ;  $P = (0, 0)$

1.3)  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ;  $P = (0, 0)$

### 4.1.2 Velocidade instantânea

Consideraremos uma partícula em movimento retilíneo, partindo de algum ponto num certo instante. A distância  $s$ , percorrida pela partícula em  $t$  unidades de tempo, é uma função  $s = f(t)$ ;  $t \geq 0$ .

A *velocidade média* da partícula no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  é definida como  $v_m = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ .

Mas esta não revela a velocidade da partícula especificamente num instante  $t_0$  entre  $t_1$  e  $t_2$ .

Para termos acesso a essa informação, precisamos antes definir *velocidade instantânea* da partícula em  $t_0$ . A velocidade média no intervalo de tempo  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ , se  $\Delta t > 0$ , ou  $[t_0 + \Delta t, t_0]$ , se  $\Delta t < 0$ , é dada por  $v_m = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$ .

É bastante razoável supor que, tomando  $|\Delta t|$  cada vez menor, as velocidades médias se aproximarão cada vez mais da velocidade da partícula exatamente no instante  $t_0$ .

**Definição 27.** Seja  $f(t)$  a função que representa a distância percorrida por uma partícula em  $t$  unidades de tempo, deslocando-se em linha reta. A velocidade instantânea da partícula no instante  $t_0$  é definida como  $v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$  se este limite existir e for finito.

Compare este limite com aquele da Definição 26.

### Exercício resolvido

- 5) Um projétil é atirado verticalmente para cima, de uma altura de 1 metro acima do solo, com velocidade inicial de 50m/s. Se o sentido positivo é para cima e se o tempo é contado a partir do lançamento do projétil, então a função que descreve o movimento é  $s = f(t) = -5t^2 + 50t + 1$ . (Consideramos  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ). Determine:
- velocidade média do projétil nos 3 primeiros segundos.
  - velocidade exatamente após 2 segundos.

- c) velocidade exatamente após 3 segundos.  
 d) velocidade exatamente após 8 segundos.  
 e) altura máxima atingida pelo projétil.

**Resolução.**

- a) A velocidade média no intervalo  $[0,3]$  é dada por:

$$v_m = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{f(3) - 1}{3} = 35 \text{ m/s.}$$

Para resolver os demais itens, calcularemos a velocidade instantânea num instante genérico  $t_0$ :

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \text{ Mas}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} &= \frac{-5(t_0 + \Delta t)^2 + 50(t_0 + \Delta t) + 1 - (-5t_0^2 + 50t_0 + 1)}{\Delta t} = \frac{\Delta t(-10t_0 + 50 - 5\Delta t)}{\Delta t} = \\ &= -10t_0 + 50 - 5\Delta t. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-10t_0 + 50 - 5\Delta t) = 50 - 10t_0.$$

- b) Para  $t_0 = 2$ , temos  $v_i = 50 - 20 = 30$ .

**Resposta.** Após 2 segundos, o projétil sobe a uma velocidade de 30 m/s.

- c) Para  $t_0 = 3$ , temos  $v_i = 50 - 30 = 20$ .

**Resposta.** Após 3 segundos, o projétil sobe a uma velocidade de 20 m/s.

- d) Para  $t_0 = 8$ , temos  $v_i = 50 - 80 = -30$ .

**Resposta.** Após 8 segundos, o projétil cai a uma velocidade de 30 m/s.

- e) O projétil alcança altura máxima quando  $v_i = 0$ , ou seja, quando  $50 - 10t_0 = 0$ , isto é,  $t_0 = 5$ . O espaço percorrido após 5 segundos é  $f(5) = 126$ .

**Resposta.** O projétil alcança a altura de 126 metros.

## 4.2 Definição de derivada

Os limites que constam nas Definições 26 e 27 têm a mesma forma. Esse tipo de limite aparece em muitas outras situações, por isso merece uma denominação específica.

**Definição 28.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto  $I$  e seja  $x_0$  um ponto de  $I$ . Se o  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  existe e é finito, dizemos que  $f$  é derivável em  $x_0$ , e ao valor desse limite chamamos de *derivada de  $f$  em  $x_0$* .

Existem ainda notações como  $Df(x_0)$  e  $f'_x(x_0)$ .

**Notação.** Neste texto, a derivada de  $f$  em  $x_0$  será representada por  $f'(x_0)$  ou, em algumas situações, por  $\frac{dy}{dx}(x_0)$ , sendo  $y$  a variável dependente.

### Observações Importantes:

- 1) Com base na Definição 26, podemos concluir que se  $f$  é derivável em  $x_0$ , então o gráfico de  $f$  possui uma reta tangente não vertical no ponto  $(x_0, f(x_0))$  e  $f'(x_0)$  é o valor do coeficiente angular dessa reta tangente.
- 2) A velocidade instantânea no tempo  $t_0$  de um corpo cujo movimento é descrito pela função  $s = f(t)$  é  $v_i = f'(t_0)$ .
- 3) A fração  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  é chamada de razão incremental ou quociente de Newton de  $f$  em  $x_0$ . Por meio da mudança de variável  $x = x_0 + \Delta x$ , o limite:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  pode ser escrito como  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  que é uma forma útil para algumas demonstrações.

### Exercícios resolvidos

- 6) Calcule a derivada da função  $f(x) = 3\sqrt{x}$ :
  - a) no ponto 4;
  - b) num ponto  $x > 0$ .

**Resolução.**

$$a) f'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{4 + \Delta x} - 6}{\Delta x} \text{ que conduz à}$$

indeterminação  $\frac{0}{0}$ .

Mas

$$\frac{3\sqrt{4 + \Delta x} - 6}{\Delta x} = \frac{(3\sqrt{4 + \Delta x} - 6) \cdot (3\sqrt{4 + \Delta x} + 6)}{\Delta x \cdot (3\sqrt{4 + \Delta x} + 6)} = \frac{9\Delta x}{\Delta x(3\sqrt{4 + \Delta x} + 6)} = \frac{9}{3\sqrt{4 + \Delta x} + 6}.$$

$$\text{Logo, } f'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9}{3\sqrt{4 + \Delta x} + 6} = \frac{3}{4}.$$

$$b) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{x + \Delta x} - 3\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

$$\text{Procedendo analogamente, encontra-se } f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

- 7) Dê a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \frac{2}{x}$  no ponto de abscissa -1.

**Resolução.** O ponto de tangência é  $P(-1, -2)$ . O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $P$  é

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{-1 + \Delta x} + 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{-1 + \Delta x} = -2.$$

**Resposta.** A equação pedida é  $y = -2x - 4$ .

- 8) Um corpo move-se em linha reta de acordo com a equação  $s(t) = t^2 - 2t$ , sendo o tempo  $t$  medido em segundos e o espaço percorrido  $s$  em metros.

- a) Qual a velocidade média do corpo no intervalo  $8 \leq t \leq 12$ ?
- b) Qual a velocidade do corpo exatamente após 9 segundos de movimento?

**Resolução.**

$$a) v_m = \frac{s(12) - s(8)}{12 - 8} = 18 \text{ m/s.}$$

$$b) v_i = s'(9) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(9 + \Delta t) - s(9)}{\Delta t} = 16 \text{ m/s.}$$

## Exercício proposto

2) Seja  $f(x) = x^3 - 5x + 1$ . Calcule:

a)  $f'(1)$ ;

b)  $f'(x)$ , sendo  $x$  um ponto qualquer.

**Função derivada.** Seja  $f$  uma função. Ao associarmos a cada ponto  $x$  em que  $f$  é derivável o valor  $f'(x)$ , obteremos uma nova função  $f'$  (ou  $y'$ ), chamada de *função derivada de  $f$*  ou *função derivada primeira de  $f$* .

**Exemplo.** Se  $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sqrt{2x-4}$ , então  $f': (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$  é a função derivada de  $f$ . (Confirme este valor de  $f'(x)$ ).

### 4.2.1 Derivadas laterais

**Definição 29.** Seja  $f$  uma função definida no intervalo aberto  $I$  e seja  $a \in I$ .

a) Se  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$  existe e é finito, dizemos que  $f$  possui *derivada à esquerda* em  $a$ , representada por  $f'_-(a)$ .

b) Se  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$  existe e é finito, dizemos que  $f$  possui *derivada à direita* em  $a$ , representada por  $f'_+(a)$ .

Segue, das Definições 28 e 29 e do Teorema 16, que  $f$  é derivável em  $a$  se, e somente se, as derivadas laterais de  $f$  em  $a$  são iguais, ou seja,  $f'_-(a) = f'_+(a)$ .

## Exercícios resolvidos

9) Seja  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ -x+6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ . Verifique se  $f$  é derivável no ponto 2. Caso seja, calcule  $f'(2)$ .

**Resolução.** Observe inicialmente que  $f$  é contínua em 2. Para verificar se  $f$  é derivável no ponto 2, é necessário calcular as de-

derivadas laterais de  $f$  nesse ponto, pois a expressão que define  $f$  à esquerda não é a mesma que define  $f$  à direita de 2.

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4$$

**Esclarecimento.** Se  $\Delta x \rightarrow 0^-$ , então  $\Delta x$  é negativo e, portanto,  $2 + \Delta x < 2$ . Como  $f(x) = x^2$  se  $x < 2$ , segue que

$$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2.$$

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-(2+\Delta x) + 6 - 4}{\Delta x} = -1.$$

Como  $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ , concluímos que  $f$  não é derivável em 2.

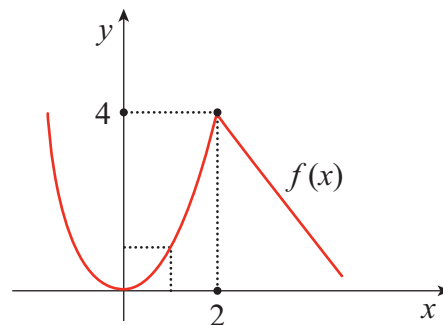


Figura 4.8

10) Seja  $g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2}{2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{-(x-2)^2}{2} + 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ . Verifique se  $g$  é derivável

no ponto 1. Caso seja, calcule  $g'(1)$ .

**Resolução.** Note que  $g$  é contínua em 1. Vamos verificar se é derivável em 1. Mais uma vez há necessidade de calcularmos as derivadas laterais:

$$g'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{g(1+\Delta x) - g(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{(1+\Delta x)^2}{2} - \frac{3}{2}}{\Delta x} = 1.$$

$$g'_+(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{g(1+\Delta x) - g(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-(1+\Delta x-2)^2}{2} + 2 - \frac{3}{2}}{\Delta x} = 1.$$



Seendo  $g'_-(1) = g'_+(1)$ , concluímos que  $g$  é derivável em 1 e que  $g'(1) = 1$ .

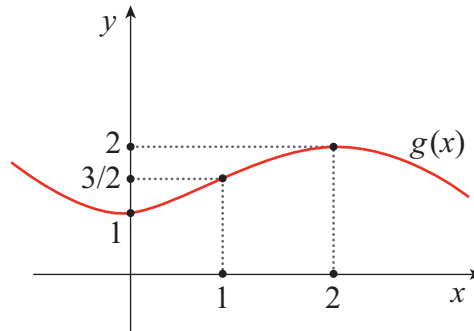


Figura 4.9

**Observação.** Compare os gráficos das funções  $f$  e  $g$ . No gráfico de  $g$ , observamos uma “emenda suave” no ponto  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , o que não acontece no gráfico de  $f$  em  $(2, 4)$ .

### Exercício proposto

3) Verifique se a função é derivável no ponto indicado.

a)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & \text{se } x \leq 3 \\ x^2 + 7x - 9 & \text{se } x > 3 \end{cases}$ ; ponto 3.

b)  $h(x) = \begin{cases} 4x - 9 & \text{se } x \leq 2 \\ -2x^2 + 7 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ ; ponto 2.

### 4.2.2 Derivabilidade e continuidade

Você se lembra de algum exemplo em que isto ocorre?

Uma **função** pode ser contínua num ponto, mas não derivável neste ponto.

E se ela for derivável num ponto, será necessariamente contínua? O próximo teorema responderá a essa questão.

**Teorema 26.** Se uma função é derivável num ponto, então ela é contínua nesse ponto.

**Demonstração.** Seja  $a$  um ponto do domínio de  $f$ . Lembremos que  $f$  é contínua em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  e que  $f$  é derivável

em  $a$  se o  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe e é finito.

Para  $x \neq a$ , podemos escrever

$$f(x) - f(a) = \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot (x - a). \quad (1)$$

Por hipótese,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ . Além disso,  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ .

Aplicando o limite na igualdade (1) :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \left[ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right] = f'(a) \cdot 0 = 0$$

ou seja,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) = 0$ . Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(a) = f(a)$ , mostramos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , o que prova que  $f$  é contínua em  $a$ .

■

## 4.3 Cálculo das derivadas – regras de derivação

Para evitar um trabalho longo e rotineiro, deduzimos várias regras que tornam mais simples e rápido o cálculo de derivadas.

Existem porém situações, como você verá mais à frente, em que não se pode empregar as regras de derivação. Nesses casos, a derivada deve ser calculada através da definição, como vinha sendo feito até aqui.

**Proposição 7.** Se  $f$  é a função constante  $f(x) = c$ , em que  $c$  é um número real, então  $f'(x) = 0$  para todo  $x$ .

**Demonstração.** Seja  $x \in \mathbb{R}$ .

Por definição,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Logo,  $f'(x) = 0$ .

■

**Exemplo.** Se  $f$  é a função constante  $f(x) = -5$ , então  $f'$  é a função nula.

**Observação.** Para demonstrarmos a proposição seguinte, utilizaremos a **fórmula do binômio de Newton**. Lembremos que o símbolo  $\binom{n}{k}$  representa a combinação de  $n$  elementos na taxa  $k$  e é calculado através da fórmula  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**Proposição 8.** Se  $n$  é um inteiro positivo e  $f(x) = x^n$ , então  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Demonstração.** Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Vamos escrever e simplificar o quociente:

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right]}{\Delta x} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \dots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Agora percebe-se que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = nx^{n-1}$ , ou seja,  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Portanto, se  $f(x) = x^n$ , então a função derivada de  $f$  é  $f'(x) = nx^{n-1}$ . ■

**Observação.** Será mostrado mais adiante que se  $f(x) = x^r$ , sendo  $r$  um número racional, então também  $f'(x) = rx^{r-1}$ . Vamos desde agora utilizar esse resultado.

**Exemplos.**

- Se  $f(x) = x$ , então  $f'(x) = 1x^0 = 1$ .
- Se  $f(x) = x^2$ , então  $f'(x) = 2x$ .
- Se  $f(x) = x^4$ , então  $f'(x) = 4x^3$ .
- Se  $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ , então  $f'(x) = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ .
- Se  $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ , então  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .
- Se  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = x^{1-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$ , então  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ .

**Exercício proposto**

4) Encontre a derivada das funções:

a)  $y = \frac{1}{x^2}$

b)  $y = \sqrt[3]{x}$

c)  $y = x^2\sqrt{x}$

**Proposição 9.** Se  $k$  é uma constante e  $f$  é derivável em  $x$ , então a função  $g(x) = kf(x)$  é derivável em  $x$  e  $g'(x) = k \cdot f'(x)$ .

**Demonstração.** Por hipótese,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Como

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{kf(x + \Delta x) - kf(x)}{\Delta x} = k \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

aplicando o limite e usando a hipótese, segue:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = kf'(x).$$

Logo,  $g$  é derivável e  $g'(x) = kf'(x)$ .

■

**Exemplo.** Se  $f(x) = \frac{2}{3}x^6$ , então  $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 6x^5 = 4x^5$ .

Esta regra pode ser escrita  
abreviadamente como  
 $(u+v)' = u' + v'$ .

**Proposição 10.** Se  $u$  e  $v$  são funções deriváveis em  $x$ , então a função  $g = u + v$  é derivável em  $x$  e  $g'(x) = u'(x) + v'(x)$ .

**Demonstração.** Por hipótese,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$  e

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x)$ . Observe que

$$\begin{aligned} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} &= \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} = \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x} = \\ &= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite e usando a hipótese, temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x),$$

ou seja,  $g'(x) = u'(x) + v'(x)$ . ■

### Observações.

- 2) Se  $u, v, w$  são funções deriváveis, a propriedade associativa permite escrever  $u + v + w = (u + v) + w$ . Aplicando duas vezes a Proposição 10, concluímos que a função  $u + v + w$  é derivável e  $(u + v + w)' = (u + v)' + w' = u' + v' + w'$ .

Dessa forma, a Proposição 10 pode ser estendida a uma soma de  $n$  funções: se  $g = f_1 + f_2 + \dots + f_n$  e  $f_i$  é derivável para  $i = 1, \dots, n$ , então  $g$  é derivável e  $g' = f_1' + \dots + f_n'$ .

- 3) Sejam  $u, v$  funções deriváveis. Então  $u - v = u + (-1)v$  e, aplicando as Proposições 9 (com  $k = -1$ ) e 10, concluímos que a função  $u - v$  é derivável e  $(u - v)' = u' - v'$ .

Com estas regras, já é possível derivar polinômios.

**Exemplo.** Se  $P(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ , então

$$P'(x) = 5 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0,$$

ou seja,  $P'(x) = 20x^3 - 24x^2 + 4x - 7$ .

**Proposição 11. Regra do Produto:** Se  $u$  e  $v$  são funções deriváveis em  $x$  e se  $g = uv$ , então  $g$  é derivável em  $x$  e

$$g'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x).$$

Abreviadamente, escreve-se:  
( $uv$ )' =  $uv'$  +  $u'v$ .

**Demonstração.** Por hipótese,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$  e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x).$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} &= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x) + u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \end{aligned}$$

(foi adicionada e subtraída a expressão  $u(x + \Delta x) \cdot v(x)$ )

$$\begin{aligned} &= \frac{u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} = \\ &= u(x + \Delta x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite, temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Por hipótese,  $u$  é derivável em  $x$ . Pelo Teorema 26,  $u$  é contínua em  $x$ . Assim,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) = u(x)$ . Utilizando a hipótese que  $u$  e  $v$  são deriváveis, segue:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x),$$

ou seja,  $g$  é derivável e  $g'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$ .

■

**Exemplo.** Se  $f(x) = (x^4 + 2x)(x^3 - 3x^2)$ , então

$$f'(x) = (x^4 + 2x)(3x^2 - 6x) + (4x^3 + 2)(x^3 - 3x^2) = 7x^6 - 18x^5 + 8x^3 - 18x^2.$$

## Exercício proposto

- 5) Seja  $f(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$ . Calcule  $f'(x)$  e depois  $f'(1)$ .

**Proposição 12.** *Regra do Quociente:* Se  $u$  e  $v$  são funções deriváveis em  $x$  e se  $v(x) \neq 0$ , então a função  $g = \frac{u}{v}$  é derivável em  $x$  e

Abreviadamente, escreve-se:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

$$g'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

**Demonstração.** Por hipótese,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x) \text{ e } v(x) \neq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} &= \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x) \cdot \Delta x} = \\ &= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x) \cdot \Delta x} = \end{aligned}$$

(Foi somada e subtraída a expressão  $u(x) \cdot v(x)$ )

$$\begin{aligned} &= v(x) \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x) \cdot \Delta x} - u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x) \cdot \Delta x} = \\ &= \frac{1}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \left[ v(x) \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]. \end{aligned}$$

A função  $v$  é derivável em  $x$ , por hipótese. Pelo Teorema 26,  $v$  é contínua em  $x$ . Logo,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$ . Usando esse fato e as hipóteses, temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \right] \cdot \left[ v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$\frac{1}{[v(x)]^2} \cdot [v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)] = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Portanto,  $g'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ .

■

**Exemplo.** Seja  $f(x) = \frac{x^5 - 6}{x^4 + 1}$ . Então

$$f'(x) = \frac{(x^4 + 1)5x^4 - (x^5 - 6)4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{x^8 + 5x^4 + 24x^3}{(x^4 + 1)^2}.$$

## Exercícios propostos

- 6) Calcule  $g'(x)$ , sendo  $g(x) = \frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}$ .
- 7) Calcule  $f'(t)$ , sendo  $f(t) = \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}$ .
- 8) Seja  $h(R) = \frac{R^2 - a^2}{R^2 + a^2}$ , sendo  $a$  uma constante. Calcule  $h'\left(\frac{a}{2}\right)$ .

**Observação.** Na Proposição 8, demonstramos que se  $n$  é inteiro positivo e se  $f(x) = x^n$ , então  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Com auxílio da regra do quociente, podemos provar essa fórmula para o caso em que o expoente é um inteiro negativo, ou seja, se  $f(x) = x^{-n}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f'(x) = -nx^{-n-1}$ . Com efeito, se  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ , então, conforme as Proposições 8 e 12,

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}.$$

Ainda falta provar essa regra para o caso em que o expoente é racional, o que será feito em breve.



### 4.3.1 Derivada da função composta – a regra da cadeia

Para derivar uma função como  $y = (3x^2 + 2)^6$ , será que é preciso desenvolver o binômio?

Com auxílio da regra da cadeia, que será estabelecida no próximo teorema, não é necessário perder tanto tempo. Note que  $y = g \circ f$ , sendo  $g(u) = u^6$  e  $f(x) = 3x^2 + 2$ .

O fato de fornecer uma fórmula que permite derivar qualquer função composta, com auxílio de outras regras de derivação, faz com que este seja um dos teoremas mais importantes do Cálculo. Para demonstrá-lo, precisamos de um lema:

**Lema.** Seja  $(x_n)$  uma sequência e  $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$  subconjuntos de  $\mathbb{N}$  tais que  $\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 = \emptyset$  e  $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$ . Se  $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}_1}$  e  $(x_{t_k})_{t_k \in \mathbb{N}_2}$  são subsequências de  $(x_n)$  que convergem ambas para  $L$ , então  $(x_n)$  converge para  $L$ .

**Demonstração.** Seja  $\varepsilon > 0$ . Existe  $n_i \in \mathbb{N}_1$  tal que  $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$  para todo  $n_k \geq n_i$ . Existe também  $t_i \in \mathbb{N}_2$  tal que  $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$  para todo  $t_k \geq t_i$ .

Seja  $n_0 = \max\{n_i, t_i\}$ . Se  $n \geq n_0$ , então ou  $n \in \mathbb{N}_1$  e  $n \geq n_i$  ou  $n \in \mathbb{N}_2$  e  $n \geq t_i$ . Em ambos os casos,  $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$ .

Portanto, para todo  $n \geq n_0$ , teremos  $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$ , o que prova que  $\lim x_n = L$ . ■

**Teorema 27. Regra da Cadeia:** Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos,  $a \in I$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que  $f(I) \subset J$ . Suponhamos que  $f$  é derivável em  $a$  e que  $g$  é derivável em  $f(a)$ . Então a composta  $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $a$  e

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \cdot f'(a).$$

**Demonstração.** Devemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = g'[f(a)] \cdot f'(a).$$

Vamos fazê-lo usando sequências.

Seja  $(x_n)$  uma sequência contida em  $I - \{a\}$  e tal que  $\lim x_n = a$ .  
Precisamos provar que

$$\lim \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(a)}{x_n - a} = g'[f(a)] \cdot f'(a)$$

Por hipótese,  $f$  é derivável em  $a$ . Logo, é contínua em  $a$  (Teorema 26), isto é,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , o que, por sua vez, implica  $\lim f(x_n) = f(a)$ .

Representando  $f(x_n)$  por  $y_n$  e  $f(a)$  por  $b$ , essa hipótese pode ser escrita como

$$\lim y_n = b \quad (1)$$

Mesmo sendo  $x_n \neq a$ , podemos ter  $f(x_n) = f(a)$ , isto é,  $y_n = b$  para alguns valores de  $n$ . Devemos distinguir os índices  $n$  para os quais  $y_n = b$  daqueles para os quais  $y_n \neq b$ .

Sejam:  $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} / y_n \neq b\}$  e  $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} / y_n = b\}$ . Então,  $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$  e  $\mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2 = \emptyset$ . Se  $n \in \mathbb{N}_1$ , é possível escrever

$$\frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(a)}{x_n - a} = \frac{g[f(x_n)] - g[f(a)]}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{y_n - b}{x_n - a},$$

o que não é correto se  $n \in \mathbb{N}_2$ .

Observe que pelo menos um dos conjuntos  $\mathbb{N}_1$  ou  $\mathbb{N}_2$  é infinito.

Examinemos as três possibilidades:

1)  $\mathbb{N}_1$  é infinito e  $\mathbb{N}_2$  é finito.

Seja  $\mathbb{N}_1 = \{n_1, n_2, \dots\} = \{n_k; k \in \mathbb{N}\}$ . Por ser  $\mathbb{N}_2$  finito,

$$\lim \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(a)}{x_n - a} = \lim \frac{g \circ f(x_{n_k}) - g \circ f(a)}{x_{n_k} - a}, n_k \in \mathbb{N}_1 \quad (2)$$

Mas

$$\lim \frac{g \circ f(x_{n_k}) - g \circ f(a)}{x_{n_k} - a} = \lim \frac{g(y_{n_k}) - g(b)}{y_{n_k} - b} \cdot \lim \frac{y_{n_k} - b}{x_{n_k} - a} \quad (3)$$

Da hipótese de  $g$  ser derivável em  $b$  e de (1) segue que

$$\lim \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = g'(b).$$

Mas então a subsequência  $\left( \frac{g(y_{n_k}) - g(b)}{y_{n_k} - b} \right)$  também tem limite  $g'(b)$ . (4)

Da hipótese de ser  $f$  derivável em  $a$  e da suposição inicial de que  $\lim x_n = a$ , segue que

$$\lim \frac{y_{n_k} - b}{x_{n_k} - a} = \lim \frac{f(x_{n_k}) - f(a)}{x_{n_k} - a} = f'(a) \quad (5)$$

De (2), (3), (4) e (5), segue que

$$\lim \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(a)}{x_n - a} = g'[f(a)] \cdot f'(a).$$

2)  $\mathbb{N}_1$  e  $\mathbb{N}_2$  são ambos infinitos.

Seja  $\mathbb{N}_2 = \{t_1, t_2, \dots\} = \{t_k; k \in \mathbb{N}\}$ . Lembre que  $y_{t_k} = b$ , ou seja,  $f(x_{t_k}) = f(a)$ ,  $\forall t_k \in \mathbb{N}_2$ . Então,

$$\lim \frac{f(x_{t_k}) - f(a)}{x_{t_k} - a} = \lim \frac{f(a) - f(a)}{x_{t_k} - a} = 0.$$

Sendo  $f$  derivável em  $a$ , a sequência  $\left( \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)$  converge para  $f'(a)$ . Segue que toda subsequência converge para

$f'(a)$ , em particular  $\left( \frac{f(x_{t_k}) - f(a)}{x_{t_k} - a} \right)$ .

Logo, se  $\mathbb{N}_2$  é infinito, então  $f'(a) = 0$ .

Por outro lado,

$$\lim \frac{g \circ f(x_{t_k}) - g \circ f(a)}{x_{t_k} - a} = \lim \frac{g \circ f(a) - g \circ f(a)}{x_{t_k} - a} = 0.$$

Como  $g'(b) \cdot f'(a) = g'(b) \cdot 0 = 0$ , podemos afirmar que

$$\lim \frac{g \circ f(x_{t_k}) - g \circ f(a)}{x_{t_k} - a} = g'(b) \cdot f'(a).$$

Para  $\mathbb{N}_1$ , na análise da primeira possibilidade, vimos que

$$\lim \frac{g \circ f(x_{n_k}) - g \circ f(a)}{x_{n_k} - a} = g'(b) \cdot f'(a).$$

Aplicando o lema à se-quência  $\left( \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(a)}{x_n - a} \right)$ , segue que, também neste caso,

$$\lim \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(a)}{x_n - a} = g'[f(a)] \cdot f'(a).$$

3)  $\mathbb{N}_2$  é infinito e  $\mathbb{N}_1$  é finito.

$$\text{Então, } \lim \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(a)}{x_n - a} = \lim \frac{g \circ f(x_{i_k}) - g \circ f(a)}{x_{i_k} - a} = 0.$$

Logo, sendo  $f'(a) = 0$ , tem-se também

$$\lim \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(a)}{x_n - a} = g'[f(a)] \cdot f'(a).$$

Portanto, concluímos que  $(g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \cdot f'(a)$ . ■

**Observação.** É comum escrever a regra da cadeia de maneira abreviada assim: Se  $f = g \circ u$ , então  $f' = g'(u) \cdot u'$ . Para resolver certos problemas, é interessante escrevê-la assim: Se  $y = (g \circ u)(x)$ , então  $\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  ou assim:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ , desde que as hipóteses do teorema estejam satisfeitas.

## Exercícios resolvidos

11) Se  $f(x) = (3x+2)^4$ , calcule  $f'(x)$ .

**Resolução.** Podemos escrever  $f(x) = (g \circ u)(x)$ , sendo

$$u(x) = 3x+2 \text{ e } g(u) = u^4.$$

Pelo Teorema 27,  $f'(x) = g'[u(x)] \cdot u'(x)$ .

Como  $g'(u) = 4u^3$ , temos que  $g'[u(x)] = 4[u(x)]^3 = 4(3x+2)^3$  e  $u'(x) = 3$ . Logo,  $f'(x) = 4(3x+2)^3 \cdot 3 = 12(3x+2)^3$ .

12) Sendo  $y = \frac{1}{(x^6 - 1)^4}$ , calcule  $y'$ .

**Resolução.** Escrevendo  $y = (x^6 - 1)^{-4} = [u(x)]^{-4}$  e aplicando a regra da cadeia, temos  $y' = -4[u(x)]^{-5} \cdot u'(x) = -4(x^6 - 1)^{-5} \cdot 6x^5$ , ou seja,  $y' = \frac{-24x^5}{(x^6 - 1)^5}$ .

13) Seja  $g(t) = \sqrt[3]{t^2 + t + 1}$ . Calcule  $g'(-1)$ .

**Resolução.** Apliquemos a regra da cadeia, agora de maneira mais direta, à função  $g(t) = (t^2 + t + 1)^{\frac{1}{3}}$  para calcular  $g'(t)$ :

$$g'(t) = \frac{1}{3}(t^2 + t + 1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2t + 1) = \frac{2t + 1}{3\sqrt[3]{(t^2 + t + 1)^2}}$$

Logo,  $g'(-1) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{-1}{3}$ .

14) Seja  $f(x) = (x^3 - 2)^2 \cdot (x^2 + 1)^3$ . Calcule  $f'(x)$ .

**Resolução.** A função  $f$  é um produto de duas funções, o que nos obriga a usar a regra do produto:  $(uv)' = uv' + u'v$ , juntamente com a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 2)^2 3(x^2 + 1)^2 2x + 2(x^3 - 2) 3x^2 (x^2 + 1)^3 \\ &= 6x(x^3 - 2)^2 (x^2 + 1)^2 + 6x^2(x^3 - 2)(x^2 + 1)^3. \end{aligned}$$

## Exercícios propostos

Calcule a derivada de cada uma das funções:

9)  $f(x) = (8x^2 - 3)^5$ ;

10)  $g(t) = \sqrt[3]{t^4 - 2t}$ ;

11)  $f(r) = (r^2 + 1)^3 (2r + 5)^2$ ;

12)  $f(y) = \frac{(y^2 - 5)^3}{(y^2 + 4)^2}$ ;

### 4.3.2 Derivada da função inversa

**Lembre-se** de que uma função  $f : A \rightarrow B$  é inversível se, e somente se, for bijetora. Nesse caso, existe uma função  $g : B \rightarrow A$  tal que  $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ , sendo  $g$  a inversa de  $f$ .

Reveja a seção 4.9 do livro de Introdução ao Cálculo para ter uma revisão mais aprofundada deste assunto.

Por exemplo, se  $f(x) = 7x + 1$ , que é bijetora, escrevemos  $y = 7x + 1$   
 $x = \frac{y-1}{7} = g(y)$ . Portanto,  $g(y) = \frac{y-1}{7}$  ou, se preferirmos a variável  $x$ ,  $g(x) = \frac{x-1}{7}$  é a inversa de  $f$ .

O próximo teorema permite obter a derivada da inversa de uma função inversível.

**Teorema 28.** Seja  $I$  um intervalo aberto e  $f : I \rightarrow f(I)$  uma função inversível cuja inversa  $g : f(I) \rightarrow I$  é contínua. Se  $f$  é derivável em  $I$  e  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x$  em  $I$ , então  $g$  é derivável em  $f(I)$  e  $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]}$  para todo  $y$  em  $f(I)$ .

$$f(I) \text{ e } g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]} \text{ para todo } y \text{ em } f(I).$$

**Demonstração.** Seja  $b \in f(I)$ . Existe  $a \in I$  tal que  $b = f(a)$ . Provaremos que  $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ , isto é, que  $\lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$ .

Esta última expressão faz sentido porque  $f'(a) \neq 0$ , por hipótese. Seja  $(y_n)$  uma sequência em  $f(I) - \{b\}$  tal que  $\lim y_n = b$ . Basta provar que  $\lim \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \frac{1}{f'(a)}$ .

Sendo  $g$  injetora,  $g(y_n) \neq g(b)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isso nos permite escrever:

$$\frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \left[ \frac{y_n - b}{g(y_n) - g(b)} \right]^{-1} = \left[ \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right]^{-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Por hipótese,  $g$  é contínua em  $b$ . Como  $\lim y_n = b$ , segue que  $\lim g(y_n) = g(b)$ , isto é,  $\lim x_n = a$ . Ainda por hipótese,  $f'(a)$  existe e é diferente de zero. Logo,

$$\lim \left[ \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right]^{-1} = \left[ \lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right]^{-1} = [f'(a)]^{-1}. \quad (2)$$

De (1) e (2) segue que  $\lim \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} = \frac{1}{f'(a)}$ .

Concluimos que  $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \forall y \in f(I)$ . ■

**Observação.** Representamos  $f^{-1}$  por  $g$  para simplificar a notação. A fórmula dada pelo teorema poderia ser escrita como:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}.$$

*Em palavras:* A derivada de  $f^{-1}$  no ponto  $y$  é o inverso da derivada de  $f$  no ponto  $f^{-1}(y)$ .

## Exercícios resolvidos

15) Seja  $f(x) = x^3 - 8$  e  $g$  a inversa de  $f$ . Determine  $g'(x)$ .

**Resolução.** Conforme o Teorema 28,  $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2}$ . Agora é preciso escrever  $x$  em função de  $y$ , pois lembre-se de que  $x = g(y)$ . Mas  $y = f(x) = x^3 - 8 \Leftrightarrow x^3 = y + 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y + 8}$ .

Logo,  $g'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y+8)^2}}$ .

**Resposta.**  $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+8)^2}}$ .

16) Seja  $f(x) = 3(x+2)^5 + 6$  e  $g$  a inversa de  $f$ . Determine  $g'(x)$ .

**Resolução.** Temos  $f'(x) = 15(x+2)^4$ . Pelo Teorema 28,

$$g'(y) = \frac{1}{15(x+2)^4}.$$

Vamos escrever essa expressão em função de  $y$ :

$$y = 3(x+2)^5 + 6 \Leftrightarrow (x+2)^5 = \frac{y-6}{3} \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[5]{\frac{y-6}{3}}.$$

Logo,  $g'(y) = \frac{1}{15\sqrt[5]{\left(\frac{y-6}{3}\right)^4}} = \frac{1}{15}\sqrt[5]{\left(\frac{3}{y-6}\right)^4}$ .

**Resposta.**  $g'(x) = \frac{1}{15}\sqrt[5]{\left(\frac{3}{x-6}\right)^4}$ .

- 17) Seja  $f: [-3, 0] \rightarrow [2, 11]$ ;  $f(t) = t^2 + 2$ . Determine  $g'(t)$ , sendo  $g = f^{-1}$ .

**Resolução.** Faça um gráfico de  $f$  e verifique que  $f$  é de fato inversível.

Pelo Teorema 28,  $g'(y) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{2t}$ . Mas

$$y = t^2 + 2 \Leftrightarrow t^2 = y - 2 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{y-2}.$$

Precisamos decidir se  $t = +\sqrt{y-2}$  ou se  $t = -\sqrt{y-2}$ . Como  $t \in [-3, 0]$ ,  $t$  é negativo (lembre também que a imagem de  $f^{-1}$  é o domínio de  $f$ ). Logo,  $t = -\sqrt{y-2}$  e  $g'(y) = \frac{-1}{2\sqrt{y-2}}$ .

**Resposta.**  $g'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t-2}}$ ;  $t \in (2, 11]$ .

**Observação.** Seja  $f(x) = x^5 + x + 1$ . Prova-se, usando resultados que serão estudados posteriormente, que  $f$  é inversível. Mas não é possível explicitar  $x$  em função de  $y$ , pois teríamos que resolver a equação do quinto grau:  $x^5 + x + 1 = y$ . Apesar dessa dificuldade, o Teorema 28 pode ser aplicado a  $f$  e a  $g = f^{-1}$ :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5x^4 + 1}.$$

Sabendo que  $f(2) = 35$ , calcule  $g'(35)$ . Depois calcule  $g'(1)$ .

Para  $x = 2$ , temos  $y = 35$ . Logo,  $g'(35) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5 \cdot 2^4 + 1} = \frac{1}{81}$ .

Para calcular  $g'(1)$ , é preciso saber para que valor de  $x$  se tem  $f(x) = 1$ . Nesse caso, é fácil perceber que  $f(0) = 1$ . Portanto,

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

## Exercícios propostos

- 13) Seja  $f(x) = 4 - 9x$  e  $g = f^{-1}$ . Calcule  $g'(x)$ .
- 14) Seja  $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ . Determine  $(f^{-1})'(x)$ .
- 15) Seja  $f(t) = 3t^7 + 2t - 6$  e  $g = f^{-1}$ . Calcule  $g'(-6)$  e  $g'(-1)$ .



## Exercício resolvido

18) Já foi provado que se  $n \in \mathbb{Z}$  e se  $f(x) = x^n$ , então  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Com auxílio da regra da cadeia e do Teorema da Função Inversa, prove que essa fórmula vale para qualquer expoente racional, ou seja, se  $p$  e  $q$  são inteiros e  $q \neq 0$  e  $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ , então  $f'(x) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$ .

**Resolução.** Repare que  $f = g \circ u$ , sendo  $u(x) = x^{\frac{1}{q}}$  e  $g(x) = x^p$ . Pela regra da cadeia,

$$f'(x) = g'[u(x)] \cdot u'(x). \quad (1)$$

Bem,  $g'(x) = px^{p-1}$  e então

$$g'[u(x)] = p \left( x^{\frac{1}{q}} \right)^{p-1} = px^{\frac{p-1}{q}}. \quad (2)$$

Como vamos calcular  $u'(x)$  se  $\frac{1}{q}$  não é inteiro?

Note que  $u(x) = x^{\frac{1}{q}}$  é a inversa da função  $v(x) = x^q$ . Vamos usar o Teorema da Função Inversa. Para isso, escrevemos

$$y = v(x) = x^q \text{ e } x = u(y) = y^{\frac{1}{q}}.$$

Então, conforme o Teorema 28,  $u'(y) = \frac{1}{v'(x)} = \frac{1}{qx^{q-1}}$ .

Para expressar  $x$  em função de  $y$ , utilizaremos a equivalência:

$$y = x^q \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{q}}.$$

$$\text{Logo, } u'(y) = \frac{1}{q \left( y^{\frac{1}{q}} \right)^{q-1}} = \frac{1}{q y^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{y^{\frac{1}{q}-1}}{q}.$$

$$\text{Então, } u'(x) = \frac{x^{\frac{1}{q}-1}}{q}. \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), temos:

$$f'(x) = px^{\frac{p-1}{q}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{q}-1}}{q} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} - 1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

### 4.3.3 Derivada da função exponencial

Seja  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , definida por

$$f(x) = a^x.$$

Seja  $x \in \mathbb{R}$  e consideremos o quociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \left( \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right).$$

Lembrando que  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , desde que este limite seja finito, temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \left( \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a,$$

conforme o terceiro limite fundamental.

**Conclusão.** Se  $f(x) = a^x$ , então  $f'(x) = a^x \ln a$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Se  $u$  é uma função de  $x$  e se  $g(x) = a^u$ , então, pela regra da cadeia,  $g'(x) = a^u \ln a \cdot u'$ .

**Caso Particular:** Se  $f(x) = e^x$ , então  $f'(x) = e^x \ln e$ . Como  $\ln e = 1$ , segue que  $f'(x) = e^x$ .

Portanto, a função  $y = e^x$  goza da importante propriedade de ser igual à sua derivada. Prova-se que as únicas funções que gozam dessa propriedade são as do tipo  $y = ke^x$ , com  $k \in \mathbb{R}$ .

Se  $y = e^u$ , sendo  $u$  uma função de  $x$ , então  $y' = e^u u'$ .

### Exercícios resolvidos

19) Seja  $f(x) = 2^{x^2}$ . Calcule  $f'(x)$ .

**Resolução.** Aplicando a fórmula para a derivada de  $y = a^u$ , com  $a = 2$  e  $u = x^2$ , temos:  $f'(x) = 2^{x^2} \ln 2 \cdot 2x$ , ou melhor,

$$f'(x) = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2.$$

20) Seja  $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ . Calcule  $g'(x)$ .

**Resolução.** Aplicando a fórmula para a derivada de  $y = e^u$ , com

$$u = \frac{1}{x}, \text{ temos: } g'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{(-1)}{x^2} \text{ ou } g'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

21) Seja  $h(x) = x\sqrt{e^x}$ . Calcule  $h'(-1)$ .

**Resolução.** Aplicando a regra do produto à função

$$h(x) = x(e^x)^{\frac{1}{2}} = xe^{\frac{x}{2}}, \text{ temos:}$$

$$h'(x) = 1 \cdot e^{\frac{x}{2}} + xe^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{x}{2}} \left( 1 + \frac{x}{2} \right).$$

$$\text{Logo, } h'(-1) = e^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

## Exercícios propostos

16) Calcule  $f'(2)$ , sendo  $f(x) = e^{x^2-2x} + \frac{1}{e^{5x}}$ .

17) Calcule  $g'(x)$ , sendo  $g(x) = \frac{5^{1-x^3}}{3x}$ .

### 4.3.4 Derivada da função logarítmica

Seja  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  e  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(y) = \log_a y$ . Lembre que  $g$  é a inversa da função  $f(x) = a^x$ , ou seja,

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Será que podemos deduzir a derivada de  $g$  através do Teorema 28?

Sim, pois  $g$  é contínua em  $(0, +\infty)$  e  $f'(x) = a^x \ln a$ , que é diferente de zero para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$ , pois  $a^x$  é sempre positivo e  $\ln a \neq 0$  por ser  $a \neq 1$ .

O Teorema 28 garante então que  $g$  é derivável em  $(0, +\infty)$  e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Se  $g(x) = \log_a x$ , então  $g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ ,  $\forall x > 0$ .

Se  $y = \log_a u$ , sendo  $u$  uma função de  $x$ , então

$$y' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

**Caso Particular.** Se  $f(x) = \ln x$ , então  $f'(x) = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$ . Se  $u$  é uma função de  $x$  e  $y = \ln u$ , então  $y' = \frac{u'}{u}$ .

## Exercícios resolvidos

- 22) Calcule a derivada de  $y = \log_3(x^4 - 3)$ .

**Resolução.** Temos que aplicar a fórmula da derivada de  $y = \log_a u$  com  $u = x^4 - 3$  e  $a = 3$ :

$$y' = \frac{4x^3}{(x^4 - 3) \ln 3} = \frac{4}{\ln 3} \left( \frac{x^3}{x^4 - 3} \right).$$

- 23) Sendo  $f(x) = \ln(x^3 + e^{4x})$ , calcule  $f'(x)$ .

**Resolução.** Temos  $f(x) = \ln u$ , sendo  $u = x^3 + e^{4x}$ . Então,

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{3x^2 + 4e^{4x}}{x^3 + e^{4x}}.$$

- 24) Sendo  $g(x) = \ln(x)^3$ , calcule  $g'(e)$ .

**Resolução.** Aqui devemos usar a regra da cadeia escrevendo  $g(x) = u^3$ , com  $u = \ln x$ . Então,

$$g'(x) = 3u^2 u' = 3 \ln(x)^2 \frac{1}{x} = \frac{3 \ln(x)^2}{x}.$$

$$\text{Logo, } g'(e) = \frac{3 \ln(e)^2}{e} = \frac{3}{e}.$$

## Exercícios propostos

- 18) Calcule a derivada de  $y = \log_2(x^6 - x)$ .
- 19) Calcule a derivada de  $y = \ln(2x^2 - 5)$ .
- 20) Seja  $u(x) = \frac{x^2}{\ln(3x - 4)}$ . Calcule  $u'(2)$ .
- 21) Calcule  $v'(x)$ , sendo  $v(x) = (1 + e^{5x} - \ln 3x)^2$ .

### 4.3.5 Derivada das funções trigonométricas

Vamos lembrar de três identidades trigonométricas importantes:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{cos}(x + y) = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$$

#### Derivada da função seno

Sejam  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ;  $f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

Vamos examinar o quociente  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ .

Bem,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} \Delta x + \operatorname{sen} \Delta x \cdot \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x(\operatorname{cos} \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\operatorname{sen} \Delta x \cdot \operatorname{cos} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x(\operatorname{cos} \Delta x - 1)(\operatorname{cos} \Delta x + 1)}{\Delta x(\operatorname{cos} \Delta x + 1)} + \operatorname{cos} x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

(Multiplicamos e dividimos a primeira expressão por  $\operatorname{cos} \Delta x + 1$ .)

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{cos}^2 \Delta x - 1}{\Delta x(\operatorname{cos} \Delta x + 1)} + \operatorname{cos} x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = \operatorname{sen} x \cdot \frac{(-\operatorname{sen}^2 \Delta x)}{\Delta x(\operatorname{cos} \Delta x + 1)} + \operatorname{cos} x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \\ &\quad (\operatorname{sen}^2 \Delta x = 1 - \operatorname{cos}^2 \Delta x) \\ &= -\operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\operatorname{cos} \Delta x + 1} + \operatorname{cos} x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= -\operatorname{sen} x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\operatorname{cos} \Delta x + 1} \right) + \operatorname{cos} x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \\ &= -\operatorname{sen} x \cdot 1 \cdot \frac{0}{2} + \operatorname{cos} x \cdot 1 = \operatorname{cos} x. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é derivável em  $x$  e  $f'(x) = \cos x$ .

**Observação.** De modo geral, se  $u$  é função de  $x$  e  $y = \text{senu}$ , então  $y' = \cos u \cdot u'$ .

## Exercícios resolvidos

25) Seja  $f(x) = 5\text{sen}(2x^2)$ . Calcule  $f'(x)$ .

**Resolução.**  $f'(x) = 5\cos(2x^2) \cdot 4x = 20x\cos(2x^2)$ .

26) Seja  $g(t) = \text{sen}^3 2t$ . Calcule  $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

**Resolução.** Escrevamos  $g(t) = u^3$ , sendo  $u = \text{sen} 2t$ . Pela regra da cadeia,

$$g'(t) = 3u^2 u' = 3(\text{sen } 2t)^2 (\cos 2t \cdot 2) = 6\text{sen}^2 2t \cdot \cos 2t.$$

$$\text{Logo, } g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6\text{sen}^2 \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{9}{4}.$$

## Derivada da função cosseno

Sejam  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ;  $f(x) = \cos x$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

Então,  $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  e  $\text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

Com efeito, aplicando a fórmula

$$\text{sen}(A+B) = \text{sen } A \cos B + \text{sen } B \cos A$$

à expressão  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , temos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos(-x) + \text{sen}(-x) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \cos x + (-\text{sen } x) \cdot 0 = \cos x.$$

De maneira análoga, verifica-se a outra igualdade.

Seja  $f(x) = \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ . Aplicando a fórmula da derivada do seno e a regra da cadeia, temos:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen } x.$$

Portanto,  $f'(x) = -\text{sen } x$ .

**Observação.** De modo geral, se  $u$  é uma função de  $x$  e  $y = \cos u$ , então  $y' = -\text{sen } u \cdot u'$ .

## Exercícios resolvidos

27) Calcule  $f'(\theta)$ , sendo  $f(\theta) = \cos^2 6\theta$ .

**Resolução.** Aplicando a regra da cadeia e a fórmula da derivada do cosseno, temos:

$$f'(\theta) = 2 \cos 6\theta (-\text{sen } 6\theta) 6 = -12 \cos 6\theta \cdot \text{sen } 6\theta.$$

28) Calcule  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , sendo  $f(t) = e^{\cos 2t} - \text{sen } t \cos 2t$ .

**Resolução.**

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{\cos 2t} (-\text{sen } 2t) 2 - [\text{sen } t (-\text{sen } 2t) 2 + \cos t \cos 2t] \\ &= -2 \text{sen } 2t \cdot e^{\cos 2t} + 2 \text{sen } t \text{sen } 2t - \cos t \cos 2t. \end{aligned}$$

Logo,

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot e^{\cos \frac{\pi}{2}} + 2 \text{sen } \frac{\pi}{4} \text{sen } \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} - 2.$$

## Exercícios propostos

22) Calcule  $f'(x)$ , sendo  $f(x) = x^2 \cos 3x - 2 \text{sen } 3x$ .

23) Calcule  $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , sendo  $g(x) = \text{sen}^2 x - \cos^3 4x$ .

## Derivada da função tangente

Sejam  $f: \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \text{tg } x$  e

$$x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Como  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ , aplicamos a regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Portanto,  $f'(x) = \sec^2 x$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \operatorname{tg} u$ , então  $y' = \sec^2 u \cdot u'$ .

## Exercício resolvido

29) Seja  $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ . Calcule  $f'(x)$ .

**Resolução.**  $f'(x) = \sec^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 3 = 3 \sec^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

## Derivada da função cotangente

Sejam  $f: \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f(x) = \operatorname{cotg} x$  e  $x \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .

Novamente aplicamos a regra do quociente a  $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ :

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x) - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cossec}^2 x.$$

Portanto,  $f'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \operatorname{cotg} u$ , então  $y' = -\operatorname{cossec}^2 u \cdot u'$ .

## Exercícios resolvidos

30) Calcule a derivada de  $f(x) = \operatorname{cotg} x^3$ .

**Resolução.**  $f'(x) = -\operatorname{cossec}^2(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2 \operatorname{cossec}^2 x^3$ .

31) Sendo  $g(x) = \ln(\operatorname{cotg} 2x) - 3^{\operatorname{tg} 2x}$ , calcule  $g'(x)$ .

**Resolução.** Escrevamos  $g(x) = \ln u - 3^v$  e lembremos que se

$y = \ln u$ , então  $y' = \frac{u'}{u}$  e se  $y = 3^v$ , então  $y' = 3^v \cdot \ln 3 \cdot v'$ . Logo,

$$g'(x) = \frac{-\operatorname{cossec}^2 2x \cdot 2}{\operatorname{cotg} 2x} - 3^{\operatorname{tg} 2x} \cdot \sec^2(2x) \cdot 2 \cdot \ln 3,$$



ou melhor,

$$g'(x) = \frac{-2}{\operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x} - 2 \ln 3 \cdot 3^{\operatorname{tg} 2x} \cdot \sec^2 2x.$$

## Exercícios propostos

24) Calcule  $f'(x)$  se  $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{cotg}^2 3x}$ .

25) Calcule  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , sendo  $f(x) = 2^{\operatorname{cotg} 3x} + \ln(\operatorname{sen} x)$ .

## Derivada da função secante

Sejam  $f: \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ;  $f(x) = \sec x$  e

$$x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

A partir da relação  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ , podemos escrever  $f(x) = (\cos x)^{-1}$

e derivar  $f$  usando a regra da cadeia. Então

$$f'(x) = -1(\cos x)^{-2} \cdot (-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x,$$

ou seja,  $f'(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \sec u$ , então  $y' = \operatorname{tg} u \cdot \sec u \cdot u'$ .

## Exercício resolvido

32) Seja  $f(x) = \sec x^4$ . Calcule  $f'(x)$ .

**Resolução.**  $f'(x) = \operatorname{tg} x^4 \cdot \sec x^4 \cdot 4x^3 = 4x^3 \operatorname{tg} x^4 \sec x^4$ .

## Derivada da função cossecante

Sejam  $f: \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ;  $f(x) = \operatorname{cossec} x$  e

$$x \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Como  $\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen} x)^{-1}$ , vamos aplicar novamente a re-

gra da cadeia para derivar  $f$ :

$$f'(x) = -1(\operatorname{sen} x)^{-2} \cdot \cos x = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\cotg x \cdot \operatorname{cossec} x$$

ou seja,  $f' = -\cotg x \cdot \operatorname{cossec} x$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \operatorname{cossec} u$ , então

$$y' = -\cotg u \cdot \operatorname{cossec} u \cdot u'.$$

## Exercícios resolvidos

33) Seja  $f(x) = \ln(\operatorname{cossec}\sqrt{x})$ . Calcule  $f'(x)$ .

**Resolução.** Escrevamos  $f(x) = \ln v$ , sendo  $v = \operatorname{cossec} u$  e  $u = \sqrt{x}$ .

Logo,

$$y' = \frac{v'}{v} = -\frac{\cotg u \cdot \operatorname{cossec} u \cdot u'}{\operatorname{cossec} u} = (-\cotg\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\cotg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Portanto, } f'(x) = \frac{-\cotg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

34) Sendo  $g(x) = \sqrt{\sec^2 x - \operatorname{cossec} 2x}$ , obtenha  $g'(x)$ .

**Resolução.** Temos  $g(x) = u^{\frac{1}{2}}$ , sendo  $u(x) = \sec^2 x - \operatorname{cossec} 2x$ .  
Conforme a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2\sec x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec x - (-\cotg 2x)(\operatorname{cossec} 2x)2}{2\sqrt{\sec^2 x - \operatorname{cossec} 2x}} \\ &= \frac{\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x + \cotg 2x \cdot \operatorname{cossec} 2x}{\sqrt{\sec^2 x - \operatorname{cossec} 2x}}. \end{aligned}$$

## Exercícios propostos

26) Calcule a derivada de cada uma das funções. Para chegar às respostas dos itens b), c) e e), use as relações:  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$  e  $1 + \cotg^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$ :

a)  $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \ln(\cos x)$ ;

b)  $g(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$ ;

c)  $y = \ln(\operatorname{sen} x) - x \cotg x - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{6}$ ;

$$d) f(x) = (\operatorname{cosec}^2 2x + 1)^6;$$

$$e) f(\theta) = \operatorname{tg} \theta + \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{3};$$

$$27) \text{ Seja } f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}, \text{ calcule } f'\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

$$28) \text{ Seja } f(x) = \ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right), \text{ calcule } f'\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

### 4.3.6 Derivada das funções trigonométricas inversas

#### Derivada da função arco-seno

Seja  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ . Essa função é inversível e sua inversa é:  $g: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $x = g(y) = \operatorname{arcsen} y$ .

Teorema da Derivada da  
Função Inversa.

Para encontrarmos a derivada de  $g$ , utilizaremos o **Teorema 28**.

Como  $g$  é contínua em  $(-1, 1)$ , e  $f$  é derivável em  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , com

$f'(x) = \cos x$ , que é diferente de zero para todo  $x$  em  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

o Teorema 28 estabelece que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

para todo  $y \in (-1, 1)$ .

Mas precisamos escrever  $g'(y)$  na variável  $y$ . Como  $y = \operatorname{sen} x$ , segue da relação fundamental  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$  que  $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ , isto é,  $\cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \pm\sqrt{1 - y^2}$ .

Sendo que  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  e que, nesse intervalo, o cosseno é positivo, temos  $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$  e, dessa forma,  $g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ .

Podemos agora escrever a derivada de  $g$  na variável que desejarmos: se  $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ , então  $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \arcsen u$ , sendo  $u$  uma função de  $x$ , então  $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .

**Exemplo.** Se  $f(x) = \arcsen(3x^2)$ , então  $f'(x) = \frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$ .

## Derivada da função arco-cosseno

Seja  $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ;  $y = f(x) = \cos x$ . Essa função é inversível e sua inversa é:  $g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ;  $x = g(y) = \arccos y$ .

Também nesse caso  $g$  é contínua em  $(-1, 1)$  e  $f$  é derivável em  $(0, \pi)$  e  $f'(x) = -\sen x$  que é diferente de zero para todo  $x$  em  $(0, \pi)$ .

Pelo Teorema 28,  $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{-1}{\sen x}$  para todo  $y \in (-1, 1)$ .

Mas  $\sen x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2}$ . Como  $\sen x > 0$  para  $x \in (0, \pi)$ , segue que  $\sen x = \sqrt{1-y^2}$ . Logo,  $g'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ .

Podemos então escrever: Se  $g(x) = \arccos x$ , então  $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \arccos u$ , então  $y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ .

**Exemplo.** Se  $f(x) = \arccos(e^{x^2})$ , então  $f'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$ .

## Derivada da função arco-tangente

Seja  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ . Essa função é inversível e a sua inversa é  $g: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x = g(y) = \operatorname{arctg} y$ .

Como  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e  $f$  é derivável em  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , com  $f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  que é diferente de zero para todo  $x$  em

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , segue pelo Teorema 28 que  $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sec^2 x}$  para

todo  $y \in \mathbb{R}$ .

Da relação trigonométrica  $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ , segue que  $\sec^2 x = 1 + y^2$  e, dessa forma,  $g'(y) = \frac{1}{1+y^2}$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ .

Portanto, se  $g(x) = \operatorname{arctg} x$ , então  $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \operatorname{arctg} u$ , então  $y' = \frac{u'}{1+u^2}$ .

**Exemplo.** Se  $y = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2$ , então  $y' = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{1+x}$ , ou melhor,  $y' = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$ .

## Derivada da função arco-cotangente

Seja  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{cotg} x$ . Essa função é inversível e a sua inversa é:  $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ ,  $g(y) = \operatorname{arccotg} y$ .

Como exercício, usando o Teorema 28, mostre que  $g'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$ , para todo  $y \in \mathbb{R}$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \operatorname{arccotg} u$ , então  $y' = \frac{-u'}{1+u^2}$ .

## Exercício resolvido

35) Sendo  $f(x) = x \cdot \operatorname{arccotg} 2x$ , calcule  $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

**Resolução:**

$$f'(x) = 1 \cdot \operatorname{arccotg} 2x + x \cdot \frac{(-2)}{1+4x^2} = \operatorname{arccotg} 2x - \frac{2x}{1+4x^2}.$$

$$\text{Então, } f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arccotg} \sqrt{3} - \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+4 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

## Derivada da função arco-secante

Seja  $f : [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ,  $f(x) = \sec x$ . Essa função é inversível e sua inversa é  $g : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ,

$g(y) = \operatorname{arcsec} y$ . Sendo  $f'(x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ , percebemos que

$f'(x)$  existe e é diferente de zero para  $x \in (0, \pi) - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ . Pelo Teorema 28,  $g$  é derivável em  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Para deduzirmos a fórmula que fornece a derivada de  $g$ , poderíamos novamente usar o Teorema 28. Mas há outro caminho. Em primeiro lugar, afirmamos que:

$$\operatorname{arcsec} y = \arccos\left(\frac{1}{y}\right), \quad \forall y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Com efeito, observe a sequência de equivalências: Seja

$$y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Então:

$$x = \operatorname{arcsec} y \Leftrightarrow y = \sec x \Leftrightarrow y = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{1}{y}\right).$$

Logo,  $\operatorname{arcsec} y = \arccos\left(\frac{1}{y}\right)$ ,  $\forall y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

Assim,  $g(y) = \arccos\left(\frac{1}{y}\right)$  e, para derivar  $g$ , utilizaremos a fórmula da derivada da função arco-cosseno e a regra da cadeia:

$$g'(y) = \frac{-\left(\frac{-1}{y^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{|y|}{y^2 \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{|y| \sqrt{y^2-1}}, \text{ pois } y^2 = |y|^2.$$

Portanto, se  $g(x) = \operatorname{arcsec} x$ , então  $g'(x) = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \operatorname{arcsec} u$ , então  $y' = \frac{u'}{|u| \sqrt{u^2-1}}$ .

**Exemplo.** Se  $f(x) = \operatorname{arcsec} 5x$ , então  $f'(x) = \frac{5}{|5x| \sqrt{25x^2-1}}$ , ou me-

lhor,  $f'(x) = \frac{1}{|x| \sqrt{25x^2-1}}$ .

## Derivada da função arco-cossecante

Seja  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ,  $f(x) = \operatorname{cossec} x$ .

Essa função é inversível e sua inversa é

$$g: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\};$$

$$g(y) = \operatorname{arccossec} y.$$

Como  $f'(x) = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cossec} x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ , fica claro que  $f'(x)$  existe e é diferente de zero para  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ . Pelo Teorema 28,

concluimos que  $g$  é derivável em  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

Para deduzir a fórmula da derivada de  $g$ , procede-se de maneira análoga à dedução da derivada da função arco-secante. Sugermos ao leitor que o faça como exercício, devendo chegar ao seguinte resultado:

Se  $g(x) = \operatorname{arccossec} x$ , então  $g'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ .

**Observação.** De modo geral, se  $y = \operatorname{arccossec} u$ , então

$$y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}.$$

**Exemplo.** Se  $y = \operatorname{arccossec} \sqrt{x}$ , então

$$y' = \frac{-1}{|\sqrt{x}|\sqrt{x-1}} = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}.$$

## Exercícios propostos

De 29 a 34, dada  $f(x)$ , calcule  $f'(x)$ .

29)  $f(x) = e^{\operatorname{arsen} x} - e^{\operatorname{arccos} x}$ ;

30)  $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2}$ ;

- 31)  $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arccossec} 2x}$ ;
- 32)  $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ ;
- 33)  $f(x) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$ ;  $a \in \mathbb{R}$ ;
- 34)  $f(x) = x\sqrt{1-x^4} + \arccos x^2$ ;
- 35) Sendo  $g(t) = \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{t}\right)\right]^2$  e  $k$  uma constante positiva, calcule  $g'(-k)$ .

## 4.4 Derivada de funções implícitas

Nem sempre uma função está representada na forma explícita  $y = f(x)$ . Em muitas situações, ela surge na forma implícita, através de uma equação do tipo  $F(x, y) = 0$ , sendo  $F$  uma relação entre as variáveis  $x$  e  $y$ .

Mas será que toda equação do tipo  $F(x, y) = 0$  define uma função  $y = f(x)$ ?

Examinemos alguns exemplos:

- A equação  $2x - y + 17 = 0$  define uma função contínua em  $\mathbb{R}$ , a saber,  $y = 2x + 17$ . Conseguimos sem dificuldade explicitar  $y$  em função de  $x$ .
- A equação  $x^2 + y^2 - 9 = 0$  define as funções contínuas  $y = \sqrt{9 - x^2}$  e  $y = -\sqrt{9 - x^2}$  no intervalo  $[-3, 3]$ , o que também é fácil checar.
- A equação  $x^2 + y^2 + 9 = 0$  não define função alguma, pois para nenhum par ordenado  $(x, y)$  a soma  $x^2 + y^2$  será igual a  $-9$ .
- E a equação  $y^3 + x^2y - 5x + 1 = 0$  define alguma função  $y = f(x)$ ? Tente isolar  $y$  como função de  $x$ . Você consegue? Não é fácil! Mas, apesar dessa dificuldade, essa equação define sim uma função contínua e derivável em  $\mathbb{R}$ . Isso decorre de um resultado que você terá oportunidade de aprender em estudos posteriores.



Nesse contexto, *vamos assumir* que a equação dada  $F(x, y) = 0$  define uma função  $y = f(x)$  e que  $f$  seja *derivável*.

Nosso objetivo é conseguir expressar essa derivada, ou seja, calcular a derivada da função implícita, que representaremos por  $y'$ .

Na verdade, queremos conhecer  $y' = f'(x)$  sem mesmo conhecer  $f(x)$ .

*Como proceder?*

Derivamos ambos os lados da equação  $F(x, y) = 0$  em relação a  $x$ , considerando que  $y = f(x)$ , ou seja, que  $y$  é uma função de  $x$  cuja derivada  $y'$  é a nossa incógnita. Depois isolamos  $y'$  em função de  $x$  e  $y$ .

## Exercícios resolvidos

- 36) Encontre a derivada da função definida implicitamente por  $2x^2 - y^3 - 1 = 0$ .

**Resolução.** Vamos derivar ambos os lados da equação em relação a  $x$ . Como  $y$  é uma função de  $x$  ( $y$  é a função implícita!), devemos usar a regra da cadeia para derivar  $y^3$ . Temos:

$$4x - 3y^2 y' - 0 = 0 \Rightarrow y' = \frac{4x}{3y^2}.$$

**Observação.** Nesse exemplo, é fácil explicitar  $y$  como função de  $x$ :  $y = \sqrt[3]{2x^2 - 1} = f(x)$ . Se calcularmos  $y'$  através das regras de derivação, apenas para confirmar o resultado, obteremos:

$$y' = \frac{1}{3}(2x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 1)^2}} = \frac{4x}{3(\sqrt[3]{2x^2 - 1})^2} = \frac{4x}{3y^2}.$$

- 37) Calcule a derivada da função  $y = f(x)$ , definida pela equação:  $\sin y + e^x \cos y = x - y^2$ .

**Resolução.** Derivando ambos os membros da equação em relação a  $x$ :  $\cos y \cdot y' + e^x \cos y - e^x \sin y \cdot y' = 1 - 2yy'$ . Isolando  $y'$ :

$$y'(\cos y - e^x \operatorname{sen} y + 2y) = 1 - e^x \cos y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1 - e^x \cos y}{\cos y - e^x \operatorname{sen} y + 2y}.$$

- 38) Determine os coeficientes angulares das retas tangentes à circunferência cujo centro é o ponto  $(3, 5)$  e cujo raio é 2, em cada um dos pontos de abscissa 4.

**Resolução.** A equação da circunferência é:  $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ , ou melhor,

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0. \quad (1)$$

Para  $x=4$ , tem-se  $y = 5 \pm \sqrt{3}$ . Portanto, os pontos de tangência são:  $A(4, 5 + \sqrt{3})$  e  $B(4, 5 - \sqrt{3})$ .

A equação (1) define duas funções deriváveis no intervalo  $(1, 5)$ :  $f_1(x)$ , cujo gráfico é a semicircunferência acima da reta  $y=5$  e que contém o ponto  $A$ ; e  $f_2(x)$  cujo gráfico é a semicircunferência inferior e que contém o ponto  $B$ . (Veja a Figura 4.10.) O coeficiente angular das retas tangentes  $t_1$  e  $t_2$  é  $f_1'(4)$  e  $f_2'(4)$  respectivamente.

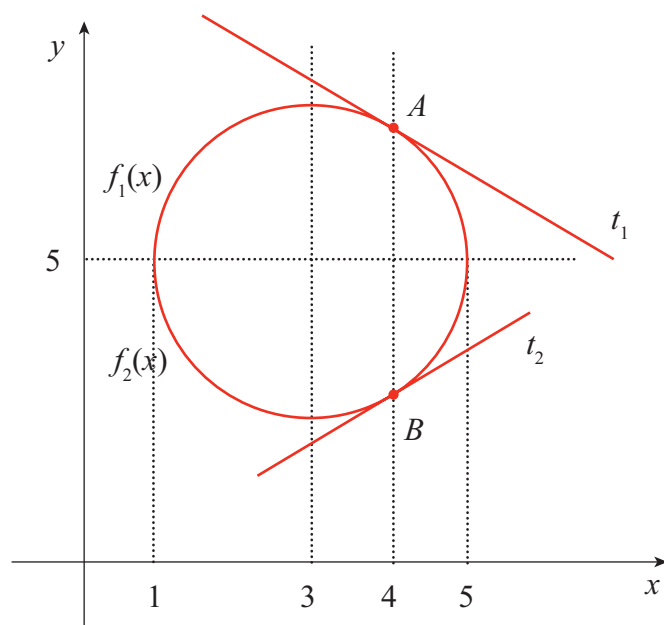


Figura 4.10

Derivando implicitamente a equação (1), temos:

$$2x + 2yy' - 6 - 10y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{6 - 2x}{2y - 10},$$

que é a expressão da derivada, tanto de  $f_1$  como de  $f_2$ .

$$\text{Logo, } f_1'(4) = \frac{6 - 2 \cdot 4}{2(5 + \sqrt{3}) - 10} = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad f_2'(4) = \frac{6 - 2 \cdot 4}{2(5 - \sqrt{3}) - 10} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Resposta. Os coeficientes angulares das retas  $t_1$  e  $t_2$  são  $\frac{-1}{\sqrt{3}}$  e  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  respectivamente.

## Exercício proposto

36) Calcule a derivada da função definida implicitamente.

a)  $x^2 - y^2 = 1 - y^3$

b)  $xe^{2y} - x^2y^2 + x - 1 = 0$

### 4.4.1 Derivada da função exponencial geral

Sejam  $u$  e  $v$  funções de  $x$ , com  $u(x) > 0$  e seja  $f(x) = u^v$ . Com auxílio da derivação implícita, vamos deduzir uma fórmula para a derivada de  $f$ .

Escrevamos  $y = u^v$ . Como  $y$  é positivo, podemos aplicar o logaritmo natural a ambos os lados desta igualdade:  $\ln y = \ln u^v$  ou, conforme propriedade do logaritmo:  $\ln y = v \cdot \ln u$ . Lembrando que  $y$ ,  $u$  e  $v$  são funções de  $x$ , derivemos implicitamente a última igualdade:  $\frac{y'}{y} = v \cdot \frac{u'}{u} + v' \ln u$ .

Logo,  $y' = y \left( v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$  e, como  $y = u^v$ , temos:

$$y' = u^v \left( v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right).$$

**Observação.** Não é interessante usar essa fórmula! Melhor é em cada caso proceder como fizemos acima, aplicando o limite a ambos os lados da igualdade. Veja os exemplos:

## Exercícios resolvidos

39) Seja  $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x}$ . Calcule  $y'$ .

**Resolução:**

$$y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x} \Rightarrow \ln y = \ln [(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x}] \Rightarrow \ln y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln (\operatorname{sen} x)$$

$$\text{Derivando: } \frac{y'}{y} = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln (\operatorname{sen} x).$$

$$\text{Logo, } y' = y \left[ \operatorname{arctg} x \cdot \cotg x + \frac{\ln (\operatorname{sen} x)}{1+x^2} \right] \text{ e, como } y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x},$$

$$\text{temos } y' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x} \left[ \operatorname{arctg} x \cdot \cotg x + \frac{\ln (\operatorname{sen} x)}{1+x^2} \right].$$

40) Seja  $f(x) = x^{\cos x}$ . Calcule  $f'(x)$ .

**Resolução:**

$$y = x^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x \cdot \ln x \Rightarrow y' = x^{\cos x} \left( \frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \cdot \ln x \right)$$

## Exercício proposto

37) Calcule a derivada da função  $y = x^x$ .

### 4.4.2 Resumo das fórmulas de derivação

Apresentaremos agora um resumo das fórmulas de derivação estudadas neste capítulo.

|                                      |                         |
|--------------------------------------|-------------------------|
| $y$                                  | $y'$                    |
| $u + v$                              | $u' + v'$               |
| $k \cdot u \quad (k \in \mathbb{R})$ | $k \cdot u'$            |
| $u \cdot v$                          | $u'v + uv'$             |
| $\frac{u}{v}$                        | $\frac{vu' - uv'}{v^2}$ |
| $f \circ u$                          | $f'(u) \cdot u'$        |

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| $u^r; r \in \mathbb{R} - \{0\}$ | $ru^{r-1}u'$                                      |
| $a^u; a > 0, a \neq 1$          | $a^u \cdot \ln a \cdot u'$                        |
| $e^u$                           | $e^u \cdot u'$                                    |
| $u^v; u(x) > 0$                 | $u^v \left( \frac{vu'}{u} + v' \ln u \right)$     |
| $\log_a u; a > 0, a \neq 1$     | $\frac{u'}{u \cdot \ln a}$                        |
| $\ln u; u(x) > 0$               | $\frac{u'}{u}$                                    |
| $\text{sen } u$                 | $\cos u \cdot u'$                                 |
| $\cos u$                        | $-\text{sen } u \cdot u'$                         |
| $\text{tg } u$                  | $\sec^2 u \cdot u'$                               |
| $\text{cotg } u$                | $-\text{cossec}^2 u \cdot u'$                     |
| $\text{sec } u$                 | $\text{sec } u \cdot \text{tg } u \cdot u'$       |
| $\text{cossec } u$              | $-\text{cossec } u \cdot \text{cotg } u \cdot u'$ |
| $\text{arcsen } u$              | $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$                         |
| $\text{arccos } u$              | $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$                        |
| $\text{arctg } u$               | $\frac{u'}{1+u^2}$                                |
| $\text{arccotg } u$             | $\frac{-u'}{1+u^2}$                               |
| $\text{arcsec } u$              | $\frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$                      |
| $\text{arccossec } u$           | $\frac{-u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$                     |

## 4.5 Derivadas sucessivas (ou de ordem superior)

Seja  $f$  uma função derivável num subconjunto  $A$  do seu domínio. A função  $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$  é também chamada de *derivada primeira* ou de *derivada de primeira ordem* de  $f$ .

Se  $f'$  for derivável em um subconjunto  $A_1$  de  $A$ , fica definida a função  $f'' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f''(x) = (f')'(x)$ , chamada de *derivada segunda* de  $f$  ou *derivada de segunda ordem* de  $f$ .

Suponhamos que, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , esteja definida a função derivada de ordem  $n-1$  de  $f$ :

$$f^{(n-1)} : A_{n-2} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Suponha ainda que  $f^{(n-1)}$  seja derivável em  $A_{n-1}$ . Definimos  $f^{(n)} : A_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$  como sendo a derivada  $n$ -ésima de  $f$ . As funções  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ , ... chamam-se derivadas sucessivas de  $f$ .

### Exercícios resolvidos

41) Seja  $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ . Obtenha

$$f''(x), f'''(x), f^{(IV)}(x) \text{ e } f^{(n)}(x)$$

para  $n$  qualquer.

**Resolução.** Sendo  $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ , temos:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x;$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6;$$

$$f'''(x) = 24x;$$

$$f^{(IV)}(x) = 24.$$

Repare que, a partir da derivada de quinta ordem, todas serão iguais a zero, ou seja,  $f^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 5$ .

42) Seja  $g(t) = \sin t + \cos t$ . Calcule a derivada de ordem 35 de  $g$ .

**Resolução.** Ninguém precisa derivar 35 vezes! Observe atentamente o comportamento das cinco primeiras derivadas de  $g$ :

$$g'(t) = \cos t - \sin t;$$

$$g''(t) = -\sin t - \cos t;$$

$$g'''(t) = -\cos t + \sin t;$$

$$g^{(IV)}(t) = \sin t + \cos t;$$

$$g^{(V)}(t) = \cos t - \sin t.$$

Note que  $g^{(IV)} = g$ . Consequentemente,  $g^{(V)} = g'$ ,  $g^{(VI)} = g''$  e assim por diante, as derivadas se repetem após quatro derivações. Para obter  $g^{(35)}(t)$ , basta dividir 35 por 4 e tomar o resto da divisão que é 3. Em outras palavras, 35 é congruente a 3 módulo 4.

Logo,  $g^{(35)}(t) = g'''(t) = -\cos t + \sin t$ .

## Exercícios propostos

38) Seja  $y = e^x \cos x$ . Mostre que  $y$  satisfaz a equação  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

De 39 a 44, calcule a derivada da função.

$$39) f(x) = -\frac{7}{8}x^6 + \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 + 5$$

$$40) y = \sqrt{3x} - 4\sqrt[3]{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x^2}$$

$$41) f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$$

$$42) g(u) = (5 - 4u^3)^7$$

$$43) h(y) = \sqrt[3]{a + by + cy^2}$$

$$44) F(x) = (2 + 3x^2)\sqrt{1 + 5x^2}$$

- 45) Use a definição de derivada, a saber,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

para calcular  $f'(x)$ , sendo  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ .

- 46) Seja  $g(t) = \frac{5}{\sqrt{8-t}}$ . Através da definição, calcule  $g'(-1)$  e  $g'(a)$ , sendo  $a < 8$ .

- 47) Dê a equação da reta tangente ao gráfico de  $y = \frac{x^2 - 6}{3x + 4}$  no ponto de abscissa  $-2$  (use as regras de derivação).

- 48) Determine os pontos do gráfico de

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 2$$

nos quais a reta tangente ao gráfico é paralela à reta

$$y = -7x + 8.$$

- 49) Seja  $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ . Calcule  $g'(0)$  (você deve

usar a definição de derivada).

- 50) Uma partícula desloca-se sobre um eixo, de modo que o espaço percorrido, em metros, após  $t$  minutos, é dado pela função  $s(t) = \frac{5t}{4t^2 + 16}$  para  $t \geq 0$ .

- Qual a velocidade da partícula após 1 minuto?
- Qual a velocidade da partícula após 2 minutos?
- Qual a velocidade da partícula após 4 minutos? Interprete o sinal na resposta.

- 51) Seja  $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ .

- Faça o gráfico de  $f$ .
- Calcule as derivadas laterais de  $f$  no ponto 0.



c)  $f$  é derivável em 0?

d) O gráfico de  $f$  admite reta tangente no ponto  $(0, 0)$ ?

52) Seja  $f(x) = \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{3}\right)}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}$ . Calcule  $f'(\pi)$ .

53) Seja  $g(t) = \cos^2 t + \sin^2(3t)$ . Calcule  $g'(t)$ .

54) Seja  $f(u) = \operatorname{tg}^2(2u) - \operatorname{cotg}^3(2u)$ . Calcule  $f'(u)$ .

55) Seja  $g(\theta) = \ln(1 + \operatorname{tg}\theta) - \sec^2(3\theta)$ . Calcule  $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

De 56 a 62, calcule a derivada da função dada.

56)  $y = \ln(\sin^2 x)$

57)  $y = e^{x^2} + xe^{3x} - 5^{x^2}$

58)  $y = x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x$

59)  $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2 + \ln(\operatorname{arccos} 2x)$

60)  $y = e^{\sin 5x} - \operatorname{arctg} e^{5x}$

61)  $y = x^{\frac{1}{x}}$

62)  $y = (\sin x)^{\sin x}$

63) Seja  $f(x) = (x+1)^3 - 5$ . Use o Teorema 28 para calcular  $(f^{-1})'(x)$ .

64) Idem, sendo  $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ .

65) Seja  $y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ . Mostre que  $y'' = \frac{1}{a^2} y$ .

66) Seja  $f(t) = \ln \sin t$ . Calcule  $f'''(t)$ .

67) Seja  $y = e^{a+bx}$ . Mostre que  $y^{(n)} = b^n \cdot e^{a+bx}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

68) Seja  $y = \frac{1}{x+a}$ . Mostre que  $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

69) A igualdade  $x^2 e^{xy} - xy^2 = 1 - y$  define implicitamente uma função  $y = g(x)$ . Calcule  $g'(x)$ .

70) A respeito de duas funções deriváveis  $u$  e  $v$ , sabe-se que:

$$u(1) = 2, v(1) = 3, u'(1) = 3, v'(1) = 4, u'(3) = -2 \text{ e } v'(2) = 5.$$

Considere as funções:  $f = uv$ ,  $g = \frac{u}{v}$ ,  $h = u \circ v$  e  $k = v \circ u$ .

Calcule:

- a)  $f'(1)$ ;                      b)  $g'(1)$ ;  
 c)  $h'(1)$ ;                      c)  $k'(1)$ .

Sugestão: Use as  
 Proposições 11 e 12 e o  
 Teorema 27.

## Respostas dos exercícios propostos

1.1)  $y = \frac{x}{4} - 2$

1.2) Não admite reta tangente.

1.3)  $x = 0$

2) a)  $f'(1) = -2$

b)  $f'(x) = 3x^2 - 5$

3) a)  $f$  é derivável em 3 e  $f'(3) = 13$ .

b)  $f$  não é derivável em 2.

4) a)  $y' = \frac{-2}{x^3}$

b)  $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c)  $y' = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$

5)  $f'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$ ;

$f'(1) = -42$

6)  $\frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$

7)  $\frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t} + 1)^2}$

8)  $\frac{32}{25a}$

9)  $80x(8x^2 - 3)^4$

10)  $\frac{4t^3 - 2}{3\sqrt[3]{(t^4 - 2t)^2}}$

11)  $2(r^2 + 1)^2(2r + 5)(8r^2 + 15r + 2)$

12)  $\frac{2y(y^2 - 5)^2(y^2 + 22)}{(y^2 + 4)^3}$

13)  $\frac{-1}{9}$

14)  $\frac{3x^2}{2}$

15)  $\frac{1}{2} e \frac{1}{23}$

16)  $2 - \frac{5}{e^{10}}$

17)  $-5^{1-x^3} \left( \frac{3x^3 \ln 5 + 1}{3x^2} \right)$

18)  $\frac{6x^5 - 1}{(x^6 - x) \ln 2}$

19)  $\frac{4x}{2x^2 - 5}$

20)  $\frac{4 \ln 2 - 6}{(\ln 2)^2}$

21)  $2(1 + e^{5x} - \ln 3x) \left( 5e^{5x} - \frac{1}{x} \right)$

22)  $f'(x) = (2x - 6) \cos 3x - 3x^2 \sin 3x$

23)  $2\sqrt{3}$

24)  $f'(x) = \frac{3 \sec^2 3x}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}} - 6 \cotg 3x \cdot \operatorname{cosec}^2 3x$

25)  $1 - 3 \ln 2$

26) a)  $\cos x [1 + \ln(\sin x)] - \operatorname{tg} x$

b)  $\operatorname{tg}^2 \alpha$

c)  $x \cdot \cotg^2 x$

d)  $-24(\operatorname{cosec}^2 2x + 1)^5 \cdot \operatorname{cosec}^2 2x \cdot \cotg 2x$

e)  $\sec^4 \theta$

27)  $-4\sqrt{3}$

28) 4

29)  $\frac{e^{\operatorname{arcsen} x} + e^{\operatorname{arccos} x}}{\sqrt{1+x^2}}$

30)  $x \cdot \operatorname{arctg} x$

31)  $\frac{-1}{3|x| \sqrt[3]{(\operatorname{arccosec} 2x)^2} \cdot \sqrt{4x^2 - 1}}$

32)  $\frac{1}{x[1 + (\ln x)^2]}$

33)  $\frac{a}{x^2 + a^2}$

34)  $\frac{1 - 2x - 3x^4}{\sqrt{1 - x^4}}$

35)  $\frac{\pi}{4k}$

36) a)  $y' = \frac{2x}{2y - 3y^2}$

b)  $y' = \frac{2xy^2 - e^{2y} - 1}{2x(e^{2y} - xy)}$

37)  $y' = x^x(1 + \ln x)$

39)  $-\frac{21}{4}x^5 + 5x^3 - 6x$

40)  $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{9}{2x^2\sqrt{x}}$

41)  $\frac{ad - bc}{(ct + d)^2}$

42)  $-84u^2(5 - 4u^3)^6$

43)  $\frac{2cy + b}{3\sqrt[3]{(a + by + cy^2)^2}}$

44)  $\frac{x(45x^2 + 16)}{\sqrt{1 + 5x^2}}$

45)  $6x - 2$

46) a)  $\frac{5}{54}$

b)  $\frac{5}{2(8-a)\sqrt{8-a}}$

47)  $y = \frac{7}{2}x + 8$

48)  $(1, -5) e \left( \frac{1}{3}, -\frac{5}{27} \right)$

49) 0

50) a)  $\frac{3}{20} \text{ m/min}$       b) 0      c)  $\frac{-3}{80} \text{ m/min}$

51) d) Sim, a reta  $y = 0$ .

52)  $\frac{2}{9}$

53)  $-2 \cos t \sin t + 6 \sin(3t) \cos(3t)$

54)  $4 \operatorname{tg}(2u) \sec^2(2u) + 6 \operatorname{cotg}^2(2u) \operatorname{cosec}^2(2u)$

55) 13

56)  $2 \operatorname{cotg} x$

57)  $2xe^{x^2} + (1+3x)e^{3x} - 2x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5$

58)  $2x \operatorname{arctg} x$

59)  $\frac{4 \operatorname{arcsen} 2x \cdot \arccos 2x - 2}{\sqrt{1-4x^2} \cdot \arccos 2x}$

60)  $5e^{\operatorname{sen} 5x} \cdot \cos 5x - \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}$

61)  $\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}$

62)  $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x(1 + \ln \operatorname{sen} x)$

63)  $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}$

64)  $3x^2$

66)  $2 \operatorname{cotg} t \cdot \operatorname{cosec}^2 t$

69)  $y' = \frac{y^2 - xe^{xy}(xy+2)}{x^3 e^{xy} - 2xy + 1}$

70) a) 17      b)  $\frac{1}{9}$       c) -8      d) 15

# Capítulo 5

## Aplicações da Derivada





# Capítulo 5

## Aplicações da Derivada

*Neste capítulo, objetivamos estudar as aplicações da derivada: taxas de variação, taxas relacionadas, máximos e mínimos de funções, esboço de gráficos; apresentar a Regra de L'Hospital utilizada para o cálculo de limites de funções e introduzir a Fórmula de Taylor.*

### 5.1 Taxa de variação

Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$ . A taxa de variação média de  $f$  em  $[a, b]$  é definida como  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , ou seja, é o quociente da variação de  $f(x)$  pela variação de  $x$ .

Por exemplo, suponha que  $f(t)$  represente a população de certa comunidade  $t$  anos após 1º de janeiro de 2000. Sabendo-se que  $f(1) = 1560$  e  $f(5) = 1788$ , a taxa de variação média da população de 01/01/2001 a 01/01/2005 foi de  $\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = 57$  pessoas por ano.

Poderíamos também dizer que a “velocidade” com que aumentou essa população naquele período foi de 57 pessoas por ano.

Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto  $I$  que contém o ponto  $x_0$ . Seja  $\Delta x$  tal que  $x_0 + \Delta x \in I$ . O quociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  é a taxa de variação média de  $f$  no intervalo de comprimento  $\Delta x$ .

Fazendo  $\Delta x$  tender a zero e supondo que o  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  exista, este independe de  $\Delta x$  e será chamado de taxa de variação de  $f$  em  $x_0$ . Em particular, se  $f(t)$  é o espaço percorrido por um móvel no tem-

po  $t$ , então a taxa de variação de  $f$  em  $t_0$  é a velocidade instantânea do móvel no instante  $t_0$ . Quer dizer, a derivada  $f'(x_0)$  é a taxa de variação de  $f$  em  $x_0$ .

## Exercícios resolvidos

- 1) A área  $A$  de um círculo é uma função do seu raio.
  - a) Determine a taxa de variação média da área do círculo em relação ao raio, quando este varia de 6 a 9 cm.
  - b) Determine a taxa de variação da área em relação ao raio no instante em que este vale 6 cm.

### Resolução.

- a) A área do círculo de raio  $R$  é  $A(R) = \pi R^2$ . Portanto, a taxa de variação média da área em relação ao raio é

$$\frac{\Delta A}{\Delta R} = \frac{A(9) - A(6)}{9 - 6} = \frac{81\pi - 36\pi}{3} = 15\pi.$$

Esse resultado mostra que, quando o raio do círculo varia de 6 a 9 cm, a área aumenta em média  $15\pi \text{ cm}^2$  por variação de 1 cm no comprimento do raio.

- b) A taxa de variação da área em relação ao raio é  $A'(R) = 2\pi R$ . Para  $R = 6$ , temos  $A'(6) = 12\pi$ . Significa que, no momento em que  $R = 6$  cm, a "velocidade" de crescimento da área é de  $12\pi \text{ cm}^2$  por variação de 1 cm no comprimento do raio.

- 2) O rendimento bruto anual de uma empresa,  $t$  anos após 1º de janeiro de 2005, é de  $P(t)$  milhões de reais e projetou-se que

$$P(t) = \frac{-2}{5}t^2 + 2t + 6.$$

- a) Encontre a taxa segundo a qual o rendimento bruto anual deverá estar crescendo ou decrescendo em 1º de janeiro de 2007.
- b) Idem, se nada for mudado, em 1º de janeiro de 2009.

**Resolução.** O que precisamos determinar é a taxa de variação de  $P$  em relação a  $t$ , isto é,  $P'(t)$ .



- a) Sendo  $P(t) = \frac{-2}{5}t^2 + 2t + 6$ ,  $P'(t) = -\frac{4}{5}t + 2$ . Para  $t = 2$  (anos), temos  $P'(2) = \frac{2}{5} = 0,4$ .

**Resposta.** Em 01/01/2007, o rendimento bruto anual deverá estar crescendo à taxa de 0,4 milhões de reais por ano.

- b) Para  $t = 4$ , temos  $P'(4) = -\frac{6}{5} = -1,2$ .

**Resposta.** Em 01/01/2009, o rendimento bruto anual deverá estar decrescendo à taxa de 1,2 milhões de reais por ano.

## 5.2 Taxas relacionadas

Em muitos problemas, surgem uma ou mais variáveis que são funções de uma outra variável, que geralmente é o tempo. Digamos,  $F$  depende de  $x$  e  $y$  que, por sua vez, são ambas funções do tempo  $t$ .

Ocorre que normalmente não conhecemos a expressão dessas funções de  $t$ .

As principais ferramentas usadas para resolver problemas que apresentam essas características são: a regra da cadeia e a derivação implícita.

Lembre-se de que: se  $F$  é uma função derivável de  $x$ , e  $x$  é uma função derivável de  $t$ , então a regra da cadeia diz que  $F$  é uma função derivável de  $t$  e  $\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ .

### Exercícios resolvidos

- 3) Um balão esférico é enchido de modo que o seu volume aumenta à razão de  $2 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Com que taxa aumenta o raio do balão no instante em que este mede 5 cm? E no instante em que mede 10 cm?

**Resolução.** Enquanto o balão é enchido, seu volume  $V$  é uma função do raio  $R$  e o raio é uma função do tempo  $t$  (a qual não conhecemos).

Temos a fórmula conhecida:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Então  $V$  é também função de  $t$ . Para resolver o problema, devemos escrever o(s) dado(s) e o que é pedido em notação de derivadas:

Dado:  $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ cm}^3/\text{s}$ ; pede-se:  $\frac{dR}{dt}$  quando  $R = 5$  e quando

$R = 10 \text{ cm}$ .

Para estabelecer a relação entre  $\frac{dV}{dt}$  e  $\frac{dR}{dt}$ , devemos derivar  $V$  em relação a  $t$  usando a regra da cadeia. Como  $V$  representa o volume

de uma esfera de raio  $R$ , temos:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dR} \cdot \frac{dR}{dt}$ . Como  $\frac{dV}{dR} = 4\pi R^2$ , temos  $\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt}$ .

Mas  $\frac{dV}{dt} = 2$ . Logo,  $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2\pi R^2}$ .

Para  $R = 5$ , temos  $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{50\pi} \cong 0,0064 \text{ cm/s}$ .

Para  $R = 10$ , temos  $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{200\pi} \cong 0,0016 \text{ cm/s}$ .

**Resposta.** O raio aumenta à taxa de  $\frac{1}{50\pi} \text{ cm/s}$  quando ele vale 5 cm e  $\frac{1}{200\pi} \text{ cm/s}$  quando ele vale 10 cm.

**Observação.** Note que a taxa de variação do raio é inversamente proporcional ao quadrado do raio.

- 4) Uma escada de 10 metros está apoiada numa parede vertical. Em certo instante, a extremidade inferior se encontra a 6 m da parede, escorregando a uma velocidade constante de 80 cm/s. Com que velocidade escorrega o topo da escada na parede naquele instante?

**Resolução.** Seja  $t$  o tempo, em segundos, contado a partir do instante em que a escada começou a deslizar. Seja  $x$  a distância, em metros, entre a base da escada e a parede, no instante  $t$ . Seja  $y$  a distância, em metros, entre o piso e o topo da escada no instante  $t$ . (Veja a Figura 5.1).

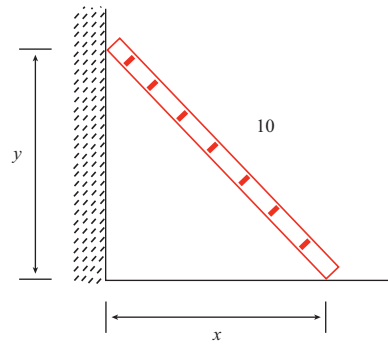


Figura 5.1

Temos os seguintes dados: comprimento da escada 10 m;

$$\frac{dx}{dt} = 0,8 \text{ m/s} . \text{ Pede-se: } \frac{dy}{dt} \text{ quando } x = 6 .$$

Da figura e do Teorema de Pitágoras, temos que  $x^2 + y^2 = 100$ .

Como  $x$  e  $y$  são funções (implícitas) de  $t$ , vamos derivar esta igualdade em relação a  $t$  :  $2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$ .

$$\text{Logo, } \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} .$$

Se  $x = 6$ , então, pelo Teorema de Pitágoras,  $y = 8$ . Assim,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8} \cdot \frac{8}{10} = -\frac{3}{5} = -0,6 \text{ m/s} .$$

**Resposta.** O topo da escada desliza a uma velocidade de 60 cm/s naquele instante.

Atenção: O resultado negativo deve-se ao fato de  $y$  decrescer enquanto  $t$  aumenta.

- 5) Em uma serraria, a serragem cai, formando um monte em forma de cone circular reto, a uma taxa de  $0,25 \text{ m}^3$  por hora. A geratriz do cone faz um ângulo de  $45^\circ$  com o solo, que é plano. Com que velocidade sobe o topo do monte no momento em que este se encontra a 2 metros do solo?

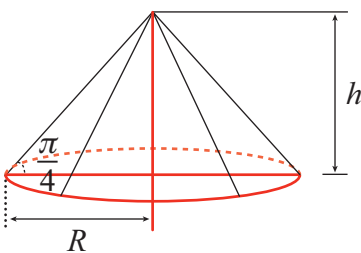


Figura 5.2

**Resolução.** Seja  $t$  o tempo, em horas, contado a partir do momento em que a serragem começa a cair. Seja  $V$  o volume de serragem que caiu em  $t$  horas.

Sejam  $h$  e  $R$  a altura e o raio da base, respectivamente, do cone

formado pela serragem. Os dados do problema são:  $\frac{dV}{dt} = 0,25 \text{ m}^3/\text{h}$  e o outro é ilustrado através da Figura 5.3.

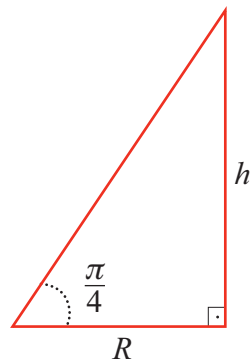


Figura 5.3

Pede-se:  $\frac{dh}{dt}$  quando  $h = 2$  m. A relação entre as variáveis  $V$ ,  $R$  e  $h$  é estabelecida pela fórmula do volume do cone:  $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ .

Mas é possível escrever  $V$  como função de *uma das variáveis*:  $R$  ou  $h$ .

Observando a Figura 5.3, temos que:  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{h}{R}$  e como  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ , segue que  $R = h$ .

Logo,  $V = \frac{\pi h^3}{3}$ . Note que  $V$  é função de  $h$  e  $h$  é função de  $t$ .

Conforme a regra da cadeia:  $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$ , ou seja,

$$\frac{1}{4} = \pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi h^2}.$$

Para  $h = 2$ , temos  $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16\pi}$  m/h.

**Resposta.** No momento em que o topo do monte está a 2 metros do solo, ele sobe com velocidade de  $\frac{1}{16\pi}$  m/h, que é aproximadamente 2 cm/h.

- 6) Dois carros  $A$  e  $B$  trafegam em estradas retas e perpendiculares, seguindo em direção a um cruzamento, com velocidades constantes de 90 km/h e 110 km/h respectivamente. Com que velocidade os carros se aproximam um do outro no instante em que  $A$  está a 600 e  $B$  a 800 metros do cruzamento?

**Resolução.** Os carros estão se aproximando do ponto de cruzamento  $P$ . Sejam  $x$  e  $y$  as distâncias dos carros  $A$  e  $B$  ao ponto  $P$ , respec-

tivamente, num determinado instante. Tanto  $x$  quanto  $y$  e também  $z$  (a distância entre  $A$  e  $B$ ) são funções do tempo  $t$ .

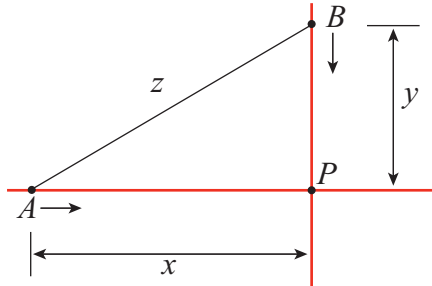


Figura 5.4

Por que o sinal de menos?

Dados do problema:  $\frac{dx}{dt} = -90$ ;  $\frac{dy}{dt} = -110$ .

Pede-se:  $\frac{dz}{dt}$  quando  $x = 0,6$  km e  $y = 0,8$  km.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo cujos lados medem  $x$ ,  $y$  e  $z$ , temos:  $x^2 + y^2 = z^2$ . Agora derivemos ambos os lados da igualdade em relação a  $t$ :

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{z}.$$

Para  $x = 0,6$  e  $y = 0,8$ , tem-se  $z = 1$  (Teorema de Pitágoras).

$$\text{Logo, } \frac{dz}{dt} = \frac{0,6(-90) + 0,8(-110)}{1} = -142.$$

**Resposta.** Naquele instante, os carros se aproximam com uma velocidade de 142 km/h.

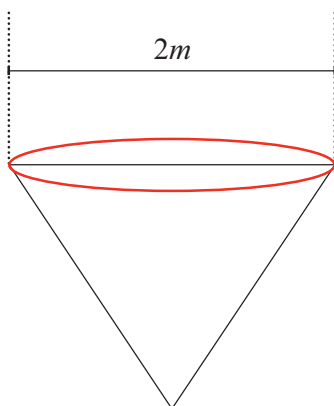


Figura 5.5

## Exercícios propostos

- Um tanque tem a forma de um cone com o vértice para baixo. Sua altura é de 4 metros e o diâmetro da base mede 2 metros (Veja a Figura 5.5). Através de uma torneira, despeja-se água no tanque à taxa de  $1,5 \text{ m}^3$  por hora. Determine a velocidade com que sobe o nível da água no momento em que este está a 3 metros de altura.
- Um carro e um ônibus trafegam em rodovias retas e perpendiculares; com velocidades constantes de 100 km/h e 80 km/h respectivamente. O carro acabou de passar pelo cruzamento, en-

quanto o ônibus está se aproximando do cruzamento. Pergunta-se: No momento em que o carro já se afastou 3 km do cruzamento e o ônibus ainda está a 4 km deste, os dois estão se aproximando ou se afastando um do outro? Com que velocidade?

## 5.3 Máximos e mínimos

Existe uma grande variedade de problemas práticos cuja resolução requer o conhecimento do maior ou do menor valor que determina a função assume em todo o seu domínio ou em algum intervalo.

Quando se trata de funções bem conhecidas, como as afins, quadráticas, logarítmicas e exponenciais, recorreremos ao seu gráfico para obtermos tais informações.

Entretanto, a maior parte das funções requer justamente um estudo dos seus valores máximos e mínimos para se fazer o gráfico. Neste caso, utilizaremos a derivada como ferramenta principal.

**Definição 30.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $f$  assume um *valor máximo absoluto* em  $c \in D$ , se  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x \in D$ . Nesse caso, diremos que  $c$  é ponto do máximo absoluto de  $f$  e  $f(c)$  é o valor máximo absoluto de  $f$ . Dizemos que  $f$  assume um *valor mínimo absoluto* em  $c \in D$  se  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x \in D$ . Dessa forma,  $c$  é ponto de mínimo absoluto de  $f$  e  $f(c)$  é o valor mínimo absoluto de  $f$ .

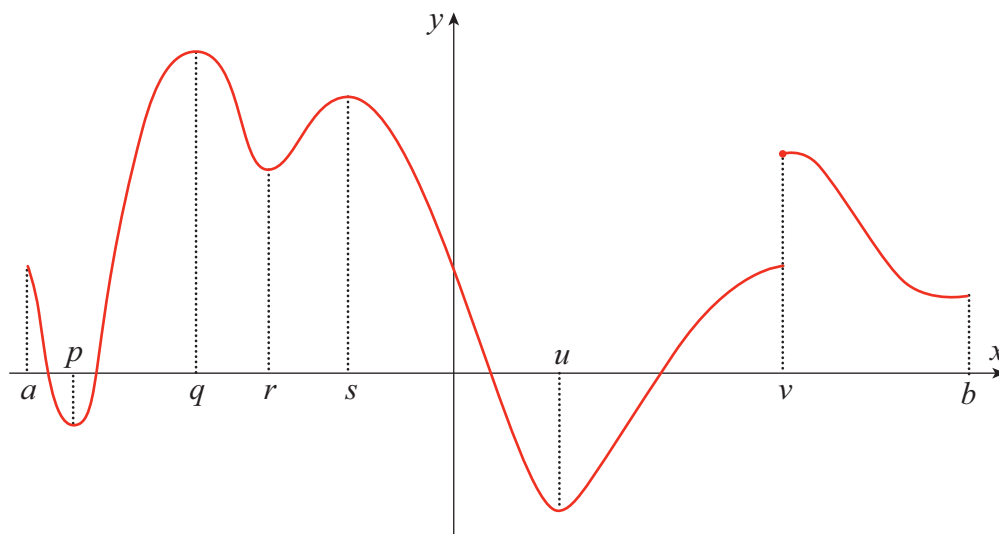


Figura 5.6

A figura representa o gráfico de uma função  $f$  definida no intervalo  $[a, b]$ .

Conforme a Definição 30, o ponto  $q$  é ponto de máximo absoluto de  $f$ , enquanto o ponto  $u$  é ponto de mínimo absoluto.

Observando o gráfico, percebe-se que o ponto  $s$  tem o aspecto de um ponto de máximo, bem como os pontos  $p$  e  $r$  têm aspecto de pontos de mínimo.

Na verdade, eles são pontos de máximo e de mínimo, respectivamente se restringirmos o domínio da função a um intervalo menor.

Por exemplo, restringindo o domínio de  $f$  ao intervalo  $(q, s)$ ,  $r$  é ponto de mínimo de  $f$ . Olhe para o gráfico, considerando apenas a parte dele correspondente ao intervalo  $(q, s)$ . Da mesma forma, se considerarmos  $f$  restrita ao intervalo  $(r, u)$ , então  $s$  é ponto de máximo de  $f$ .

Segue então a seguinte definição:

**Definição 31.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $c \in D$ . Dizemos que  $c$  é *ponto de máximo relativo ou local* de  $f$  quando existe um intervalo aberto  $J$  contendo  $c$  e tal que  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x \in J \cap D$ . Dizemos que  $c$  é *ponto de mínimo relativo ou local* de  $f$  quando existe um intervalo aberto  $I$  contendo  $c$  e tal que  $f(c) \leq f(x)$ , p/ todo  $x \in I \cap D$ .

Considerando ainda a função representada graficamente na figura, concluímos que os pontos  $p$  e  $r$  são pontos de mínimo relativo, enquanto  $s$  é ponto de máximo relativo.

**E o ponto  $v$ ?**

Olhe com atenção e você verá que se trata de um ponto de máximo relativo. De fato, tomando por exemplo  $J = (u, b)$ , temos que  $f(v) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in J$ .

**Observação.** Os valores máximos e mínimos absolutos de uma função são também chamados de *extremos absolutos*. De maneira aná-

O aspecto do gráfico no ponto de abscissa  $v$  é diferente porque  $f$  é descontínua em  $v$ , mas isto não impede  $v$  de ser ponto de máximo relativo.

loga, os valores máximos e mínimos relativos são chamados de *extremos relativos*. Os extremos absolutos da função representada na figura são  $f(q)$  e  $f(u)$ . Os seus extremos relativos são  $f(p)$ ,  $f(r)$ ,  $f(s)$  e  $f(v)$ .

### Exemplos:

1)  $f(x) = 5 - x^2$ .

Note que  $f(x) \leq 5$  para todo  $x$  real e que  $f(x) = 5$  se, e somente se,  $x = 0$ . Podemos escrever:  $f(0) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $f$  atinge o seu valor máximo, que é 5, no ponto 0. Assim, o ponto de máximo absoluto de  $f$  é 0 e o valor máximo absoluto é 5. E o valor mínimo absoluto de  $f$ ? Note que  $f(x)$  assume valores negativos arbitrariamente grandes em módulo, desde que  $x$  seja suficientemente grande em módulo. Mais precisamente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . Logo,  $f$  não assume valor mínimo absoluto.

2)  $g(x) = (x - 3)^2 + 14$ .

Como  $g(x) \geq 14$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $g(x) = 14$  se, e somente se,  $x = 3$ , concluímos que  $g$  possui um *ponto* de mínimo absoluto que é 3 e o seu *valor* mínimo absoluto é 14. Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , concluímos que  $g$  não assume valor máximo absoluto.

3)  $h(x) = \text{sen } x$ .

Observando seu gráfico, concluímos:

- a)  $h$  tem uma infinidade de pontos de máximo absoluto, todos da forma  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Seu valor máximo absoluto é 1.
- b)  $h$  tem uma infinidade de pontos de mínimo absoluto, todos da forma  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Seu valor mínimo absoluto é -1.

4)  $f: [-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{se } -5 \leq x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } 1 \leq x < 5 \end{cases}$

Reveja no livro de Introdução ao Cálculo o gráfico da função seno (senóide).



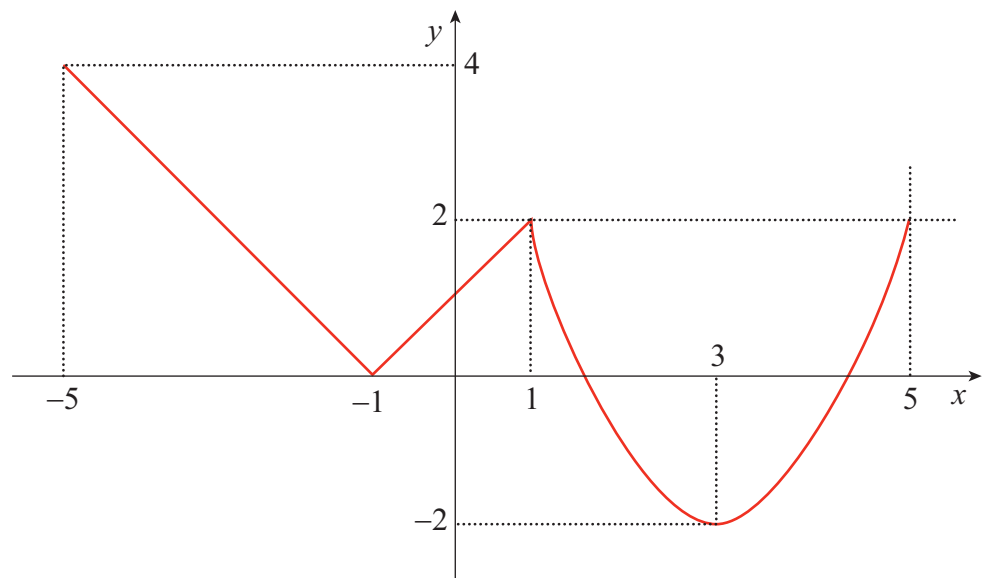


Figura 5.7

Observando o gráfico, podemos concluir que:

- a)  $f$  assume seu valor máximo absoluto, que é 4, no ponto -5. E assume o seu valor mínimo absoluto, que é -2, no ponto 3.
- b)  $f$  possui ainda um ponto de máximo relativo que é 1 e um ponto de mínimo relativo que é -1.

Bem, nem sempre as funções a serem analisadas são tão simples. Precisamos de alguns teoremas. O próximo fornece uma condição *necessária* para que o ponto seja um ponto de máximo ou de mínimo relativo.

**Teorema 29.** Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $(a,b)$  e  $c \in (a,b)$  um ponto de máximo ou de mínimo relativo de  $f$ . Se  $f$  é derivável em  $c$ , então  $f'(c) = 0$ .

A demonstração para ponto de máximo é análoga.

**Demonstração.** Suponhamos que  $c$  é ponto de mínimo relativo de  $f$  e que  $f$  é derivável em  $c$ .

Pela Definição 31, existe um intervalo aberto  $I$  tal que  $c \in I$  e  $f(c) \leq f(x)$ , para todo  $x \in I$ . (Podemos supor  $I \subset (a,b)$ ).

Para  $x \in I$  e  $x < c$ , temos  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ , pois  $f(x) \geq f(c)$  e

$x < c$ . Logo,  $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ , isto é,  $f'_-(c) \leq 0$ .

Para  $x \in I$  e  $x > c$ , temos  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \text{ isto é, } f'_+(c) \geq 0.$$

Como, por hipótese,  $f'(c)$  existe, temos  $0 \leq f'_+(c) = f'_-(c) \leq 0$ , ou seja,  $f'_+(c) = f'_-(c) = 0$ . Logo,  $f'(c) = 0$ . ■

**Observação.** Do Teorema 29, decorre que se  $f(c)$  é um extremo relativo então  $f'(c)$  ou não existe ou vale zero.

**Observação.** Volte ao exemplo 4. No ponto 3, que é ponto de mínimo relativo, a derivada é zero. Nos pontos -1 e 1, que são pontos de mínimo e máximo respectivamente, a derivada não existe. (Por quê?)

**Observação.** A recíproca do Teorema 29 é falsa. Por exemplo, se  $f(x) = x^3$ , então  $f'(0) = 0$ , mas  $f$  não possui extremo relativo em 0.

**Definição 32.** Um ponto  $c$  do domínio de  $f$  chama-se **ponto crítico** de  $f$  se  $f'(c) = 0$  ou se  $f'(c)$  não existe.

---

**Ponto crítico**

Os pontos críticos de uma função são os "candidatos" a pontos de máximo ou mínimo relativo.

---

## Exercício resolvido

7) Determine os pontos críticos das funções:

a)  $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 156$

**Resolução.**  $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$ , que existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Vamos resolver a equação  $f'(x) = 0$ :

$$x(4x^2 - 3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}.$$

**Resposta.** Os pontos críticos de  $f$  são:  $0, \frac{3 - \sqrt{105}}{8}$  e  $\frac{3 + \sqrt{105}}{8}$ .

b)  $g(x) = \sqrt[3]{x} - x$ .

**Resolução.**  $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1$ . Note que  $g'(x)$  não existe para  $x = 0$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 3\sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow 1 = 27x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{27}}, \text{ ou seja, } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

**Resposta.** Os pontos críticos de  $g$  são:  $0, -\frac{\sqrt{3}}{9}$  e  $\frac{\sqrt{3}}{9}$ .

## Exercícios propostos

Determine os pontos críticos de:

3)  $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x - 8$

4)  $g(x) = x + \cos 2x; \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

## 5.4 Extremos absolutos em intervalos fechados

O Teorema de Weierstrass (Teorema 24) estabelece que toda função *contínua* definida num intervalo *fechado*  $[a, b]$  assume o seu valor máximo e o seu valor mínimo absoluto.

Esses valores podem ocorrer nos extremos  $a$  e  $b$  ou nos pontos críticos pertencentes ao intervalo  $(a, b)$ . Para encontrá-los, procedemos assim:

- determinamos os pontos críticos de  $f$  em  $(a, b)$ ;
- calculamos  $f(a)$ ,  $f(b)$  e a imagem de cada um desses pontos críticos;
- o maior dos valores encontrados no item  $b$  é o valor máximo absoluto e o menor é o valor mínimo absoluto de  $f$ .

### Exercício resolvido

- 8) Determine os extremos absolutos e os pontos em que eles ocorrem:

a)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 1; \quad x \in [-3, 6]$ .

**Resolução.** Como exercício, verifique que os pontos críticos de  $f$  no intervalo  $(-3, 6)$  são  $-2$  e  $3$ . Agora calculamos as imagens:

$$f(-3) = \frac{11}{2}; \quad f(-2) = \frac{25}{3}; \quad f(6) = 19; \quad f(3) = -\frac{25}{2}.$$

**Conclusão.** O ponto de máximo absoluto de  $f$  é  $6$  e o valor máximo absoluto é  $19$ . O ponto de mínimo absoluto de  $f$  é  $3$  e o valor mínimo absoluto é  $-\frac{25}{2}$ .

b)  $g : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$ .

**Resolução.** Como exercício, verifique que os pontos críticos de  $g$  em  $(-3, 3)$  são 0, 2 e -2.

Imagens:  $g(0) = \sqrt[3]{16}$ ;  $g(-2) = g(2) = 0$ ;  $g(-3) = g(3) = \sqrt[3]{25}$ .

**Conclusão.** Pontos de máximo absoluto: 3 e -3; Valor máximo absoluto:  $\sqrt[3]{25}$ ; Pontos de mínimo absoluto: 2 e -2 e Valor mínimo absoluto: 0.

## Exercícios propostos

Determine os extremos absolutos de  $f$  e os pontos em que eles ocorrem:

5)  $f(x) = -5x + 7; \quad x \in [-2, 10];$

6)  $f(x) = x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 10; \quad x \in [-1, 2];$

7)  $f(x) = 2\text{sen } x + \cos 2x; \quad |x| \leq \pi.$

**Teorema do Valor Médio:** Esse é um teorema fundamental em Cálculo. Para demonstrá-lo, precisamos de um outro resultado, conhecido como Teorema de Rolle, que é na verdade um caso particular do Teorema do Valor Médio.

**Teorema 30. Teorema de Rolle.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$  e tal que  $f(a) = f(b)$ . Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

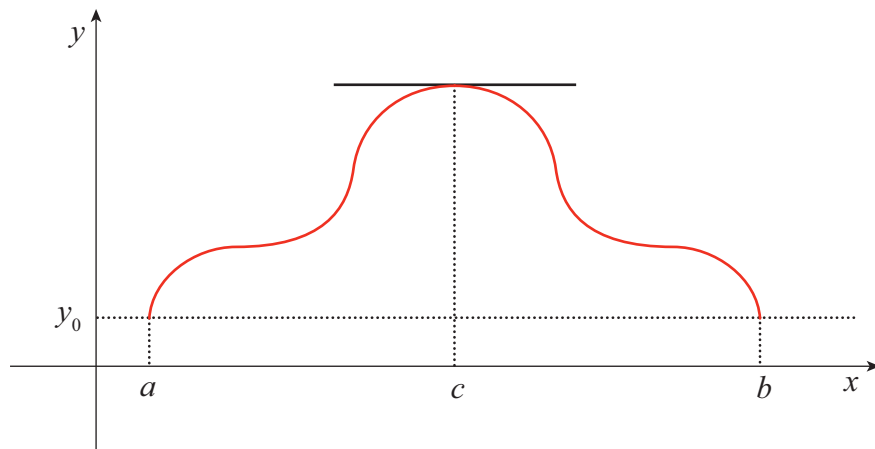


Figura 5.8

**Demonstração.** Se por acaso  $f$  é a função constante, então  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in (a, b)$  e qualquer ponto de  $(a, b)$  pode ser tomado como  $c$ .

Suponhamos que  $f$  não é constante. Seja  $y_0 = f(a) = f(b)$ . Pelo Teorema 24,  $f$  assume seu valor máximo e o seu valor mínimo em  $[a, b]$ .

Como  $f$  não é constante, existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) \neq y_0$ .

Suponhamos  $f(x) > y_0$ . Então  $f$  assume seu valor máximo num ponto  $c \in (a, b)$ . Sendo  $f$  derivável em  $c$ , o Teorema 29 determina que  $f'(c) = 0$ .

Suponhamos  $f(x) < y_0$ . Então  $f$  assume seu valor mínimo num ponto  $c \in (a, b)$  e também  $f'(c) = 0$ .

Em qualquer caso, **existe**  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ . ■

Atenção: pode haver mais do que um ponto  $c$  em  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Observação.** Veja como é importante observar as hipóteses do Teorema de Rolle:

$$\text{Considere } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

Essa função é contínua e derivável em  $(0, 1)$  e  $f(0) = f(1)$ . Mas não existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$ , pois  $f'(x) = 1; \forall x \in (0, 1)$ . É que  $f$  é descontínua no ponto 1.

## Exercício resolvido

- 9) Verifique se as hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas e, neste caso, encontre o(s) ponto(s) que satisfaz(em) a tese.

$$f: \left[ \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x^4 - 2x^2.$$

**Resolução.**  $f$  é contínua em  $\left[ \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$  por ser polinômio;  $f$  é derivável em  $\left( \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  também por ser polinômio;  $f\left(\frac{-1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$  por ser  $f$  uma função par. Logo, existe  $c \in \left( \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  tal que  $f'(c) = 0$ .  
 $f'(x) = 4x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 1$  ou  $x = -1$ .

Os pontos 1 e -1 não pertencem ao intervalo  $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

**Resposta.**  $c = 0$  satisfaz a tese.

**Teorema 31.** Teorema do Valor Médio: Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Interpretação Geométrica:** Sejam  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$ . O teorema afirma que, satisfeitas as hipóteses, existe pelo menos um ponto  $Q = (c, f(c))$  sobre o gráfico de  $f$ , com  $a < c < b$ , tal que a reta tangente ao gráfico em  $Q$  é paralela à reta secante que passa por  $A$  e  $B$ .

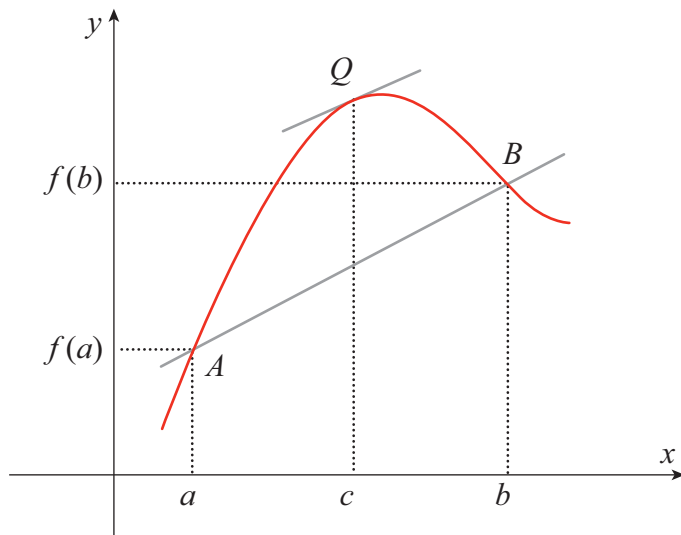


Figura 5.9

**Demonstração.** Vamos definir estrategicamente uma função  $h$  que satisfaça as hipóteses do Teorema de Rolle. Seja  $g$  a função cujo gráfico é a reta que passa por  $A$  e  $B$ , isto é,

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Seja  $h$  a função que atribui a cada  $x \in [a, b]$  a diferença entre  $f(x)$  e  $g(x)$ , isto é,  $h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$ . Afirmamos que  $h$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle.

Atenção: pode haver mais do que um ponto que satisfaz a tese do teorema.

Com efeito, sendo  $h$  a soma de uma função polinomial com  $f$ , temos por hipótese que  $h$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ .

Além disso, é fácil constatar que  $h(a) = h(b) = 0$ . Pelo Teorema de Rolle, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ , ou seja,  $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ .

$$\text{Portanto, } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

## Exercício resolvido

- 10) Verifique se  $f$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio e, em caso afirmativo, encontre um ponto  $c$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}:$$

$$f: [-6, 10] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sqrt{100 - x^2}.$$

**Resolução.** Por teoremas já vistos, segue que  $f$  é contínua em  $[-6, 10]$  e derivável em  $(-6, 10)$ . Logo, existe  $c \in (-6, 10)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(10) - f(-6)}{10 + 6} = -\frac{1}{2}. \text{ Mas, } f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{100 - c^2}}. \text{ Então,}$$

$$\frac{-c}{\sqrt{100 - c^2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2c = \sqrt{100 - c^2} \Leftrightarrow 4c^2 = 100 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = 20 \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{5}$$

A igualdade  $2c = \sqrt{100 - c^2}$  revela que  $c$  não é negativo. Logo,  $c = 2\sqrt{5}$ .

Uma aplicação imediata desse teorema é a demonstração de uma certa *recíproca* do já conhecido resultado: A derivada de uma função constante é zero em todo ponto.

**Corolário.** Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é constante.

**Demonstração.** Seja  $x \in (a, b)$ . Vamos mostrar que  $f(x) = f(a)$ . Como  $f$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio em  $[a, x]$ , existe  $c \in (a, x)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Como  $f'(c) = 0$ , segue que  $f(x) = f(a)$ . Assim,  $f(x) = f(a)$  para todo  $x$  em  $[a, b]$  e  $f$  é constante.

■

## 5.5 Funções crescentes e decrescentes

Lembramos que uma função  $f$ , definida no intervalo  $J$ , é crescente se, para quaisquer  $x_1, x_2 \in J$ , tais que  $x_1 < x_2$ , tem-se  $f(x_1) < f(x_2)$ . E  $f$  é decrescente se  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) > f(x_2)$ , para quaisquer  $x_1, x_2 \in J$ .

Nem sempre é simples e prático usar a definição para verificar se uma função é crescente ou decrescente. Uma das consequências do Teorema do Valor Médio é o critério que permite fazer essa verificação através do sinal da derivada. Mais precisamente:

**Teorema 32.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Então: (a) Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ ; (b) Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .

**Demonstração.** Demonstraremos o item (a). A demonstração de (b) é análoga e fica como exercício. Sejam  $x_1$  e  $x_2$  pontos tais que  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ . Precisamos mostrar que  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Por hipótese,  $f$  é contínua em  $[x_1, x_2]$  e derivável em  $(x_1, x_2)$ . Assim,  $f$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio em  $[x_1, x_2]$ .

Logo, existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , ou seja,  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ . Sendo  $x_2 - x_1 > 0$  e  $f'(c) < 0$  por hipótese, segue que  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , isto é,  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Concluimos que  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ . ■

**Observação.** A recíproca desse teorema é verdadeira em parte, pois uma função pode ser crescente (ou decrescente) e ter derivada nula em alguns pontos. Por exemplo,  $f(x) = x^3$  é crescente em  $(-\infty, +\infty)$ , mas  $f'(0) = 0$ .

### Exercício resolvido

- 11) Seja  $f(x) = x^4 e^{-x^2}$ . Determine os intervalos em que  $f$  é crescente e aqueles em que  $f$  é decrescente.



**Resolução.** Conforme o Teorema 32, devemos fazer um estudo do sinal de  $f'(x)$ . Para isso, é interessante decompor  $f'$  em um produto de fatores:  $f'(x) = 2x^3 e^{-x^2} (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$ . (Verifique!)

Temos  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = \sqrt{2}$  ou  $x = -\sqrt{2}$ .

Como  $f'$  é contínua, o Teorema do Valor Intermediário garante que os únicos pontos em que pode haver mudança de sinal de  $f'$  são  $0$ ,  $-\sqrt{2}$  e  $\sqrt{2}$ , ou seja,  $f'(x)$  tem um sinal específico em cada um dos intervalos  $(-\infty, -\sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{2})$  e  $(\sqrt{2}, \infty)$ .

Cada fator  $2x^3 e^{-x^2}$ ,  $\sqrt{2} - x$  e  $\sqrt{2} + x$  também possui um sinal específico em cada um desses intervalos. Os sinais desses fatores podem ser colocados num quadro. A última linha do quadro será preenchida com os sinais de  $f'(x)$ , obtidos através da regra do sinal do produto.

|  | $-\sqrt{2}$ | $0$ | $\sqrt{2}$ |   |
|--|-------------|-----|------------|---|
| $2x^3 e^{-x^2}$                                      | -           | -   | +          | + |
| $\sqrt{2} - x$                                       | +           | +   | +          | - |
| $\sqrt{2} + x$                                       | -           | +   | +          | + |
| $f'(x) = 2x^3 e^{-x^2} (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$ | +           | -   | +          | - |

**Resposta.** Sendo  $f'$  positiva nos intervalos  $(-\infty, -\sqrt{2})$  e  $(0, \sqrt{2})$ , segue que  $f$  é crescente em  $(-\infty, -\sqrt{2}]$  e em  $[0, \sqrt{2}]$ . Sendo  $f'$  negativa nos intervalos  $(-\sqrt{2}, 0)$  e  $(\sqrt{2}, \infty)$ , segue que  $f$  é decrescente em  $[-\sqrt{2}, 0]$  e em  $[\sqrt{2}, +\infty)$ .

## Exercício proposto

- 8) Determine os intervalos em que  $f$  é crescente e aqueles em que  $f$  é decrescente, sendo  $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 40x + 33$ .

## 5.6 Extremos relativos – critérios para encontrá-los

Um ponto crítico pode ser um ponto de máximo relativo, um ponto de mínimo relativo ou nenhum desses. Com auxílio do teorema anterior, estabeleceremos o primeiro critério para determinar se um ponto crítico é ponto de máximo ou de mínimo relativo.

No teorema que segue, a expressão “ $f'$  é positiva à esquerda de  $c$ ” significa que existe  $\delta > 0$  tal que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (c - \delta, c)$  e a expressão “ $f'$  é positiva à direita de  $c$ ” significa que existe  $\delta > 0$  tal que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (c, c + \delta)$ . Analogamente quando  $f'$  é negativa.

**Teorema 33. (Teste da Derivada Primeira).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $c \in (a, b)$ . Suponhamos que  $f$  é derivável em  $(a, b)$  exceto talvez em  $c$ .

- a) Se  $f'$  é positiva à esquerda de  $c$  e negativa à direita de  $c$ , então  $c$  é ponto de máximo relativo.
- b) Se  $f'$  é negativa à esquerda de  $c$  e positiva à direita de  $c$ , então  $c$  é ponto de mínimo relativo.

**Demonstração.** Demonstraremos o item (a). A demonstração de (b) é análoga.

Por hipótese e pelo Teorema 32, existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é crescente em  $[c - \delta, c]$  e decrescente em  $[c, c + \delta]$ .

Logo,  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ , o que caracteriza  $c$  como ponto de máximo relativo de  $f$ .

■

## Exercício resolvido

- 12) Determine os pontos de máximo e mínimo relativos da função bem como os seus extremos relativos.

a)  $f(x) = 12x^5 + 27x^4 - 8x^3 - 1$ .

**Resolução.** Sendo  $f'(x) = 60x^4 + 108x^3 - 24x^2 = 12x^2(5x^2 + 9x - 2)$ ,

temos  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = -2$  ou  $x = \frac{1}{5}$ . Portanto, os pontos críticos de  $f$  são  $0$ ,  $-2$  e  $\frac{1}{5}$ .

Para aplicar o Teorema 33, devemos examinar o sinal de  $f'$  à esquerda e à direita de cada um desses pontos.

Convém fatorar  $f'$ :

$$f'(x) = 12x^2 \cdot 5(x+2) \left(x - \frac{1}{5}\right) = 60x^2(x+2) \left(x - \frac{1}{5}\right).$$

Os 3 pontos críticos dividem  $\mathbb{R}$  em 4 intervalos e cada fator de  $f'$  tem um único sinal em cada intervalo. Confira estes sinais e os de  $f'$  no quadro abaixo:

|                   |   |    |   |               |   |
|-------------------|---|----|---|---------------|---|
|                   |   | -2 | 0 | $\frac{1}{5}$ |   |
| $60x^2$           | + | +  | + | +             | + |
| $x - \frac{1}{5}$ | - | -  | - | +             | + |
| $x + 2$           | - | +  | + | +             | + |
| $f'(x)$           | + | -  | - | +             | + |

**Ponto -2:**  $f'$  é positiva à esquerda e negativa à direita de  $-2$ . Logo,  $f$  passa de crescente (à esquerda de  $-2$ ) a decrescente (à direita de  $-2$ ), o que caracteriza um ponto de máximo relativo.

**Ponto 0:**  $f'$  não muda de sinal neste ponto. Quer dizer,  $f$  é decrescente à esquerda e continua decrescente à direita de 0. Logo, 0 não é ponto de máximo nem de mínimo relativo.

**Ponto  $\frac{1}{5}$ :** O quadro de sinais mostra que  $\frac{1}{5}$  é ponto de mínimo relativo, conforme o Teste da Derivada Primeira.

**Resposta.**  $f$  possui um ponto de máximo relativo que é  $-2$  e um ponto de mínimo relativo que é  $\frac{1}{5}$ . Os extremos relativos de  $f$  são:

$$f(-2) = 111 \text{ e } f\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{3178}{3125}.$$

b)  $f(x) = x - 3\sqrt[3]{(x-4)^2}$ .

**Resolução Parcial.**  $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x-4}}$ . Os pontos críticos de  $f$  são 4 e 12. (Verifique isto!)

Para analisar o sinal de  $f'$ , escrevemos:  $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x-4} - 2}{\sqrt[3]{x-4}}$ .

|                   |   |   |   |    |   |
|-------------------|---|---|---|----|---|
|                   |   | 4 |   | 12 |   |
|                   |   | • |   | •  |   |
| $\sqrt[3]{x-4}-2$ | - |   | - |    | + |
| $\sqrt[3]{x-4}$   | - |   | + |    | + |
| $f'(x)$           | + |   | - |    | + |

Pelo exposto no quadro de sinais de  $f'$  e pelo Teorema 33, concluímos que 4 é o ponto de máximo relativo e 12 é o ponto de mínimo relativo. Os extremos relativos de  $f$  são  $f(4) = 4$  e  $f(12) = 0$ .

$$c) f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 3 & \text{se } 0 < x \leq 2. \\ -x + 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

**Resolução.** Observe inicialmente que o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}$ . Temos:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 6x & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x < 2 \\ -1 & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

Verifique que  $f$  não é derivável nos pontos 0 e 2, o que os caracteriza como pontos críticos. Para encontrar os demais pontos críticos, façamos  $f'(x) = 0$ :

$$6x^2 + 6x = 0 \text{ e } x < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ e } x < 0 \Rightarrow x = -1$$

$$2x = 0 \text{ e } 0 < x < 2 \Rightarrow x = 0 \text{ e } 0 < x < 2 \text{ (impossível).}$$

Portanto, os pontos críticos de  $f$  são  $-1, 0$  e  $2$ .

**Ponto -1:** Escrevendo  $f'(x) = 6x(x+1)$ , percebemos que  $f'(x) > 0$  se  $x < -1$  e  $f'(x) < 0$  se  $x > -1$ .

Logo,  $-1$  é ponto de máximo relativo.

**Pontos 0 e 2:** Quando uma função está definida por mais de uma sentença, devemos ter o cuidado de examinar se ela é contínua naqueles pontos críticos em que ela é dada por uma expressão à esquerda e por outra à direita do ponto. No presente exemplo, tais pontos são 0 e 2.

O leitor deve verificar que  $f$  é contínua no ponto 2 e descontínua no ponto 0. Assim, não podemos usar o Teste da Derivada Primeira no ponto 0.

Quanto ao ponto 2, sendo  $f'(x) = 2x$  se  $0 < x < 2$  e  $f'(x) = -1$  se  $x > 2$ , temos que 2 é ponto de máximo relativo.

Observe o gráfico dessa função e note que o ponto 0 não é ponto de máximo nem de mínimo.

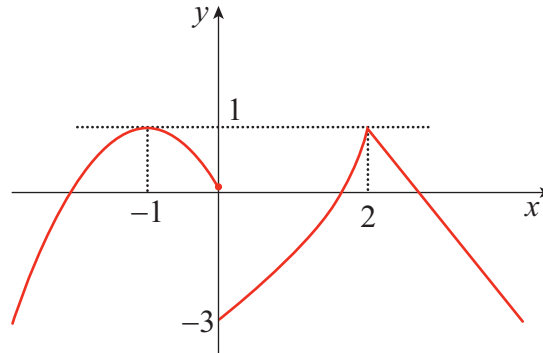


Figura 5.10

**Resposta.** A função tem dois pontos de máximo relativo:  $-1$  e  $2$ . O extremo relativo é  $f(-1) = f(2) = 1$ .

## Exercícios propostos

Obtenha os extremos relativos da função e os pontos em que eles ocorrem:

9)  $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$ ;

10)  $g(x) = 2x\sqrt{3-x}$ ;

11)  $h(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{se } x < -1 \\ x^2+1 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 7-x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ .

Além do Teste da Derivada Primeira para extremos relativos, existe o Teste da Derivada Segunda.

Em muitas situações, particularmente quando a função é polinomial, o Teste da Derivada Segunda é mais prático e mais fácil de ser aplicado, pois exige apenas o conhecimento do sinal da derivada segunda no ponto crítico. Por outro lado, se a derivada segunda não existir ou for nula naquele ponto, o teste não pode ser aplicado.

**Teorema 34. (Teste da Derivada Segunda).** Seja  $f$  uma função derivável num intervalo aberto que contém o ponto  $c$  e suponhamos que  $f'(c) = 0$ . Se existir  $f''(c)$ , então:

- a) Se  $f''(c) < 0$ , então  $c$  é ponto de máximo relativo de  $f$ .  
 b) Se  $f''(c) > 0$ , então  $c$  é ponto de mínimo relativo de  $f$ .

**Demonstração.** Vamos demonstrar o item (a). A demonstração de (b) é análoga e fica como exercício.

Temos como hipóteses:  $f$  é derivável num intervalo aberto  $I$  contendo  $c$ ,  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) < 0$ .

A tese é:  $c$  é ponto de máximo relativo de  $f$ .

Por definição,  $f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c}$ .

Como  $f''(c) < 0$ , esse limite é negativo, o que garante a existência de um número positivo  $\delta$  tal que  $(c - \delta, c + \delta) \subset I$  e  $\frac{f'(x)}{x - c} < 0$  para todo  $(c - \delta, c + \delta) - \{c\}$ . Disto decorrem os seguintes fatos:

Se  $c - \delta < x < c$ , então  $f'(x) > 0$ , pois  $x - c < 0$ ; Se  $c < x < c + \delta$ , então  $f'(x) < 0$ , pois  $x - c > 0$ . Pelo Teorema 33,  $c$  é ponto de máximo relativo de  $f$ .

■

## Exercício resolvido

- 13) Determine os pontos de máximo e de mínimo relativo das funções:

a)  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 72x^2 + 87$

**Resolução.**  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 144x = 12x(x^2 + x - 12)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Vamos examinar cada um desses pontos críticos através do Teorema 34:

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 144.$$

**Ponto 0:**  $f''(0) < 0$ . Logo, 0 é ponto de máximo relativo.

**Ponto -4:**  $f''(-4) > 0$ . Logo, -4 é ponto de mínimo relativo.

**Ponto 3:**  $f''(3) > 0$ . Logo, 3 é ponto de mínimo relativo.

b)  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f(x) = \sin^2 3x$

**Resolução.**  $f'(x) = 6\sin 3x \cos 3x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos 3x = 0;$$

$$\begin{aligned} \sin 3x = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow 3x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x = \pi \quad \text{ou} \quad 3x = -\pi \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad 3x = -\frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Os pontos críticos de  $f$  são:  $-\frac{\pi}{3}$ ,  $-\frac{\pi}{6}$ ,  $0$ ,  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{3}$ .

Para usar o Teorema 34, precisamos de  $f''(x)$ :

$f''(x) = 18(\cos^2 3x - \sin^2 3x)$ . (Verifique!) Se lembrarmos da fórmula  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ , poderemos escrever  $f''(x)$  de maneira mais simples:  $f''(x) = 18 \cos 6x$ . Aplicando  $f''$  a cada um dos pontos críticos encontrados, o leitor poderá constatar que:  $0$ ,  $\frac{\pi}{3}$  e  $-\frac{\pi}{3}$  são pontos de mínimo relativo;  $\frac{\pi}{6}$  e  $-\frac{\pi}{6}$  são pontos de máximo relativo.

c)  $f(x) = x^5 - x^4$

**Resolução.**  $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 = x^3(5x - 4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{5}.$$

Os pontos críticos de  $f$  são:  $0$  e  $\frac{4}{5}$ .

$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 = 4x^2(5x - 3).$$

**Ponto  $\frac{4}{5}$ :**  $f''\left(\frac{4}{5}\right) = 4 \cdot \frac{16}{25} \left(5 \cdot \frac{4}{5} - 3\right) > 0$ . Logo,  $\frac{4}{5}$  é ponto de mínimo relativo.

**Ponto  $0$ :**  $f''(0) = 0$ . Nesse caso, não podemos aplicar o Teorema 34. Devemos então usar o Teorema 33:  $f'(x) = x^3(5x - 4)$ . Percebemos que se  $x < 0$ , então  $f'(x) > 0$  e se  $0 < x < \frac{4}{5}$ , então  $f'(x) < 0$ .

Logo,  $0$  é ponto de máximo relativo de  $f$ .

## Exercícios propostos

Determine os pontos de máximo e de mínimo relativo das funções:

12)  $f(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 - 5x^3 + 21$ ;

13)  $g(x) = 2\text{sen } x + \cos 2x$ ;  $|x| \leq \pi$ .

## 5.7 Problemas que envolvem máximos e mínimos

Resolveremos, nessa seção, alguns problemas utilizando as seções 5.3 e 5.4. Em cada problema, teremos que lidar com mais de uma variável, e o primeiro passo será identificar qual dessas variáveis deve ser maximizada ou minimizada.

Tal variável deverá ser expressa como função de uma única variável independente para que possamos aplicar nossos conhecimentos sobre máximos e mínimos.

Acompanhe atentamente a resolução dos exercícios:

### Exercício Resolvido

- 14) Um fabricante deseja vender o seu produto em latas cilíndricas com capacidade para 1 litro. Quais as dimensões da lata mais econômica, isto é, daquela que requer menor quantidade de material em sua fabricação?

**Resolução.** Existem muitas (infinitas!) latas cilíndricas com capacidade de 1 litro. Seja  $R$  o raio da base e  $h$  a altura de uma delas. Precisamos minimizar a área total  $A$  da superfície da lata.

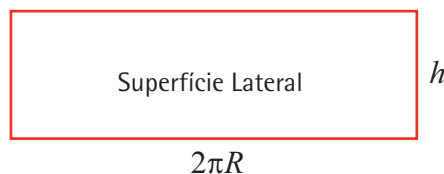


Figura 5.12

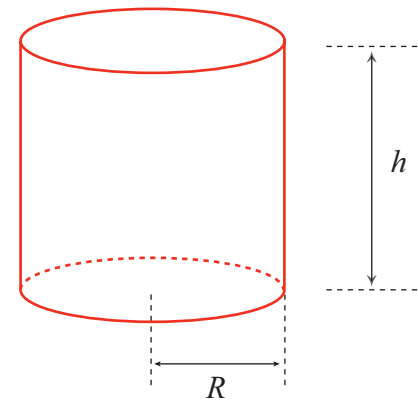


Figura 5.11

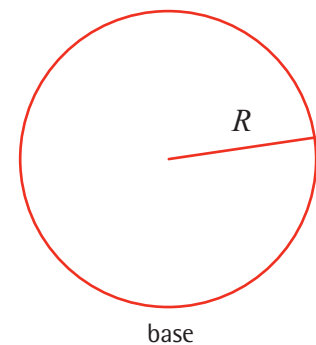


Figura 5.13



Note que  $A = 2\pi R h + 2\pi R^2$ .

Para escrever  $A$  como função de uma única variável, usamos o dado do problema que exige o volume de 1 litro, isto é,  $V = 1000 \text{ cm}^3$ . O volume do cilindro de raio  $R$  e altura  $h$  é dado por  $V = \pi R^2 h$ . Assim,  $\pi R^2 h = 1000$ .

Explicitando  $h$  em função de  $R$ , temos:  $h = \frac{1000}{\pi R^2}$ .

Logo,  $A(R) = 2\pi R \cdot \frac{1000}{\pi R^2} + 2\pi R^2$ , ou melhor,

$$A(R) = \frac{2000}{R} + 2\pi R^2; R \in (0, \infty).$$

Devemos, pois, encontrar o ponto de máximo absoluto dessa função.

Bem,  $A'(R) = -\frac{2000}{R^2} + 4\pi R$ , que existe para todo  $R > 0$ .

$$A'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Portanto, o único ponto crítico é  $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ .

Vamos aplicar o Teste da Derivada Segunda para verificar se ele é ponto de máximo ou de mínimo relativo.  $A''(R) = \frac{4000}{R^3} + 4\pi$ .

Como  $A''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) > 0$ , o Teorema 34 garante que é ponto de mínimo

relativo. Será um mínimo absoluto?

Como  $A'$  é contínua em  $(0, +\infty)$ , o Teorema do Valor Intermediário garante que  $A'$  não muda de sinal em qualquer um dos intervalos:

$$\left(0, \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) \text{ e } \left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}, +\infty\right).$$

Por ser  $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$  um ponto de mínimo e pelo Teorema 33, concluímos

que  $A'(R) < 0$  para todo valor de  $R$  em  $\left(0, \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$  e  $A'(R) > 0$

para todo valor de  $R$  em  $\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}, \infty\right)$ .

Portanto, a função  $A(R)$  é decrescente em  $\left(0, \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$  e crescente em  $\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}, \infty\right)$ . Isso permite concluir que  $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$  é ponto de mínimo absoluto de  $A$ .

Para esse valor de  $R$ , temos:

$$h = \frac{1000}{\pi R^2} = \frac{1000}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} = \frac{1000 \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}}{\pi \cdot \frac{500}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

**Resposta.** A lata mais econômica deverá ter altura igual ao diâmetro da base. Mais precisamente,  $R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \cong 5,42 \text{ cm}$  e

$$h = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \cong 10,84 \text{ cm}.$$

**Observação.** A análise feita no exemplo anterior para comprovar que o extremo relativo era de fato um extremo absoluto pode ser muitas vezes evitada se usarmos o seguinte teorema, cuja demonstração não será apresentada nesse texto.

**Teorema 35.** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $I$  que contém o ponto crítico  $c$ . Se  $f(c)$  é o único extremo relativo de  $f$  em  $I$ , então  $f(c)$  é um extremo absoluto de  $f$  em  $I$ .

## Exercícios resolvidos

- 15) Um fazendeiro deseja cercar um terreno plano e retangular para pastagem. O terreno situa-se à margem de um rio retificado, o qual será aproveitado como “cerca natural”. A cerca colocada nos 3 lados do terreno tem um custo de R\$ 12,00 por metro linear. Ele pretende ainda passar uma cerca perpendicular ao rio, a qual divide o terreno em duas partes iguais. Essa cerca é mais simples e custa R\$ 8,00 por metro linear. O fazendeiro dispõe de R\$ 8.000,00 para colocar toda a cerca. Calcule as dimensões do terreno a ser cercado que oferece a maior área de pastagem para o gado.

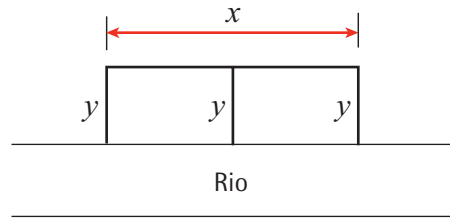
**Resolução.**

Figura 5.14

Sejam  $x$  e  $y$  as medidas, em metros, dos lados do terreno. (Veja a figura.) Precisamos maximizar a área  $A$  do retângulo de lados  $x$  e  $y$ .

Sabemos que  $A = x \cdot y$ . Para escrever  $A$  como função de uma só variável, usamos os dados do problema em relação ao custo da cerca. O custo total da cerca será:  $12x + 12y + 12y + 8y$ .

Como o fazendeiro pretende gastar R\$ 8.000,00, temos:

$12x + 32y = 8000$ , ou melhor,  $3x + 8y = 2000$ . Essa equação fornece uma relação entre  $x$  e  $y$ , por exemplo:

$$y = \frac{2000 - 3x}{8} \quad (1)$$

Assim,  $A = x \left( \frac{2000 - 3x}{8} \right)$ , ou seja,  $A(x) = 250x - \frac{3x^2}{8}$ ;

$$0 < x < \frac{2000}{3}.$$

Devemos encontrar o extremo absoluto dessa função.

$$A'(x) = 250 - \frac{3}{4}x; \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1000}{3}.$$

O único ponto crítico de  $A$  é  $\frac{1000}{3}$ .

$A''(x) = -\frac{3}{4}$ . Logo,  $A''\left(\frac{1000}{3}\right) < 0$  e pelo Teorema 34, segue que

$\frac{1000}{3}$  é ponto de máximo relativo de  $A$ .

Como a função  $A(x)$  é contínua em  $\left(0, \frac{2000}{3}\right)$  e tem um único ex-

tremo relativo, o Teorema 35 garante que  $\frac{1000}{3}$  é ponto de máximo absoluto de  $A$ .

De (1), temos que para  $x = \frac{1000}{3}$ ,  $y = 125$ .

**Resposta.** Para cercar o terreno de maior área possível com tal investimento, o fazendeiro deverá cercar  $\frac{1000}{3} = 333,33\text{m}$  paralelamente ao rio e 125 m perpendicularmente ao rio, oferecendo ao seu gado uma área de  $41.666,25\text{ m}^2$ .

- 16) Entre todos os cilindros circulares retos inscritos numa esfera de raio  $R$ , quais as dimensões daquele que tem o maior volume?

**Resolução.** Seja  $x$  o raio da base do cilindro inscrito e  $h$  a sua altura. Precisamos maximizar seu volume:  $V = \pi x^2 h$ .

Uma relação entre as variáveis  $x$  e  $h$  é fornecida pela figura, aplicando o Teorema de Pitágoras:  $R^2 = x^2 + \frac{h^2}{4}$ , ou seja,  $x^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ .

Logo,  $V(h) = \pi \left( R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$ ;  $0 < h < 2R$ .

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4}.$$

$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \pm \frac{2R}{\sqrt{3}}$ . Como  $h$  é positivo, segue que o único ponto crítico é  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ .

$V''(h) = -\frac{3\pi h}{2}$  e, sendo  $V''\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) < 0$ , segue pelo Teorema 34 que  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$  é ponto de máximo relativo de  $V$ .

Como  $V$  é contínua em  $(0, 2R)$ , segue pelo Teorema 35 que  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$  é ponto de máximo absoluto de  $V$ . Da relação  $x^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ , temos que, para  $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ .

**Resposta.** O cilindro de maior volume inscrito na esfera de raio  $R$  tem

raio  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ , altura  $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$  e volume igual a  $\pi x^2 h = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3$ , o

que equivale a  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  do volume da esfera, ou seja, cerca de 58%.

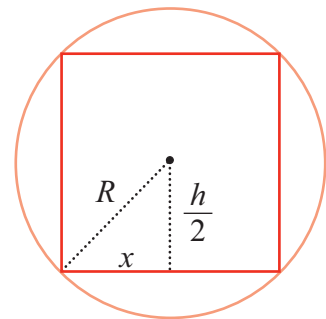


Figura 5.15

- 17) Uma ilha (ponto  $A$  da figura) encontra-se a 6 km de uma praia, cuja curvatura é desprezível. Seja  $B$  o ponto da praia que está mais próximo da ilha. Um hotel localiza-se a 12 km de  $B$ , no ponto  $C$ . Se um homem consegue remar a uma velocidade de 4 km/h e caminhar a uma velocidade de 6 km/h, em que lugar da praia ele deve desembarcar de seu barco para chegar ao hotel no menor tempo possível?

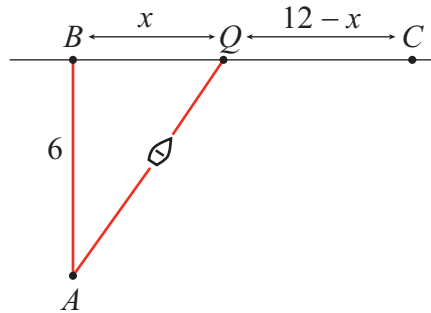


Figura 5.16

**Resolução.** Seja  $Q$  o ponto da praia, entre  $B$  e  $C$ , em que o homem deve desembarcar e seja  $x = \overline{BQ}$ . O problema pede a localização do ponto  $Q$ , que minimiza o tempo  $T$  gasto pelo homem para se deslocar da ilha ao hotel.

Ora,  $T = \frac{\overline{AQ}}{4} + \frac{\overline{QC}}{6} = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{4} + \frac{12-x}{6}$ . Portanto, a função a ser

minimizada é  $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{4} + \frac{12-x}{6}$ ;  $x \in [0, 12]$ .

Repare que o intervalo de variação de  $x$  é *fechado*. Trata-se, pois, de um problema de extremos absolutos num intervalo fechado. Assim, os candidatos a ponto de mínimo absoluto são os pontos críticos em  $(0, 12)$ , além de 0 e de 12.

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 36}} - \frac{1}{6}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 4\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow 36x^2 = 16(x^2 + 36) \Leftrightarrow x = \pm \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

A única solução da equação  $6x = 4\sqrt{x^2 + 36}$  que pertence ao intervalo  $(0, 12)$  é  $x = \frac{12}{\sqrt{5}}$ . Portanto, temos um único ponto crítico nesse intervalo, que é  $\frac{12}{\sqrt{5}}$ .

O valor mínimo de  $T(x)$  ocorre num dos 3 pontos: 0,  $\frac{12}{\sqrt{5}}$  ou 12.

Como  $T(0) = 3,5$ ,  $T\left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right) \cong 3,12$  e  $T(12) \cong 3,35$  segue que o valor mínimo de  $T$  ocorre para  $x = \frac{12}{\sqrt{5}} \cong 5,366$ .

**Resposta.** O homem deve desembarcar a 5.366 m de  $B$  e caminhar os 6.634 m restantes.

## Exercícios propostos

- 14) Entre todos os retângulos cujo perímetro vale 10 m, determine as dimensões daquele que tem a maior área.
- 15) Deseja-se fabricar caixas retangulares fechadas de base quadrada, com capacidade de  $1 \text{ m}^3$ . O custo por  $\text{m}^2$  do material da base e da tampa é de 8 reais e o dos lados, 5 reais. Encontre as dimensões da caixa mais econômica.
- 16) De todos os retângulos inscritos num círculo de raio  $R$ , qual é o que possui o maior perímetro?

## 5.8 Concavidade e pontos de inflexão

Observe as Figuras 5.17 e 5.18. Elas exibem o gráfico de funções  $f$  e  $g$ , ambas deriváveis e crescentes.

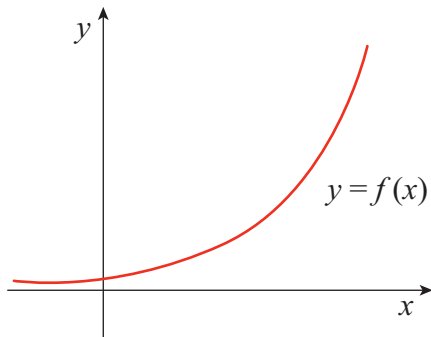


Figura 5.17

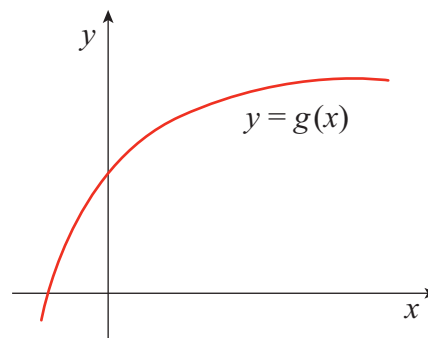


Figura 5.18

Você percebe alguma diferença entre o aspecto de uma e de outra curva?

Agora olhe para as Figuras 5.19 e 5.20. Os segmentos de reta que nelas aparecem são “pedaços” das retas tangentes ao gráfico nos pontos indicados.

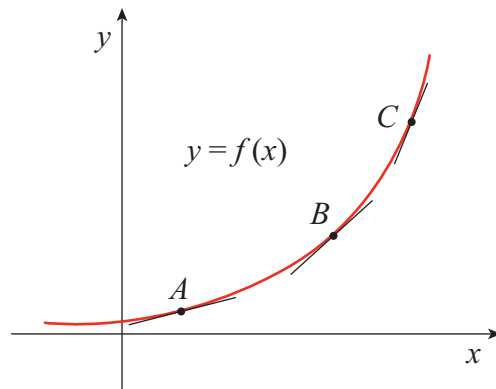


Figura 5.19

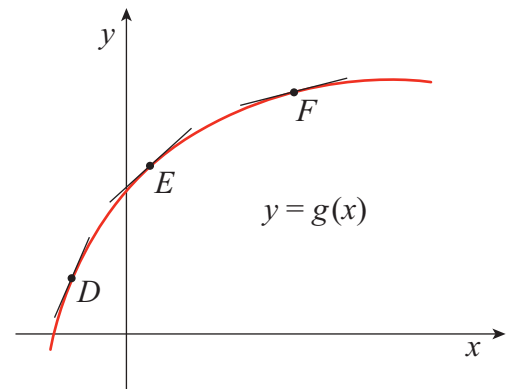


Figura 5.20

Lembre-se de que o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  é  $f'(a)$ .

A Figura 5.19 mostra que a inclinação das retas tangentes ao gráfico de  $f$  aumenta à medida que um ponto móvel se desloca sobre o gráfico, da esquerda para a direita.

Já a Figura 5.20 mostra que a inclinação das retas tangentes ao gráfico de  $g$  diminui nessas circunstâncias.

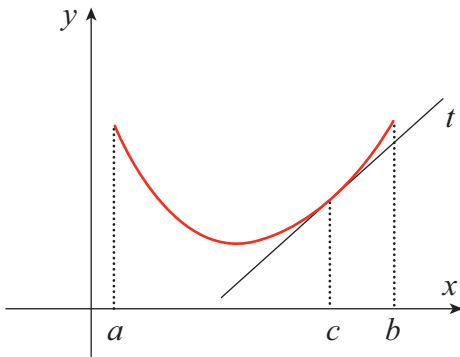


Figura 5.21

Em outras palavras,  $f'(x)$  aumenta à medida que  $x$  aumenta, enquanto  $g'(x)$  diminui. Em outras palavras, poderíamos dizer que  $f'$  é crescente, enquanto  $g'$  é decrescente.

**Definição 33.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Dizemos que o gráfico de  $f$  é *côncavo para cima* (c.p.c.) quando  $f'$  é crescente em  $(a, b)$ . Dizemos que o gráfico de  $f$  é *côncavo para baixo* (c.p.b.) quando  $f'$  é decrescente em  $(a, b)$ .

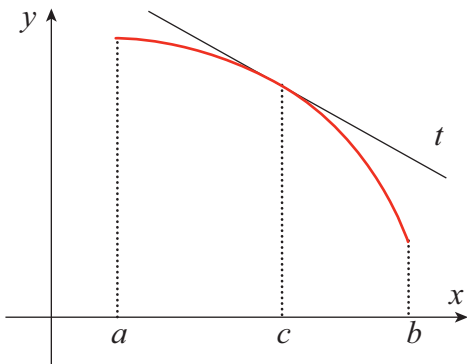


Figura 5.22

**Observação.** Prova-se que o gráfico de  $f$  é c.p.c. em  $(a, b)$  quando para todo ponto  $c \in (a, b)$ , o gráfico da restrição de  $f$  a um pequeno intervalo aberto centrado em  $c$  encontra-se *acima* da reta  $t$ , que é a tangente ao gráfico de  $f$  em  $(c, f(c))$ . (Veja a Figura 5.21.)

Analogamente, apenas trocando a palavra “acima” pela palavra “abaixo” se o gráfico é c.p.b. em  $(a, b)$ . (Veja a Figura 5.22.)

Observe atentamente o gráfico da função  $f$  na Figura 5.23.

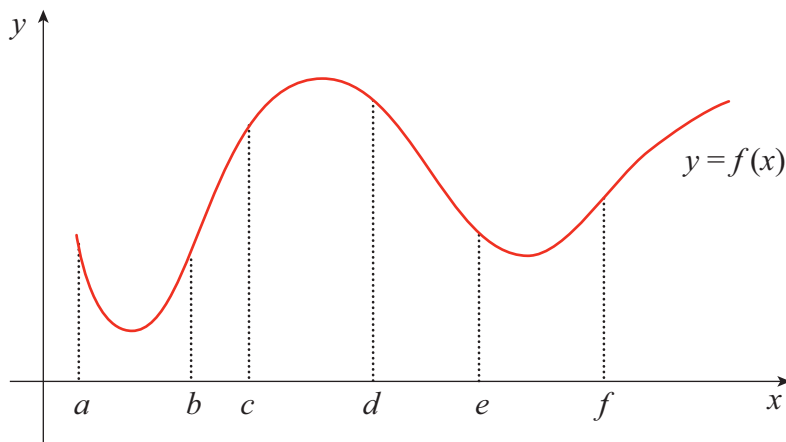


Figura 5.23

A última observação permite concluir que o gráfico de  $f$  é c.p.c. nos intervalos  $(a,b)$  e  $(e,f)$  e é c.p.b. no intervalo  $(c,d)$ . **E qual é a concavidade, por exemplo, no intervalo  $(b,c)$ ?**

| Tente responder!

Bem, através da simples análise do gráfico dificilmente encontrar-se-á uma resposta, até porque existe um ponto do gráfico, entre os pontos  $(b, f(b))$  e  $(c, f(c))$ , em que ocorre uma mudança de concavidade. Como poderíamos determinar esse ponto? Perguntas como essas serão respondidas por meio dos próximos dois teoremas.

### Exemplos:

- Seja  $f(x) = x^2$ . Como  $f'(x) = 2x$ , que é uma função crescente, concluímos que o gráfico de  $f$  é c.p.c. em qualquer intervalo  $(a,b)$ .
- Seja  $g(x) = \ln x$ . Como  $g'(x) = \frac{1}{x}$ , que é uma função decrescente em  $(0, +\infty)$  (Por quê?), segue que o gráfico de  $g$  é c.p.b. em qualquer intervalo  $(a,b)$  com  $a > 0$ .

$$c) \text{ Seja } h: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ \operatorname{cos} x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Então } h'(x) = \begin{cases} \operatorname{cos} x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$



Agora verifique que  $h'$  é crescente em  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  e decrescente em  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Conclua que o gráfico de  $h$  é c.p.c. em  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  e c.p.b. em  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Observação.** Recomendamos ao leitor fazer gráficos das funções  $f$ ,  $g$ ,  $h$  e checar através destes as respectivas conclusões.

**Teorema 36.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes derivável.

- a) Se  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então o gráfico de  $f$  é côncavo para cima em  $(a, b)$ .
- b) Se  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então o gráfico de  $f$  é côncavo para baixo em  $(a, b)$ .

**Demonstração.** Demonstraremos o item (a). A demonstração de (b) é análoga. Seja  $g = f'$ . Por hipótese  $g'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Pelo Teorema 32,  $g$  é crescente em  $(a, b)$ , ou seja,  $f'$  é crescente em  $(a, b)$ . Da Definição 33, segue que o gráfico de  $f$  é côncavo para cima em  $(a, b)$ . ■

**Observação.** Recomendamos também ao leitor checar o Teorema 36 nos exemplos anteriores.

**Definição 34.** O ponto  $(c, f(c))$  é chamado de *ponto de inflexão* do gráfico de  $f$  quando  $f$  for contínua em  $c$  e quando houver naquele ponto uma mudança de concavidade do gráfico.

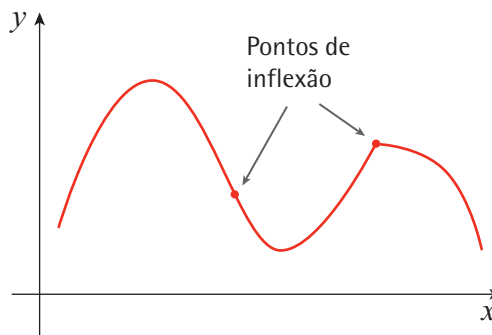


Figura 5.24

O próximo teorema será usado para determinar os candidatos a pontos de inflexão.

**Teorema 37.** Seja  $f$  uma função e  $(c, f(c))$  um ponto de inflexão do gráfico de  $f$ . Se  $f''(c)$  existe, então  $f''(c) = 0$ .

**Demonstração.** Suponhamos que no ponto  $(c, f(c))$  a concavidade do gráfico de  $f$  muda de **c.p.c a c.p.b.**

Então existem números reais  $a$  e  $b$  satisfazendo  $a < c < b$  e tais que  $f'$  é crescente no intervalo  $(a, c)$  e  $f'$  é decrescente em  $(c, b)$ .

Mas isso caracteriza  $c$  como ponto de máximo relativo de  $f'$ . Pelo Teorema 29, se  $f''(c)$  existe, então  $f''(c) = 0$ .

■

Se a mudança de concavidade fosse de c.p.b. a c.p.c., o argumento seria análogo.

**Observação.** O fato de ser  $f''(c) = 0$  não garante que  $(c, f(c))$  é ponto de inflexão. Por exemplo, se  $f(x) = x^4$ , então  $f''(0) = 0$ , mas  $(0, 0)$  não é ponto de inflexão. Verifique!

Portanto, para saber se o ponto  $(c, f(c))$  é ponto de inflexão, é necessário verificar se nele ocorre mudança de concavidade.

**Observação.** Se  $f''(c)$  não existe, então o ponto  $(c, f(c))$  pode ou não ser ponto de inflexão.

Por exemplo, se  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ , então  $f''(0)$  não existe e  $(0, 0)$  não é ponto de inflexão. Verifique!

Se  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ , então  $g''(0)$  também não existe, porém  $(0, 0)$  é ponto de inflexão do gráfico de  $g$ . Verifique!

## Exercícios resolvidos

- 18) Determine os pontos de inflexão do gráfico de  $f$  e os intervalos em que este é c.p.c. bem como aqueles em que ele é c.p.b..

a)  $f(x) = x^5 - 10x^4 + 2x + 11$

**Resolução.** Vamos usar os Teoremas 36 e 37, analisando a derivada segunda de  $f$ :

Bem,  $f''(x) = 20x^3 - 120x^2 = 20x^2(x - 6)$ .

Então  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 6$ . Portanto, temos dois candidatos a pontos de inflexão:  $(0, 11)$  e  $(6, f(6))$ . Para saber se de fato há mudança de concavidade no ponto, devemos estudar o sinal de  $f''$ :

|  |   |   |   |  |
|--|---|---|---|--|
|  | 0 |   | 6 |  |
|  | + | + | + |  |
|  | - | - | + |  |
|  | - | - | + |  |

O sinal de  $f''(x)$  permite concluir o seguinte: o gráfico de  $f$  é c.p.b. no intervalo  $(-\infty, 6)$  e c.p.c. em  $(6, \infty)$ .

**Resposta.** O único ponto de inflexão é  $(6, f(6))$ .

b)  $f(x) = (3x-1)^{\frac{5}{3}} - x^2$

**Resolução.** O leitor pode checar que  $f''(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{3x-1}} - 2$ . Note que  $f''(x)$  não existe para  $x = \frac{1}{3}$ . Por outro lado,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt[3]{3x-1}} = 2 \Leftrightarrow 10 = 2\sqrt[3]{3x-1} \Leftrightarrow 1000 = 8(3x-1) \Leftrightarrow x = 42$$

Assim, temos dois pontos candidatos a pontos de inflexão:  $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

e  $(42, f(42))$ . Convidamos o leitor a conferir o sinal de  $f''$  conforme especificado no quadro:

|  |               |   |    |  |
|--|---------------|---|----|--|
|  | $\frac{1}{3}$ |   | 42 |  |
|  | -             | + | -  |  |

Concluimos que o gráfico de  $f$  é c.p.c. em  $\left(\frac{1}{3}, 42\right)$  e c.p.b. em

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$  e em  $(42, +\infty)$ . O gráfico tem dois pontos de inflexão:

$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$  e  $(42, 1361)$ .

## Exercícios propostos

Faça uma análise da concavidade do gráfico da função e determine os eventuais pontos de inflexão:

17)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 5x - 1$ ;

18)  $g(x) = (5x - 2)^{\frac{4}{3}}$ .

## 5.9 Assíntotas verticais e horizontais

Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ , cujo gráfico aparece na Figura 5.25.

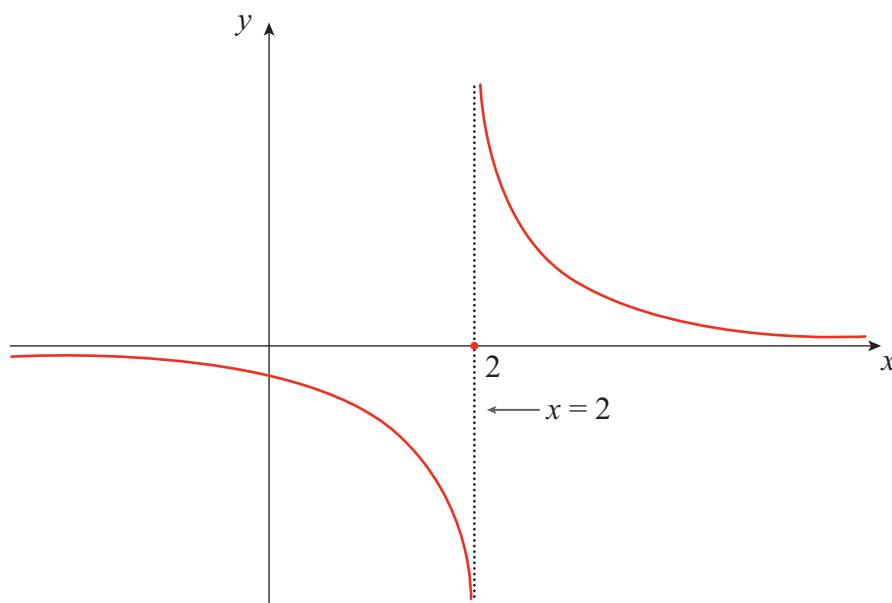


Figura 5.25

O leitor pode constatar que:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ ;  
 c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Devido a (a) e (b), podemos dizer que à medida que  $x$  se aproxima de 2, quer pela direita, quer pela esquerda,  $|f(x)|$  tende a infinito e a distância entre os pontos do gráfico e a reta  $x = 2$  tende a zero.

Devido a (c) e (d), à medida que  $|x|$  tende a infinito, a distância entre os pontos do gráfico de  $f$  e a reta  $y = 0$  (eixo X) tende a zero.

Retas que exibem tal comportamento, como as retas  $x = 2$  e  $y = 0$ , chamam-se assíntotas do gráfico, conforme as definições 35 e 36 a seguir.

**Definição 35.** A reta  $x = a$  é uma assíntota vertical do gráfico de uma função  $f$  quando *pelo menos uma* das afirmações seguintes for verdadeira:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ; | 2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ; |
| 3) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ; | 4) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ . |

**Exemplos:**

- a) A reta  $x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) é uma assíntota vertical do gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{x-a}, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty.$$

- b) Seja  $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4}$ . Como  $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ , as retas “candidatas” a assíntotas verticais são  $x = 2$  e  $x = -2$ .

Constatando que de fato os limites laterais de  $f$  nos pontos 2 e -2 são infinitos, concluímos que ambas são assíntotas verticais do gráfico de  $f$ .

- c) O gráfico da função  $y = \operatorname{tg} x$  tem uma infinidade de assíntotas verticais.

De fato,  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$  e  $\operatorname{cos} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ . Como

$$\operatorname{sen}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1, \text{ segue que } \lim_{x \rightarrow \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = +\infty \text{ (ou } -\infty) \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = +\infty \text{ (ou } -\infty).$$

Logo, para todo  $k$  inteiro, a reta  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  é assíntota vertical do gráfico da função tangente.

- d) O gráfico da função  $y = \ln x$  tem uma assíntota vertical:  $x = 0$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

**Definição 36.** A reta  $y = b$  é uma assíntota horizontal do gráfico da função  $f$  quando *pelo menos uma* das afirmações seguintes for verdadeira:

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

**Exemplos:**

a) Se  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ , então  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

Logo, o gráfico de  $f$  possui uma assíntota horizontal:  $y = 2$ .  
(Veja a figura.)

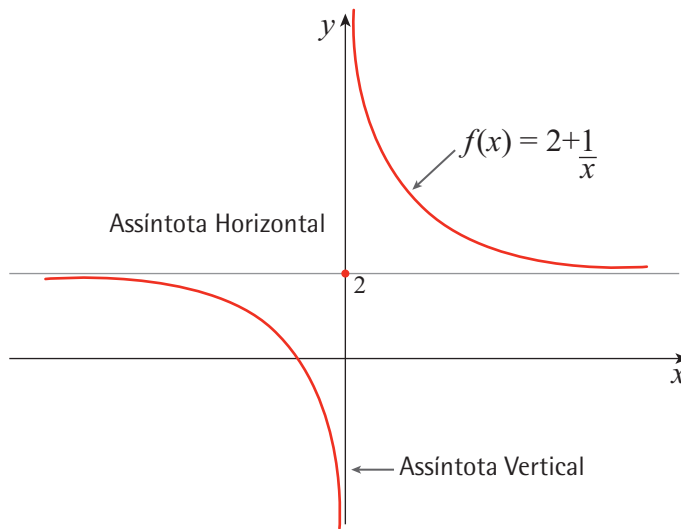


Figura 5.26

b) O gráfico da função  $y = e^x$  possui uma assíntota horizontal:  $y = 0$ . De fato,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

c) Seja  $f(x) = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{3x-1}$ . Convidamos o leitor a verificar que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{3}$  e que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Podemos concluir que o gráfico de  $f$  possui duas assíntotas horizontais:  $y = 0$  e  $y = \frac{2}{3}$ .

## Exercícios propostos

Dê a equação das assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função:

$$19) f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}; \quad 20) g(\theta) = \cotg \theta; \quad 21) h(t) = \frac{6-5t^2}{2t^2-3t-2}.$$

## 5.10 Esboço de gráficos

Você já aprendeu a fazer o gráfico de algumas funções elementares através da plotagem de alguns pontos, seguida da união desses pontos através de uma linha contínua.

Esse processo rudimentar dificulta ou até impossibilita a percepção de aspectos fundamentais do gráfico como a concavidade, bem como a localização exata dos pontos de inflexão e dos extremos da função.

Nosso objetivo agora não é fazer gráficos milimetricamente exatos, plotando dezenas de pontos. Devemos sim localizar os pontos importantes do gráfico, a saber, os pontos de descontinuidade, de mínimo e de máximo relativos e os pontos de inflexão, se houver, e eventualmente alguns pontos auxiliares.

É fundamental reconhecer os intervalos de crescimento e decréscimo da função, estudar a concavidade do gráfico e suas eventuais assíntotas.

Apresentamos a seguir um roteiro que pode ser utilizado para fazer o gráfico de uma função.

Dada a função  $y = f(x)$ , determine:

- 1) Domínio de  $f$ ;
- 2) Pontos de descontinuidade;
- 3) Limites no infinito, se fizerem sentido;
- 4) Assíntotas horizontais e verticais;
- 5) Pontos em que o gráfico corta os eixos coordenados, desde que não seja muito difícil encontrá-los;
- 6) Intervalos de crescimento e decréscimo de  $f$ ;
- 7) Pontos de máximo e de mínimo relativos;
- 8) Concavidade do gráfico de  $f$ ;
- 9) Pontos de inflexão;
- 10) Localização eventual de pontos do gráfico para auxílio.

Para enfim esboçar o gráfico, localize os pontos obtidos nos itens 2, 5, 7, 9, 10, represente as assíntotas através de retas tracejadas e, observando os itens 1, 3, 6 e 8, comece a traçar a curva, da esquerda para a direita.

Se julgar conveniente, plote mais algum ponto do gráfico e talvez até calcule a derivada da função na abscissa do ponto, obtendo a inclinação da reta tangente ao gráfico naquele ponto.

## Exercícios resolvidos

19) Faça o gráfico da função  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 5$ .

**Resolução.** Vamos seguir os itens do roteiro:

- 1) Domínio de  $f$ :  $\mathbb{R}$ .
- 2) Pontos de descontinuidade: não há! A função é contínua.
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{4} = +\infty$ .  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{4} = +\infty$ .
- 4) Assíntotas: o item (3) mostra que não há assíntotas horizontais. Sendo polinômio, o gráfico de  $f$  também não possui assíntotas verticais.
- 5) Ponto em que o gráfico corta o eixo Y: fazendo  $x = 0$ , obtemos  $y = 5$ . Trata-se do ponto  $(0, 5)$ .

Pontos em que o gráfico corta o eixo X: teríamos que resolver a equação  $\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 5 = 0$ , o que não faremos.

Para continuar, precisamos das derivadas de primeira e de segunda ordem de  $f$ . Convém escrevê-las na forma mais simplificada possível.

Sendo  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 5$ , temos:

$$f'(x) = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2 \text{ e}$$

$$f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1).$$

Logo,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$  ou  $x = 1$  e  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = 1$ .



Os pontos  $-2$ ,  $-1$  e  $1$  são *significativos* por serem candidatos a pontos de máximo, mínimo ou de inflexão.

As informações relativas aos itens (6), (7), (8) e (9) serão dispostas num quadro. Lembre-se de que  $G(f)$  representa o gráfico de  $f$ .

| Intervalos e/ou pontos significativos do domínio de $f$ | Valor de $f$ nos pontos | Sinal de $f'$ | Sinal de $f''$ | Conclusão                        |
|---|-------------------------|---------------|----------------|----------------------------------|
| $x < -2$  | -----                   | -             | +              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.c.   |
| $x = -2$  | -1                      | 0             | +              | $-2$ é ponto de mín. relativo    |
| $-2 < x < -1$   | -----                   | +             | +              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.c. |
| $x = -1$  | 1,75                    | +             | 0              | $(-1; 1,75)$ é ponto de inflexão |
| $-1 < x < 1$  | -----                   | +             | -              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.b. |
| $x = 1$   | 5,75                    | 0             | 0              | $(1; 5,75)$ é ponto de inflexão  |
| $x > 1$   | -----                   | +             | +              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.c. |

10) Pontos do gráfico para auxílio:  $(-3; 5,75)$  e  $(2, 7)$ .

**Gráfico:**

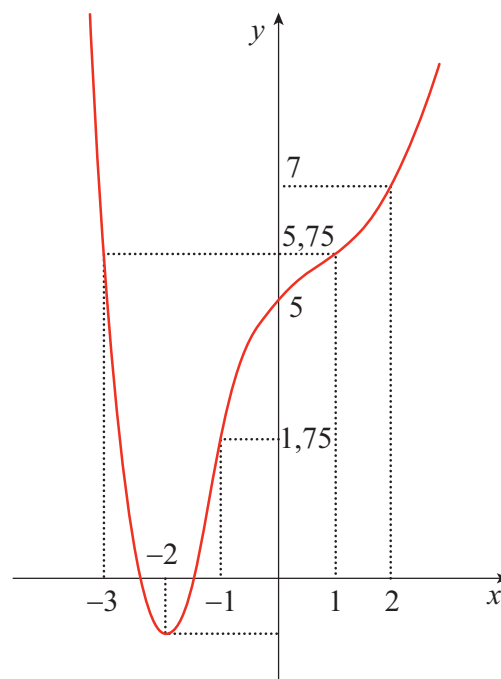


Figura 5.27

20) Faça o gráfico da função  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ .

**Resolução.** (1) Domínio de  $f : \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

2) Pontos de descontinuidade: não há!

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1.$$

4) Conforme o item (3), a reta  $y = 1$  é uma assíntota horizontal do gráfico de  $f$ . As retas  $x = -2$  e  $x = 2$  são assíntotas verticais, pois o leitor pode constatar que:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

5) Ponto em que o gráfico corta o eixo Y:  $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ . Como  $x^2 + 1$  não pode ser zero, o gráfico não intersecta o eixo X.

*Derivadas:*

$$f'(x) = \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2} \quad (\text{Confira!}) \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{30x^2 + 40}{(x^2 - 4)^3}. \quad (\text{Confira!})$$

Logo,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 30x^2 + 40 = 0$ , o que jamais ocorre.

Note que nem  $f'$  nem  $f''$  estão definidas nos pontos 2 e -2. Esses pontos, não pertencendo ao domínio de  $f$ , não são pontos críticos de  $f$ . Apesar disso, são considerados pontos significativos, pois neles pode ocorrer uma alteração do gráfico, nos aspectos crescimento e concavidade.

| Intervalos e/ou pontos significativos do domínio de $f$ | Valor de $f$ nos pontos | Sinal de $f'$ | Sinal de $f''$ | Conclusão                        |
|---|-------------------------|---------------|----------------|----------------------------------|
| $x < -2$  | -----                   | +             | +              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.c. |
| $x = -2$  | não existe              | não existe    | não existe     | $x = -2$ é assíntota vertical    |
| $-2 < x < 0$  | -----                   | +             | -              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.b. |
| $x = 0$   | $-\frac{1}{4}$          | 0             | -              | 0 é ponto de máx. relativo       |
| $0 < x < 2$   | -----                   | -             | -              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.b.   |
| $x = 2$   | não existe              | não existe    | não existe     | $x = -2$ é assíntota vertical    |
| $x > 2$   | -----                   | -             | +              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.c.   |

10) Pontos auxiliares:  $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ ;  $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ ;  $(-3, 2)$ ;  $(3, 2)$ .

**Gráfico:**

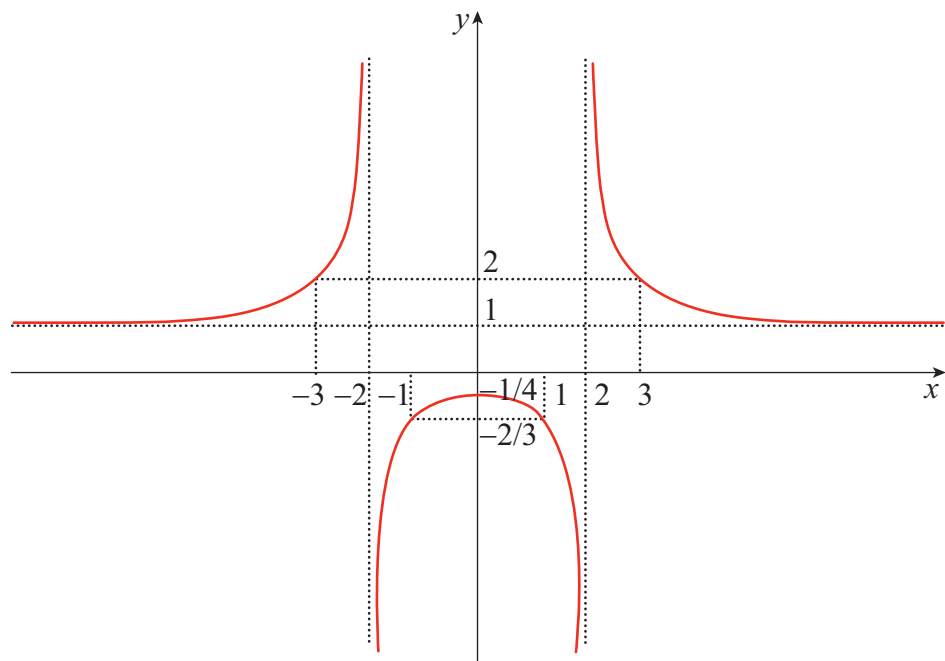


Figura 5.28

21) Idem para a função  $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$ .

**Resolução.** (1) Domínio de  $f: \mathbb{R}$ . Note que podemos escrever

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}.$$

2) Pontos de descontinuidade: não há!

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{5}{3}}(5x^{-1} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{5}{3}} \left( \frac{5}{x} - 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty. \text{ (Verifique!)}$$

4) O gráfico não possui assíntotas.

5) Ponto em que o gráfico corta o eixo Y:

Fazendo  $x = 0$ , obtemos  $y = 0$ . Trata-se do ponto  $(0, 0)$ .

Pontos em que o gráfico intersecta o eixo X:

$$5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}(5 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 5.$$

Trata-se dos pontos  $(0, 0)$  e  $(5, 0)$ .

$$\text{Derivadas: } f'(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \left( \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2} \right) = \frac{5}{3} \left( \frac{2-x}{\sqrt[3]{x}} \right).$$

$$f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{10}{9} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) = -\frac{10}{9} \left( \frac{1+x}{\sqrt[3]{x^4}} \right).$$

Dessa forma,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$  e  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

Note que ambas as derivadas não estão definidas para  $x = 0$ .

Mas o ponto 0 pertence ao domínio de  $f$ . Assim, 0 e 2 são pontos críticos. Os pontos significativos do domínio são, pois, -1, 0, 2.

| Intervalos e/ou pontos significativos do domínio de $f$ | Valor de $f$ nos pontos  | Sinal de $f'$ | Sinal de $f''$ | Conclusão                        |
|---|--------------------------|---------------|----------------|----------------------------------|
| $x < -1$  | -----                    | -             | +              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.c.   |
| $x = -1$  | 6                        | -             | 0              | $(-1, 6)$ é ponto de inflexão    |
| $-1 < x < 0$  | -----                    | -             | -              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.b.   |
| $x = 0$   | 0                        | não existe    | não existe     | 0 é ponto de mín. relativo       |
| $0 < x < 2$   | -----                    | +             | -              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.b. |
| $x = 2$   | $3\sqrt[3]{4} \cong 4,8$ | 0             | -              | 2 é ponto de máx. relativo       |
| $x > 2$   | -----                    | -             | -              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.b.   |

10) Ponto auxiliar:  $(1, 4)$ .

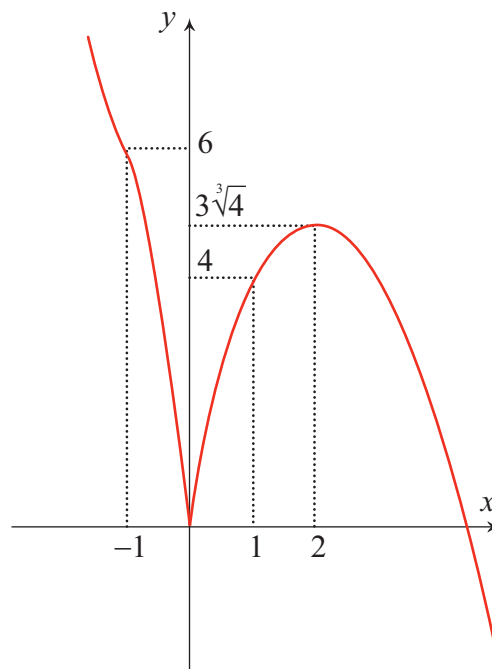


Figura 5.29

$$22) \text{ Idem para } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8 & \text{se } 2 < x \leq 6. \end{cases}$$

**Resolução.** (1) Domínio:  $(-\infty, 6]$ .

(2) O ponto 2 é candidato a ponto de descontinuidade.

Verifiquemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-2} \cong 0,14 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8 \right) = \frac{8}{3} \cong 2,7.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  não existe e  $f$  é descontínua em 2.

(3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  não faz sentido.

(4) De acordo com o item (3), a reta  $y = 0$  é uma assíntota horizontal. Não existem assíntotas verticais.

(5) Ponto em que o gráfico corta o eixo Y:  $(0, 1)$ .

Pontos em que o gráfico corta o eixo X:  $e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$  não tem solução, pois  $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0, \forall x \leq 2$ . A equação  $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8 = 0$  não vamos resolver!

Derivadas:

$$f'(x) = \begin{cases} -xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 4x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Assim,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 4$ .

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) & \text{se } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Logo,  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = 1$ .

Os pontos significativos, a serem destacados no quadro, são: -1, 0, 1, 2, 4.

| Intervalos e/ou pontos significativos do domínio de $f$ | Valor de $f$ nos pontos     | Sinal de $f'$ | Sinal de $f''$ | Conclusão  |
|---|-----------------------------|---------------|----------------|--|
| $x < -1$  | -----                       | +             | +              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.c.                       |
| $x = -1$  | $e^{\frac{1}{2}} \cong 0,6$ | +             | 0              | $\left(-1, e^{\frac{1}{2}}\right)$ é ponto de inflexão |
| $-1 < x < 0$  | -----                       | +             | -              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.b.                       |
| $x = 0$   | 1                           | 0             | -              | 0 é ponto de máx. relativo                             |
| $0 < x < 1$   | -----                       | -             | -              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.b.                         |
| $x = 1$   | $e^{\frac{1}{2}}$           | -             | 0              | $\left(1, e^{\frac{1}{2}}\right)$ é ponto de inflexão  |
| $1 < x < 2$   | -----                       | -             | +              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.c.                         |
| $x = 2$   | $e^{-2} \cong 0,14$         | não existe    | não existe     | 2 é ponto de descontinuidade                           |
| $2 < x < 4$   | -----                       | -             | +              | $f$ é dec. e o $G(f)$ é c.p.c.                         |
| $x = 4$   | $-\frac{8}{3} \cong -2,7$   | 0             | +              | 4 é ponto de mín. relativo                             |
| $4 < x \leq 6$  | -----                       | +             | +              | $f$ é cresc. e o $G(f)$ é c.p.c.                       |

10) Pontos auxiliares:  $(3, -1)$ ,  $\left(5, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $(6, 8)$ .

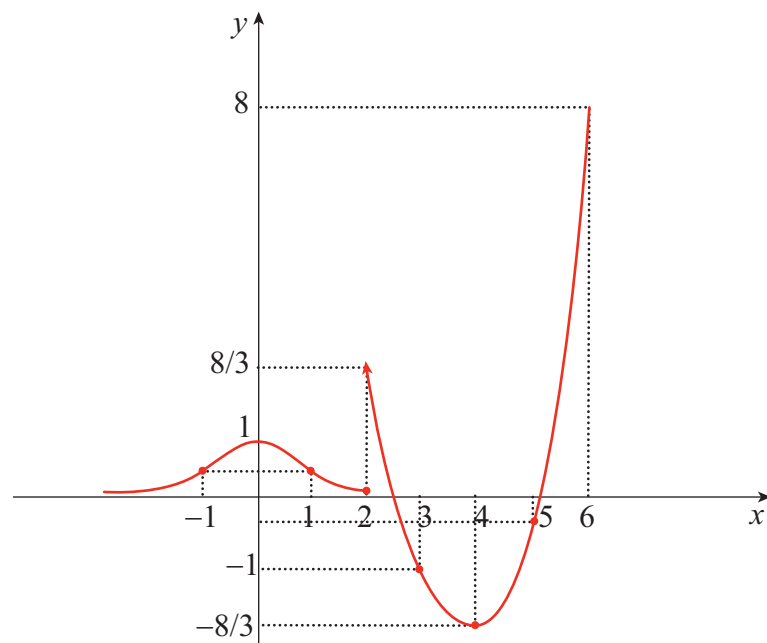


Figura 5.30

## Exercícios propostos

Faça um esboço do gráfico das funções:

$$22) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1;$$

$$23) f(x) = \ln(x^2 + 1);$$

$$24) f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x+3} & \text{se } x < 0 \\ x^3 - 12x + 4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases};$$

$$25) f(x) = x + \cos x.$$

## 5.11 Regra de L'Hospital

No capítulo 2, estudamos limites e, em particular, vimos que o cálculo do limite de um quociente de funções muitas vezes leva a um dos casos de indeterminação:  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . Nesse caso, é preciso evitar a indeterminação, o que nem sempre é fácil.

O próximo teorema, chamado regra de L'Hospital, em homenagem ao matemático francês Guillaume François de L'Hospital (1661-1707), permite, sob certas condições, evitar tais indeterminações usando derivadas.

**Teorema 38. (Regra de L'Hospital).** Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis em todos os pontos de um intervalo aberto  $I$ , exceto talvez no ponto  $a \in I$ .

Este teorema não será demonstrado.

Suponhamos que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I - \{a\}$ . Então:

1) Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  e se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

2) Se  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$  e se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

**Observação.** O teorema vale também para limites laterais e limites no infinito.



**Observação.** O teorema vale também para limites infinitos.

**Observação.** A regra de L'Hospital só pode ser aplicada para calcular o limite do quociente  $\frac{f(x)}{g(x)}$  quando ocorre uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . Em tal caso, toma-se o limite do quociente das derivadas (e não da derivada do quociente!)  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Se esse limite existir, então o seu valor será o valor do limite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$ . Caso persista a indeterminação  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ , aplica-se a regra de L'Hospital a  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

## Exercícios resolvidos

23) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x - x}{\cos x + 2x - 1}$ .

**Resolução.** Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (6\sin x - x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 2x - 1) = 0$ , podemos aplicar a regra de L'Hospital.

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x - x}{\cos x + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\cos x - 1}{-\sin x + 2} = \frac{5}{2}.$$

24) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 5x}$ .

**Resolução.** Novamente estamos diante de um caso de indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . (Verifique!)

Pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{8x^3 + 6x^2 + 10x + 5} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}.$$

25) Calcule  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(\cos 2x)}{(x - \pi)^2}$ .

**Resolução.** Mais uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . (Verifique!)

Aplicando o Teorema 38, temos:  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(\cos 2x)}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-2\operatorname{tg} 2x}{2(x - \pi)}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (-2 \operatorname{tg} 2x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2(x - \pi) = 0$ , devemos aplicar o

teorema outra vez:  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-2 \operatorname{tg} 2x}{2(x - \pi)} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-4 \sec^2 2x}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(\cos 2x)}{(x - \pi)^2} = -2$ .

26) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{3x} + x}$ .

**Resolução.** Temos:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} + x) = +\infty$ . Pode-

mos assim aplicar o Teorema 38:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x} + 1}{3e^{3x} + 1}$ .

Esse último limite nos leva também à indeterminação  $\frac{\infty}{\infty}$ . Aplicando novamente o Teorema 38, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x} + 1}{3e^{3x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{9e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{9} e^{-x} = \frac{4}{9} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \frac{4}{9} \cdot 0 = 0.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + x}{e^{3x} + x} = 0$ .

**Observação.** A regra de L'Hospital não se aplica para calcular, por exemplo, o  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x}$ , apesar de ser  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \cos x) = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ . Com efeito, derivando numerador e denominador, obtém-se a função  $\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1}$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \operatorname{sen} x)$  não existe.

Nesse caso, o Teorema 38 não permite concluir que o limite proposto não existe. De fato, escrevendo  $\frac{x - \cos x}{x} = 1 - \frac{\cos x}{x} = 1 - \cos x \cdot \frac{1}{x}$  e lembrando que a função  $\cos x$  é limitada, percebemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x} = 1.$$

## Exercícios propostos

Calcule os limites:

26)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 3x - 3 \operatorname{sen} x}$ ;

27)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1}}{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{x} \right)}$

Procure lembrar quais são ou consulte seu material.

Foi visto no capítulo 2 que são sete os **casos de indeterminação**. O Teorema 38, porém, permite aplicar a regra de L'Hospital somente para os casos  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$ .

E quando surge alguma das demais indeterminações, não podemos aplicá-la?

Podemos sim, mas não diretamente. Acompanhe com atenção os próximos exercícios resolvidos para compreender o procedimento em cada caso.

## Exercícios resolvidos

27) Calcule o  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ .

**Resolução.** Temos uma indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ . (Verifique!) Efetuando a soma das expressões entre parênteses, chegamos a um

*quociente:*  $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1-\ln x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\ln x = 0$ , podemos aplicar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{(x-1) \cdot \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1+x\ln x}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1+x\ln x) = 0$ , aplicamos novamente a

regra de L'Hospital:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1+x\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+1+\ln x} = \frac{1}{2}$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}$ .

28) Calcule o  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cotg 3x$ .

**Resolução.** O leitor deve identificar uma indeterminação do tipo  $0 \cdot \infty$ . Nesse caso, procuramos escrever a expressão  $x \cdot \cotg 3x$  como um *quociente*.

Podemos escrever  $x \cdot \cotg 3x = \frac{\cotg 3x}{\frac{1}{x}}$  ou então

$$x \cdot \cotg 3x = \frac{x}{\frac{1}{\cotg 3x}} = \frac{x}{\tg 3x}.$$

Qualquer opção conduz ao resultado, porém escolhemos a segunda.

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \tg 3x = 0$ , aplicamos a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tg 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \sec^2 3x} = \frac{1}{3}. \text{ Logo, } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cotg 3x = \frac{1}{3}.$$

29) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**Resolução.** Dessa vez, a indeterminação é do tipo  $1^\infty$ . Seja  $y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ . Aplicando o logaritmo a ambos os lados da igualdade (o que é possível pois  $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} > 0$ , para  $x$  próximo de 0), temos:  
 $\ln y = \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

Através de uma propriedade do logaritmo, podemos expressar  $\ln y$  como um quociente:  $\ln y = \frac{1}{x^2} \cdot \ln \cos x = \frac{\ln \cos x}{x^2}$ .

Vamos calcular o  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y$  para depois obtermos o  $\lim_{x \rightarrow 0} y$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , podemos aplicar a regra de

L'Hospital:  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tg x}{2x}$ .

Aplicando novamente a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Como a função logarítmica é contínua, o Teorema 22 garante que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow 0} y \right] = -\frac{1}{2}.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^{-\frac{1}{2}}$ , ou seja,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$ .

30) Calcule  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ .

**Resolução.** A indeterminação é do tipo  $\infty^0$ .

Seja  $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ . Então  $\ln y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$ .

Para escrever  $\ln y$  como um *quociente*, lembremos que  $\cos x = \frac{1}{\sec x}$

e, portanto,  $\ln y = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sec x}$ .

Agora é possível aplicar a regra de L'Hospital, pois

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \ln \operatorname{tg} x = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \sec x = \infty.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Assim,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \ln y = 0$ , ou seja,  $\ln \left[ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} y \right] = 0$ , donde,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} y = 1$ .

Portanto,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1$ .

31) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ .

**Resolução.** Aqui temos uma indeterminação do tipo  $0^0$ . Recomendamos que o leitor aplique a mesma técnica dos exercícios 29 e 30 e encontre a resposta 1.

## Exercícios propostos

Calcule os limites:

28)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

29)  $\lim_{t \rightarrow 0} (e^{3t} - \cos 2t) \operatorname{cosec} 2t$

30)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{\frac{3}{x}}$

31)  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{\theta} \right)$

32)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$

## 5.12 Fórmula de Taylor

As funções polinomiais são as funções mais simples para se derivar e **integrar**.

O conceito de integral será estudado na disciplina de Cálculo II.

Se uma função qualquer é derivável num ponto, ela pode ser localmente aproximada por um polinômio. Mais precisamente se  $f$  é uma função derivável no ponto  $a$ , existe um polinômio  $P(x)$  tal que, para  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , a diferença entre  $f(x)$  e  $P(x)$  é muito pequena. Ou seja, o erro cometido ao substituir  $f(x)$  por  $P(x)$  é muito pequeno quando  $x$  está próximo de  $a$ .

Tal polinômio  $P(x)$  será chamado *polinômio de Taylor* de  $f$  em  $a$  e a diferença  $|P(x) - f(x)|$  será avaliada através de uma fórmula chamada *fórmula de Taylor*, em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685 - 1731).

Seja  $f$  uma função derivável no ponto  $a$ . Lembre-se de que

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Para valores de  $x$  próximos de  $a$ ,

$$f'(a) \cong \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ ou seja, } f(x) \cong f(a) + f'(a)(x - a),$$

em que  $\cong$  significa aproximadamente.

Escrevamos  $f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + r_1(x)$ , sendo  $r_1(x)$  chamado de *resto*. Dessa forma, para valores de  $x$  próximos de  $a$ , aproximamos  $f(x)$  por um polinômio de primeiro grau, a saber,  $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ . Assim,  $f(x) = P_1(x) + r_1(x)$ .

Agora note que  $P_1(a) = f(a)$  e  $P_1'(a) = f'(a)$ . Graficamente  $P_1(x)$  representa a reta que é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ . É a *melhor aproximação linear* de  $f$  próximo ao ponto  $a$ , no seguinte sentido: de todas as retas que passam pelo ponto  $(a, f(a))$ ,  $P_1(x)$  é a que mais se aproxima do gráfico de  $f$  quando  $x$  está próximo de  $a$ .

Na Figura 5.31, observamos que: à medida que  $x$  toma valores mais distantes de  $a$ , a diferença entre  $f(x)$  e  $P_1(x)$ , isto é,  $r_1(x)$ , aumenta.

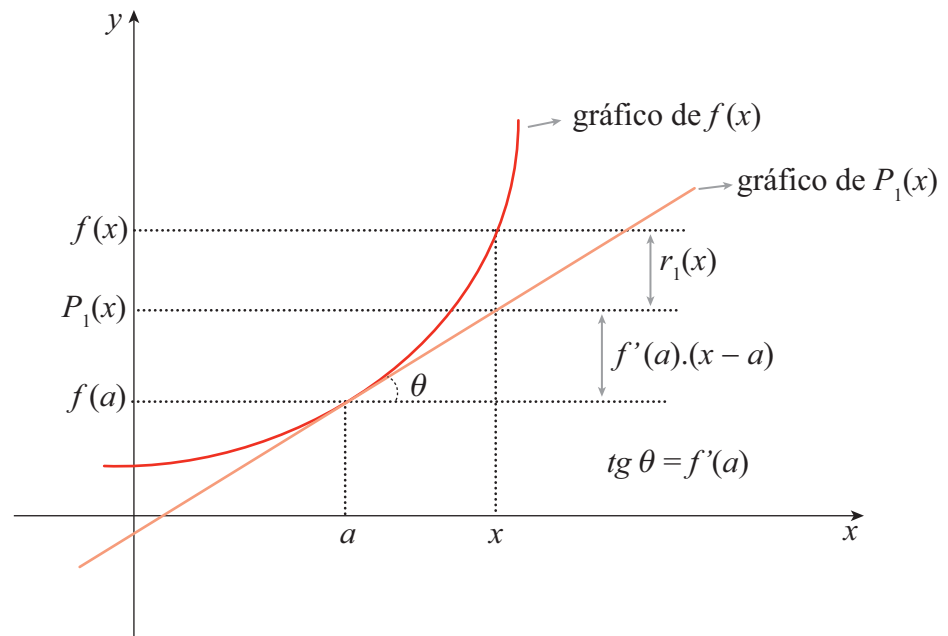


Figura 5.31

Para conseguir aproximações polinomiais melhores para  $f$ , tomemos um polinômio de grau 2, digamos  $P_2(x)$ , que satisfaça:  $P_2(a) = f(a)$ ,  $P_2'(a) = f'(a)$  e  $P_2''(a) = f''(a)$ .

Tal polinômio deve ter a forma:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + M(x-a)^2.$$

Para encontrar o valor de  $M$ , note que  $P_2''(a) = 2M = f''(a)$ , portanto,  $M = \frac{f''(a)}{2}$ . Logo, o polinômio que procuramos é

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Para valores de  $x$  próximos de  $a$ , temos:  $f(x) = P_2(x) + r_2(x)$ , sendo  $r_2(x)$  o "erro" cometido ao tomar  $P_2(x)$  ao invés de  $f(x)$ .

Seguindo a mesma linha de raciocínio, tomemos um polinômio  $P_3(x)$ , de grau 3, que satisfaça:  $P_3(a) = f(a)$ ;  $P_3'(a) = f'(a)$ ;  $P_3''(a) = f''(a)$  e  $P_3'''(a) = f'''(a)$ .

Então  $P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + N(x-a)^3$ . Para determinar o valor de  $N$ , note que  $P_3'''(a) = 3.2N$  e  $N = \frac{f'''(a)}{3!}$ .

Logo,  $P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$  e, para valores de  $x$  próximos de  $a$ , temos  $f(x) = P_3(x) + r_3(x)$ . E assim sucessivamente.

**Definição 37.** Seja  $f$  uma função que num ponto  $a$  admite derivadas até ordem  $n$ . O Polinômio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  em  $a$  é:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

A diferença  $f(x) - P_n(x)$  será representada por  $r_n(x)$  e chamada de *resto*.

**Observação.** Representando  $x-a$  por  $h$ , podemos escrever

$$P_n(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

## Exercício resolvido

- 32) Determine o polinômio de Taylor de ordem  $n$ , no ponto zero, da função  $f(x) = e^x$ .

**Resolução.** Como  $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$ , segue que

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Isso significa que, para valores de  $x$  próximos de zero,  $e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ . Quanto maior  $n$ , tanto melhor a aproximação.

Por exemplo, tomando  $x=1$  e  $n=6$ , obtemos:

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

De fato, apesar de 1 não estar tão próximo de zero, a soma à direita aproxima o número  $e$  até a terceira casa decimal.

O leitor pode constatá-lo usando uma calculadora.

O próximo teorema estabelece a *Fórmula de Taylor com resto de Lagrange*, que nos permite estimar o resto  $r_n(x)$ .

**Teorema 39.** Seja  $f$  uma função  $n+1$  vezes derivável em cada ponto de um intervalo aberto  $I$  que contém o ponto  $a$ . Então, para cada ponto  $x$  do intervalo  $I$ , existe um ponto  $z$  entre  $x$  e  $a$  tal que:

Este teorema não será demonstrado.



$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$$

$$\text{sendo } r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

## Exercício resolvido

33) Seja  $f(x) = \ln x$ . Determine o polinômio de Taylor com resto de Lagrange no ponto  $a = 1$ , de ordem:

- a)  $n = 3$       b)  $n$ , sendo  $n$  qualquer número natural.

Depois use o polinômio obtido no item (a) para aproximar  $\ln(1,1)$  e avalie o erro cometido.

**Resolução.** Temos que calcular as derivadas de ordem superior de  $f$  em 1:

| Valores em $x > 0$                     | Valores em $x = 1$  |
|--|---------------------|
| $f(x) = \ln x$                         | $f(1) = 0$          |
| $f'(x) = x^{-1}$                       | $f'(1) = 1$         |
| $f''(x) = -x^{-2}$                     | $f''(1) = -1$       |
| $f'''(x) = 2x^{-3}$                    | $f'''(1) = 2$       |
| $f^{(iv)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4}$       | $f^{(iv)}(1) = -3!$ |
| $f^{(v)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2x^{-5}$ | $f^{(v)}(1) = 4!$   |

A partir desses valores, podemos generalizar:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n} \rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Resposta do item (a):

$$\ln x = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!z^4}(x-1)^4 + r_3(x),$$

ou melhor:

$$\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4z^4} + r_3(x) = P_3(x) + r_3(x),$$

$$\text{sendo } r_3(x) = \frac{(x-1)^4}{4z^4}, \text{ para } z \text{ entre } x \text{ e } 1.$$

Resposta do item (b):

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} + (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)z^{n+1}} + r_n(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

para  $z$  entre  $x$  e 1.

Fazendo  $x=1,1$  em (a), temos:

$$\ln(1,1) = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4z^4} + r_3(1,1), \text{ com } 1 < z < 1,1.$$

Fazendo as contas, chega-se a:

$$\ln(1,1) = 0,09533 + r_3(1,1), \text{ sendo } r_3(1,1) = -\frac{(0,1)^4}{4z^4}.$$

Portanto, se escrevermos  $\ln(1,1) = 0,09533$ , o erro cometido será

$$|r_3(1,1)| = \frac{(0,1)^4}{4z^4}; \quad 1 < z < 1,1.$$

Como  $z > 1$ , temos  $\frac{1}{z^4} < 1$  e então

$$|r_3(1,1)| = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{(0,1)^4}{4} < \frac{(0,1)^4}{4} = 0,000025.$$

Portanto,  $|r_3(1,1)| < 2,5 \times 10^{-5} < 10^{-4}$ .

Concluimos que a aproximação obtida está correta até a quarta casa decimal inclusive.

## Exercícios propostos

- 33) Determine o polinômio de Taylor de ordem  $n$  no ponto  $a$ , da função dada.
- $f(x) = \operatorname{sen} x$ ;  $n = 4$ ;  $a = \frac{\pi}{6}$
  - $f(x) = \operatorname{cos} x$ ;  $n = 8$ ;  $a = 0$
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ;  $n = 2$ ;  $a = 8$
- 34) Seja  $f(x) = \ln(x+1)$ . Escreva o polinômio de Taylor de grau  $n$  de  $f$  no ponto 0, bem como a expressão do resto  $r_n(x)$  na forma de Lagrange.

- 35) Seja  $f(x) = \sqrt{x}$ :
- Escreva o polinômio de Taylor de grau 3 de  $f$  no ponto 4 e a expressão do resto  $r_3(x)$ ;
  - Use o polinômio obtido para calcular aproximadamente  $\sqrt{5}$  e estime o erro cometido.
- 36) Um cilindro circular reto tem altura fixa de 10cm. Suponha que o raio da circunferência que gera esse cilindro começa a se expandir.
- Calcule a taxa de variação média do volume em relação ao raio quando este varia de 5 a 5,1cm.
  - Calcule a taxa de variação do volume em relação ao raio no instante em que este vale 5cm.
- 37) Um balão mantém a forma de esfera enquanto é enchido. Encontre a taxa de variação da área da superfície do balão em relação ao seu raio no instante em que este vale 6cm.
- 38) Numa comunidade, obteve-se uma estimativa de que daqui a  $t$  anos a população será de  $P(t) = 20 - \frac{5}{t+1}$  mil habitantes. Qual será a taxa de variação da população, em pessoas por mês, daqui a 18 meses?
- 39) Uma piscina está sendo esvaziada de forma tal que  $V(t) = 300(20-t)^2$  representa o número de litros de água na piscina  $t$  horas após o início da operação. Calcule a taxa de escoamento da água ao cabo de 10 horas.
- 40) Cada um dos lados de um triângulo equilátero aumenta à razão de  $2,5 \text{ cm/s}$ .
- Qual é a taxa de crescimento da área desse triângulo no instante em que cada lado mede 12cm?
  - Qual a taxa de crescimento do perímetro num instante qualquer?

- 41) Um caminhão viaja a uma velocidade constante de  $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  e se aproxima de cruzamento. No momento em que ele está a 120m deste, um carro passa pelo cruzamento a uma velocidade de  $144 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , numa rodovia perpendicular àquela. Pergunta-se:
- Exatamente 1 segundo após o automóvel passar pelo cruzamento, os 2 veículos estão se aproximando ou se afastando um do outro? Com que velocidade?
  - Idem, 2 segundos após o automóvel passar pelo cruzamento.
  - Idem, 4 segundos após o automóvel passar pelo cruzamento.
- 42) Um balão sobe verticalmente com *velocidade* constante  $v$ . Um observador encontra-se agachado ao chão, a 400m do ponto em que o balão começou a subir. Em certo instante, ele vê o balão sob um ângulo de elevação de  $45^\circ$  e constata que este aumenta à razão de  $0,008 \frac{\text{rd}}{\text{s}}$ . Calcule  $v$ .

De 43 a 47, determine os pontos de máximo e os de mínimo relativos de função dada:

43)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ;

44)  $g(t) = 10t^6 - 24t^5 + 15t^4 - 11$ ;

45)  $f(x) = e^x \text{sen } x$ ;  $0 \leq x \leq 2\pi$ ;

46)  $h(\theta) = \text{sen}^2(2\theta)$ ;  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;

47)  $f(x) = x^2 \sqrt{6 - x^2}$ .

- 48) Considere a função do exercício anterior. Determine os pontos de máximo e de mínimo absolutos (se houver) bem como o valor máximo e o valor mínimo absoluto.

49) Idem ao anterior para  $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ x^2 - 6 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ .

Nesse caso, obtenha a sua resposta a partir do gráfico de  $f$ .

- 50) Seja  $f(x) = x^2 + kx^{-1}$ . Mostre que, seja qual for o valor de  $k$ ,  $f$  tem um único ponto de mínimo relativo e nenhum ponto de máximo relativo.
- 51) Determine os intervalos em que o gráfico de  $f$  é côncavo para cima bem como aqueles em que ele é côncavo para baixo. Dê os eventuais pontos de inflexão do gráfico.
- a)  $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x + 9$ ;
- b)  $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^4}$ ;
- c)  $f(x) = \sqrt[3]{(x+7)^5}$ .
- 52) Entre todos os pares de números reais cuja soma é 500, determine aquele cujo produto é o maior possível.
- 53) Mostre que, entre todos os triângulos retângulos cuja hipotenusa mede  $m$ , aquele que tem a maior área é o triângulo isósceles e sua área vale  $\frac{m^2}{4}$ .
- 54) Determine o raio da base e a altura do cone de menor volume, circunscrito ao cilindro de raio  $r$  e altura  $h$ .
- 55) Mostre que entre os retângulos de área  $A$ , aquele com o menor perímetro é o quadrado de lado  $\sqrt{A}$ .
- 56) Tenho 12 m<sup>2</sup> de material para construir uma caixa retangular de base quadrada e sem tampa. Encontre as dimensões da caixa de maior volume que posso construir.
- 57) Deseja-se imprimir uma mensagem escrita num cartaz retangular. A mensagem ocupa 600 cm<sup>2</sup> de área. É exigida uma margem de 7,5 cm no topo e na base do cartaz e outra margem de 5 cm nos lados. É necessária a impressão de milhares desses cartazes, por isso deseja-se saber quais as dimensões totais do cartaz que produz a maior economia de papel. (Sugestão: chame de  $x$  e  $y$  os lados do retângulo que contém a mensagem).

- 58) Um veterinário comprou 100 metros de cerca para construir 6 canis, cercando primeiro uma região retangular  $R$  e em seguida dividindo-a em 6 retângulos iguais, através de cercas paralelas a um dos lados de  $R$ . Quais as dimensões da região  $R$  que dá aos cães o maior espaço?
- 59) Dois pontos  $A$  e  $B$  situam-se às margens de um rio retificado, com 3km de largura, sendo eles opostos um ao outro em relação ao rio. Um ponto  $C$  está na mesma margem que  $B$ , porém 6km deste, rio abaixo. Uma companhia telefônica precisa estender um cabo de  $A$  até  $C$ . Se o custo por km de cabo é 25% mais caro sob água do que em terra, determine o traçado da linha mais econômica. (Atenção: problema de extremos absolutos num intervalo fechado).

De 60 a 65, calcule o limite:

- 60)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
- 61)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{5}{x^2 + x - 6} - \frac{1}{x - 2} \right)$
- 62)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x \cdot \ln x$
- 63)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{4} \right)$
- 64)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$
- 65)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

## Respostas dos exercícios propostos

- 1)  $\frac{8}{3\pi}$  m/h                      2) Aproximando-se a 4 km/h
- 3)  $1, -1, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}$                       4)  $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$
- 5) Ponto de máximo absoluto : -2; Valor máximo absoluto: 17; Ponto de mínimo absoluto: 10; Valor mínimo absoluto: -43

- 6) Ponto de máximo absoluto: 2; Valor máximo absoluto:  $\frac{64}{3}$ ; Ponto de mínimo absoluto: -1; Valor mínimo absoluto:  $\frac{29}{6}$
- 7) Pontos de máximo absoluto:  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$ ; Valor máximo absoluto:  $\frac{3}{2}$ ; Ponto de mínimo absoluto  $-\frac{\pi}{2}$ ; Valor mínimo absoluto: -3
- 8)  $f$  é crescente em  $(-\infty, 4]$  e  $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$  e decrescente em  $\left[-4, \frac{5}{3}\right]$
- 9) Ponto de mínimo relativo: +2; Valor mínimo relativo: -50; Ponto de máximo relativo: -2; Valor máximo relativo: 46
- 10) Ponto de máximo relativo: 2; Valor máximo relativo: 4
- 11) Pontos de máximo relativo: -1 e 2; Valores máximos relativos: 2 e 5 respectivamente; Ponto de mínimo relativo: 0; Valor mínimo relativo: 1
- 12) Ponto de máximo relativo: -1; Ponto de mínimo relativo: 3
- 13) Pontos de máximo relativo:  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$ ; Pontos de mínimo relativo:  $\frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2}$
- 14) Quadrado de lado 2,5 m.
- 15) Lado da base:  $\sqrt[3]{\frac{5}{8}} \cong 85$  cm; Altura:  $\sqrt[3]{\frac{64}{25}} \cong 136$  cm
- 16) Quadrado de lado  $R\sqrt{2}$ .
- 17) c.p.c. em  $(-\infty, -2)$  e em  $(1, +\infty)$ ; c.p.b. em  $(-2, 1)$ . Pontos de inflexão:  $(-2, f(-2))$  e  $(1, f(1))$ .
- 18) c.p.c. em  $(-\infty, +\infty)$ . Não há pontos de inflexão.
- 19) Assíntota vertical:  $x = -1$ , assíntota horizontal:  $y = 0$ .

20) Assíntotas verticais:  $\theta = k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$ , assíntota horizontal: não há.

21) Assíntotas verticais:  $t = -\frac{1}{2}$  e  $t = 2$ , assíntota horizontal:  $y = -\frac{5}{2}$ .

26)  $\frac{1}{4}$       27)  $\frac{1}{\pi}$       28) 1      29)  $\frac{3}{2}$

30)  $e^3$       31)  $\pi$       32)  $e$

33) a)  $P_4(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{48} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4$

b)  $P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

c)  $P_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$

34)  $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + r_n(x)$ , sendo

$$r_n(x) = (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1} (1+z)^{-(n+1)}$$

35) a)  $P_3(x) = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}$ ;  $r_3(x) = -\frac{5}{128} z^{\frac{7}{2}} (x-4)^4$

b)  $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + r_3(5)$ ;  $r_3(5) = -\frac{5}{128} z^{\frac{7}{2}}$ , com  $4 < z < 5$ .

Ou melhor,  $\sqrt{5} = 2,236328 + r_3(5)$ , com  $|r_3(5)| < 3 \times 10^{-4}$ .

O resultado está correto até a 3ª casa decimal.

36) a)  $101\pi \text{ cm}^3$  por variação de 1 cm no raio

b)  $100\pi \text{ cm}^3$  por variação de 1 cm no raio

37)  $48\pi \text{ cm}^2$  por variação de 1 cm no raio

38) Aproximadamente 67 pessoas por mês.



- 39)  $6000 \frac{1}{h}$       40) a)  $15\sqrt{3} \frac{cm^2}{s}$       b)  $7,5 \frac{cm}{s}$
- 41) a) Aproximando a  $40,2 \frac{km}{h}$       b) Afastando a  $50,4 \frac{km}{h}$
- 42)  $6,4 \frac{m}{s}$
- 43) Ponto de máximo relativo: 0; Ponto de mínimo relativo: 2
- 44) Ponto de mínimo relativo: 0
- 45) Ponto de máximo relativo:  $\frac{3\pi}{4}$ ; Ponto de mínimo relativo:  $\frac{7\pi}{4}$
- 46) Pontos de máximo relativo:  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{4}$ ;  
Ponto de mínimo relativo:  $\frac{\pi}{2}$
- 47) Pontos de máximo relativo: 2 e -2; Ponto de mínimo relativo: 0
- 48) Pontos de máximo absoluto: 2 e -2; Valor máximo absoluto:  $4\sqrt{2}$ ;  
Pontos de mínimo absoluto:  $-\sqrt{6}$ , 0,  $\sqrt{6}$ ;  
Valor mínimo absoluto: 0.
- 49) Ponto de mínimo absoluto: 2; Valor mínimo absoluto: -2 Não assume valor máximo absoluto.
- 51) a) c.p.c. em  $(0, +\infty)$ ; c.p.b. em  $(-\infty, 0)$ ; Ponto de inflexão  $(0, 9)$   
b) c.p.c. em  $(-\infty, +\infty)$ ; Não há pontos de inflexão.  
c) c.p.c. em  $(-7, +\infty)$ ; c.p.b. em  $(-\infty, -7)$ ;  
Ponto de inflexão  $(-7, 0)$
- 52) 250 e 250      54) raio:  $R = \frac{3}{2}r$ ; altura:  $H = 3h$
- 56) lado da base: 2m; altura: 1m
- 57) 30cm e 45cm      58) 25m e 7,14m
- 59) Sob a água de  $A$  até  $P$ , em que  $P$  está a 4km de  $B$ , rio abaixo.
- 60)  $\sqrt{2}$       61)  $-\frac{1}{5}$       62) 0
- 63)  $-\frac{4}{\pi}$       64) 1      65)  $e^3$



# Referências

ÁVILA, G. *Análise Matemática para a licenciatura*. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

ÁVILA, G. *Cálculo I – Funções de uma variável*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995

ÁVILA, G. *Introdução às funções e derivada*. São Paulo: Atual, 1995.

BOULOS, P. *Cálculo diferencial e integral*. Volume 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

FLEMMING, D.M., GONÇALVES, M.B. *Cálculo A*. São Paulo: Makron Books, 1992.

GUIDORIZZI, H.L. *Um Curso de Cálculo*. Volumes 1 e 2. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 1987.

MORGADO, A.C. et al.. *Progressões e matemática financeira*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

SIMMONS, G.F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1985.

STEWART, J. *Cálculo*. Volume 1. São Paulo: Thomson, 2001.