LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

3ª edição

CÁLCULO I

FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

CÁLCULO I

SOMESB

Sociedade Mantenedora de Educação Superior da Bahia S/C Ltda.

Presidente	⧫	Gervásio Meneses de Oliveira
Vice-Presidente	⧫	William Oliveira
Superintendente Administrativo e Financeiro	⧫	Samuel Soares
Superintendente de Ensino, Pesquisa e Extensão	⧫	Germano Tabacof
Superintendente de Desenvolvimento e Planejamento Acadêmico	⧫	Pedro Daltro Gusmão da Silva

FTC – EaD

Faculdade de Tecnologia e Ciências – Ensino a Distância

Diretor Geral	⧫	Waldeck Ornelas
Diretor Acadêmico	⧫	Roberto Frederico Merhy
Diretor de Tecnologia	⧫	Reinaldo de Oliveira Borba
Diretor Administrativo e Financeiro	⧫	André Portnoi
Gerente Acadêmico	⧫	Ronaldo Costa
Gerente de Ensino	⧫	Jane Freire
Gerente de Suporte Tecnológico	⧫	Jean Carlo Nerone
Coord. de Softwares e Sistemas	⧫	Rômulo Augusto Merhy
Coord. de Telecomunicações e Hardware	⧫	Osmane Chaves
Coord. de Produção de Material Didático	⧫	João Jacomel

EQUIPE DE ELABORAÇÃO / PRODUÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO

⧫ Produção Acadêmica ⧫

Gerente de Ensino	⧫	Jane Freire
Autor	⧫	Antonio Andrade do Espirito Santo
Supervisão	⧫	Ana Paula Amorim
Coordenação de Curso	⧫	Geciara Carvalho
Revisão Final	⧫	Adriano Pedreira Cattai Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.

⧫ Produção Técnica ⧫

Edição em LaTeX 2ε	⧫	Adriano Pedreira Cattai Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.
Revisão de Texto	⧫	Carlos Magno
Coordenação	⧫	João Jacomel
Equipe Técnica	⧫	Ana Carolina Alves, Cefas Gomes, Delmara Brito, Fábio Gonçalves, Francisco França Júnior, Israel Dantas, Lucas do Vale, Mariucha Pontes, Alexandre Ribeiro e Hermínio Vieira Filho.

www.ftc.br/ead

Sumário

Apresentação de Disciplina

Caro aluno,

Este material foi elaborado para servir como referência aos estudos dos alunos do curso de Cálculo I da FTC-EaD.

No Bloco Temático 1, Tema 1, veremos Limites. No Tema 2, trataremos das Funções Contínuas e dos Limites Fundamentais. Já no Bloco Temático 2, Tema 3, trataremos das Derivadas de Funções Reais. Por fim, no Tema 4, veremos as aplicações dos conteúdos estudados nos temas anteriores, dando ênfase às derivadas.

Encontram-se disponíveis neste material, além dos exercícios resolvidos, questões propostas, ao término de cada seção.

Este trabalho foi preparado com bastante carinho; cada exemplo, cada exercício, bem como a distribuição da teoria, foram cuidadosamente pensados com o objetivo de maximizar o seu aprendizado. Erros são possíveis de serem encontrados e, para que possamos melhorar este material, a sua contribuição nestas correções é imprescindível.

No final, encontra-se uma atividade orientada como parte de sua de avaliação individual.

"A Matemática é a ciência das razões ..."

Prof. *Antonio Andrade do Espirito Santo.*

bloco temático 1 Limites

tema 1 Limites de Funções Reais

O Cálculo Diferencial e Integral é uma parte importante da Matemática. Diferente de tudo o que o aluno ingressante na Universidade já estudou até aqui: ele é dinâmico. Trata da variação de movimento e de quantidades que mudam, tendendo a outras quantidades, do cálculo de áreas e de tantas outras coisas.

Para o cálculo da medida da área de uma região poligonal qualquer, por exemplo, os gregos há cerca de 2.500 anos já sabiam calcular. Eles dividiam-na em triângulos e somavam as áreas obtidas. Para o cálculo de áreas de regiões planas limitadas por curvas, eles usavam o chamado Método da Exaustão. Esse método consistia em considerar polígonos inscritos e circunscritos à região. Aumentando o número de lados dos polígonos, eles conseguiam chegar a valores bem próximos do valor real da área. Por exemplo, suponha que quiséssemos calcular a área A de um círculo. Representando por A_n a área do polígono regular de n lados, inscrito no círculo, e por B_n a área do polígono circunscrito de n lados, vemos que, para cada valor de n, tem-se

$$A_n < A < B_n.$$

À medida em que o número de lados dos polígonos aumenta, a área A_n fica cada vez maior, a área B_n, cada vez menor, e ambas mais próximas do valor da área do círculo. Na linguagem atual dizemos "a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos regulares a ele inscritos, quando n tende a infinito" (e também é igual ao limite das áreas dos polígonos circunscritos).

Uma outra questão propulsora no desenvolvimento do Cálculo é a seguinte: dada uma função f, como determinarmos os maiores e os menores valores assumidos por f? No século $XVII$, o jurista francês Pierre de Fermat $(1.601 - 1.665)$ resolveu este problema com os instrumentos da Geometria Analítica que ele desenvolveu (antes mesmo de René Descartes). O método desenvolvido por Fermat consistia em determinar máximos e mínimos de funções analisando os pontos do gráfico em que a reta tangente é horizontal.

As idéias de Fermat foram depois ampliadas e aprofundadas pelos ingleses John Wallis $(1.616 - 1.703)$, Isaac Barrow $(1.630 - 1.677)$ e Isaac Newton $(1.642 - 1.727)$ e pelo alemão Gottfried Leibniz $(1.646 - 1.716)$. O próximo passo importante para o desenvolvimento do Cálculo foi dado por Barrow que criou um método de achar a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto P. Tendo as coordenadas do ponto P, era necessário achar apenas qual o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente.

Note que em cada um dos problemas acima mencionados, o cálculo de uma quantidade é feito como limite de outras quantidades mais fáceis de calcular. É essa a idéia básica que permeia o Curso de Cálculo Diferencial e Integral. Entretanto, os matemáticos antigos lidaram com essa idéia de aproximações e limites de modo intuitivo por dois séculos. Percebiam a falta do mesmo nível do rigor ensinado pelos gregos antigos para poderem justificar formalmente os procedimentos e, até mesmo, evitar contradições e erros que fizeram. Mas a humanidade precisou esperar até o século 19 para que este rigor fosse finalmente encontrado por Augustin-Louis Cauchy $(1.789 - 1.857)$, que criou uma definição formal de limite. Essa demora de 2 séculos sinaliza a dificuldade de compreensão desse conceito, mas que é a ferramenta básica e indispensável de todo Matemático nos dias de hoje. No texto que apresentaremos agora, estaremos preocupados com o rigor estabelecido por Cauchy, mas priorizaremos a formalização dos conceitos a partir da intuição.

O Cálculo Diferencial e Integral nasceu motivado por alguns poucos problemas, mas a abstração e a sofisticação das idéias que a partir dali foram sendo desenvolvidas fez com que ele se tornasse hoje um assunto fundamental, com aplicações não só em Matemática, mas também em Física, Química, Estatística, Economia e muitas outras áreas do conhecimento. O Cálculo Diferencial e Integral é usado na determinação de órbitas de astros, satélites, mísseis; na análise de crescimento de populações (de humanos, bactérias ou outra qualquer); em medidas de fluxos (fluxo sangüíneo na saída do coração, fluxo de carros nas estradas, fluxo da água nos canos, etc.); em importantes problemas de otimização, tais como achar as quantidades ideais de produção que minimizam custos, quais as que maximizam lucros; determinar qual a melhor maneira de empilhar pacotes sob certas condições, como construir reservatórios com máxima capacidade e custo fixado, como achar o melhor caminho de modo a minimizar o tempo de percurso, qual o melhor lugar para se construir um teto com certas características, etc.

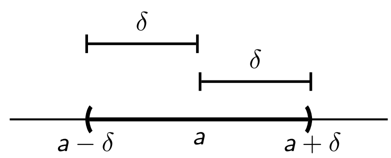
Por todos os motivos apresentados acima é que o Cálculo Diferencial e Integral é hoje considerado um instrumento indispensável de pensamento em quase todos os campos da ciência pura e aplicada: em Física, Química, Biologia, Astronomia, Engenharia, Economia e até mesmo em algumas Ciências Sociais, além de áreas da própria Matemática. Os métodos e as aplicações do Cálculo estão entre as maiores realizações intelectuais da civilização, uma conquista cultural e social, e não apenas científica. Esperamos que vocês aprendam tudo isso com interesse e prazer.

O nosso objetivo a seguir é dar uma definição de *Limite* de uma maneira convencional e também de uma maneira intuitiva. Vamos analisar propriedades e teoremas referentes a limites de funções. Procuraremos estabelecer relações com alguns problemas práticos, ficando evidente que este não é o propósito principal, apenas um adendo.

Precisaremos da definição de vizinhança numérica que apresentaremos a seguir.

1.1 Definições e Exemplos de Limites

Seja a um número real. Chama-se *vizinhança numérica* de a, ou simplesmente *vizinhança* de a, a todo intervalo aberto V_a que contém a. Se a é o centro da vizinhança, então diz-se que a vizinhança é simétrica. A distância δ de a a qualquer um dos extremos da vizinhança simétrica é chamada de raio da vizinhança. Denotaremos por $V(a;\delta)$ uma vizinhança simétrica de centro em a e de raio δ.



$V(a;\delta)$

***Exemplo* 1.1.** Determinar o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ que estão próximos de 2, com distância inferior a $0,01$.

Solução: $|x-2| < 0,01 \Rightarrow -0,01 < x-2 < 0,01 \Rightarrow 1,99 < x < 2,01$. Logo, $V(2;0,01)$.

1.1 Definição. Sejam uma vizinhança $V(a;\delta)$ de a e f uma função real de variável real definida para todo $x \in V(a;\delta) \setminus \{a\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende para a, é L e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \ ^{1}$$

[1]"lim" abreviatura de *limes* em latim e que significa limite.

se, para toda vizinhança $V(L;\varepsilon)$ de L, existir, em correspondência, uma vizinhança $V(a;\delta)$ de a. Em símbolos, temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Nesta definição, é importante observar que a função f não precisa necessariamente estar definida no ponto a visto que para determinarmos o limite de $f(x)$ quando x tende a a, o que interessa é o comportamento da função f quando os valores de x tendem a a.

***Exemplo* 1.2.** Usando a definição acima, mostre que $\lim_{x\to 1}(3x+2) = 5$.

Solução: Devemos mostrar que, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(3x+2) - 5| < \varepsilon$.

Notemos que: $|(3x+2)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Assim, se escolhermos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, teremos: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \dfrac{\varepsilon}{3};\ 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(3x+2)-5| < \varepsilon$.

De fato, se $0 < |x-1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{3} > 0 \Rightarrow |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |3x-3| < \varepsilon \Rightarrow |(3x+2)-5| < \varepsilon$.

***Exemplo* 1.3.** Usando a definição acima, mostre que $\lim_{x\to 1}(2x+1) = 3$.

Solução: Investiguemos se existe uma correspondência entre as vizinhanças de $b = 3$ e $a = 1$, ou seja, existe algum valor para δ se tomarmos um ε qualquer?

Temos que $|f(x) - b| < \varepsilon, \forall\, \varepsilon > 0$, isto é, $|(2x+1)-3| = |2x-2| = |2(x-1)| = 2|x-1| < \varepsilon$. Logo, $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Portanto, se fizermos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, teremos $0 < |x-1| < \delta$.

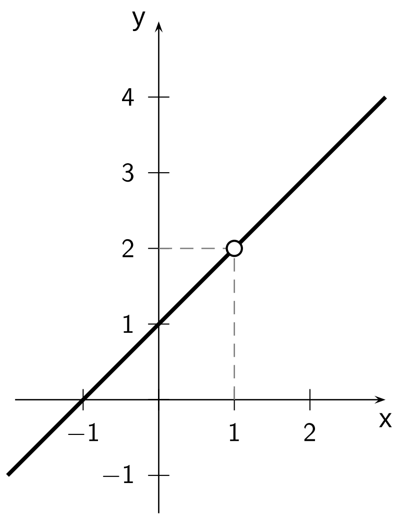
A abordagem feita acima, embora correta do ponto de vista matemático, parece-nos inadequada e introduzida precocemente. Claramente, despreza a possibilidade de o aluno construir o conceito de limite baseado na experimentação e o conduz a uma reprodução insensata e desfocada de uma idéia mal compreendida. Desta forma, vamos dar um novo começo.

Pense no seguinte problema:

1 Problema. A partir de uma coleta de dados, verificou-se que, daqui a um certo número de anos, digamos t anos, a população de um certo país será de $P(t) = \dfrac{80}{8 + 12e^{-0{,}06t}}$ milhões de habitantes. À medida que os anos forem passando e desconsiderando as mortes, a população se aproximará de que número?

É evidente que tal problema é extremamente importante, pois a partir destas informações, os governantes poderão tomar decisões para melhor atender à população, prevendo despesas e relacionando-as com as receitas. A resposta a esta pergunta é que a população deste país se aproximará de 10 milhões; como deu este resultado? você saberá no final deste capítulo. Acompanhe agora o nosso novo começo.

1.2 Noção Intuitiva de Limite



***Exemplo* 1.4.** Seja f uma função definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{x^2 - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

Nosso objetivo é estudar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de um dado valor 1, diremos que x tende a 1 e vamos usar a notação $x \to 1$.
Claramente, existem duas possibilidades para x se aproximar de 1:

(1) x se aproxima de 1 por valores inferiores a 1, neste caso, diremos que x tende para 1 pela esquerda e indicaremos $x \to 1^-$:

x	$0,3$	$0,5$	$0,7$	$0,9$	$0,999$
y	$1,3$	$1,5$	$1,7$	$1,9$	$1,999$

(2) x se aproxima de 1 por valores superiores a 1 neste caso, diremos que x tende para 1 pela direita indicaremos $x \to 1^+$:

x	$1,9$	$1,7$	$1,5$	$1,3$	$1,001$
y	$2,9$	$2,7$	$2,5$	$2,3$	$2,001$

Em ambos os casos, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2 à medida que x se aproxima de 1. Assim, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 2 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 1. Daí, dizemos que existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 e seu valor é 2. Simbolicamente:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

O limite, portanto, estabelece qual o comportamento da função na vizinhança de um ponto, sem que este pertença necessariamente ao seu domínio.

Olhando desta forma, podemos concluir que quando provamos no exemplo 1.2 que o limite da função $f(x) = 2x+3$ é igual a 5 quando x tende a 2, estávamos, na verdade, afirmando que os valores de f estarão cada vez mais próximos de 5 quanto mais próximos de 2 se estivermos. Esta noção de proximidade, simbolicamente, é representada pelos ε e δ que aparecem na definição de limite. Reforço que para tal exemplo, você deve estar dizendo era muito mais fácil substituir, mas, em certas circunstâncias, como no exemplo 1.4, a função pode nem estar definida no ponto, então como determinar seu comportamento? Como vimos com o conceito de limite fomos capazes de responder a esta pergunta.

Uma questão relevante a ser discutida é: caso o limite de $f(x)$ quando x tende a a exista, será que ele é único? esta questão é plenamente respondida com o teorema abaixo.

1.2 Teorema. [Unicidade do Limite] Seja f uma função definida num intervalo com valores reais. Se existe o limite de uma função num ponto, então ele é único.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_1 \text{ e } \lim_{x \to a} f(x) = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2.$$

Prova: Sem perder a generalidade, suponha que $b_1 < b_2$. Mas,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0; 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon) \tag{1.1}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_2 > 0; 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b_2| < \varepsilon). \tag{1.2}$$

Escrevendo $b_1 - b_2$ como $b_1 - f(x) + f(x) - b_2$ e nos utilizando da desigualdade triangular temos,

$$|b_1 - b_2| = |b_1 - f(x) + f(x) - b_2| \leq |b_1 - f(x)| + |f(x) - b_2| = |f(x) - b_1| + |f(x) - b_2|.$$

Considerando $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$, temos $\delta < \delta_1$ e $\delta < \delta_2$. Segue que,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |b_1 - b_2| \leq |f(x) - b_1| + |f(x) - b_2| < 2\varepsilon.$$

Assim, $\dfrac{|b_1 - b_2|}{2} < \varepsilon$. Portanto, podemos escrever $\dfrac{b_2 - b_1}{2} = \delta$. Segue que

$$|f(x) - b_1| < \frac{b_2 - b_1}{2} \text{ e } |f(x) - b_2| < \frac{b_2 - b_1}{2}.$$

Isto é,

$$b_1 + \frac{b_1 - b_2}{2} < f(x) < b_1 + \frac{b_2 - b_1}{2} \text{ e } b_2 + \frac{b_1 - b_2}{2} < f(x) < b_2 + \frac{b_2 - b_1}{2}.$$

Segue que,

$$\frac{3b_1 - b_2}{2} < f(x) < \frac{b_2 + b_1}{2} \text{ e } \frac{b_1 + b_2}{2} < f(x) < \frac{3b_2 - b_1}{2},$$

ou seja,

$$\frac{b_1 + b_2}{2} < f(x) < \frac{b_2 + b_1}{2},$$

que é um absurdo. Portanto, o limite é único. □

Ao acompanhar a demonstração acima, o leitor, ainda pouco familiarizado com esta linguagem, possivelmente deve estar sufocado, confuso mesmo. Compreenda que o formalismo que nos referíamos no início do texto é necessário para a compreensão de conceitos mais sofisticados e, salientamos, que para qualquer grande caminhada é sempre preciso dar o primeiro passo.

1.2.1 Exercícios Propostos

***EP* 1.1.** Usando a idéia intuitiva de limite, calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} (x+1)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2 + 1\right)$.

***EP* 1.2.** Usando a definição de limites demonstre as seguintes igualdades.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} (4x - 1) = -5$.

(b) $\lim\limits_{x\to a} (mx + n) = ma + n$, $m \neq 0$.

(c) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+1}{x+1} = 2$

1.3 Limites Laterais

Lembremos que, quando queremos determinar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, estamos interessados nos valores de $f(x)$ quando os valores de x se aproximavam de a, isto é, nos valores de x pertencentes a uma vizinhança de a. Esta idéia motiva um outro conceito bastante útil que é o de *limites laterais*, que apresentaremos agora.

1.3 Definição. Seja $f(x)$ um função definida num intervalo I com valores em $\mathbb{R}$ e $a \in I$. Ao tomarmos valores em I maiores que a e que se aproximam de a, obtemos valores para $f(x)$ que se aproximam de um valor b_1. Dizemos então que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b_1.$$

Como vimos no exemplo anterior, quando x se aproxima de 1 por valores inferiores a 1 temos que $f(x)$ se aproxima de 2, deste modo, podemos dizer que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

No caso em que tomamos valores em I menores que a e que se aproximam de a, obtemos valores para $f(x)$ que se aproximam de um valor b_2. Dizemos então que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b_2.$$

Analogamente,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

1.4 Definição. Os limites à direita e à esquerda mencionados são chamados limites laterais.

Segue da definição que, quando os limites laterais coincidem, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, então $f(x)$ possuirá limite b, quando $x \to a$.

Simbolicamente,

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b.}$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to a} f(x).}$$

Isto é, se $f(x)$ se aproxima de valores distintos à medida que x se aproxima de a, então o limite da função f não existe neste ponto. Como mostra o exemplo a seguir.

***Exemplo* 1.5.** Seja f uma função definida por

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x + \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x > 0 \\ x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

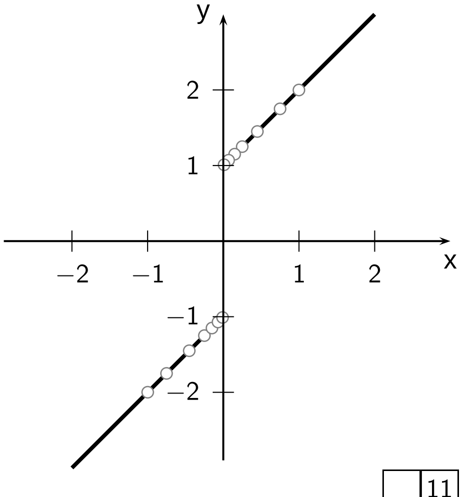
Observemos o comportamento de f quando:

(1) $x \to 0^+$

x	$0,999$	$0,8$	$0,6$	$0,4$	$0,1$
y	$1,999$	$1,8$	$1,6$	$1,4$	$1,1$

(2) $x \to 0^-$

x	$-0,999$	$-0,8$	$-0,6$	$-0,4$	$-0,1$
y	$-1,999$	$-1,8$	$-1,6$	$-1,4$	$-1,1$



Note que, à medida que os valores de x se aproximam de 0, com valores maiores do que 0, os valores da função se aproximam de 1, e que, à medida que os valores de x se aproximam de 0, com valores menores do que 0, os valores da função se aproximam de -1. Concluímos, então, que não existe o limite de f quando x tende a 0, pois os limites laterais existem e são desiguais. Em outras palavras

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

Nota 1. É possível que o número a pertença ao domínio da função f. Logo, existe $f(a)$. Porém, talvez não exista o limite de $f(x)$, quando x tende para a. Por exemplo, a função f definida por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x+1 &, \quad \text{se } x > 0 \\ x-1 &, \quad \text{se } x < 0 \\ 0 &, \quad \text{se } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

temos que $f(0) = 0$. Mas, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, pois $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Na seção 1.1, usamos a definição de limite para provar que um dado número era limite de uma função e, na seção 1.3, recorremos à análise gráfica e ao conceito de limite lateral. Este processo foi relativamente simples para as funções apresentadas, mas se tornaria bastante complicado para outras funções mais elaboradas. A seguir, introduziremos propriedades que podem ser usadas para calcular limites sem que seja necessário apelarmos para a construção de gráficos, elaboração de tabelas e, principalmente, para o cálculo do limite usando a definição.

1.3.1 Exercícios Propostos

***EP* 1.3.** Seja f uma função definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{se } x > 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ 4x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases} \end{aligned}.$$

Determine $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e, caso exista $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

***EP* 1.4.** Determine, caso exista, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, em que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x; & \text{se } x \geq 0 \\ -x; & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

***EP* 1.5.** Determine, se possível, $b \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, sendo:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2; & x > -1 \\ 3; & x = -1 \\ 5 - bx; & x < -1 \end{cases}$$

1.3.2 Propriedades dos Limites

1.5 Proposição. *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, e k é um número real qualquer, então:*

1. $\lim\limits_{x\to a} k = k$;
2. $\lim\limits_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c$;
4. $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \cdot c$;
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}$, *desde que* $c \neq 0$;
6. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = b^n$, *para qualquer inteiro positivo* n *e não nulo;*
7. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$, *desde que as condições de existência da raiz sejam satisfeitas em* $\mathbb{R}$.

Prova: Provaremos as propriedades 1 e 3. As demais ficam como exercício.

Para mostrarmos a propriedade 1, devemos provar que:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon.$$

De fato, é sempre verdadeiro, pois $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon$.

Já para a propriedade 3, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = b + c$, devemos provar que:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (b + c)| < \epsilon.$$

Sendo assim, dado um $\epsilon > 0$, consideremos $\dfrac{\epsilon}{2}$. Temos:

$$\begin{array}{lcl} \exists \delta_1 > 0; 0 < |x - a| < \delta_1 & \Rightarrow & |f(x) - b| < \dfrac{\epsilon}{2} \\ \exists \delta_2 > 0; 0 < |x - a| < \delta_2 & \Rightarrow & |g(x) - c| < \dfrac{\epsilon}{2}. \end{array}$$

Consideremos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e, portanto, $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$. Segue que: dado $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| + |g(x) - c)| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Mas, pela desigualdade triangular, temos:

$$|f(x) - b| + |g(x) - c)| \leq |f(x) + g(x) - (b + c)| = |(f + g)(x) - (b + c)|.$$

Conclusão: existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (b + c)| < \epsilon$. □

***Nota* 2.** Note que a propriedade 3 pode ser estendida para uma soma de um número finito de funções, isto é, se $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$, $\ldots$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$, então,

$$\lim_{x\to a}(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim_{x\to a} f_n(x) = b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_n.$$

O mesmo raciocínio aplica-se para a propriedade 4.

1.4 Limite de uma Função Polinomial

O Teorema a seguir mostra que o cálculo de limites, quando restringido ao subconjunto das funções polinomiais, é bastante simples. A demonstração de tal teorema decorre de forma imediata das propriedades apresentadas acima.

1.6 Teorema. Seja p uma função polinomial definida num intervalo real, com valores reais. Então,

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

Prova: Decorre de aplicações sucessivas das propriedades do limite de uma função que, se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, é um polinômio, então $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$. □

Portanto, quando se tratar de uma função dada por um polinômio para calcular o limite basta calcular o seu valor numérico.

Nota 3. As propriedades de limites e o teorema do limite da função polinomial são válidos se substituirmos "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

***Exemplo* 1.6.** Determine:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(2x^2 - x + 1\right)$;

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5}{3x - 4}$;

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{-2x^2 - 5x + 1}{3x - 4}\right)^2$;

(d) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}}$;

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$;

Solução:

(a) $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 - x + 1) = 2\left(\lim\limits_{x \to 1} x\right)^2 - \lim\limits_{x \to 1} x + \lim\limits_{x \to 1} 1 = 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 2.$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5}{3x - 4} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} 2x^2 - 5}{\lim\limits_{x \to 2} 3x - 4} = \dfrac{2 \cdot 2^2 - 5}{3 \cdot 2 - 4} = \dfrac{3}{2}.$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{-2x^2 - 5x + 1}{3x - 4}\right)^2 = \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2x^2 - 5x + 1}{3x - 4}\right)^2 = \left(\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} -2x^2 - 5x + 1}{\lim\limits_{x \to 0} 3x - 4}\right)^2 = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}.$

(d) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} = \sqrt[3]{\dfrac{\lim\limits_{x \to -2} \left(x^3 + 2x^2 - 3x + 2\right)}{\lim\limits_{x \to -2} \left(x^2 + 4x + 3\right)}} = \sqrt[3]{-8} = -2.$

(e) Como o $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, não podemos aplicar diretamente a proposição 1.5 para determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$. Devemos, antes, multiplicar o numerador e o denominador por $(\sqrt{x+1} + 1)$ para podermos determinar o limite proposto. Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

1.4.1 Exercícios Propostos

***EP* 1.6.** Calcule os limites a seguir:

(a) $\lim\limits_{x \to -1} \left(3x^2 - x^3 + 10\right)$;

(b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{-2x^2 - 5}{5x + 9}$.

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{3x - 4}\right)^5$.

(d) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{\dfrac{-2x^3 + 5x^2 - 3x + 2}{4x + 3}}$.

***EP* 1.7.** Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$;

(c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 - x^2}{x + \sqrt{2 + x}}$;

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x}$;

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x^3 - 1}$.

***EP* 1.8.** Determine k, tal que:

(a) $\lim\limits_{x\to 5}\left(3kx^2-5kx+3k\right)=\dfrac{5}{2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^4-3x^2+2x-2\right)=k$; (c) $\lim\limits_{x\to k}\left(x^2-5x+6\right)=0$.

***EP* 1.9.** São corretas as afirmações a seguir?

(a) $\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=x+3$; (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)$.

1.5 Limite de uma Função Racional

Já somos capazes de calcular limites de funções definidas por polinômios e, usando a propriedade , podemos determinar alguns limites cujas funções são dadas como quociente de polinômios. Porém, ainda nos restam alguns casos, que tratemos detalhadamente agora.

Sejam $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ e $q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$ duas funções polinomiais, com $a_n\neq 0$ e $b_m\neq 0$. Uma função racional é qualquer função do tipo $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$. Para calcularmos o limite de $f(x)$ quando $x\to a$, temos três casos à considerar:

1. Se $q(a)\neq 0$, então $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{p(a)}{q(a)}$ (já vimos, proposição 1.5).

   ***Exemplo* 1.7.** Determine: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x-3}{4x-3}$.

   Solução: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x-3}{4x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+2x-3\right)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x-3)}=\dfrac{(-1)^2+2(-1)-3}{4(-1)-3}=\dfrac{-4}{-7}=\dfrac{4}{7}$.

2. Se $q(a)=p(a)=0$, então $f(a)$ é uma indeterminação e isto não significa a inexistência do limite. Geralmente, afasta-se esta indeterminação através de uma divisão dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$ por $x-a$, visto que a é uma raiz de $p(x)$ e $q(x)$, obtendo-se o limite desejado.

   ***Exemplo* 1.8.** Determine: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

   Solução: Observe que, procedendo-se como no exemplo anterior, surge uma indeterminação, pois $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$ e $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$, ou seja, não podemos aplicar a proposição 1.5. Devemos, portanto, dividir o numerador e o denominador por $(x-3)$. Desta forma,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{1}=3+3=6.$$

3. Se $p(a)\neq 0$ e $q(a)=0$, então $f(a)$ não está definido. Neste caso, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p(x)}{q(x)}$ depende dos limites laterais de $f(x)$ (quando $x\to a^-$ e quando $x\to a^+$) e do sinal $\dfrac{p(x)}{q(x)}$. Como vemos nos exemplos da seção que segue.

1.6 Limites Infinitos

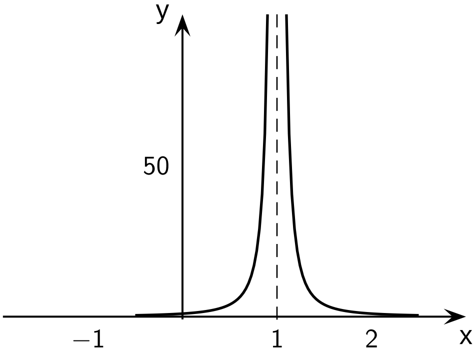
O que acontece com os valores de $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ quando x se aproxima de 1?

Observe que a função $\frac{1}{(x-1)^2}$ não está definida para $x = 1$. Ou seja, o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Para determinarmos o limite desejado, vamos recorrer a intuição. Procedamos como segue:

Tomemos valores cada vez mais próximos de 1, respectivamente, à esquerda e à direita. Temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	1	4	16	100	10.000	1.000.000

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	1	4	16	100	10.000	1.000.000



Notemos, nas duas tabelas, que à medida que os valores de x tendem a 1, os valores de $f(x)$ são cada vez maiores. Em outras palavras, podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, tomando valores para x bastante próximos de 1. Simbolicamente:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty,$$

em que o símbolo "$+\infty$" (lê-se "mais infinito") não representa qualquer número real, mas indica o que ocorre com a função quando x se aproxima de 1. Formalmente, temos:

1.7 Definição. Seja I um intervalo real, com $a \in I$, e f uma função real definida em $I \setminus \{a\}$. Então, dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ quando x se aproxima de a e $f(x)$ cresce ilimitadamente, ou seja, quando, para qualquer número $M > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) > M$, Ou ainda,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

Assim, com base na definição, podemos provar que,

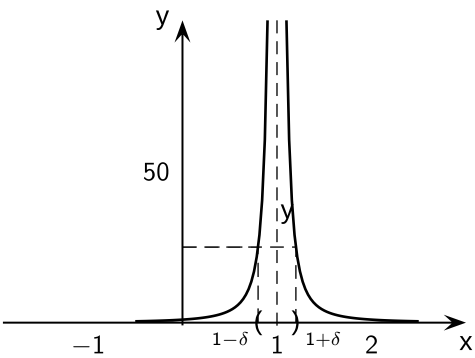
$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty,$$

uma vez que se fizermos $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$,

$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M, \forall\, M > 0.$$

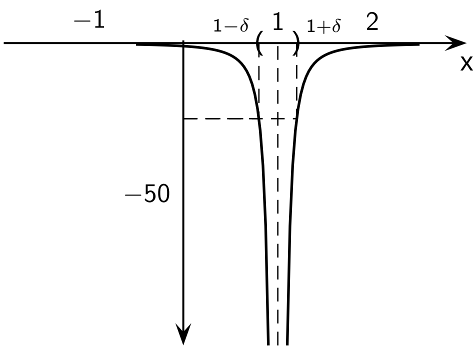


Tomemos, agora, a função g como sendo $g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ definida para todo x real e x diferente de 1.

Tomemos valores cada vez mais próximos de 1, respectivamente, à esquerda e à direita. Temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	−1	−4	−16	−100	−10.000	−1.000.000

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	−1	−4	−16	−100	−10.000	−1.000.000



Assim, para a função g, quando x se aproxima de 1, os valores de $g(x)$ decrescem ilimitadamente. Simbolicamente,

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty,$$

em que o símbolo "$-\infty$" lê-se "menos infinito" e não representa nenhum número real, mas indica o que ocorre com a função quando x se aproxima de 1. Formalmente,

1.8 Definição. Seja I um intervalo real, com $a \in I$, e f uma função real definida em $I \setminus \{a\}$. Então, dizemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

quando x se aproxima de a e $f(x)$ decresce ilimitadamente, ou seja, quando, para qualquer número $M < 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) < M$. Ou ainda,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M).$$

Para concluirmos que os valores de uma função crescem indefinidamente ou decrescem indefinidamente, quando x se aproxima de a, pela esquerda ou pela direita de a, construímos uma tabela de valores da função tomando valores cada vez mais próximos de a. Vejamos como chegar à mesma conclusão sem a necessidade de construirmos uma tabela. Para tanto, precisaremos do Teorema da Conservação do sinal que enunciaremos e demonstraremos a seguir.

1.9 Teorema. [Teorema da Conservação do Sinal] Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq 0$, então existe uma vizinhança V_a de a, tal que $\forall\, x \in V_a, x \neq a$, tem-se $f(x)$ com o mesmo sinal de b.

Prova: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$.

Seja $\varepsilon = \alpha|b|, 0 < \alpha < 1$. Logo, $|f(x) - b| < \alpha|b|$, ou seja, $b - \alpha|b| < f(x) < b + \alpha|b|$.

1. Se $b > 0$, $|b| = b$ e $b(1-\alpha) < f(x) < b(1+\alpha)$. Conseqüentemente, $f(x) > 0$.

2. Se $b < 0$, $|b| = -b$ e $b(1-\alpha) < f(x) < b(1+\alpha)$. Conseqüentemente, $f(x) < 0$.

Em qualquer um dos casos $f(x)$ conserva o sinal do limite em uma vizinhança $V(a; \delta)$. □

1.10 Teorema. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k, k \in \mathbb{R}^*$, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então:

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, se $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, quando x se aproxima de a;

2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, se $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, quando x se aproxima de a.

***Exemplo* 1.9.** Calcular o limite $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)^2$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, e observando que $\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)^2 > 0$, para todo $x \neq 1$, então aplicando o teorema 1.10, temos $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)^2 = +\infty$.

***Exemplo* 1.10.** Calcular o limite $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-5}{x-2}$.

Solução: Primeiramente observe que $\lim\limits_{x\to 2}(2x-5) = -1$ e $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$. Pelo teorema da conservação de sinal, a função $f(x) = 2x-5$ é negativa numa vizinhança de $x = 2$. Já a função $g(x) = x-2$ é negativa para os valores de x menores do que 2 e positiva para os valores de x maiores do que 2. Assim, $\dfrac{2x-5}{x-2} > 0$, quando $x \to 2^-$ e $\dfrac{2x-5}{x-2} < 0$, quando $x \to 2^+$. Deste modo, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-5}{x-2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x-5}{x-2} = -\infty$ implicando a não existência de $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-5}{x-2}$.

1.6.1 Propriedades dos Limites Infinitos

	Dados		Conclusão
P.01	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = +\infty$
P.02	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = -\infty$
P.03	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = +\infty$
P.04	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = -\infty$
P.05	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = +\infty$
P.06	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = k \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty, k>0 \\ -\infty, k<0 \end{cases}$
P.07	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = k \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty, k<0 \\ -\infty, k>0 \end{cases}$
P.08	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$		$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
P.09	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$		$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \pm\infty$
P.10	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = \mathbf{?}$
P.11	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = \mathbf{?}$
P.12	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \mathbf{?}$
P.13	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \mathbf{?}$
P.14	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \mathbf{?}$

***Exemplo* 1.11.** Calcular o $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2}\right]$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, por $P.01$, temos que: $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2}\right] = +\infty$.

***Exemplo* 1.12.** Calcular o $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[-\dfrac{1}{x^2} \cdot \log(x)\right]$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty$, por $P.05$, temos que: $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[-\dfrac{1}{x^2} \cdot \log(x)\right] = +\infty$.

1.6.2 Exercícios Propostos

***EP* 1.10.** Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2+3}{(x-5)^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-4}{|x-2|}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+5}{x^2-5x+4}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+5}{x^2-5x+4}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+5}{x^2-5x+4}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+5}{x^2-5x+4}$.

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+5}{x^2-5x+4}$.

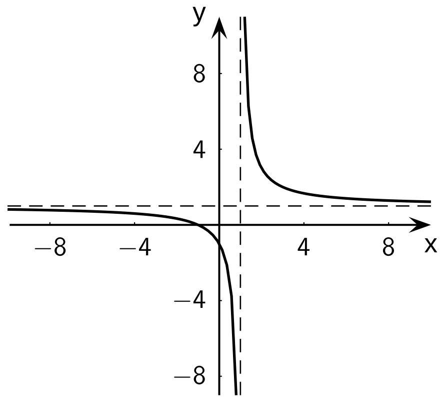
1.7 Limites no Infinito

Ampliaremos o exposto acima com o conceito de limites no infinito que nos dá informações sobre a função quando os valores de x crescem ou decrescem indefinidamente. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ para todo x real diferente de 1. Atribuindo a x os valores $2, 6, 20, 50, 101, 1.001, 10.001$, e assim por diante, de tal forma que x cresça ilimitadamente, conforme mostra a tabela a seguir.

***Exemplo* 1.13.** Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1}$.

Tomando valores cada vez maiores para x, temos:

x	2	6	20	50	101	1001	10001
$f(x)$	3	$1,4$	$1,1052$	$1,0408$	$1,02$	$1,002$	$1,0002$



À medida que x cresce ilimitadamente, os valores de $\dfrac{x+1}{x-1}$ se aproximam cada vez mais de 1. Desta forma, podemos escrever

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

Formalmente, temos,

1.11 Definição. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Escrevemos:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, quando x cresce ilimitadamente e $f(x)$ se aproxima de b se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N_0 > 0$ tal que se $x > N_0$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Simbolicamente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_0 > 0; x > N_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Analogamente,

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, quando x decresce ilimitadamente e $f(x)$ se aproxima de b se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N_0 < 0$ tal que se $x < N_0$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Simbolicamente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_0 < 0; x < N_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

1.12 Definição. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Escrevemos:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, quando x e $f(x)$, ambos crescem ilimitadamente, ou seja, quando, para qualquer número $M > 0$, existe $N_0 > 0$ tal que, se $x > N_0$, então $f(x) > M$. Simbolicamente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall\, M > 0, \exists\, N_0 > 0; x > N_0 \Rightarrow f(x) > M).$$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, quando x cresce e $f(x)$ decresce, ambos ilimitadamente, ou seja, quando, para qualquer número $M < 0$, existe $N_0 > 0$ tal que, se $x > N_0$, então $f(x) < M$. Simbolicamente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall\, M < 0, \exists\, N_0 > 0; x > N_0 \Rightarrow f(x) < M).$$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, quando x decresce e $f(x)$ cresce, ambos ilimitadamente, ou seja, quando, para qualquer número $M > 0$, existe $N_0 < 0$ tal que, se $x < N_0$, então $f(x) > M$. Simbolicamente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall\, M > 0, \exists\, N_0 < 0; x < N_0 \Rightarrow f(x) > M).$$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, quando x e $f(x)$, ambos decrescem ilimitadamente, ou seja, quando, para qualquer número $M < 0$, existe $N_0 < 0$ tal que, se $x < N_0$, então $f(x) < M$. Simbolicamente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall\ M < 0, \exists\ N_0 < 0; x < N_0 \Rightarrow f(x) < M).$$

Acredito que o leitor se sentirá motivado a procurar exemplos para cada um dos ítens da definição acima. A seguir, apresentamos alguns resultados que nos ajudarão a concluir algo sobre o comportamento dos valores de uma função quando os valores de x crescem (ou decrescem) ilimitadamente, sem, necessariamente termos que construir uma tabela.

1.13 Teorema. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, e $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & , \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ é par} \\ -\infty & , \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Exemplo **1.14.**

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = -\infty$; 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$; 4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = -\infty$.

1.14 Teorema. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo **1.15.**

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$; 3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; 4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$.

1.15 Teorema. Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, é uma função polinomial, então:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n.$$

Prova:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \ldots + \frac{a_2 x^2}{a_n x^n} + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_2}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

□

A prova do teorema a seguir é análoga a prova do teorema 1.15 e deverá ser feita pelo leitor.

1.16 Teorema. Se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, e $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$, $b_m \neq 0$, são funções polinomiais, então:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

1.8 Propriedades dos Limites no Infinito

Exibiremos, agora, uma tabela contendo as propriedades dos limites no infinito. Note que trocando "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$" as propriedades continuam verdadeiras.

	Dados		Conclusão
P.01	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = \pm\infty$
P.02	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = +\infty$
P.03	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = -\infty$
P.04	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = +\infty$
P.05	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = k \neq 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty, k>0 \\ -\infty, k<0 \end{cases}$
P.06	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = k \neq 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty, k<0 \\ -\infty, k>0 \end{cases}$
P.07	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$		$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
P.08	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$		$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
P.09	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$		$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \pm\infty$
P.10	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f-g)(x) = \mathbf{?}$
P.11	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f-g)(x) = \mathbf{?}$
P.12	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \mathbf{?}$
P.13	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \mathbf{?}$
P.14	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\cdot g)(x) = \mathbf{?}$

Como vimos na tabela anterior, muitas vezes aparecem os símbolos:

$$+\infty - \infty,\ \infty\cdot 0,\ \frac{+\infty}{-\infty},\ \frac{0}{0}.$$

Estes são chamados símbolos de indeterminação. Quando aparece um destes símbolos no cálculo de um limite, nada se pode dizer sobre este limite, isto é, ele poderá existir ou não, dependendo da expressão da qual está se calculando o limite. Mostraremos, a seguir, através de exemplos, como resolver os limites de funções contendo indeterminações apresentadas nas propriedades **P.10**, **P.11**, **P.12** e **P.13**.

***Exemplo* 1.16.** Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2 - x^3\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x - 3x^2 + 6x^5\right)$; (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^5 - \sqrt{2}x^7 - 5x + 6x^5 + 8\right)$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-1}{6x^2+4}$; (e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+x}$; (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$; (g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2(x^2+1)}{x^3}$.

Solução:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2 - x^3\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = -\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$. Na primeira igualdade usamos o teorema 1.15 e na segunda a propriedade P.05;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x - 3x^2 + 6x^5\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 6x^5 = 6\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$, pela propriedade P.05, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x - 3x^2 + 6x^5\right) = +\infty$;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^5 - \sqrt{2}x^7 - 5x + 6x^5 + 8\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{2}x^7 = -\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} x^7$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$, novamente, pela propriedade P.05, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^5 - \sqrt{2}x^7 - 5x + 6x^5 + 8\right) = +\infty$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-1}{6x^2+4}$. Pelo Teorema 1.15, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} 6x^2+4 = \lim\limits_{x\to+\infty} 6x^2 = +\infty$. Temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Para resolvermos, devemos proceder como segue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{6x^2+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{6x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{6} = \frac{1}{6}\lim_{x\to+\infty} x.$$

Pela propriedade P.05, $\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$;

(e) Neste, devemos proceder de forma análoga ao item anterior. Assim, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$. Pela propriedade P.07, temos que: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}}$. É fácil ver que trata-se de uma indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, pois $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Neste caso, devemos observar que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} x^{1-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty;$$

(g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2(x^2+1)}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 2\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$. Pela propriedade $P.07$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Portanto $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2(x^2+1)}{x^3} = 0$.

***Nota* 4.** Se $p(x)$ e $q(x)$ são funções irracionais, o procedimento para o cálculo do limite é análogo ao das funções polinomiais e racionais.

Exemplo* 1.17*. Calcular:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+5}}{x-1}$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+7}-x\right)$.

Solução:

(a) Observemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+5} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x+5)} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} x^2} = +\infty$$

e $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$. Portanto, uma indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Note que:

$$\frac{\sqrt{x^2-3x+5}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{x+1} = \frac{|x|\cdot\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

e, portanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+5}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 1;$$

(b) Observemos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+2} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x+2)} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} x^2} = +\infty$$

e $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=+\infty$. Portanto, uma indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{-\infty}$. Note que:

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}}{x+1}=\frac{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

e, portanto:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+5}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=-1$$

(c) Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $(+\infty)-(+\infty)$, pois,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+7}=+\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Para obtermos o limite procurado, multiplicamos e dividimos $\sqrt{x^2+3x+7}-x$ por $\sqrt{x^2+3x+7}+x$. Assim, temos:

$$\sqrt{x^2+3x+7}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x+7}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x+7}+x}=\frac{3x+7}{\sqrt{x^2+3x+7}+x}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+7}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+7}{\sqrt{x^2+3x+7}+x}.$$

Mas,

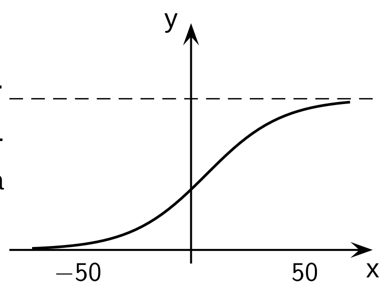
$$\lim_{x\to+\infty}3x+7=+\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+7}+x=+\infty.$$

Portanto, uma indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Daí, procedendo, como no exemplo anterior, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+7}{\sqrt{x^2+3x+7}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{7}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}=\frac{3}{2}.$$

Voltemos ao problema 1: A partir de uma coleta de dados, verificou-se que, daqui a um certo número de anos, digamos t anos, a população de um certo país será de $P(t)=\dfrac{80}{8+12e^{-0,06t}}$ milhões de habitantes. A medida que os anos forem passando e desconsiderando as mortes a população se aproximará de que número?

Solução: Basta calcularmos o limite $\dfrac{80}{8+12e^{-0,06t}}$ quando $x\to\infty$. Vejamos $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{80}{8+12e^{-0,06t}}=10$. Daí, a população será de 10 milhões, ou seja, a medida que o tempo for suficientemente grande a população se aproximará deste valor. Como vemos graficamente:



1.8.1 Exercícios Propostos

***EP* 1.11.** Determine:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+2}{x+1}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{(x-2)^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+5x+1}{x^4+5x^3+3}$

(h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+10}{3x^2+2x+6}$

***EP* 1.12.** Determine:

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5x^2 + x + 5}$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 + 2}}{x^3}$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 11}{\sqrt{x^2 + 1}}$

***EP* 1.13.** Determine:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} + x$;

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 4} - x$;

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 1}$;

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right)$;

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$;

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x$.

1.9 Gabarito

1.1. (a) 2, (b) 1, (c) 5. 1.2. . 1.3. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$, $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$. 1.4. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. 1.5. $b = -10$. 1.6. (a) 14, (b) $-\dfrac{55}{34}$, (c) -1, (d) 0. 1.7. (a) $\dfrac{1}{2}$; (b) $\dfrac{1}{3}$; (c) $\dfrac{4}{3}$; (d) $\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$. 1.8. (a) $k = \dfrac{5}{106}$; (b) $k = 70$; (c) $k = 2, 3$. 1.9. (a) Não, os domínios são diferentes; (b) Sim. 1.10. (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) $+\infty$ (d) -1 (e) $+\infty$ (f) $-\infty$ (g) $-\infty$ (h) $+\infty$ (i) Não existe. 1.11. (a) 0, (b) 0, (c) 3, (d) 5, (e) 0, (f) 0, (g) 0, (h) $\frac{1}{3}$. 1.12. (a) $+\infty$, (b) 0, (c) $-\frac{1}{3}$, (d) 2. 1.13. (a) $+\infty$; (b) $+\infty$; (c) 0; (d) 1; (e) 0; (f) 2.

tema 2 Limites das Funções Transcendentes

2.1 Funções Contínuas

Como vimos, quando se trata de funções polinomiais ou racionais, o cálculo do limite é relativamente simples. A pergunta que surge, naturalmente, é a seguinte: existem funções cujo cálculo do limite é similar ao cálculo para funções polinomiais e racionais? A resposta a esta pergunta é sim, e as funções que cumprem esta propriedade são denominadas Funções Contínuas. Esta classe de funções formam um importante subconjunto do conjunto das funções, que veremos em detalhes a seguir.

2.1 Definição (Função Contínua no Ponto)**.** Dizemos que a função f é contínua em $a \in \mathrm{Dom}(f)$ se,

i. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, e

ii. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

***Exemplo* 2.1.** Seja $f(x) = 3x^2 - x$, temos que o $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - x) = 2 = f(1)$. Logo, f é contínua em $x = 1$.

***Exemplo* 2.2.** Seja $g(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x - 3}$. Temos que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 9}{x - 3} \right) = -3 = g(0)$. Logo, g é contínua em $x = 0$.

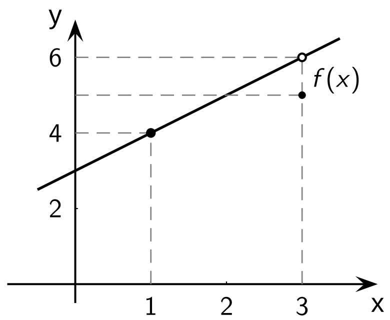
***Nota* 5.**

1. Decorre da definição de função contínua num ponto que só faz sentido indagar a continuidade de uma função f em $x = a$ se este ponto pertence ao domínio de f.

2. Se f não verifica qualquer uma das condições da definição anterior, dizemos que f é descontínua em a ou, simplesmente, que f é descontínua.

3. A continuidade de uma função em um ponto indica que o gráfico desta não apresenta “interrupções” nesse ponto. Veja os exemplos 2.3, 2.4 e 2.5, a seguir.

Exemplo 2.3. A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$ é descontínua, pois f não é contínua em $x = 3$.



$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 6 \neq 5 = f(3).$$

Exemplo 2.4. Seja a função f definida em $\mathbb{R}$ dada por

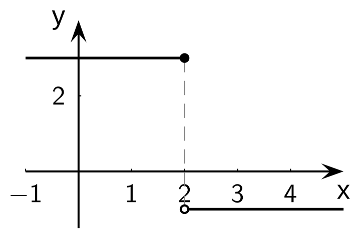
$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x \neq 1 \\ x-1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

f não é contínua em 1, pois $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2 \neq f(1) = 1$.

> **Nota 6.** Se consideramos a função f definida por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ sem especificar o seu domínio, fica subentendido que o domínio de f é o maior subconjunto dos números reais para os quais $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ faz sentido, ou seja $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Deste modo, f é contínua. De fato, $f(x) = x+1$ se $x \neq 1$ e $\lim_{x\to x_0} (x+1) = x_0 + 1 = f(x_0)$.

Exemplo 2.5. Seja a função g uma função definida abaixo

$$g(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x \leq 2 \\ -1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$



A função g não é contínua em 2, pois não existe o $\lim_{x\to 2} g(x)$. Veja o gráfico.

> **Nota 7.** A definição de continuidade pode ser expressa em função de ϵ e δ. De fato, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ significa que: para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in \mathrm{Dom}(f)$ e $|x-a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

2.2 Proposição (Propriedades das Funções Contínuas)**.** *Sejam f e g funções contínuas no ponto a. Então, as seguintes funções são contínuas em a:*

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *desde que* $g(a) \neq 0$

As provas destas propriedades decorrem imediatamente da definição.

2.3 Definição (Função Contínua num Intervalo)**.** Uma função $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ é contínua em (c, d) se é contínua em todos os pontos deste intervalo.

> **Nota 8.** Se f é uma função contínua em todos os pontos do seu domínio dizemos, simplesmente, que f é contínua.

2.4 Teorema. Uma função polinomial é contínua.

Prova: Consideremos f como sendo uma função polinomial. Pelo Teorema 1.6 temos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, o que prova que f é contínua. □

As função cosseno e tangente são contínuas. Para provarmos estes resultados precisamos do teorema do confronto que é apresentado e demonstrado a seguir.

2.5 Teorema. [do Confronto ou do Sanduíche] Se as funções com valores reais $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, definidas em $\mathbb{R}$, são tais que $f \leq g \leq h$ e, se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Prova: Considere ε um número real positivo arbitrário. Como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \text{ então existe } \delta_1 > 0; 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

e

$$\lim_{x \to a} h(x) = L, \text{ então existe } \delta_2 > 0; 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon.$$

Se fizermos $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $0 < |x-a| < \delta$ e,

$$\begin{cases} |f(x) - L| & < & \varepsilon \\ |h(x) - L| & < & \varepsilon \end{cases}$$

ou seja, $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$.

Nos utilizando da hipótese, podemos concluir que $L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$, ou seja, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$. Conseqüentemente, $|g(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$. Portanto, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. $\square$

2.6 Teorema. A função cosseno é contínua ou, equivalentemente, $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a), \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\cos(x) - \cos(a)| \\ &= \left| -2 \text{ sen}\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \\ &= \left| 2 \text{ sen}\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| \cdot \left| \text{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot \frac{x-a}{2} = x - a. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to a} 0 \leq \lim_{x \to a} |\cos(x) - \cos(a)| \leq \lim_{x \to a} (x-a)$$

e, pelo teorema do confronto, $\lim_{x \to a} |\cos(x) - \cos(a)| = 0$. De forma equivalente, $\lim_{x \to a} \cos(x) - \cos(a) = 0$. Logo, $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$. $\square$

Pode-se, de forma análoga, mostrar que

$$\lim_{x \to a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a), \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

2.7 Teorema. A função tangente é contínua. Mais precisamente,

$$\lim_{x \to a} \text{tg}(x) = \text{tg}(a), \forall\, a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Prova: $\lim_{x \to a} \text{tg}(x) = \lim_{x \to a} \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} \text{sen}(x)}{\lim_{x \to a} \cos(x)} = \dfrac{\text{sen}(a)}{\cos(a)} = \text{tg}(a)$ $\square$

Além dos exemplos anteriores, são também contínuas:

1. As Funções racionais;
2. As Funções secante, cossecante, cotangente;
3. As Funções exponenciais e as Funções logarítmicas.

2.8 Definição. *A função f é contínua à direita (resp. à esquerda) se está definida para $x = a$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$). Se f é contínua em (a, b) e em seus extremos, diremos que f é contínua no intervalo $[a, b]$.*

2.9 Proposição (Limite de uma Função Composta)***.*** *Sejam I e J intervalos, $a \in I$, f uma função definida em I, exceto possivelmente em a e $g : J \to \mathbb{R}$ com $\mathrm{Im}(f) \subset J$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in J$ e g é contínua em b, então, temos que:*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(b).$$

Como aplicação direta deste resultado temos:

Exemplo **2.6.** As funções $u(x) = e^x$, $g(x) = \mathrm{sen}(x)$, $h(x) = \cos(x)$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$ e a função $s(x) = \ln(x)$ é contínua em $(0, +\infty)$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in (0, +\infty)$, então:

1. $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{sen}(f(x)) = \mathrm{sen}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to a} \cos(f(x)) = \cos\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.
4. se $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in (0, +\infty)$, então $\lim\limits_{x\to a} \ln(f(x)) = \ln\left(\lim\limits_{x\to a}(f(x))\right)$.

Exemplo **2.7.** $\lim\limits_{x\to 0} 2^{x^2+1} = 2^{\lim\limits_{x\to 0} x^2+1} = 2^{0^2+1} = 2^1 = 2.$

Exemplo **2.8.** $\lim\limits_{x\to 1} \ln \dfrac{x^5+3x+1+5}{x+9} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5+3x+1+5}{x+9}\right) = \ln(1) = 0.$

Exemplo **2.9.** $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(x^2 + \mathrm{sen}(x) + \pi\right) = \cos(\pi) = -1$

2.10 Teorema. [Continuidade da Função Composta] Se a função g é contínua em a e a função f é contínua em $g(a)$, então a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Prova: Como g é contínua em a, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = a$. Da continuidade de f em $g(a)$ e pela Proposição 2.9, temos que, $\lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to a} g(x)) = f(g(a)) = f \circ g(a)$. □

Exemplo **2.10.** A função $f(x) = |x^3 + 5x + 3|$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, pois f é a composta da função $h(x) = x^3 + 5x + 3$ com a função $g(x) = |x|$.

2.1.1 Exercícios Propostos

EP **2.1.** Verifique se a função $e^{x^5-5x+\pi}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

EP **2.2.** Determine, se possível, as constantes reais a e b de modo que f seja contínua em -3, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 3x-3; x > 3 \\ ax; x = -3 \\ bx^2+1, x < -3 \end{cases}.$$

EP **2.3.** Determine, se possível, a constante real k de modo que f seja contínua em a, sendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, \text{ se } x \neq 3 \\ k, \text{ se } x = 3 \end{cases} \quad \text{a = 1} .$$

***EP* 2.4.** Para cada função f a seguir, verifique se f é contínua em $x_0 = a$.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 3x - 2, \text{ se } x > 1 \\ 2, \text{ se } x = 1 \\ 4x + 1 \text{ se } x < 1 \end{cases} \quad \text{a = 1} \; ; \qquad (b) f(x) = \begin{cases} x^2 - x; x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases} \quad \text{a = 0} \; .$$

***EP* 2.5.** Determine, se possível, $b \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2; x > -1 \\ 3; x = -1 \\ 5 - bx; x < -1 \end{cases} \quad \text{a = -1} \; .$$

***EP* 2.6.** Determine o valor de $b \in \mathbb{R}$ para que f seja contínua em $a = -1$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} x + 2b; x \geq -1 \\ b^2; x < -1. \end{cases}$$

2.2 Limites Fundamentais

Outros limites importantes que aparecem com muita freqüência, são os chamados limites fundamentais que discutiremos a seguir.

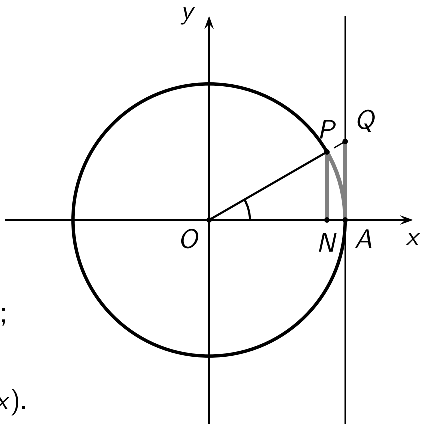
2.11 Teorema. [Limite Trigonométrico Fundamental]

Considere a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Então,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Esse limite trata de uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Como as funções $\operatorname{sen}(x)$ e x são ímpares, nota-se que a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ é par, ou seja, $f(-x) = f(x), \forall\, x \in \operatorname{Dom}(f)$. De fato,

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = f(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-x} = f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = f(x).$$



Prova: Da Trigonometria, temos:

1. $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}(x) < x < \operatorname{tg}(x) \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} > \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$;
2. $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) > x > \operatorname{tg}(x) \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$.

Multiplicando-se estas desigualdades por $\operatorname{sen}(x)$, resulta:

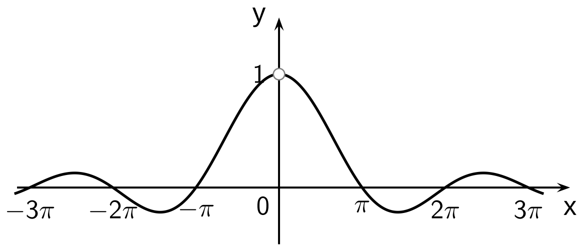
1. $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} > \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} > \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{tg}(x)} \Rightarrow 1 > \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} > \cos(x)$;
2. $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} < \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{tg}(x)} \Rightarrow 1 > \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} > \cos(x)$.

Temos, portanto, para $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $x \neq 0$, que vale a seguinte desigualdade:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} > \cos(x) \Leftrightarrow \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1.$$

Note que $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Pelo teorema do confronto, resulta que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$



$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

***Exemplo* 2.11.** Mostre que

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = k, \forall\, k \in \mathbb{R}^*$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$.

Solução:

(a) Observe que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} k\dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{kx}$. Agora, façamos $kx = w$. Como $x \to 0$, logo $w \to 0$.

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} k\frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx} = \lim_{w\to 0} k\frac{\operatorname{sen}(w)}{w} = k \cdot \lim_{w\to 0} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} = k \cdot 1 = k.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot \dfrac{1}{1} = 1.$

2.12 Teorema. [do Limite Exponencial Fundamental] Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus [-1, 0] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$. Então,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cong 2,7182818.$$

Inicialmente, usaremos o recurso das tabelas de aproximações e gráfico para visualizar este resultado.

Tomando valores cada vez maiores para x, temos:

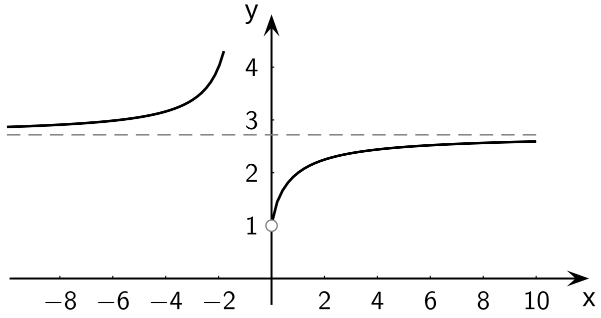
x	1	6	10^1	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	2	2,5219	2,59374	2,70481	2,71692	2,71815

Tomando valores cada vez menores para x, temos:

x	-10^1	-10^2	-10^3	-10^4
$f(x)$	2,86797,9	2,73200	2,71964	2,71842

Observe que quando x cresce ou decresce indefinidamente, a função $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ assume valores cada vez mais próximos de $e \approx 2,7182818$. Desta forma, escrevemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$



A prova direta deste teorema pode ser encontrada em [4]. No entanto, preferiremos fazer uma prova usando o Teorema de L'Hospital que veremos mais adiante.

***Exemplo* 2.12.** Determine:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

Solução:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=e^{2}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. De fato, pondo $\dfrac{1}{x}=w$, temos $x=\dfrac{1}{w}$, se $x\to 0$ então $w\to+\infty$ e, portanto,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{w\to+\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}=e.$$

2.13 Teorema. Considere a função $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}$, $0<a\neq 1$. Então,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Prova: Seja $t=a^x-1$. Assim, somando 1 a ambos os membros, temos, $a^x=t+1$. Segue que, $\ln(a^x)=\ln(t+1)$. Aplicando-se uma propriedade do logaritmo, $x\cdot\ln(a)=\ln(t+1)$. Isolando-se a variável x, temos, $x=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln(a)}$. Observe que quando $x\to 0$ temos que $t\to 0$ e:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\ln(t+1)}{\ln(a)}}=\lim_{t\to 0}t\cdot\frac{\ln(a)}{\ln(t+1)}=\ln(a)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{t}\cdot\ln(t+1)}=\ln(a)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln\left((t+1)^{\frac{1}{t}}\right)}=\ln(a).$$

O número e tem grande importância em diversos ramos das ciências, pois, está presente em vários fenômenos naturais, por exemplo: Crescimento populacional, desintegração radioativa (datação por carbono), circuitos elétricos, etc. Na área de economia, é aplicado no cálculo de juros.

Foi o Matemático Inglês John Napier ($1.550-1.617$) o responsável pelo desenvolvimento da teoria logarítmica utilizando o número e como base. O número e é irracional, ou seja, não pode ser escrito sob forma de fração, e vale, aproximadamente, $2,7182818$.

Como o número e é encontrado em diversos fenômenos naturais, a função $f(x)=e^x$ é considerada uma das funções mais importantes da matemática, merecendo atenção especial de cientistas das diferentes áreas do conhecimento humano.

***Exemplo* 2.13.** Sabemos que se uma determinada quantia L_0 é investida a uma taxa i de juros compostos, capitalizados n vezes ao ano, o saldo total $L(T)$, após T anos é dado por $L(T)=L_0\cdot\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^{in}$. Se os juros forem capitalizados continuamente, o saldo deverá ser:

$$L(T)=\lim_{n\to+\infty}L_0\cdot\left(1+\frac{i}{n}\right)^{Tn}=L_0\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n}\right]^{T}=L_0e^{iT}.$$

2.2.1 Exercícios Propostos

***EP* 2.7.** Calcule os limites seguintes:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}4x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{3x}$

***EP* 2.8.** Determine:

(a) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (c) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ (e) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ (d) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$ (f) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$

***EP* 2.9.** Use a continuidade da função para calcular os limites a seguir:

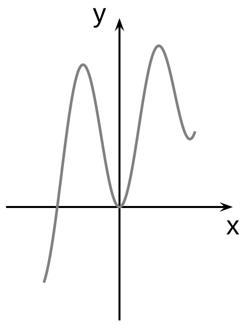
(a) $\lim_{x\to\pi}\cos(x+\operatorname{sen}(x))$; (b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}$; (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+\operatorname{sen}(\cos(x))\right)}{x^2+1}$.

2.3 Outros Teoremas sobre Limites

2.14 Teorema. [do Valor Intermediário] Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $f(a)<c<f(b)$ (ou $f(a)>c>f(b)$), então existe um número $x_0\in(a,b)$ tal que $f(x_0)=c$.

Vejamos algumas aplicações deste teorema.

Seja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^3-\cos(\pi x)+1$, então f assume o valor $\frac{3}{2}$. De fato, f é contínua e $1=f(-1)<\frac{3}{2}<f(1)=3$. Logo, segue do teorema do valor intermediário que existe um $x_0\in(-1,1)$ tal que $f(x_0)=\frac{3}{2}$. Veja no gráfico.



2.15 Corolário. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe um número $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

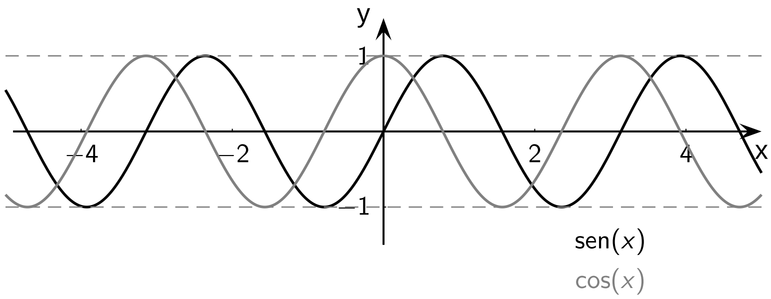
> ***Nota* 9.** Este resultado pode ser usado para localizarmos as raízes de um polinômio de grau ímpar. De fato, seja $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ uma função polinomial de grau n ímpar, $a_i\in\mathbb{R}$. Para os valor de x que são diferentes de zero podemos escrever:
>
> $$f(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_0}{a_nx^n}\right).$$
>
> Como $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)=1$; então, $\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$, pois n é ímpar. Logo, existem x_1 e x_2 tais que $f(x_1)<0$ e $f(x_2)>0$. f é contínua no intervalo $[x_1,x_2]$; pelo corolário existe um número $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

***Exemplo* 2.14.** Verifique que a equação $x^3-x=1$ possui pelo menos uma solução.

Solução: Primeiro, observemos que, considerando a função $f(x)=x^3-x$, estamos querendo saber se a equação $f(x)=1$ tem solução. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, sabemos que é contínua em qualquer intervalo $[a,b]$. Assim, usando o teorema do valor intermediário, garantimos que essa equação tem solução, e é suficiente encontrarmos os números a e b com a propriedade do número 1 estar entre $f(a)$ e $f(b)$. De fato, note que $f(0)=0$ e $f(2)=6$. Como $f(0)<1<f(2)$ e f é contínua no intervalo $[0,2]$, usamos o teorema com $a=0$, $b=2$ e $c=1$, para concluir que existe $x_0\in[0,2]$ tal que $f(x_0)=1$, isto é, a equação $x^3-x=1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0,2]$.

2.16 Definição. Uma função f é chamada limitada, se existe uma constante $M \in \mathbb{R}^*$, tal que $|f(x)| \leq M, \forall\, x \in \mathrm{Dom}(f)$, isto é $-M \leq f(x) \leq M, \forall\, x \in \mathrm{Dom}(f)$. Em outras palavras, f possui o conjunto imagem contido num intervalo de extremos reais.

Exemplo 2.15. As funções $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são limitadas em todo $\mathbb{R}$, pois, a imagem de cada uma é o intervalo $[-1, 1]$. Veja ilustração na figura ao lado.



2.17 Teorema.

1. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $g(x)$ é limitada, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

2. Se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ e $g(x)$ é limitada, então $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Exemplo 2.16. Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}$.

Solução: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \mathrm{sen}(x) = 0$, pois, a função $\mathrm{sen}(x)$ é limitada e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

2.4 Gabarito

2.1. Sim. 2.2. $a = 4$ e $b = -\frac{13}{9}$. 2.3. $k = 6$. 2.4. (a) Não; (b) Sim. 2.5. $b = -10$. 2.6. $b = 1$. 2.7. 2, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. 2.8. (a) e, (b) e^2, (c) e^2, (d) e^6, (e) e^3, (f) e^k. 2.9. (a) -1; (b) e; (c) $\mathrm{sen}(\mathrm{sen}(1))$.

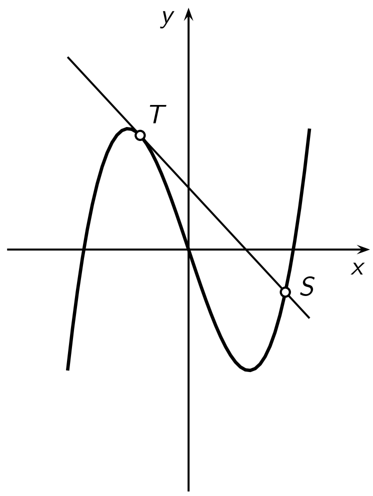
bloco temático 2 Derivadas

tema 3 Derivada das Funções Reais

Neste capítulo, apresentaremos a definição de Derivada de uma Função. Inicialmente, apresentaremos a noção de derivada a partir da reta tangente (interpretação geométrica) ao gráfico de uma função. Posteriormente, definiremos funções deriváveis e derivada de uma função em um ponto. Ao final do capítulo, daremos outros significados ao conceito de derivada fazendo várias aplicações.

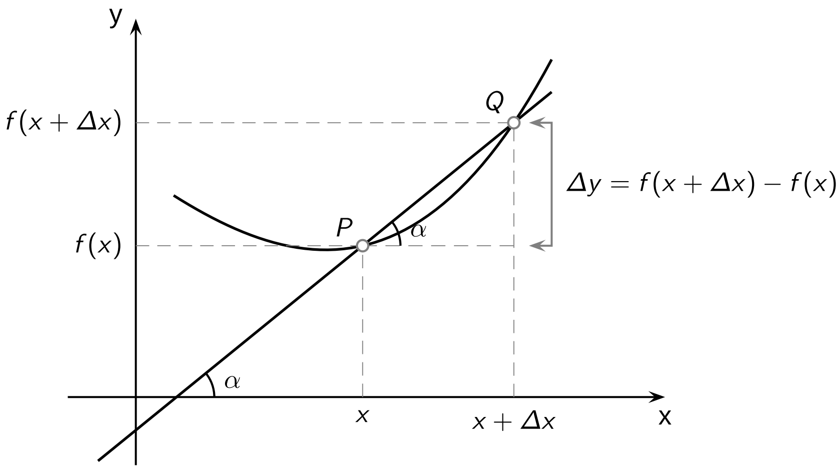
3.1 A Reta Tangente e a Derivada

Muitos problemas interessantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada num determinado ponto. Para uma circunferência, sabemos da Geometria Plana que a reta tangente em um ponto é a reta que tem com ela um único ponto em comum. Essa definição não é válida para uma curva em geral. Por exemplo, na figura ao lado, a reta que queremos que seja a tangente à curva no ponto T intercepta a curva em outro ponto S.



Para chegar a uma definição adequada de reta tangente ao gráfico de uma função num de seus pontos, começamos pensando em definir a inclinação da reta tangente no ponto. Então, a tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência.

Consideremos uma função f contínua em um certo $x \in \text{Dom}(f)$. Seja I o intervalo aberto que contém x e no qual f está definida. Consideremos $P(x, f(x))$ e $Q(x + \triangle x, f(x + \triangle x))$ pontos distintos do gráfico da função f. Tracemos a reta através de P e Q, ou seja, a secante PQ.

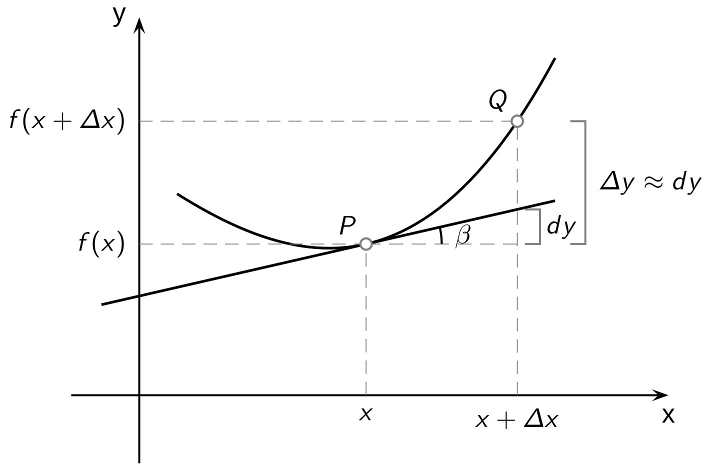


Suponha que Q se aproxima de P, deslocando–se sobre o gráfico da função f. Cada vez que Q ocupar nova posição, trace a nova secante correspondente. A inclinação da reta secante PQ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

onde Δx é a diferença entre as abscissas de Q e de P, e Δy é a diferença entre as ordenadas de Q e de P. Chamamos Δx e Δy por *incremento* de x e *incremento* de y, respectivamente.

Se Q se aproximar muito de P ou $\Delta x \to 0$, a reta secante PQ tenderá a uma "posição–limite". É esta posição–limite que queremos usar como a reta tangente ao gráfico da função f, no ponto P.



Portanto, definimos a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto P por

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{3.3}$$

se esse limite existir.

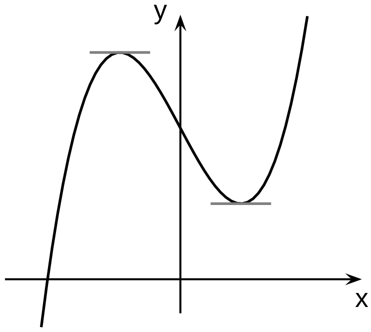
Observe que se o limite for ∞, então, a reta tangente ao gráfico da função, em P, é a reta perpendicular ao eixo das abscissas em x.

***Exemplo* 3.1.** Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por $y = f(x) = x^3 - 3x + 4$ nos pontos $(a, f(a))$, $(1, f(1))$ e $(-1, f(-1))$

Solução: Temos $f(a) = a^3 - 3a + 4$ e $f(a+\Delta x) = (a+\Delta x)^3 - 3(a+\Delta x) + 4$. Logo,

$$\begin{aligned} m(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^3 - 3(a+\Delta x) + 4 - (a^3 - 3a + 4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^3 + 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3a - 3\Delta x + 4 - a^3 + 3a - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(3a^2 + 3a\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\right) \\ &= 3a^2 - 3. \end{aligned}$$

ou seja, a inclinação da reta num ponto $(a, f(a))$ qualquer do gráfico da função f é dado por $m(a) = 3a^2 - 3$. Portanto, fazendo $a = 1$ e $a = -1$, temos $m(1) = m(-1) = 0$. Isso quer dizer, que nos pontos $(1, 2)$ e $(-1, 6)$ as retas tangentes nesses pontos são paralelas ao eixo das abscissas. Veja figura ao lado.



3.1 Definição. *Se f for contínua em x_0, então, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:*

$$y - f(x_0) = m_{(x_0)}(x - x_0).$$

***Exemplo* 3.2.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, no ponto, $(1, 3)$.

Solução: Seja m_1 o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ passando pelo ponto $(1, f(1)) = (1, 3)$. Sejam $P(1, 3)$ e $Q(x_0, x_0^2)$ pontos da parábola. O coeficiente angular da reta secante à parábola passando por P e Q é:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = -(x_0 + 1).$$

É intuitivo que quando Q se aproxima de P (x_0 aproxima-se de 1), os coeficiente de ambas as retas (secante e tangente) ficarão iguais. Logo,

$$m_1 = \lim_{x_0 \to 1} m_{PQ} = \lim_{x_0 \to 1} -(x_0 + 1) = -2.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1, 3)$ é $y - 3 = -2(x - 1)$.

***Nota* 10.** Segue da definição 3.1 que a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{m_{(x_0)}}(x - x_0),$$

se $m_{(x_0)} \neq 0$

O tipo de limite em (3.3), usado para definir a inclinação da reta tangente, é um dos mais importantes no Cálculo e leva um nome especial, conforme definição a seguir.

3.2 Definição (A Derivada de uma Função)***.*** *Uma função f é derivável no ponto x_0 se existe o seguinte limite*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

***Nota* 11.** Fazendo-se a mudança de variável $\Delta x = x - x_0$, temos

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

e $f'(x_0)$ é chamada derivada de f no ponto x_0. Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular a derivada de f para qualquer ponto $x \in Dom(f)$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Assim, f' é uma função de x e $f'(x_0)$ é um número real.

***Nota* 12.** Outras notações para a derivada de $y = f(x)$ são:

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}(f) \text{ e } D_x f.$$

***Nota* 13.** O processo de cálculo da derivada é chamado de *derivação*. Se uma função possui uma derivada em x_0, a função será *derivável* em x_0. Isto é, a função f será derivável em x_0 se $f'(x_0)$ existir. Uma função será derivável em um intervalo se ela for derivável em todo número no intervalo. Se f é derivável em todos os pontos do seu domínio, dizemos, simplesmente, que f é derivável. Se $f'(x_0)$ não existe ou é $\pm\infty$, dizemos que f não é derivável em x_0.

***Exemplo* 3.3.** Obtenha a função derivada da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x^3 - 3(x+\Delta x) + 4 - (x^3 - 3x + 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3a^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x + 4 - x^3 + 3x - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 \\
&= 3x^2 - 3.
\end{aligned}
$$

***Exemplo* 3.4.** Obtenha a derivada da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$ no ponto x_0.

Solução:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - 3x + 4 - ({x_0}^3 - 3x_0 + 4)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - 3x + 4 - {x_0}^3 + 3x_0 - 4}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - {x_0}^3 - 3x + 3x_0}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^2 + xx_0 + {x_0}^2\right) - 3(x + x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^2 + xx_0 + {x_0}^2 - 3\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} x^2 + xx_0 + {x_0}^2 - 3 \\
&= 3{x_0}^2 - 3
\end{aligned}
$$

No exemplo anterior, $f(x) = x^3 - 3x + 4$ possui derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$. Como o domínio de f é o conjunto dos números reais, e $3x^2 - 3$ existe para qualquer número x real, f é uma função derivável.

> ***Nota* 14.** A função $F : (D \setminus \{x_0\}) \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, representa, geometricamente, o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f no passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. Logo, quando f é derivável no ponto x_0, a reta, de coeficiente angular $f'(x_0)$ e que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0)$. Daí, se f admite derivada em x_0, temos que a equação $f'(x_0)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:
>
> $$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$
>
> A equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0)$ é:
>
> $$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ se } f'(x_0) \neq 0.$$

***Exemplo* 3.5.** Ache uma equação da reta tangente e da reta normal à curva $f(x) = x^3 - 3x + 4$ no ponto $(2, 6)$.

Solução: A inclinação em qualquer ponto $(a, f(a))$ do gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$ é dado pela derivada de f em a. Mas, a derivada de f é $f'(x) = 3x^2 - 3$. Logo, no ponto $(2, 6)$ a reta tangente tem inclinação $f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9$. Como a equação da reta que passa no ponto (x_0, y_0) e de inclinação m é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos, então, que a equação da reta procurada é dada por $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, ou seja, $y - 6 = 9(x-2)$. Segue que, $9x - y - 12 = 0$.

Como a inclinação da reta normal é $-\dfrac{1}{m}$, uma equação da reta normal ao gráfico no ponto $(2,6)$ é $y - f(2) = -\dfrac{1}{f'(2)}(x-2)$, ou seja, $y - 6 = -\dfrac{1}{9}(x-2)$. Portanto, $x + 9y - 56 = 0$.

O exemplo a seguir, além de sugerir a definição de derivada lateral, ilustra que nem toda função contínua num ponto x_0 é derivável em x_0.

***Exemplo* 3.6.** Seja f a função valor absoluto definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Claramente que f é contínua em 0, no entanto

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x},$$

não existe. De fato, como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

se $\Delta x \geq 0$, temos $|\Delta x| = \Delta x$, e se $\Delta x < 0$ temos $|\Delta x| = -\Delta x$. Logo, os limites laterais são

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$, segue que o limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ não existe. Logo, $f'(0)$ não existe e assim f não é derivável em 0. Mas, o resultado que segue mostra que derivabilidade implica continuidade.

3.3 Teorema. Se uma função f for derivável em x_0, então f será contínua em x_0.

***Nota* 15.**

(i) A definição de derivada é feita usando-se o conceito de limite. Segue deste fato as definições de derivada lateral à direita e a esquerda que apresentamos a seguir.

Seja f uma função definida em x_0, então:

a *derivada à direita* de f em x_0, denotada por $f'_+(x_0)$, é

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

se o limite existir.

a *derivada à esquerda* de f em x_0, denotada por $f'_-(x_0)$, é

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

se o limite existir.

(ii) Do Teorema 3.3, segue que não existe a derivada de f, no ponto x_0, se f é descontínua em x_0.

***Exemplo* 3.7.** Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , 0 < x < b \\ 1 - \dfrac{1}{4}x & , x \geq b. \end{cases}$$

(a) Determine um valor de b tal que f seja contínua em b.

(b) f é derivável no valor de b encontrado em (a)?

Solução: (a) Para que f seja uma função contínua em b, pelo menos $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ deve existir. Deste modo precisamos que $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to b^+} f(x) &= \lim_{x \to b^+} \left(1 - \frac{1}{4}x\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4}b \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to b^-} f(x) &= \lim_{x \to b^-} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Portanto, $f(b) = 1 - \frac{1}{4}b$. Logo, f será contínua em b se $\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{4}b$, ou seja, se $b = 2$. Assim,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , 0 < x < 2 \\ -\dfrac{1}{4}x & , x \geq 2 \end{cases}$$

é contínua em 2.

(b) Para determinar se f é derivável em 2, calculemos $f'_+(2)$ e $f'_-(2)$.

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{(1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{2}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} \\ &= \lim_{x \to 2^-} -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Temos que $f'_+(2) = f'_-(2)$, seque que $f'(2)$ existe. Como vimos que f é contínua em $x = 2$, concluímos que f é derivável em 2.

Exemplo* 3.8** (Interpretação Cinemática).*** Do estudo da cinética sabemos que a posição de um ponto material em movimento, sobre uma curva $\mathcal{C}$ (trajetória) conhecida, pode ser determinada, em cada instante t, através de sua abscissa s, medida sobre a curva $\mathcal{C}$. A expressão que nos dá s em função de t é $s = s(t)$, e é chamada *equação horária*.

Sendo dado um instante t_0 e t um instante diferente de t_0, chamamos *velocidade média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

e chama-se *velocidade escalar* do ponto no instante t_0 o limite

$$v_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} v_m = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Em outras palavras, a derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.

Sabemos ainda que a velocidade v de um ponto material em movimento pode variar de instante para instante. A equação que nos dá v em função do tempo t é $v = v(t)$ e é chamada *equação da velocidade* do ponto. A *aceleração média* do ponto entre os instantes t e t_0 é o quociente

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

e, a aceleração escalar do ponto no instante t_0 é o limite:

$$a_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} a_m = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0).$$

Em outras palavras, a derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.

Suponha que um ponto percorre uma curva obedecendo à equação horária $s = t^2 + t - 2$ (Unidades SI). No instante $t_0 = 2\ s$ a velocidade é dada pela derivada s' no ponto t_0, ou seja,

$$\begin{aligned} v_{(2)} &= s'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t^2 + t - 2) - (2^2 + 2 - 2)}{t - 2} \\ &= \lim_{t \to 2} \frac{t^2 + t - 6}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(t+3)}{t - 2} = 5\ m/s. \end{aligned}$$

Como o processo do cálculo da derivada de uma função, a partir da definição, em geral é lento, as regras de derivação que veremos a seguir nos possibilitarão encontrar derivadas com maior facilidade.

3.4 Proposição (Regras de Derivação)*. Sejam f, g e h funções deriváveis e c uma constante real. Então:*

D1. $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

D2. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

D3. $f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

D4. $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

D5. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$*, onde* $h(x) \neq 0$*.*

Prova:

D1. A derivada da função constante: Dada a função $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x - x_0} = 0.$$

□

D2. A derivada da função potência:

Dada a função $f(x) = x^n$, n é um número natural não-nulo, temos que:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Fazendo-se a mudança de variável $x + \Delta x = t$, temos que $\Delta x = t - x$. Segue que, quando $\Delta x \to 0$, então $t \to x$. Portanto,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x}.$$

Lembrando que $t^n - x^n = (t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + \ldots + tx^{n-2} + x^{n-1})$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to x} \frac{t^n - x^n}{t-x} &= \lim_{t\to x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + \ldots + tx^{n-2} + x^{n-1})}{t-x} \\
&= \lim_{t\to x} \left(t^{n-1} + t^{n-2}x + \ldots + tx^{n-2} + x^{n-1}\right) \\
&= x^{n-1} + x^{n-2}x + \ldots + xx^{n-2} + x^{n-1} \\
&= x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} + x^{n-1} \\
&= n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

□

As demais propriedades seguem da aplicação imediata da definição. Acredito que o leitor considerará válido prová-las.

***Nota* 16.**

- A propriedade **D3** pode ser estendida para uma soma de n parcelas, e a **D5** estendida para um produto de n fatores, ou seja,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \\
&\Downarrow \\
f'(x) &= f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x),
\end{aligned} \qquad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_n(x) \\
&\Downarrow \\
g'(x) &= g_1'(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_n(x) + \; g_1(x) \cdot g_2'(x) \cdot \ldots \cdot g_n(x) + \ldots + g_1(x) \cdot \ldots \cdot g_n'(x)
\end{aligned}$$

- A propriedade $D4$ no caso particular que $g(x) = c$, onde c é uma constante, resume-se a: $f'(x) = ch'(x)$.

3.1.1 Exercícios Propostos

***EP* 3.1.** Usando a definição de derivada em um ponto, mostre que a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, para $x \neq 0$ é $f'(x_0) = -\dfrac{2}{x_0^3}$.

***EP* 3.2.** Em cada item, encontre $f'(x)$:

(a) $f(x) = 13$

(b) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-7}$

(d) $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$

(e) $f(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$

(f) a partir do desenvolvimento do produto no item (e)

(g) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2}{3x^5 + x^2}$

(h) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{2} + \sqrt[3]{x}$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

***EP* 3.3.** Determine as constantes a e b em cada caso:

(a) $f(x) = ax^2 + x + 1$, sendo $f'(1) = -9$;

(b) $f(x) = x^2 + ax + b$, sendo $f'(2) = 5$ e $f(1) = -4$.

***EP* 3.4.** Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$, sendo $x_0 = 1$;

(b) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 1)$, sendo $x_0 = 2$.

***EP* 3.5.** Determine as abscissas dos pontos do gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$, nos quais a reta tangente é:

(a) Horizontal;

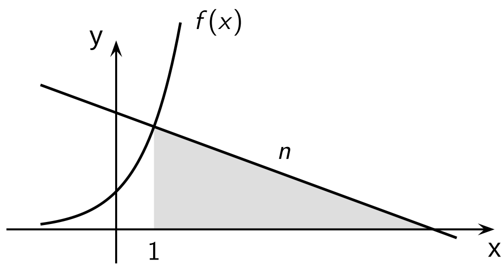
(b) Paralela à reta $2y + 8x - 5$.

***EP* 3.6.** Em que ponto(s) da curva $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ a reta tangente tem ângulo de inclinação $\frac{\pi}{4}$.

***EP* 3.7.** Calcule a derivada da função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n+1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

***EP* 3.8.** Calcule a constante b para que a reta $y + 9x + b = 0$ seja tangente a curva $y = x^{-1}$.

***EP* 3.9.** Calcule a área do triângulo retângulo sombreado na figura ao lado, sabendo-se que n é a reta normal a $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa $x_0 = 1$.



3.2 Derivada da Função Composta (Regra da Cadeia)

Suponha que desejamos derivar a seguinte expressão: $u(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$ com as regras vistas até o momento. Só temos duas possibilidades, são elas: desenvolver o trinômio e aplicar, sucessivamente, a regra da soma ou escrever como produto de 1.000 polinômios e usar a regra do produto. Como ambas as possibilidades são muito trabalhosas. A pergunta natural é: não existe um método mais fácil para obtermos tal derivada? a resposta a esta pergunta é sim. Reescrevamos a função $u(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$ como $u(x) = (g \circ f)(x)$ em que $g(x) = x^{1.000}$ e $f(x) = x^9 + x^6 + 1$. Logo, se soubermos derivar a composta das funções o problema está resolvido. Para encontrar a derivada de uma função composta usamos um dos mais importantes teoremas do Cálculo chamado de *regra da cadeia* que apresentamos e demonstramos a seguir.

3.5 Teorema. Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}(x)$ tais que Imagem(f)$\subset J$. Se f é derivável em $a \in I$ e g é derivável em $f(a)$, então $g \circ f$ é derivável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \tag{3.4}$$

Prova: Por hipótese, existem $f'(a)$ e $g'(b)$. Considere $b = f(a)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-(g(f(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{g(y)-g(b)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{g(y)-g(b)}{x-a}\frac{y-b}{y-b}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\cdot\frac{y-b}{x-a}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\cdot\lim_{x\to a}\frac{y-b}{x-a}\right)\\
&= \lim_{y\to b}\left(\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\cdot\lim_{x\to a}\frac{y-b}{x-a}\right)\\
&= g'(b)\cdot f'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a) = (g\circ f)'(a)
\end{aligned}
$$

Como vale para todo número a então podemos generalizar

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

***Exemplo* 3.9.** Consideremos a seguinte função $f(x) = \left(4x^2+1\right)^3$. Vamos obter a sua derivada $f'(x)$.

Escrevemos $f(x) = \left(4x^2+1\right)\left(4x^2+1\right)^2$ e, então,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D_x(4x^2+1)\cdot(4x^2+1)^2 + D_x(4x^2+1)(4x^2+1)\cdot(4x^2+1)\\
&= 8x(4x^2+1)^2 + [8x(4x^2+1)+(4x^2+1)8x](4x^2+1)\\
&= (4x^2+1)^2\cdot 8x + [2(4x^2+1)\cdot 8x](4x^2+1)\\
&= (4x^2+1)^2\cdot 8x + 2(4x^2+1)^2\cdot 8x\\
&= 3(4x^2+1)^2\cdot(8x)
\end{aligned}
$$

Se fizermos $h(x) = x^3$ e $g(x) = 4x^2+1$, observe que $f(x)$ é a função composta $h\circ g(x)$, ou seja,

$$f(x) = h(g(x)) = h(4x^2+1) = (4x^2+1)^3.$$

Como $h'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 8x$, temos que

$$f'(x) = h'\left(g(x)\right)\cdot g'(x).$$

Esta equação é a *regra da cadeia*.

***Exemplo* 3.10.** Derivar as seguintes funções usando a regra da cadeia:

(a) $f(x) = g(x)^n \Longrightarrow f'(x) = n\cdot g(x)^{n-1}\cdot g'(x)$

(b) $f(x) = (x^5-2x)^3 \Longrightarrow f'(x) = 3(x^5-2x)^2\cdot(x^5-2x)' = 3(x^5-2x)^2\cdot(5x^4-2)$

(c) $g(x) = \sqrt{2x^2-1} = (2x^2-1)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}(2x^2-1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x^2-1)'\\ &= \frac{1}{2}(2x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4x)\\ &= 2x(2x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}\end{aligned}\right.$

3.3 Derivada da Função Inversa

Seja $y = f(x)$ uma função que admite inversa $x = f^{-1}(y)$. Como $f^{-1} \circ f = I_d$, ou seja,

$$f^{-1} \circ f(x) = x,$$

aplicando a regra da cadeia, temos

$$\left(f^{-1}\right)' f(x) \cdot f'(x) = 1.$$

Portanto,

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

desde que $f'(x) \neq 0$.

Exemplo **3.11.** Seja $y = f(x) = 5x^3$. Obtenha $\left(f^{-1}\right)'(40)$

(a) invertendo a função e

(b) utilizando a regra da derivada inversa.

(a) $y = 5x^3 \Longrightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y}{5}} = \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$. Logo,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}\left(\frac{y}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Portanto,

$$\left(f^{-1}\right)'(40) = \frac{1}{15}\left(\frac{40}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{15\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{60}.$$

(b) $y = 40$ e $y = 5x^3 \Longrightarrow x = 2$. Como $f'(x) = 15x^2$, usando a regra da função inversa teremos

$$\left(f^{-1}\right)'(40) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{60}.$$

3.4 Derivada das Funções Exponencial e Logarítmica

Considere a função $f(x) = a^x$, $1 \neq a > 0$. Utilizando-se o limite exponencial fundamental $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$, temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \\ &= a^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \\ &= a^{x_0} \cdot \ln(a). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)}$$

Em particular, se $a = e$, temos: $(e(x))' = e^x$.

Dada a função $f(x) = u(x)^{v(x)}$, usaremos a regra da cadeia e a derivada da função exponencial para obter $f'(x)$. Observemos que

$$f(x) = \left(e^{\ln u(x)}\right)^{v(x)} = e^{v(x)\cdot \ln u(x)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{v(x)\cdot \ln u(x)} \cdot D_x\left[v(x)\cdot \ln u(x)\right] \\ &= e^{v(x)\cdot \ln u(x)} \cdot \left[v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\right] \\ &= (u(x))^{v(x)} \cdot \left[v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right] \end{aligned}$$

Em particular, se $f(x) = a^{v(x)}$ com a constante, temos que $f'(x) = a^{v(x)} \cdot v'(x) \cdot \ln(a)$.

***Exemplo* 3.12.** Determine a derivada de $f(x) = (\cos(x))^x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(x))^x \cdot \left[1\cdot \ln[\cos(x)] + x\cdot\left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)\right] \\ &= (\cos(x))^x \cdot \left[\ln[\cos(x)] - x\cdot \operatorname{tg}(x)\right] \end{aligned}$$

***Nota* 17.** Considere a função logarítmica $f(x) = \log_a x$, $1 \neq a > 0$. Como a função logarítmica é a inversa da exponencial, ou seja, $x = f^{-1}(y) = a^x$, podemos então usar o resultado da derivada da função inversa para determinar $f'(x)$. Sendo assim,

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})(y)} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x\cdot \ln a}.$$

Portanto,

$$\boxed{f(x) = \log_a x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x\cdot \ln a}}$$

Em particular, quando $f(x) = \ln x$, temos $f'(x) = D_x(\ln x) = \dfrac{1}{x\cdot \ln e} = \dfrac{1}{x}$.

Seja $u(x) = \log_a v(x)$, em que $v(x) > 0$ é uma função derivável. Em tal caso:

$$u'(x) = (\log_a v(x))' = \frac{\log_a(e)v'(x)}{v(x)}$$

Em particular, se $a = e$: $(\log_a v(x))' = \dfrac{v'(x)}{v(x)}$.

3.4.1 Exercícios Propostos

***EP* 3.10.** Determine as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = (2x^3 + 5x - 8)^3$

(b) $f(x) = e^{\sqrt{x}}(x^3 - 5x)$

(c) $f(x) = \left(\dfrac{3x-3}{2x+5}\right)^4$

(d) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^3}{(5-3x)^2}$

(e) $f(x) = 6^{2x+1}$

(f) $g(x) = 2e^x$

(g) $h(x) = 1 + e^{2x}$

(h) $p(x) = 5^{x-1}$

EP 3.11. Determine as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \log_2(5x)$ (b) $g(x) = \ln(3x^4 + 2x^2 + 1)$ (c) $h(x) = e^{3x} \cdot \ln(3x)$

EP 3.12. Determine $\left(f^{-1}\right)'(y)$ nos pontos indicados, nos casos a seguir:

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 2, x \in [-2, +\infty); y = 10;$

(b) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}, y = 2.$

3.5 Derivada das Funções Trigonométricas

Se $f(x) = \text{sen}(x)$, então:

$$\begin{aligned}
\text{sen}'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Se $y = \cos(x)$ e, sabendo-se que $\cos(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, então, utilizando-se a regra da cadeia, com $u(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, temos:

$$y' = u'(x) \cdot \cos(u(x)) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,\text{sen}(x).$$

Se $y = \text{tg}(x)$, sabendo que $\text{tg}(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, então, utilizando-se a regra da derivada do quociente, temos:

$$y' = \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).$$

Logo, se:

$f(x) = \text{cossec}(x) \implies f'(x) = -\,\text{cossec}(x) \cdot \text{cotg}(x)$

$f(x) = \sec(x) \implies f'(x) = \sec(x) \cdot \text{tg}(x)$

$f(x) = \text{cotg}(x) \implies f'(x) = -\,\text{cossec}^2(x)$

Verifique!

Tabela de Derivadas

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0	$h \circ g(x)$	$h'(g(x)) \cdot (g'(x))$
x^n	nx^{n-1}	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
$g(x) \pm h(x)$	$g'(x) \pm h'(x)$	$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
$\dfrac{g(x)}{h(x)}$	$\dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x)^2}$	$\text{tg}(x)$	$\sec^2(x)$
a^x	$a^x \ln(a)$	$\sec(x)$	$\sec(x) \cdot \text{tg}(x)$
e^x	e^x	$\text{cossec}(x)$	$-\text{cossec}(x) \cdot \text{cotg}(x)$
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x \ln(a)}$	$\text{cotg}(x)$	$-\text{cossec}^2(x)$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$(u(x))^{v(x)}$	$(u(x))^{v(x)} \cdot \left\{ v'(x) \cdot \ln[u(x)] + v(x) \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)} \right\}$

3.5.1 Exercícios Propostos

***EP* 3.13.** Determine as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = -\dfrac{2}{5}\,\text{sen}(x) + 9\sec(x)$

(b) $f(x) = x\,\text{sen}(x) + \cos(x)$

(c) $f(x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x) + \text{tg}(x)\sec(x)$

(d) $f(x) = \dfrac{\text{tg}(x) - 1}{\sec(x)}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^3\,\text{sen}(x)}{\cos(x)}$

***EP* 3.14.** Determine as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \text{sen}(3x^2)$

(b) $g(x) = \cos^3(x)$

(c) $h(x) = e^{3x} \cdot \text{sen}(3x)$

***EP* 3.15.** Determine as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{\text{tg}(x^5 - 2x)}{\ln(x)}$

(b) $f(x) = 2\cos(x - e) \cdot \ln(x)$, no ponto $x_0 = e$

(c) $f(x) = \dfrac{3\cos(\frac{x\pi}{4e})}{2ln(x)}$, no ponto $x_0 = e$

***EP* 3.16.** Derive as seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{1 - 2\cos(x)}$

(b) $f(x) = 3\,\text{sen}(4x^2 + 1)$

(c) $f(x) = \text{tg}(3x^2 + 2x)$

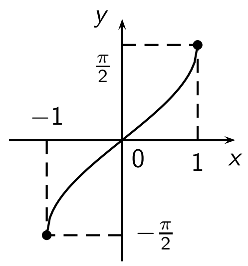
(d) $f(x) = \sqrt{4\,\text{sen}^2(x) + 9\cos^2(x)}$

3.6 Derivada das Funções Trigonométricas Inversas

3.6.1 A Função Arco Seno

3.6 Definição. *Definimos a função arco seno* $y = \text{arcsen}(x)$ *à função que associa cada número real do intervalo* $[-1, 1]$ *ao ângulo* y, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. *Simbolicamente*

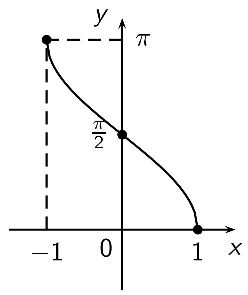
$$\begin{array}{rcl} \text{arcsen} : [-1, 1] & \rightarrow & [-\pi/2; \pi/2] \\ x & \mapsto & \text{arcsen}(x) = y \end{array}$$



3.6.2 A Função Arco Cosseno

3.7 Definição. *Definimos a função arco cosseno* $y = \text{arccos}(x)$ *à função que associa cada número real do intervalo* $[-1, 1]$ *ao ângulo* y, $0 \leq y \leq \pi$. *Simbolicamente,*

$$\begin{array}{rcl} \cos^{-1} : [-1, 1] & \rightarrow & [0; \pi] \\ x & \mapsto & \text{arccos}(x) = y \end{array}$$



3.6.3 As Derivadas das Funções Arco Seno e Arco Cosseno

A função inversa do arco seno é dada por $f(x) = \text{sen}(x)$, se $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. Portanto, $f'(x) = \cos(x) \neq 0$, se $x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Usando o teorema da função inversa, temos: se $y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$, ou seja $\text{sen}(y) = x$, então:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(x))} = \frac{1}{\cos(y)}$$

Mas, $\cos(y) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(y)}$, pois, $y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Então

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Considere, agora, a função $y = \text{arccos}(x)$. Como $\text{arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \text{arcsen}(x)$, temos: $y' = -\left(\text{arccos}(x)\right)'$. Logo,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ se } x \in (-1, 1).$$

3.7 Derivadas Sucessivas ou de Ordem Superior

Se a função f for derivável, então f' será chamada a *derivada primeira* de f ou *derivada de primeira ordem* de f. Se a derivada de f' existir, ela será chamada de *derivada segunda* de f, ou *derivada de segunda de ordem* de f e será denotada por f'', onde lemos "f duas linhas". Da mesma forma, a *derivada terceira* de f, ou a *derivada de terceira ordem* de f, é definida como a derivada de f'' e denotaremos por f'''.

A *derivada de ordem* n, ou a *enésima derivada* da função f, onde n é um número natural maior do que 1, é a derivada da $(n-1)$ésima de f, a qual denotamos por $f^{(n)}$.

***Exemplo* 3.13.** Ache todas as derivadas da função $f(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$.

Solução: $f'(x) = 4x^3 + 15x^2 - 2$, $f''(x) = 12x^2 + 30$, $f'''(x) = f^{(3)}(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(5)}(x) = 0$. Logo, $f^{(n)}(x) = 0, \forall \ n \geq 5$.

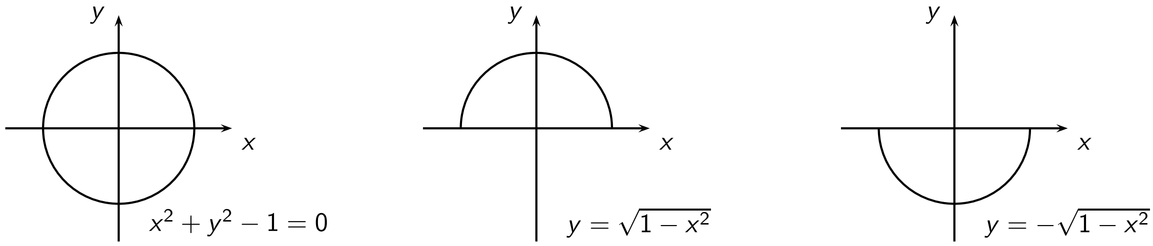
***Exemplo* 3.14.** Encontre a derivada de ordem n da função $f(x) = k \cdot e^x, k \in \mathbb{R}^*$.

Solução: Como $(e^x)' = e^x$ e $k \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = k \cdot e^x$.

***Nota* 18.** Os símbolos $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}[f(x)]$ e $D_x^n[f(x)]$ são outras notações para a derivada de ordem n.

3.8 Derivação Implícita

Uma expressão da forma $F(x, y) = 0$ representa em geral uma curva no plano xy. Exemplo: Dada a expressão $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$, representa um círculo de centro na origem e raio unitário.



Deste modo, vemos que nem sempre a equação $F(x, y) = 0$ representa o gráfico de uma função $y = f(x)$. Mas, em geral, existem partes da curvas que são gráficos de uma função. No exemplo, temos que $f_+(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $f_-(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ definem funções (ver gráfico) e, além disso, satisfazem a equação $F(x, f_+) = 0$ e $F(x, f_-) = 0$.

O que fizemos acima sugere que, sob certas condições, podemos obter localmente, a partir de uma curva dada, uma expressão que que define explicitamente uma função. Neste caso, dizemos que a funções f_+ f_- são funções dadas *implicitamente* pela expressão $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Mas, nem todas a funções estão definidas de forma explicita, por exemplo, se tivermos a equação $x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$ não podemos escrever y em termos de x. Além disso, podem existir uma ou mais funções $y = f(x)$, para as quais essa última equação é satisfeita, isto é, tais que a equação

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

seja válida, para todos os valores de x no domínio de f.

Logo, surge, naturalmente, uma questão: Como derivar uma função dada implicitamente? No primeiro caso, é fácil, já que fomos capazes de explicitar y como função de x. O mesmo não ocorre para $x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$.

Vejamos então como proceder. O lado esquerdo dessa equação é uma função de x, enquanto o lado direito é uma função de y. Pondo $f(x) = x^6 - 2x$ e $g(x) = 3y^6 + y^5 - y^2$, onde $y = f(x)$, podemos escrever $x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$ como

$$f(x) = g(f(x)).$$

Essa equação está definida para todos os valores de x no domínio de f para os quais $g(f(x))$ existe. Então,

$$D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2).$$

A derivada do primeiro membro é facilmente encontrada:

$$D_x(x^6 - 2x) = 6x^5 - 2.$$

Para o segundo membro, utilizaremos a regra da cadeia:

$$D_x(3y^6 + y^5 - y^2) = 18y^5 \frac{dy}{dx} + 5y^4 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx}.$$

Portanto, $D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2)$ equivale a

$$6x^5 - 2 = \left(18y^5 + 5y^4 - 2y\right) \frac{dy}{dx},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}.$$

***Exemplo* 3.15.** Determine $\dfrac{dy}{dx}$ para a equação $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$.

Solução: Derivando implicitamente a equação $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$ ficamos com:

$$\begin{aligned}
12x^3y^2 + 3x^4\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 7y^3 - 7x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) &= 0 - 8\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx}\left(6x^4y - 21xy^2 + 8\right) &= 7y^3 - 12x^3y^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}.
\end{aligned}$$

3.8.1 Exercícios Propostos

***EP* 3.17.** Em cada item a seguir, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

(a) $x^3 + y^2 = 16$;

(b) $x^3 + y^3 = xy$;

(c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$;

(d) $y = \cos(x - y)$;

(e) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 10$;

(f) $x = \text{sen}(x + y)$.

3.9 Gabarito

3.1 3.2. (a) $f'(x) = 0$; (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; (c) $f'(x) = -\frac{12}{(x-7)^2}$; (d) $f'(x) = 28x^3 - 6x^2 + 8$; (e) $f'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x$; (g) $f'(x) = \frac{-12x^4+36x^3+2x}{(3x^3+1)^2}$ (h) $f'(x) = 2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; (i) $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$. 3.3 $a = -5$, $a = -5$ e $b = -6$. 3.4 $y = 9x - 5$, $y = 15x - 29$. 3.5 $x = -2$ e $x = \frac{2}{3}$, $x = 0$ e $x = -\frac{4}{3}$. 3.6 $x = 1$ e $x = -\frac{1}{3}$. 3.7 3.8 $b = \pm 6$. 3.9 3.10 (a) $3(2x^3 + 5x - 8)^2(6x^2 + 5x)$, (b) $e^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{x^3 - 5x}{2\sqrt{x}} + (3x^2 - 5)\right]$, (c) $\dfrac{84(3x-3)^3}{(2x+5)^5}$, (d) $\dfrac{(2x-3)^2(12-6x)}{(5-3x)^3}$, (e) $2 \cdot 6^{2x+1} \cdot ln(6)$, (f) $2e^x$, (g) $2e^{2x}$, (h) $5^{x-1} \cdot \ln(5)$. 3.11 (a) $\dfrac{1}{x\ln(2)}$, (b) $\dfrac{12x^3 + 4x}{3x^4 + 2x^2 + 1}$. 3.12 (a) $\frac{1}{8}$, (b) 8. 3.13. (a) $-\dfrac{2}{5}\cos(x) + 9\sec(x)\,\text{tg}(x)$, (b) $x\cos(x)$, (c) $2\cos(2x) + 8\sec(x) \cdot [2\,\text{tg}^2(x) + 1]$, (d) $[1 + \text{tg}(x)]\cos(x)$, (e) $2x\,\text{tg}(x) + x^2\sec^2(x)$. 3.14 (a) $f'(x) = 6x\cos(3x^2)$, (b) $g'(x) = -3\,\text{sen}(x)\cos^2(x)$, (c) $h'(x) = 3e^{3x} \cdot \text{sen}(3x) + 3e^{3x} \cdot \cos(3x)$. 3.15 (a) $\dfrac{(5x^5 - 2x)\sec^2(5 - 2x)\ln(x) - \text{tg}(x^5 - 2x)}{x\ln^2(x)}$, (b) $2e^{-1}$, (c) $\dfrac{-3\sqrt{2}(\pi + 4)}{16e}$. 3.16 3.17

tema 4 Aplicações da Derivada

4.1 O Teorema de L'Hospital

No estudo de limites, vimos que se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},$$

desde que $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, então $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ tem forma a indeterminada $\dfrac{0}{0}$.

O Teorema de L'Hospital, que veremos a seguir, nos permitirá calcular limites que apresentam este e outros tipos de indeterminação.

4.1 Teorema (Teorema de L'Hospital)**.** Sejam f e g funções deriváveis num intervalo I. Suponha que, para todo $x\neq a$ em I, $g'(x)\neq 0$. Então se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ e se $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)}=L$, segue que $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=L$.

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais à direita e à esquerda, e também para outras formas indeterminadas do tipo: $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ e $\dfrac{+\infty}{-\infty}$.

4.1.1 Exercícios Propostos

***EP* 4.1.** Use a regra de L'Hospital para determinar os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln(x)}{x^3-3x+2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(2+e^x)}{3x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$

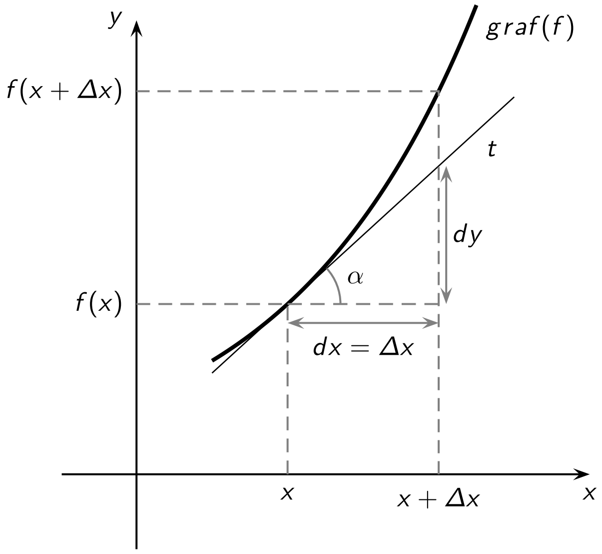
4.2 Diferencial

Até agora, a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de uma função real $y=f(x)$ foi vista apenas como uma simples notação. Interpretaremos, a partir da definição de diferencial, a derivada como um quociente de acréscimos.

4.2 Definição. [Acréscimos e decréscimos] Um acréscimo (decréscimo) é feito a um valor x se somarmos (subtrairmos) um valor $\Delta x\in\mathbb{R}^*$.

4.3 Definição. [Diferencial da Variável Independente] Seja $y=f(x)$ uma função derivável. O diferencial de x, denotado por dx, é o valor do acréscimo Δx, isto é, $dx=\Delta x$.

4.4 Definição. [Diferencial da Variável Dependente] O diferencial de y, denotado por dy, é o acréscimo na ordenada da reta tangente t, correspondente ao acréscimo dx em x.



Considere t a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto x. Seja α o ângulo de inclinação de t.

De acordo com a figura podemos observar que $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{tg}(\alpha)$. Mas, $f'(x) = \mathrm{tg}(\alpha)$, pois esta é a interpretação geométrica da derivada. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

O acréscimo dy pode ser visto como uma aproximação para Δy. Esta aproximação é tanto melhor quanto menor for o valor de dx. Isto é, se $dx \to 0$, então $\Delta y - dy \to 0$.

Segue que podemos considerar $dy \approx \Delta y$ se dx for suficientemente pequeno. Como $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$, podemos obter $f(x + dx) - f(x) \approx f'(x) \cdot dx$. Segue que

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx. \qquad (4.5)$$

4.3 Taxa de Variação

Aquilo que fizemos para obter a velocidade escalar e a aceleração (exemplo ??) pode ser repetido para outras grandezas. Em geral, quando uma grandeza y depende de outra grandeza x, $y = f(x)$, define-se a taxa de variação média da primeira grandeza relativa a uma variação Δx de x, como sendo $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, onde Δy é a correspondente variação de y, ou seja, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; fazendo Δx tender a 0, obtém-se a taxa de variação em x. Algumas taxas de variação têm nomes especiais. Por exemplo,

(a) A taxa de variação da função horária é chamada *velocidade escalar*

(b) A taxa de variação da velocidade é chamada *aceleração escalar*

(c) A taxa de variação da massa é chamada *densidade (linear)*

(d) Se $V(t)$ é o volume de um líquido de uma torneira que despejou em um recipiente até o instante t, então a taxa de variação do volume do líquido, isto é $\dfrac{dv}{dt}$, é chamado *vazão*.

Nosso principal método nesta seção é esboçar o gráfico de uma função. Por esta razão, dedicar-nos-emos, inicialmente, ao traçado de curvas.

Dada uma curva $y = f(x)$, usaremos a derivada para obter alguns dados acerca da curva. Por exemplo, discutiremos os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos de máximos e mínimos, entre outros. Antes de passarmos ao nosso objetivo principal vamos relembrar as seguintes definições.

4.5 Definição. Dizemos que uma função f definida num intervalo I, é *crescente* neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

4.6 Definição. Dizemos que uma função f definida num intervalo I, é *decrescente* neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Se uma função é crescente ou decrescente num intervalo, dizemos que é **monótona** neste intervalo. A partir de agora, nós entraremos num mundo de descobertas. A primeira é que analisando o sinal da derivada de uma função podemos determinar onde a função é crescente ou decrescente.

4.4 Intervalos de Crescimento e de Decrescimento

4.7 Teorema. Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b).

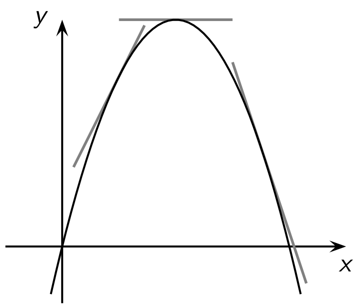
(i) se $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;

(ii) se $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$;

Em ambos os caso f é dita monótona.

Interpretação Geométrica

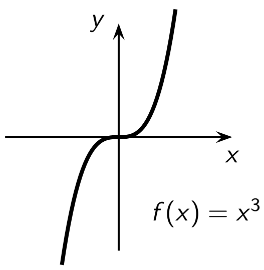
Observe na figura ao lado, que quando a inclinação da reta tangente for positiva, a função será crescente e quando a inclinação da reta for negativa, a função será decrescente. Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$, f é crescente quando $f'(x) > 0$ e decrescente quando $f'(x) < 0$.

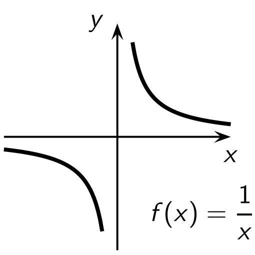


***Exemplo* 4.1.**

(a) A função $f(x) = x^3$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois, sua derivada é $f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$;

(b) A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é decrescente em qualquer intervalo que não contenha o zero, pois, sua derivada é $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^*$.





4.4.1 Exercícios Propostos

***EP* 4.2.** Determine o conjunto de valores de x para os quais a funções abaixo são crescentes e decrescentes:

(a) $f(x) = 6x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 72x + 12$

(b) $f(x) = 4x^3 - 3x$

(c) $f(x) = e^x - x$

(d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(e) $f(x) = 2x - 1$

(f) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$

(g) $f(x) = 3 - 5x$

(h) $f(x) = e^{-x}$

4.5 Máximos e Mínimos

Freqüentemente nos interessamos por uma função definida num dado intervalo e queremos encontrar o maior ou o menor valor da função no intervalo. Discutiremos esta questão a seguir.

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in D$. Dizemos que x_0 é ponto de:

(a) *máximo local* (ou *relativo*): se existe um intervalo aberto I contendo x_0 tal que

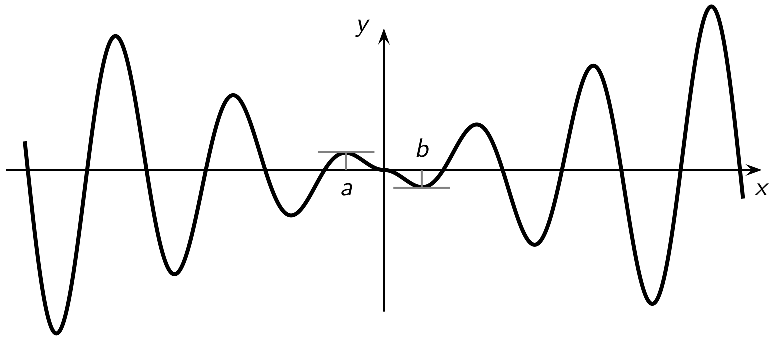
$$f(x) \leq f(x_0), \forall\, x \in I \cap D;$$

(b) *máximo global* (ou *absoluto*): se $f(x) \leq f(x_0), \forall\, x \in D$;

(c) *mínimo local* (ou *relativo*): se existe um intervalo aberto I contendo x_0 tal que

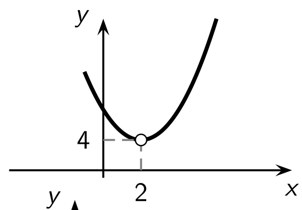
$$f(x) \geq f(x_0), \forall\, x \in I \cap D;$$

(d) *mínimo global* (ou *absoluto*): se $f(x) \geq f(x_0), \forall\, x \in D$.

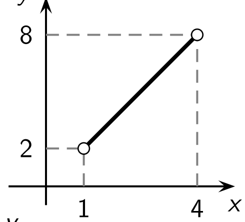


A figura mostra o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor mínimo local em $x = b$ um valor máximo local em $x = a$.

Em geral, um ponto de máximo ou de mínimo é chamado de ponto extremo. Vejamos os exemplos a seguir.



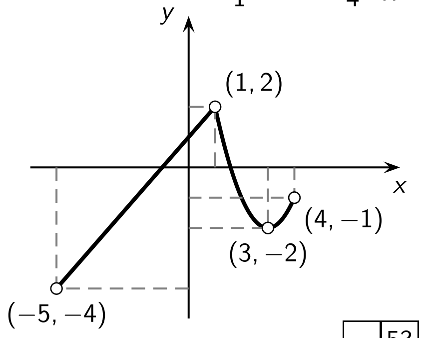
***Exemplo* 4.2.** O gráfico da função f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 8$ é uma parábola e o seu esboço está na figura ao lado. O ponto mais baixo da parábola está em $(2, 4)$. A função tem um valor mínimo absoluto de 4 em $x = 2$. Não há valor máximo absoluto de f.



***Exemplo* 4.3.** Seja f definida por $f(x) = 2x$ em $(1, 4]$. Não há valor mínimo absoluto de f em $(1, 4]$, no entanto f tem valor de máximo absoluto de 8 em $(1, 4]$.

***Exemplo* 4.4.** Seja f a função definida em $[-5, 4]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & , x \geq 1 \end{cases}$$



como na figura ao lado. O valor máximo absoluto de f ocorre em 1 e $f(1) = 2$; o valor mínimo absoluto de f ocorre em -5 e $f(-5) = -4$. Note que f tem um valor máximo relativo em 1 e em 3.

O Teorema seguinte, devido a Weierstrass, garante a existência de pontos extremos absolutos de uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$.

4.8 Teorema. [de Weierstrass] Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f assume valor máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

***Nota* 19.**

1. Seja $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, é contínua e limitada, mas não assume um valor máximo nem mínimo no seu domínio. Isto ocorre porque o domínio de f não é fechado.
2. Seja $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ é contínua e limitada. Assume seu valor máximo no ponto $x_0 = 0$ mas não existe $x \in [0, +\infty)$ tal que $g(x) = 0$. Isto é possível por que o domínio de g é um subconjunto fechado mas não é limitado em $\mathbb{R}$.
3. Um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um extremo relativo, ou um valor de função num extremo do intervalo. O Teorema seguinte permite encontrar os possíveis pontos extremos de uma função, utilizando derivada.

4.5.1 O Teorema de Fermat

4.9 Teorema. [Teorema de Fermat] Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável, I um intervalo e $x_0 \in I$ tal que:

1. x_0 é um ponto de máximo ou de mínimo local;
2. x_0 não é um dos extremos do intervalo I, isto é, se $I = [a, b]$, então $x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$;
3. f é derivável em x_0,

então $f'(x_0) = 0$.

4.10 Definição. O ponto x_0 pertencente ao domínio de f tal que $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe, é chamado de *ponto crítico* de f.

Portanto, uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto x_0 é que x_0 seja um ponto crítico de f.

***Nota* 20.** A recíproca do Teorema de Fermat é falsa, conforme os exemplos:

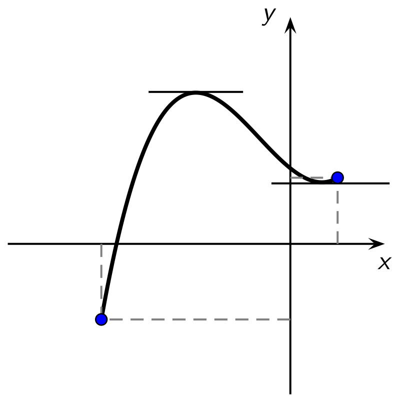
1. A função $f(x) = x^3$ tem derivada nula no ponto zero e como é crescente em toda reta não assume nem mínimo nem máximo;
2. A função $g(x) = |x|$ possui um mínimo no ponto $x_0 = 0$ no qual as derivadas laterais $g'_+(0) = 1$ e $g'_-(0) = -1$ o que implica que não existe $g'(0)$. Assim, no Teorema de Fermat é necessário que exista a derivada.

Deste modo, para determinarmos os valores extremos absolutos de uma função contínua definida num intervalo fechado, basta fazer como segue:

E1. Ache os valores da função nos números críticos de f em (a, b);

E2. Ache os valores de $f(a)$ e $f(b)$;

E3. O maior valor dentre os valores das etapas E1 e E2 será o valor máximo absoluto e o menor será o valor mínimo absoluto.



***Exemplo* 4.5.** Seja $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ uma função definida em $\left[-2, \dfrac{1}{2}\right]$ como ilustra a figura ao lado. Como a função é contínua, o teorema do valor extremo pode ser aplicado. Para achar os números críticos de f, calculemos primeiro f', e logo $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Como $f'(x)$ existe para todo $x \in \left[-2, \dfrac{1}{2}\right]$, os únicos números críticos de f serão os valores tais que $f'(x) = 0$.

Então $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$. Assim, $\dfrac{1}{3}$ e -1 são os números críticos de f, e cada um deles está no intervalo fechado $\left[-2, \dfrac{1}{2}\right]$.

Os valores da função nos números críticos e nos extremos do intervalo estão dados na tabela ao lado. O valor máximo absoluto de f é portanto 2, o mínimo absoluto é -1.

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	-1	2	$\frac{22}{27}$	$\frac{7}{8}$

O teorema de Fermat nos garante que, se f é uma função definida em $[a, b]$ e derivável em (a, b), os valores de x que anulam $f'(x)$ são, possivelmente, pontos extremos de f.

Observe que se $x_0 \in (a, b)$ é um extremo de f, então $f'(x_0) = 0$ e na vizinhança de x_0 teremos sinais distintos para $f'(x)$. Podemos, desta forma, concluir o resultado que segue.

4.11 Teorema. [Critério da Primeira Derivada] Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e derivável em (a, b) exceto possivelmente em $c \in (a, b)$.

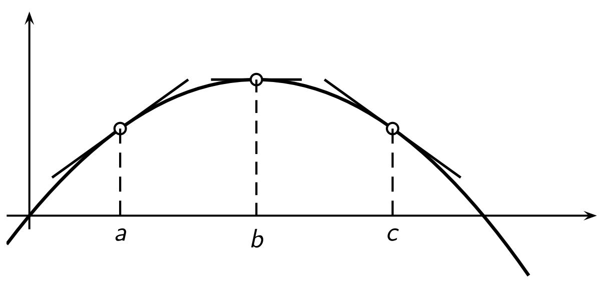
I. Se $f'(x) > 0, \forall\, x < c$ e $f'(x) < 0, \forall\, x > c$, então c é um ponto de máximo local de f.

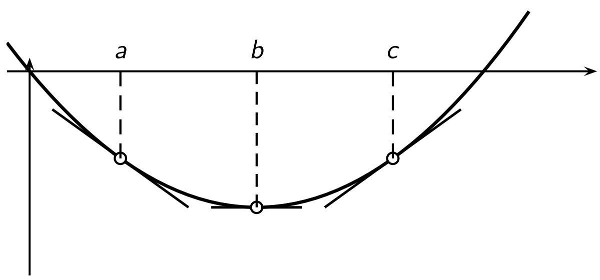
II. Se $f'(x) < 0, \forall\, x < c$ e $f'(x) > 0, \forall\, x > c$, então c é um ponto de mínimo local de f.

Esse teste estabelece essencialmente que se f for contínua em c e $f'(x)$ mudar de sinal positivo para negativa quando x cresce através de c, então f será um valor máximo relativo em c, e se $f'(x)$ mudar o sinal de negativo para positivo enquanto x cresce através de c, então f terá um valor mínimo relativo em c.

Observe os gráficos abaixo. O primeiro mostra que, numa vizinhança de um ponto c de máximo local, as retas tangentes à curva passam de coeficientes angular positivo (à esquerda de c) para negativo (à direita de c). E o coeficiente angular é justamente a derivada de f.

Para o segundo, temos que numa vizinhança de um ponto c de mínimo local, as retas tangentes à curva passam de coeficiente anular negativo (à esquerda de c) para positivo (à direita de c). Note que em ambos os casos $f'(c)$ existe e é igual a 0.

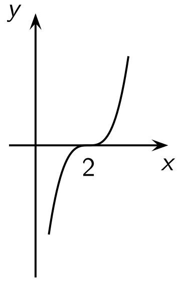




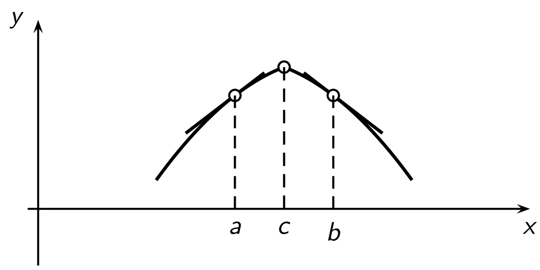
Resumidamente, este teste estabelece essencialmente que se f for contínua em c e $f'(x)$ mudar de sinal positivo para negativo quando x cresce através de c, então f terá um valor máximo relativo em c, e se

$f'(x)$ mudar o sinal de negativo para positivo enquanto x cresce através de c, então f terá um valor mínimo relativo em c.

***Exemplo* 4.6.** A função $f(x) = (x-2)^3$, esboçada na figura ao lado, mostra, que mesmo f tendo ponto crítico, nesse caso em $x = 2$ e $f'(x) > 0$ quando $x < 2$ e $f'(x) > 0$ quando $x > 2$ ou seja, f não tem um extremos relativo em 2.



***Exemplo* 4.7.** A figura ao lado, mostra um esboço de gráfico de uma função f, que tem um valor máximo relativo num número c mas $f'(c)$ não existe, contudo $f'(x) > 0$ quando $x < c$ e $f'(x) < 0$ quando $x > c$.



Em suma, para determinar os extremos relativos de f:

(1) Ache $f'(x)$;

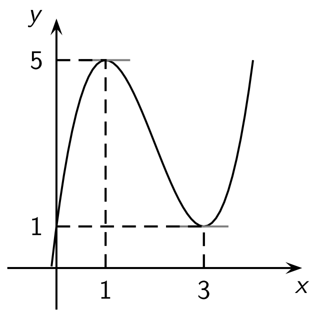
(2) Ache os números críticos de $f(x)$, isto é, os valores de x para os quais $f'(x) = 0$, ou para os quais $f'(x)$ não existe;

(3) Aplique o teste da derivada primeira.

***Exemplo* 4.8.** Dada $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução: Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ e $f'(x)$ existe para todos os valores de x por se tratar de um polinômio. Portanto, resolvendo-se a equação $f'(x) = 0$, ou seja, $3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1) = 0$. Segue que: $x = 3$ ou $x = 1$ são números críticos de f. Para determinar se f possui extremos relativos nesses números, aplicaremos o teste da primeira derivada, conforme o quadro abaixo.

	$f(x)$	$f'(x)$	**Conclusão**
$x < 1$		$+$	f é crescente
$x = 1$	5	0	f tem um valor máximo relativo
$1 < x < 3$		$-$	f é decrescente
$x = 3$	1	0	f tem um valor mínimo relativo
$x > 3$		$+$	f é crescente



4.5.2 Um Segundo Teste para Máximos e Mínimos Relativos

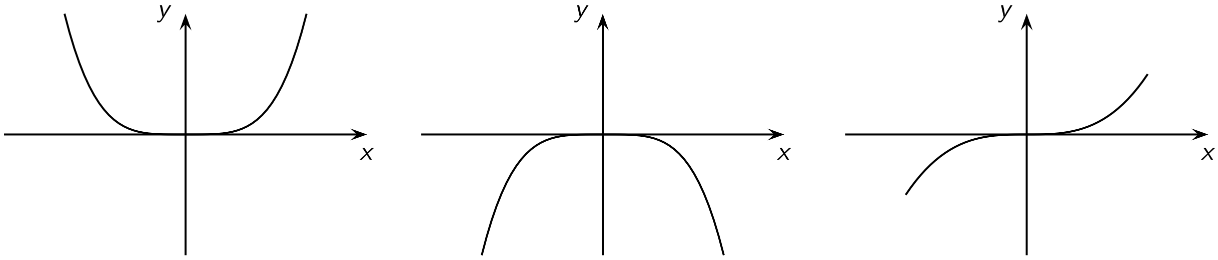
Com o teste da derivada primeira, podemos determinar se uma função f tem valor máximo ou mínimo relativo num número crítico c, verificando o sinal de f' em números contidos em intervalos à direita e à esquerda de c. Veremos a seguir, outro teste para extremos relativos envolvendo somente o número crítico c.

4.12 Teorema. [Critério da Segunda Derivada] Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável até segunda ordem em $I = (a, b)$, com derivadas f' e f'' também contínuas em I e $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Então,

(1) se $f''(c) < 0$, c é ponto de máximo local;

(2) se $f''(c) > 0$, c é ponto de mínimo local.

Nota 21. Pode-se ver, facilmente, nos gráficos que exibiremos a seguir, que o teste falha quando $f''(c) = 0$. Logo, se $f''(c) = 0$, nada se pode concluir quanto aos extremos relativos. Deve-se, portanto, utilizar somente o teste da derivada primeira.



$y = x^4$ $\qquad$ $y = -x^4$ $\qquad$ $y = x^3$

Considerando as funções $y = x^4$, $y = -x^4$ e $y = x^3$, notemos que cada uma delas possui a segunda derivada nula em $x = 0$. Em $x = 0$, a função $y = x^4$ possui um mínimo relativo, e $y = -x^4$ possui um máximo relativo, no entanto, para $y = x^3$ não tem máximo e nem mínimo relativo.

***Exemplo* 4.9.** Dada $f(x) = x^2 - 4x - 5$, usar o teste da derivada segunda para obter o máximo ou o mínimo relativos.

Solução: Temos que igualar $f'(x)$ a zero. Segue que, $2x-4 = 0$ cuja solução é $x = 2$. Como $f''(x) = 2$, temos que $f''(2) > 0$ e $f'(2) = 0$. Podemos concluir, portanto, que existe um mínimo relativo quando $x = 2$. Esse valor é $f(2) = -9$.

***Exemplo* 4.10.** Dada $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$, usar o teste da derivada segunda para obter o máximo ou o mínimo relativos.

Solução: Igualando-se a primeira derivada a zero, podemos escrever:

$$0 = f'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = (3x - 4)(x + 2) = 0$$

cuja solução é $x = \dfrac{4}{3}$ ou $x = -2$. Como $f''(x) = 6x + 2$, segue que $f''(-2) < 0$ e $f''\left(\dfrac{4}{3}\right) > 0$. Portanto, existem um máximo relativo para $x = -2$ e um mínimo relativo para $x = \dfrac{4}{3}$.

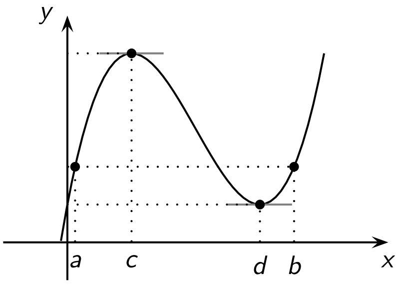
4.6 Outros Teoremas sobre as Funções Deriváveis

4.6.1 O Teorema de Rolle

4.13 Teorema. [de Rolle] Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Interpretação Geométrica do Teorema de Rolle

A figura ao lado mostra um esboço do gráfico de uma função f que satisfaz as condições do teorema. Vemos intuitivamente que existe pelo menos um ponto sobre sobre a curva entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, onde a reta tangente é paralela ao eixo x, por exemplo o ponto de abscissa c, ou seja, $f'(c) = 0$.



***Nota* 22.**

1. Seja $f : [0, 1] \to \Re$ definida por $f(x) = x$, se $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 0$. Então $f(0) = f(1)$ e f é derivável em $(0, 1)$, mas $f'(x) = 1$ para todo $0 < x < 1$. Isto se dá porque f não é contínua em $[0, 1]$;

2. Seja $g : [-1, 1] \to \Re$ definida por $g(x) = |x|$, temos que g é contínua em $[-1, 1]$, $g(-1) = g(1)$, mas não existe $c \in (-1, 1)$ tal que $g'(c) = 0$. O motivo é que g não é derivável em 0;

3. a hipótese de f ser continua em $[a, b]$ mas derivável apenas em (a, b) é feita por que as derivadas $f'(a)$ e $f'(b)$ não intervém na demonstração.

4.6.2 Exercícios Propostos

***EP* 4.3.** Verifique se estão satisfeitas as hipóteses do Teorema de Rolle para as funções a seguir, nos intervalos especificados. Ache, então, um valor de c em cada um desses intervalos para os quais $f'(c) = 0$.

(a) $f(x) = 4x^3 - 9x$, $I_1 = [-\frac{3}{2}, 0]$, $I_2 = \left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $I_3 = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \quad x \leq 2 \\ 4 - x & , \quad x > 1 \end{cases}$ e $I = [-2, 4]$

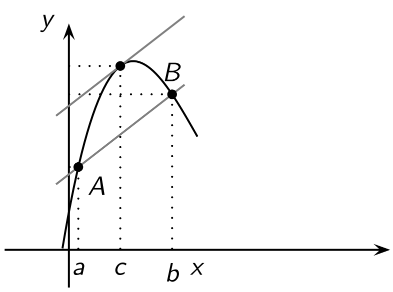
4.6.3 O Teorema de Lagrange

4.14 Teorema. [de Lagrange ou do Valor Médio] Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe pelo menos um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Interpretação Geométrica do Teorema de Lagrange

Num esboço do gráfico da função f, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é a inclinação do segmento de reta que liga os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. O teorema do valor médio afirma que existe um ponto sobre a curva entre A e B, onde a reta tangente é paralela à reta secante por A e B, ou seja, existe um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Se tomarmos a reta secante AB paralela ao eixo x, podemos observar que o teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle.

4.15 Teorema. Se f for uma função tal que $f'(x) = 0$ para todos os valores de x num intervalo I, então f será constante em I.

4.6.4 Exercícios Propostos

***EP* 4.4.** Verifique se estão satisfeitas as hipóteses do Teorema de Lagrange para as funções a seguir, nos intervalos I especificados. Em seguida, obtenha um $c \in I$ que satisfaça a tese do teorema.

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $I = [0, 1]$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e $I = [0, 2]$;

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 1}$ e $I = [2, 6]$

***EP* 4.5.** Calcule os pontos de máximos e de mínimos relativos (se existem) de:

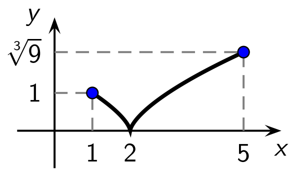
(a) $y = 7x^2 - 6x + 2$

(b) $y = 4x - x^2$

(c) $y = \dfrac{x^3}{x} + 3x^2 - 7x + 9$

(d) $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5}{3}x^3 + 4x^2$

***EP* 4.6.** Seja $f(x) = (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ uma função definida em $[1, 5]$ como ilustra a figura ao lado. Mostre que os extremos absolutos de f em $[1, 5]$ são os apresentados na figura.



***EP* 4.7.** Calcule os pontos críticos (se existirem) de:

(a) $y = x^2 - 3x + 8$

(b) $y = 3x + 4$

(c) $y = (x - 2)(x + 4)$

(d) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

***EP* 4.8.** Determine as constantes nas funções abaixo, de modo que:

(a) $f(x) = axe^{-x^2}$ tenha um máximo em $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

(b) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenha pontos críticos em $x = -2$ e $x = 3$. Qual é o de máximo e qual é o de mínimo?

***EP* 4.9.** Mostre que os extremos absolutos da função $y = \ln(x) - x$, no intervalo $e \leq x \leq x^2$ são: máximo: $1 - e$ em $x = e$ e mínimo: $2 - e^2$ em $x = e^2$.

4.7 Concavidade e Ponto de Inflexão

O sinal da derivada segunda pode nos dar informações úteis quanto à forma do gráfico de uma função. Ela nos dá também outra maneira de caracterizar um máximo ou um mínimo relativo. Veremos, antes, como identificar quando uma curva tem concavidade voltada para cima e para baixo usando derivadas.

4.16 Definição. Seja $y = f(x)$ uma função derivável no intervalo I.

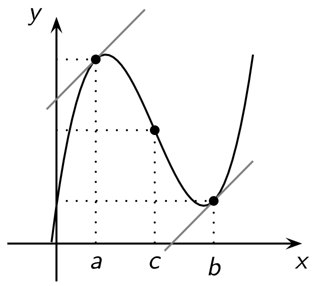
(i) f é dita ter concavidade voltada para cima (C.V.C) se $f'(x)$ é crescente em I.

(ii) f é dita ter concavidade voltada para baixo (C.V.B) se $f'(x)$ é decrescente em I.

***Exemplo* 4.11.**

(i) $x < c$: A curva está acima de suas retas tangentes. A curva apresenta concavidade para cima. À medida que x cresce, a inclinação da tangente cresce. f' é uma função crescente.

(ii) $x > c$: a curva está abaixo de suas retas tangentes. A curva apresenta concavidade voltada para baixo. À medida que x cresce, a inclinação da reta tangente decresce. f' é uma função decrescente.



***Nota* 23.**

(1) Se f tem C.V.C., então, f' é uma função crescente. Logo, a derivada desta função crescente deve ser positiva. Portanto, f'' deve ser positiva, quando f for convexa.

(2) Se f tem C.V.B., então f' é uma função decrescente. Portanto, a derivada desta função decrescente deve ser negativa. Logo f'' deve ser negativa, quando f for côncava.

4.17 Definição. Um ponto $(x_0, f(x_0))$, no gráfico de $y = f(x)$, onde muda o sentido da concavidade é chamado *ponto de inflexão*.

Como num ponto de inflexão o sentido da concavidade muda, $f''(x)$ dever mudar de sinal em $x = c$, logo $f''(c) = 0$ ou f'' é descontínua em $x = c$. Assim, temos o seguinte teorema:

4.18 Teorema. Se a função tem um ponto de inflexão em $x = c$, então $f''(c) = 0$ ou f'' é descontínua em $x = c$.

O procedimento sistemático para determinar os pontos de inflexão é o seguinte:

(1) Calcule $f''(x)$;

(2) Ache os valores de x tais que $f''(x) = 0$ ou que tornem f'' descontínua. Estes valores darão os pontos possíveis de serem pontos de inflexão;

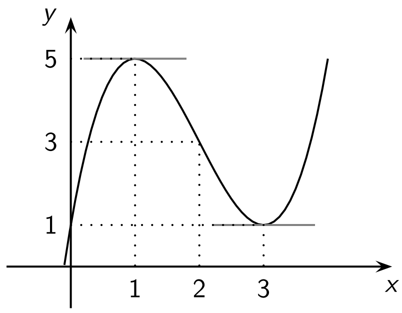
(3) verifique se $f''(x)$ muda de sinal nos pontos encontrados em **(2)**. Se $f''(x)$ muda de sinal em $x = c$, então $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão de f, desde que c esteja no domínio de f.

***Exemplo* 4.12.** Dada a função f definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ache o ponto de inflexão do gráfico de f, caso tenha, e determine onde o gráfico é côncavo e convexo.

Solução: Temos que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ e $f''(x) = 6x - 12$. $f''(x)$ existe, para todos os valores de x. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Para determinar se existe ou não um ponto de inflexão em $x = 2$, precisamos verificar de $f''(x)$ muda de sinal; ao mesmo tempo, determinamos a concavidade do gráfico para respectivos intervalos.

Veja no quadro abaixo.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusão**
$x < 2$			$-$	f côncavo para baixo
$x = 2$	3	-3	0	f ponto de inflexão
$x > 3$			$+$	f côncavo para cima



4.7.1 Exercícios Propostos

***EP* 4.10.** Dada a função f definida por $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, mostre que a mesma possui um ponto de inflexão c mesmo $f''(c)$ não existindo. O que se pode dizer a respeito da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$?

***EP* 4.11.** Calcule os pontos de inflexão (se existem) e estude a concavidade de:

$y = -x^3 + 5x^2 - 6x$

$y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$ R: Inflexão em $-\frac{1}{3}$ e 2; CVC em $(-\infty, -\frac{1}{3}), (2, +\infty)$ e CVB em $(-\frac{1}{3}, 2)$

$y = \dfrac{1}{x+4}$ R: Não existem pontos de inflexão. CVC em $(-4, +\infty)$ e CVB em $(-\infty, -4)$.

$y = 2xe^{-3x}$ R: Inflexão $\frac{2}{3}$; CVC $(\frac{2}{3}, +\infty)$ e CVB em $(-\infty, \frac{2}{3}$

$y = x^2 - \dfrac{1}{3x^2}$ R: Inflexão ± 1; CVC em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e CVB $(-1, 1)$

$y = e^{-x^2}$ R: Inflexão em $\pm\sqrt{2}2$; CVC em $(-\infty, -\sqrt{2}2) \cup (\sqrt{2}2. + \infty)$ e CVB em $(-\sqrt{2}2, \sqrt{2}2)$

4.8 Assíntotas

4.8.1 Verticais

4.19 Definição. A reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de uma função $y = f(x)$ se ocorrer pelo menos uma das situações seguintes:

(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

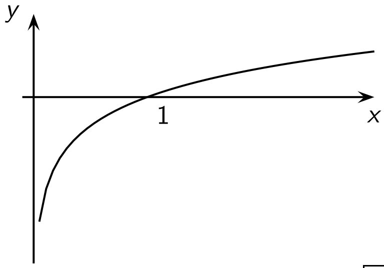
(b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

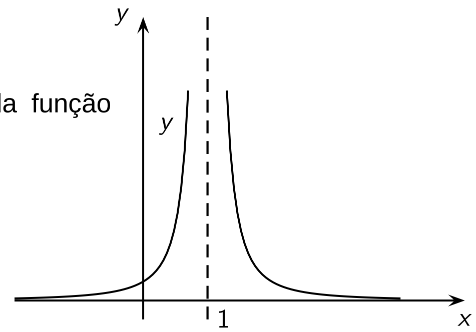
***Exemplo* 4.13.** A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical da função $y = ln(x)$, pois

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$



Exemplo 4.14. A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical da função $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, pois

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$



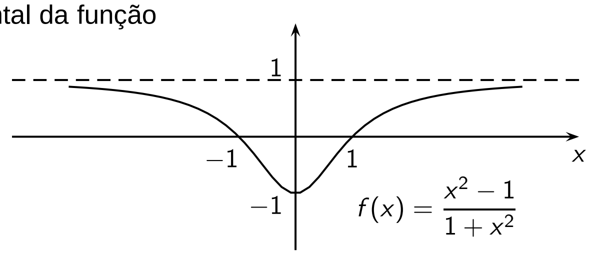
4.8.2 Horizontais

4.20 Definição. A reta $y = b$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico de uma função $y = f(x)$ se ocorrer

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

Exemplo 4.15. A reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal da função $y = \dfrac{x^2-1}{1+x^2}$, pois

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{1+x^2} = 1.$$



4.8.3 Oblíquas

4.21 Definição. A reta $y = kx + b$ é uma *assíntota oblíqua* do gráfico de uma função $y = f(x)$, se ocorrer

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0$ ou

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0$

É possível se mostrar que

$$k = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

e, uma vez determinado o k, que

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx].$$

Nota 24.

1. substituindo-se $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$, obtém-se, analogamente, as expressões de k e b para outra possível assíntota oblíqua.
2. Em ambos os caso, se não existir um dos limites acima definidos para k e b, não existe a assíntota oblíqua.
3. as assíntotas horizontais são casos particulares das assíntotas oblíquas, ocorrendo quando $k = 0$.
4. uma função pode ter no máximo duas assíntotas oblíquas, incluindo as horizontais.

4.8.4 Exercícios Propostos

***EP* 4.12.** Determine (se existir) as assíntotas: horizontais, verticais ou oblíquas das funções a seguir:

(a) $y = \dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$ (b) $y = \dfrac{x^2}{x-3}$

4.9 Esboço do Gráfico de Funções

Para obtermos o esboço do gráfico de uma função, devemos seguir os seguintes passos:

1. Determinar o domínio de f;
2. Calcular os pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados;
3. Determinar os pontos críticos;
4. Determinar os pontos de máximos e mínimos;
5. Estudar a concavidade;
6. Determinar os pontos de inflexão;
7. Determinar as assíntotas;
8. Esboço.

***Exemplo* 4.16.** Esboçar o gráfico da função $f(x) = (x^2-1)^3$.

Solução:

1. Domínio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$;
2. Intersecções com os eixos coordenados: se $x = 0$, então $y = -1$ e, se $y = 0$, então $x = \pm 1$; a curva passa pelos pontos $(1, 0)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$.
3. Pontos críticos de f: $f'(x) = 6x(x^2-1)^2$. Logo, resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$, que são os pontos críticos de f.

4. Máximos e mínimos relativos de f: $f''(x) = 6(x^2-1)(5x^2-1)$. Logo, $f''(0) > 0$ e 0 é ponto de mínimo relativo de f. $f''(\pm 1) = 0$ e o teste da segunda derivada não nos diz nada. Usando, então, o teste da primeira derivada para analisar a mudança de sinal temos: $f'(x) < 0$, para todo $x < 0$; então $x = -1$ não é ponto extremo de f. $f'(x) > 0$, para todo $x > 0$; então $x = 1$ não é ponto extremo de f.

5. Concavidade $f''(x) = 6(x^2-1)(5x^2-1) = 0$ implica que $x = \pm 1$ e $x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$$f''(x) > 0 \text{ se } x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup (1, +\infty).$$

$$f''(x) < 0 \text{ se } x \in \left(-1, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right).$$

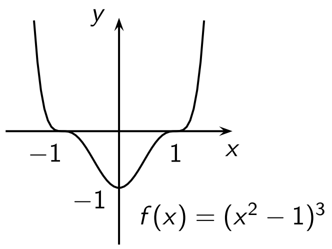
Conclusão: f tem C.V.C. nos intervalos $(-\infty, -1)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $(1, +\infty)$.

f tem C.V.B. nos intervalos $\left(-1, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)$.

6. Ponto de inflexão: As abscissas dos pontos de inflexão de f são $x = \pm 1$ e $x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

7. Assíntotas de f: A curva não possui assíntotas;

8. Esboço do gráfico de f:



***Exemplo* 4.17.** Esboçar o gráfico da função $f(x) = -7 + 12x - 3x^2 - 2x^3$.

Solução:

1. Domínio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$;

2. Intersecções com os eixos coordenados: se $x = 0$, então $y = -7$ e se $y = 0$, então $x = 1$ ou $x = -7/2$;

3. Pontos críticos de f: $f'(x) = 12 - 6x - 6x^2$. Portanto, resolvendo-se a equação $f'(x) = 0$, obtemos os pontos críticos $x = -2$, $x = 1$ de f.

4. Máximos e mínimos relativos de f: $f''(x) = -6 - 12x$. Logo, $f''(1) < 0$ e 1 é ponto de máximo relativo de f. $f''(2) > 0$ e 2 é ponto de mínimo.

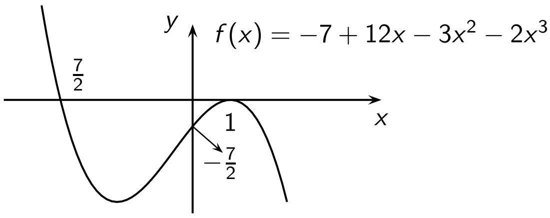
5. Concavidade: $f''(x) = -6 - 12x = 0$ implica que $x = -\dfrac{1}{2}$. $f''(x) > 0$ se $x < -\dfrac{1}{2}$ e $f''(x) < 0$ se $x > -\dfrac{1}{2}$.

   Conclusão: o gráfico de f tem C.V.C. em $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ e tem C.V.B. em $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

6. Ponto de inflexão: A abscissa do ponto de inflexão de f é $-\dfrac{1}{2}$.

7. Assíntotas de f: A curva não possui assíntotas.

8. Esboço do gráfico de f.



4.9.1 Exercícios Propostos

***EP* 4.13.** Esboce os gráficos das funções a seguir:

(a) $y = -x^2 + 4x + 2$

(b) $y = -x^4 - x^3 - 2x^2$

(c) $y = \dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

(d) $y = \ln(x^2 + 1)$

(e) $y = \dfrac{x^2}{x-3}$

4.10 Problemas de Otimização

Nesta seção apresentaremos problemas de maximização e minimização aplicados à diversas áreas.

***Exemplo* 4.18.** Determine dois números reais positivos cuja soma é 70 e tal que seu produto seja o maior possível.

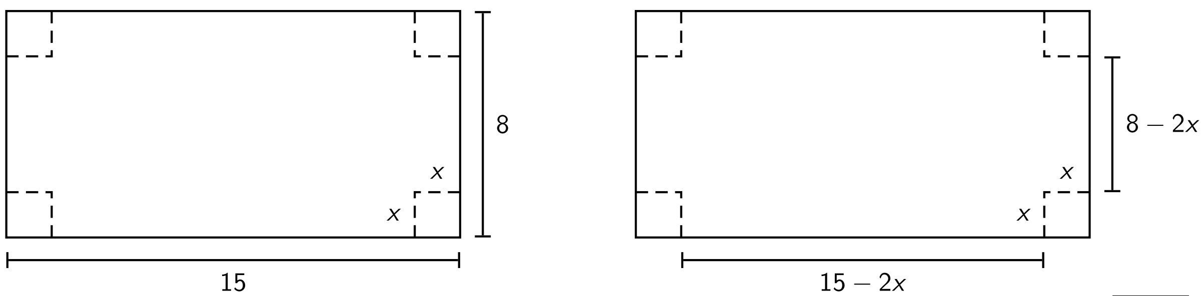
Solução: Considere os números procurados como sendo x e y, ambos positivos, tais que $x + y = 70$. Logo, $x, y \in [0, 70]$; o produto é $P = x \cdot y$. Esta é a função que deve ser maximizada. Como $y = 70 - x$, substituindo em P:

$$P(x) = x \cdot y = x \cdot (70 - x).$$

Derivando-se P: $P'(x) = 70 - 2x = 2(35 - x)$; o ponto crítico é, portanto, $x = 35$. Analisando o sinal de P', verifica-se que esse ponto é de máximo para P e $y = 35$. Logo, $P = 1.225$.

***Exemplo* 4.19.** Um fabricante deseja construir caixas de papelão sem tampa e de base retangular, dispondo de um pedaço retangular de papelão com $8\ cm$ de lado e $15\ cm$ comprimento. Para tanto, deve-se retirar de cada canto quadrados iguais, em seguida viram-se os lados para cima. Determine o comprimento dos lados dos quadrados que devem ser cortados para a produção de uma caixa de volume máximo.

Solução:



A altura da caixa é x; a largura é $(8-2x)$ e o comprimento é $(15-2x)$, observando que $0 < x < 4$. Logo, devemos maximizar:

$$V(x) = x(8-2x)(15-2x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x.$$

Derivando-se e igualando a zero:

$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = (x-6)(12x-20) = 0,$$

obtemos $x = 6$ ou $x = \dfrac{5}{3}$. Mas, $6 \notin (0,4)$; então, $x_0 = \dfrac{5}{3}$ é o único ponto crítico de V. Logo, estudando o sinal de V', x_0 é ponto de máximo. Então, $x_0 = 1,6\ cm$ e $V = 90,74\ cm^3$.

***Exemplo* 4.20.** Um tanque, sem tampa, em forma de cone é feito com um material plástico, tem capacidade de $1.000\ m^3$. Determine as dimensões do tanque que minimiza a quantidade de plástico usada na sua fabricação.

Solução: A área do cone é: $A_1 = \pi r l = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$, em que na última igualdade usamos o teorema de Pitágoras. Por outro lado, o volume do tanque é de $1.000\ m^3$. Logo,

$$1.000 = V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

e $h = \dfrac{3.000}{\pi r^2}$. Substituindo h na expressão da área. Temos:

$$A_1 = \pi r\sqrt{r^2 + \frac{3.000}{\pi^2 r^4}}.$$

Como antes, minimizaremos $A = (A_1)^2$. Logo:

$$A(r) = \pi^2 r^4 + k r^{-2}$$

, em que $k = (3.000)^2$. Derivando-se e igualando a zero, obtemos que r é, aproximadamente, $8,773\ m$ e h é, aproximadamente, $12,407\ m$. Conseqüentemente, A_1 é, aproximadamente, $418,8077\ m^2$.

4.10.1 Exercícios Propostos

***EP* 4.14.** Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de $2.000\ cm^3$. O material da tampa e da base deve custar $R\$3,00$ por centímetro quadrado e o material para os lados custa $R\$1,50$ por centímetro quadrado. Queremos encontrar as dimensões da caixa cujo custo total do material seja mínimo.

***EP* 4.15.** Se uma lata fechada com volume $16\pi\ cm^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.

***EP* 4.16.** Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão com $12\ cm$ de lado. Para isso, ele pretende retirar quadrados iguais dos quatro cantos, dobrando, a seguir, os lados.

(a) Se $x\ cm$ for o comprimento dos quadrados a serem cortados, expresse o volume da caixa em centímetros cúbicos como função de x.

(b) Qual é o domínio da função?

(c) A função é contínua em seu domínio?

(d) Determine o comprimento do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo.

***EP* 4.17.** Dois pontos A e B estão colocados em lados opostos a um rio cuja largura é de $3\ km$. A linha AB é ortogonal ao rio. Um ponto C está na mesma mesma que B, mas $2\ km$ do rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por quilômetro do cabo é 25% mais caro sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja o menor possível?

***EP* 4.18.** Um campo retangular à margem de uma rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de $R\$12,00$ por metro linear no lado paralelo ao rio e de $R\$8,00$ por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com $R\$3.600,00$ de material.

***EP* 4.19.** Ao planejar um restaurante, estima-se que se houver de 40 a 80 lugares, o lucro bruto diário será de $R\$16,00$ por lugar. Se contudo, o número de assentos for acima de 80 lugares, o lucro bruto diário por lugar decrescerá de $R\$0,08$ vezes o número de lugares acima de 80. Qual deverá ser o número de assentos para que o lucro bruto diário seja máximo?

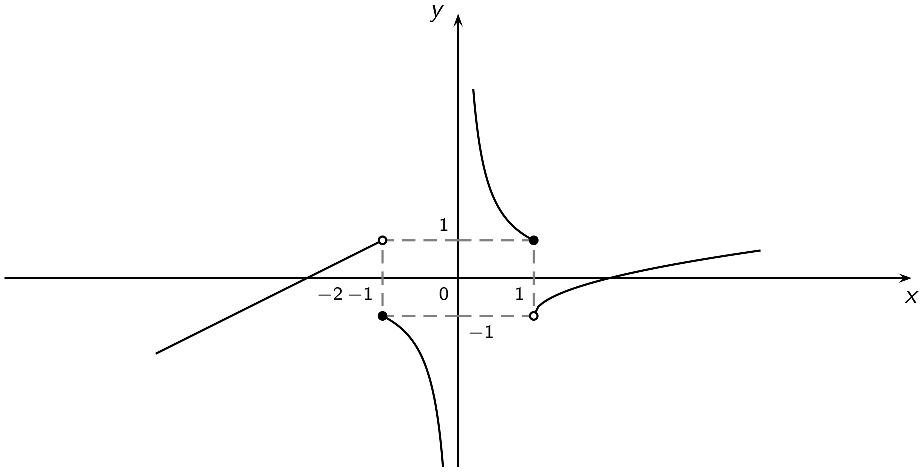
4.11 Gabarito

4.1. (a) 25. 4.2. (a) R: Cres. em $(-1, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$ e Decres. em $(-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, 2)$, (b) R: Cres. em $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ e Decres. em $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, (c) R: Cresc. $(0, +\infty)$ e Decres. $(-\infty, 0)$, (d) R: Cresc. $(0, +\infty)$ e Decres. $(-\infty, 0)$, (e) R: Crescente em $\mathbb{R}$, (h) R: Cres. $(-1, +\infty)$ e Decres. $(-\infty, -1)$, (g) R: Decrescente em $\mathbb{R}$, (h) R: Decrescente em $\mathbb{R}$.
4.3. . 4.4. . 4.5. (a) Min $\frac{3}{7}$, não existe máximo, (b) Máx2, não existe mínimo, (c) Máx-7, Mín. 1 Mín. 0, (d) não existe máximo. 4.6. . 4.7. (a) $\frac{3}{2}$, (b) Não existe, (c) -1, (d) Não existe. 4.8. (a) $\forall\ a \in \mathbb{R}_+^*$, (b) $a = -\frac{3}{2}$, $b = -18$ e $c \in \mathbb{R}$. $x_{max} = -2$ e $x_{min} = 3$. 4.9. . 4.10. . 4.11. Inflexão em $\frac{5}{3}$ e CVC em $(-\infty, \frac{5}{3})$ e CVB em $(\frac{5}{3}, +\infty)$. 4.12. . 4.13. . 4.14. $10 \times 10 \times 20$. 4.15. $r = 2, h = 4$. 4.16. (d) $8\ cm$. 4.17. diretamente de A a C. 4.18. área 16.875 m^2. 4.19. 140 lugares e R$ 1.568,00 o lucro bruto diário.

Atividade Orientada

5.1 Etapa 1

5.1.1. Dado o gráfico da função f abaixo, assinale V(verdadeiro) ou F(Falso):



(a) $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$ (b) Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

5.1.2. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2ax - 3 & , \quad \text{se } x < 1 \\ 2 & , \quad \text{se } x = 1 \\ \dfrac{a}{x+1} & , \quad \text{se } x < 1 \end{cases},$$

determine o valor de a para que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$.

5.1.3. Sejam f e g duas funções e p um ponto do domínio das mesmas. Assinale V se verdadeiro ou F se falso:

( ) (a) Se $\lim_{x \to p} f(x) = k > 0$ e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to p} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$;

( ) (b) Se $\lim_{x \to p} f(x) = k < 0$ e $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$;

( ) (c) Se $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to p} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;

( ) (d) Se $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$;

( ) (e) Se $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to p} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

5.1.4. Calcule:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 10}{5x^3 + 2x}$ (b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 8}{2x^4 + 3x}$ (c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 + 4}{x^2 + 2x}$

5.1.5. Determine

(a) $\lim_{x\to 0}(3x^2-2x+1)$;

(b) $\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{2x^2-5}{3x-4}\right)$;

(c) $\lim_{x\to +\infty}(-2x^2-5x+1)$;

(d) $\lim_{x\to -\infty}(x^3+2x^2-3x+2)$;

(e) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2+2x-3}{4x+3}\right)$;

(f) $\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{2x-5}{x+2}\right)^2$;

(g) $\lim_{x\to -\infty}(x^2-x^3)$;

(h) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+5}}{x-1}$;

(i) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x-1}$;

(j) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+7}-x\right)$.

5.1.6. Determine os valores de m para que $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-m^2}{x-2}=4$.

5.1.7. Sendo $f(x)=a^x\cdot\log_a(-x)$, calcule $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, para $0<a<1$.

5.1.8. Dada a função $f(x)=\begin{cases}3x+2 & , \quad \text{se } x<4\\ 5x+k & , \quad \text{se } x\geq 4\end{cases}$, ache o valor de k para o qual $\lim_{x\to 4} f(x)$ exista.

5.1.9. Determine o valor do limite: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}\right)$. Sugestão: Faça a mudança de variáveis $x=t^{20}$.

5.1.10. Determine o valor de a tal que $\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}\right)$ exista.

5.2 Etapa 2

5.2.1. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & ; \quad \text{se } x<2\\ 4-x^2 & ; \quad \text{se } x\geq 2\end{cases}.$$

e determine os intervalos onde f é contínua.

5.2.2. Seja f uma função real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}2x-2 & ; \quad \text{se } x\leq -1\\ Ax+B & ; \quad \text{se } -1\leq x\leq 1\\ 5x+7 & ; \quad \text{se } x>1\end{cases}.$$

Determine A e B tal que f seja uma função contínua para todo $x\in\mathbb{R}$.

5.2.3. Considere as funções $f(x)=\begin{cases}3-x & ; \quad \text{se } x<1\\ 2 & ; \quad \text{se } x\geq 1\end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases}2 & ; \quad \text{se } x<1\\ 1+x & ; \quad \text{se } x\geq 1\end{cases}$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

(a) ( ) $f+g$ é contínua em 1;

(b) ( ) $f\cdot g$ é contínua em 1;

(a) ( ) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em 1.

5.2.4. Calcule:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}(x)}{x-\pi}+\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

5.2.5. Use a continuidade para calcular o limite $\lim_{x\to\pi}(x+\text{sen}(x))$.

5.2.6. Usando as propriedades de funções contínuas e os teoremas sobre limites, calcule o valor de $A+B+C+D$, sabendo que:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to 0}\left[x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
B &= \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{2+5x^3}{1-3x^7}\cdot \cos\left(\ln(x)\right)\right]\\
C &= \lim_{x\to +\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x^2+x+1}{1+2x^3}\right)\cdot \cos\left(\frac{\pi x^3+x^2-3}{2-x+2x^2}\right)\right]\\
D &= \lim_{x\to -\infty}\left[e^x\cdot \operatorname{sen}(x)\right]
\end{aligned}$$

5.2.7. Calcule:

$$\lim_{x\to 0}\left(2^{\operatorname{sen}\left(x^3-2x+\frac{\pi}{2}\right)}\right)-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}-\lim_{x\to 0}e^{x^2}$$

5.2.8. Calcule:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[5+\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]+\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}-5$$

5.2.9. Determine:

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{\log_2(4x^2-7x+5)}-\lim_{x\to \pi}\frac{2\left(\operatorname{sen}(2x)-2\operatorname{sen}^2(x)\right)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}-2.$$

5.2.10. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

(b) $\lim_{x\to +\infty}2^{\frac{1+x^2}{2x^2}}$

(c) $\lim_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$

(d) $\lim_{x\to 5^-}\dfrac{3-x}{2x-10}$

(e) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+2\cos(x)}{x^2}$

(f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$

5.3 Etapa 3

5.3.1. Prove que $[\operatorname{sen}(x)]^{(5)}=\cos(x)$.

5.3.2. Para cada uma das equações, encontre $\dfrac{dy}{dx}$ por derivação implícita.

(a) $x^2-5xy+3y^2=7$;

(b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{1}{2}$;

5.3.3. Dadas as funções $f(x)=x^2$ e $g(x)=x^3-4$, calcule $(f\circ g)'(1)$.

5.3.4. Calcule a derivada da função $f(x)=\left(\dfrac{2\operatorname{sen}(x)}{x}\right)-\cos(x)$ no ponto de abscissa $x=2\pi$.

5.3.5. Determine $(f^{-1})'(-5)$, sabendo que:

$$\begin{aligned}
f:(2,+\infty) &\rightarrow \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2-4x-2.
\end{aligned}$$

5.3.6. Determinar a equação da reta tangente e normal ao gráfico da função $f(x)=\operatorname{arctg}^2(x)$ no ponto de abscissa $\sqrt{3}$.

5.3.7. Mostre, usando a regra de L'Hospital, que:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^{3x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

5.3.8. *Uma lata cilíndrica de estanho (sem tampa) tem volume de* $5\ cm^3$*. Determine suas dimensões se a quantidade de estanho para a fabricação da lata é mínima.*

5.3.9. *Ache as dimensões do retângulo de menor perímetro cuja área é de* $100\ cm^2$*.*

5.3.10. *Uma bola de neve esférica é formada de tal maneira que seu volume aumenta à razão de* $8\ cm^3/min$*. Como está variando o raio no instante em que a bola tem* $4\ cm$ *de diâmetro?*

5.3.11. Um homem caminha ao longo de um caminho reto com velocidade $4\ m/s$. Uma lâmpada está localizada no chão a $20\ m$ da trajetória (distância ortogonal) e é mantida focalizada na direção do homem. Qual a velocidade de rotação da lâmpada quando o homem está a $15\ m$ do ponto do caminho mais próximo da lâmpada?

5.3.12. Sabendo-se que f é definida e contínua em $\mathbb{R}$ e que o gráfico a seguir representa a derivada de f, determine para a função f:

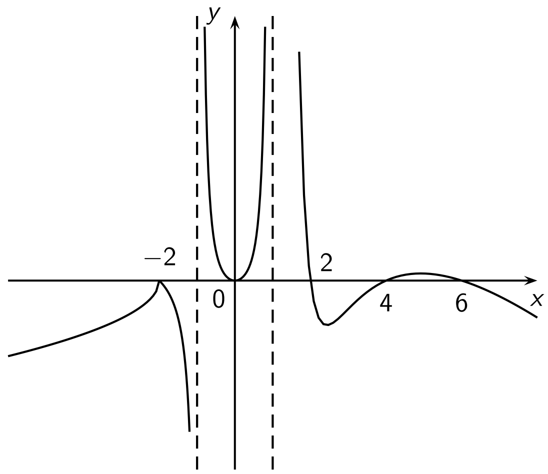
(a) as abscissas dos pontos críticos;

(b) as abscissas dos pontos de máximo e mínimos locais;

(c) os intervalos de crescimento e decrescimento;

(d) os intervalos onde a função tem concavidade voltada para cima e onde a função tem concavidade voltada para baixo;

(e) as abscissas dos pontos de inflexão.



5.3.13. Esboçar o gráfico das funções

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-3}$; (b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$; (c) $f(x) = e^{-x^2}$.

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; NILTON JOSÉ, Machado. **Fundamentos de Matemática Elementar – Vol. 8**. 8ª edição. São Paulo: Atual Editora Ltda, 2.004.

[2] ANTON, Howard. **Cálculo: Um Novo Horizonte – Vol. 1**. 6ª edição. Porto Alegre: BOOKMAN, 2.000.

[3] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise – Projeto Euclides – Vol. 1**. 10ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2.002.

[4] FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A**. 5ª edição. São Paulo: Makron Books Ltda., 1.992.

FTC – EaD

FTC – EaD
Faculdade de Tecnologia e Ciências – Educação a Distância
Democratizando a educação.
www.ftc.br/ead

FTC
FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS

ead
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

www.ead.ftc.br