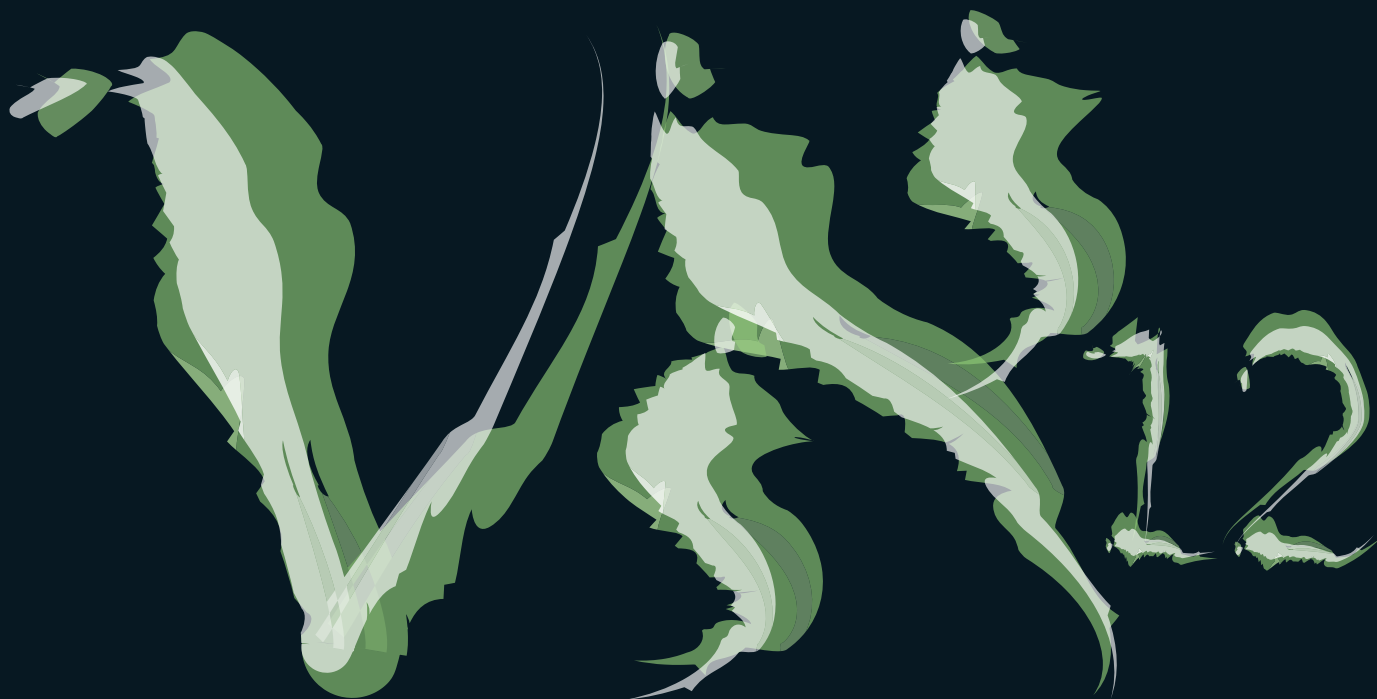


Manual de Matemática para o 12<sup>o</sup> ano

Matemática A



**NIUaleph 12**  
**VOLUME 3**

Jaime Carvalho e Silva

Joaquim Pinto

Vladimiro Machado

2012

## Título

NiuAleph 12 - Manual de Matemática para o 12<sup>o</sup> ano de Matemática A

## Autores

Jaime Carvalho e Silva

Joaquim Pinto

Vladimiro Machado

## Capa e Design

Elisa Silva

## Conceção Técnica

Vítor Teodoro

João Fernandes

## Imagens e fontes

As imagens utilizadas neste manual pertencem ao domínio público ou, nas situações indicadas, aos respetivos autores, sob as Licenças Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>) ou Creative Commons Attribution 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>



As fontes utilizadas neste manual pertencem às famílias Latin Modern e Latin Modern Math, desenvolvidas pela GUST [http://www.gust.org.pl/projects/e-foundry/lm-math/index\\_html](http://www.gust.org.pl/projects/e-foundry/lm-math/index_html)

## ISBN

978-989-97839-0-4

## Edição

1.<sup>a</sup> edição/versão 1

## Data

2012

© Este ficheiro é de distribuição livre mas os direitos permanecem com os respetivos autores. Não é permitida a impressão deste ficheiro.

# Índice geral

## Volume 1

Capítulo 1 – É possível? É provável?

Capítulo 2 – Probabilidade

Capítulo 3 – Probabilidade condicionada

Capítulo 4 – Distribuição de probabilidades

## Volume 2

Capítulo 5 – Análise Combinatória

Capítulo 6 – Triângulo de Pascal e Binómio de Newton

Capítulo 7 – Função exponencial

Capítulo 8 – Função logarítmica

## Volume 3

Capítulo 9 – Teoria de Limites

Capítulo 10 – Cálculo Diferencial

Capítulo 11 – Aplicações do Cálculo Diferencial

Capítulo 12 – Teoremas elementares do Cálculo Diferencial (\*)

## Volume 4

Capítulo 13 – Funções trigonométricas

Capítulo 14 – A História dos números complexos

Capítulo 15 – A Álgebra dos números complexos

Capítulo 16 – A Geometria dos números complexos

Capítulo 17 – Demonstrações de Geometria usando números complexos (\*)

# Índice

<b>Capítulo 9 - Limites de Funções</b>	<b>6</b>
História(s) - Heinrich Eduard Heine (1821-1881)	7
Propriedades operatórias sobre limites	12
História(s) - Os paradoxos de Zenão	16
Limites Laterais	17
Indeterminações	19
Limites Notáveis	21
Assíntotas	22
Continuidade	25
Teorema de Bolzano-Cauchy	29
Leitura(s) - Platonismo, formalismo e construtivismo	34
Síntese	35
Exercícios globais	40
Conselhos para os exames – n.º 9	45
Itens de exame	46
Prova global	52
<b>Capítulo 10 - Cálculo Diferencial</b>	<b>55</b>
História(s) - Isaac Newton (1642–1727)	60
História(s) - José Anastácio da Cunha (1744–1787)	68
Síntese	69
Exercícios globais	70
Itens de exame	73
Prova global	80

<b>Capítulo 11 - Aplicações do Cálculo Diferencial</b>	<b>83</b>
História(s) - Pierre de Fermat (1601–1665)	87
Segunda derivada e concavidade	88
Estudo completo de funções (sem calculadora)	92
Estudo completo de funções (com calculadora)	95
Problemas de máximos e mínimos	99
Leitura(s) - O estudo matemático do cancro	101
Síntese	103
Exercícios globais	104
Itens de exame	109
Prova global	121
<b>Capítulo 12 - Teoremas elementares do Cálculo Diferencial</b>	<b>124</b>
História(s) - Gottfried Leibniz (1646-1716) e o cálculo diferencial	128
Leitura(s) - Sonya Kovalevskaya (1850-1891): a poetisa das equações	130
<b>Soluções</b>	<b>131</b>

# 9. Limites de Funções

*“Penso que a matemática é uma das atividades humanas mais gratificantes.”*

William Paul Thurston (1946-2012), Medalha Fields 1982

*E tu, padre Oceano, que rodeias  
O inundo universal, e o tens cercado,  
E com justo decreto assim permites  
Que dentro vivam só de seus limites;  
In “Lusíadas” de Luís de Camões, Canto VI*

Já estudámos no 11.º ano limites de sucessões de números reais. Vimos que o limite de uma sucessão  $(u_n)$  é o número real  $L$  e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \text{ ou } u_n \rightarrow L$$

se e somente se para todo o real  $\delta$  positivo existe uma ordem  $p$  tal que

$$n > p \Rightarrow |u_n - L| < \delta$$

E se estivermos em presença de um limite de uma função como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

onde  $f$  é uma função real de variável real e  $a$  um número real? Supomos que  $f$  está definida (pelo menos) num intervalo aberto contendo  $a$  ou num intervalo aberto de extremidade  $a$  (podendo não estar definida no ponto  $a$ ).

No caso do limite de uma função  $f$  observamos que quando o  $x$  tende para  $a$ , o  $f(x)$  tenderá para algum limite. Ou seja, é como se estivéssemos em presença de dois limites relacionados. A ideia do alemão Heinrich Eduard Heine foi exatamente essa:

*Limite de função segundo Heine* – Diremos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , ou que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  é  $L$ , se e somente se para qualquer sucessão  $(u_n)$  de termos no domínio de  $f$ , dife-

rentes de  $a$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  se tenha que a sucessão  $(f(u_n))$  tende para  $L$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$$

Ou seja, reduzimos o estudo do limite de uma função  $f$  ao estudo dos limites de duas sucessões,

a sucessão  $(u_n)$  no domínio da função e a sucessão transformada  $(f(u_n))$ .

## HISTÓRIA(S)

### Heinrich Eduard Heine (1821-1881)

Heinrich Eduard Heine (1821-1881) foi um matemático alemão que nasceu em Berlim numa família com 9 filhos (ele próprio teve 5 filhos) e faleceu na cidade de Halle onde foi professor de matemática durante mais de 20 anos, tendo ocupado o lugar de Reitor da Universidade de Halle durante o ano letivo de 1864-65.



Foi aluno de matemáticos famosos como Carl Friedrich Gauss e Gustav Lejeune Dirichlet e manteve contatos frequentes com Karl Weierstrass e Leopold Kronecker. Por isso não é surpreendente que tenha estudado intensamente a teoria das funções onde fez descobertas notáveis. Era um excelente professor e dele se diz que “as suas aulas se distinguiam pela clareza e eram bem recebidas.” Fez parte da comissão de exames para professores das escolas secundárias onde desempenhava o seu papel de forma conscienciosa e afável.

Consideremos a função definida por  $f(x) = 2x^2 + 1$ . Tomando por exemplo a sucessão  $(u_n)$ , parcialmente representada em baixo, a tender para 1, observamos que a sucessão  $(f(u_n))$  parece tender para 3:

$u_n$	$f(u_n)$
0,9	2,62000
0,91	2,65620
0,92	2,69280
0,93	2,72980

$u_n$	$f(u_n)$
0,94	2,76720
0,95	2,80500
0,96	2,84320
0,97	2,88180

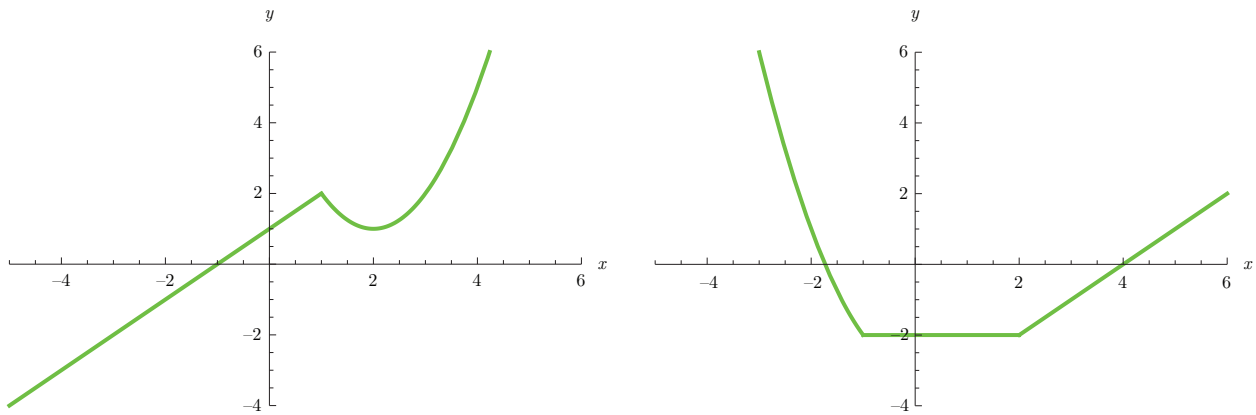
$u_n$	$f(u_n)$
0,98	2,92080
0,99	2,96020
0,995	2,98005
0,999	2,99600

$u_n$	$f(u_n)$
0,9995	2,99800
0,9999	2,99960
0,99995	2,99980
0,99999	2,99996

Se fizermos o mesmo com todas as sucessões  $(u_n)$  que tendem para 1 e se para todas elas se verificar que a sucessão  $(f(u_n))$  tende para 3, então diremos que

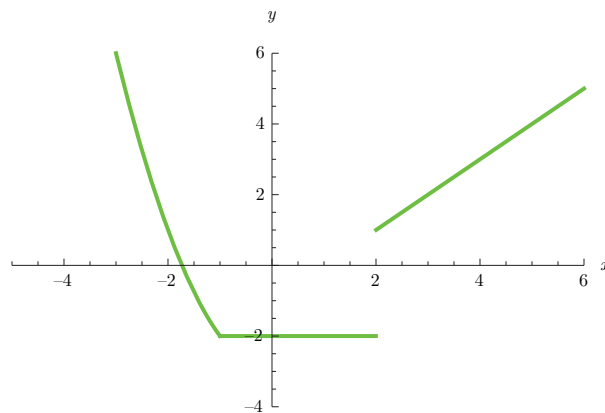
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

Podemos observar graficamente a mesma situação se olharmos bem para os gráficos das duas seguintes funções:



É visualmente evidente em qualquer dos gráficos que, qualquer que seja a sucessão  $(u_n)$  que consideremos no eixo dos  $XX$  a tender para  $a = 1$ , os transformados formarão uma sucessão  $(f(u_n))$  que converge para  $L = 2$  no primeiro caso e  $L = -2$  no segundo caso.

Pode acontecer que para diferentes sucessões  $(u_n)$  a tender para  $a$ , as sucessões  $(f(u_n))$  correspondentes não tendam para um mesmo  $L$ . Consideremos o caso da função representada na seguinte figura:



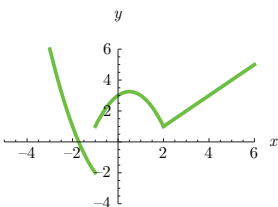
Se escolhermos uma sucessão  $(u_n)$  de valores entre  $-1$  e  $2$  e a tender para  $2$  a sucessão  $(f(u_n))$  será constante e teremos  $f(u_n) = -2$ . Logo a sucessão  $(f(u_n))$  converge para  $L = -2$ . Mas se escolhermos uma sucessão  $(v_n)$  de valores superiores a  $2$  mas a tender para  $2$ , a sucessão  $(f(v_n))$  vai convergir para  $L = 1$ . Logo não encontramos um valor para que tendam todas as sucessões  $(f(u_n))$  com  $(u_n)$  a tender para  $2$ . Assim não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .



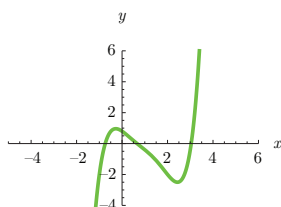
## EXERCÍCIOS

1. Considera as sucessões  $(u_n)$  e  $(v_n)$  de termo geral  $u_n = 2 - \frac{2}{n+1}$  e  $v_n = 2 + \frac{1}{n}$

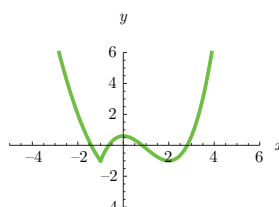
Considera as funções  $f$ ,  $g$ ,  $h$  e  $j$  definidas pelos gráficos seguintes:



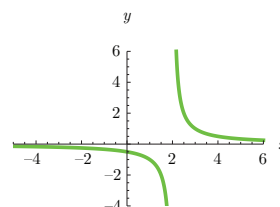
$f$



$g$



$h$



$j$

- 1.1 Calcula  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

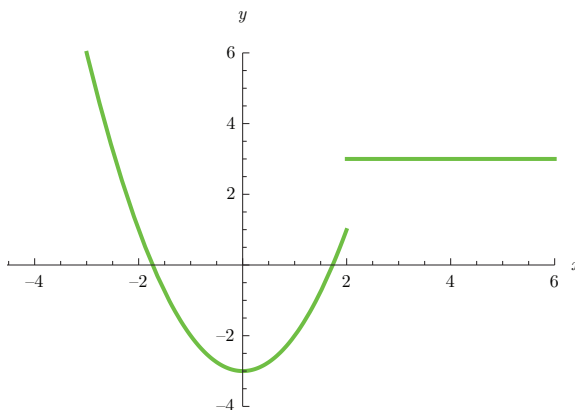
- 1.2 A partir dos gráficos dados indica qual parece ser o valor de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} g(v_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} h(u_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} h(v_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} j(u_n) \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} j(v_n).$$

- 1.3 Tendo em atenção os resultados anteriores, que podes dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ , e  $\lim_{x \rightarrow 2} j(x)$ ?

2. Considera as sucessões  $(u_n)$  e  $(v_n)$  de termo geral  $u_n = 2 - \frac{2}{n+1}$  e  $v_n = 2 - \frac{3}{n^2+8}$ .

Considera a função  $f$  definida pelo gráfico seguinte.



## EXERCÍCIOS (CONT.)

2.1 Calcula  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

2.2 A partir dos gráficos dados conclui que parece ser verdade que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = 1$$

2.3 Pode-se concluir daqui que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ?

### A NÃO ESQUECER

O limite de uma função quando  $x$  tende para  $a$  existe apenas quando o limite da sucessão  $(f(u_n))$  é sempre igual ao mesmo valor  $L$ , para toda a escolha possível da sucessão  $(u_n)$  a tender para  $a$ .

O mais difícil do ponto de vista teórico já foi visto no Tema de Sucessões do ano anterior, pelo que esse Tema convém que seja revisto agora.

Observe-se que a definição de limite de função não precisa de ser revista se quisermos que seja  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$  ou ainda se quisermos  $L = +\infty$  ou  $L = -\infty$ , pois remetemos tudo para os limites de sucessões. Relembremos o que é uma sucessão a tender para  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Vimos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou seja, que  $(u_n)$  é um **infinitamente grande positivo** se e somente se para cada número real positivo  $M$  existe uma ordem  $p$  tal que

$$n > p \Rightarrow u_n > M$$

Uma sucessão  $(u_n)$  tende para  $-\infty$  (é um **infinitamente grande negativo**) se a sucessão  $(-u_n)$  tender para  $+\infty$ .

TR

### TAREFA RESOLVIDA 1

Determina, se existir,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2}$$

## RESOLUÇÃO

---

Vamos utilizar a definição de limite de função segundo Heine. Tomemos uma qualquer sucessão  $(u_n)$  a tender para 4. Nesta situação a sucessão de termo geral  $(u_n - 4)^2$  tende para zero por valores positivos. É então um infinitésimo (e de sinal positivo). Logo o inverso será um infinitamente grande positivo como sabemos do Tema de Sucessões. Então, como a sucessão  $(u_n)$  era qualquer a tender para 4, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x - 4)^2} = +\infty$$

### A NÃO ESQUECER

Para utilizar a definição de limite de função segundo Heine temos de partir de uma sucessão  $(u_n)$  arbitrária nas condições da definição e depois aplicar os Teoremas de limites de Sucessões.



## TAREFA RESOLVIDA 2

---

Determina, se existir,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x - 4}$$

## RESOLUÇÃO

---

Vamos novamente utilizar a definição de limite de função segundo Heine. Tomemos uma qualquer sucessão  $(u_n)$  a tender para 4. Nesta situação a sucessão de termo geral  $u_n - 4$  tende para zero mas por valores que tanto podem ser positivos como negativos, e então o inverso será um infinitamente grande mas não sabemos se positivo ou negativo. Tomemos uma sucessão  $(v_n)$  a tender para 4 mas por valores superiores a 4; neste caso a sucessão de termo geral  $v_n - 4$  tende para zero mas por valores positivos; então o inverso será um infinitamente grande positivo. Tomemos agora uma sucessão  $(w_n)$  a tender para 4 mas por valores inferiores a 4; neste caso a sucessão de termo geral  $w_n - 4$  tende para zero mas por valores negativos; então o inverso será um infinitamente grande negativo. Como obtemos resultados diferentes conforme a sucessão que tomamos a tender para 4, o limite dado não existe.

### A NÃO ESQUECER

Para utilizar a definição de limite de uma função segundo Heine temos de partir de uma sucessão  $(u_n)$  nas condições da definição e precisamos de obter sempre o

mesmo limite para  $(f(u_n))$ ; basta encontrar dois valores diferentes para este limite para que possamos concluir que o limite dado não existe.

## EXERCÍCIOS

3. Determina, se existirem, os seguintes limites

3.1  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{12}{x-2}$

3.2  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{7}{(x+2)^2}$

4. Estuda os seguintes limites

4.1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$

4.2  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$

4.3  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$

4.4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$

## Propriedades operatórias sobre limites

Uma das vantagens de definirmos limite de função à custa dos limites de sucessões é que todas as propriedades que se obtêm para limites de sucessões podem ser transpostas para limites de funções.

Quando estudámos os limites de sucessões provámos que o limite de uma sucessão, se existir, é único. Como consequência podemos concluir que

*Teorema da unicidade do limite* – Se uma função tem limite num ponto então ele é único.

Muitas outras propriedades podem ser obtidas para os limites de funções a partir dos limites de sucessões:

### Teorema 1

a) O limite de uma função constante é a própria constante, isto é, se  $L$  for um número real

$$\lim_{x \rightarrow a} L = L$$

b) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , com  $L$  e  $M$  números reais, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = L \times M$$

c) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , com  $L$  número real, e sendo  $k$  outro número real, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL$$

### Teorema 1 (Cont.)

d) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , com  $L$  e  $M$  números reais e  $M \neq 0$ , e com  $g(x) \neq 0$  num intervalo aberto contendo  $a$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g(x)} \right) = \frac{1}{M} \qquad \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M}$$

e) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $p$  um número natural, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^p = L^p$$

f) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e sendo  $p$  um número natural ímpar, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{L}$$

g) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  com  $f(x) \geq 0$  num intervalo aberto contendo  $a$  ou num intervalo aberto de extremidade  $a$  e sendo  $p$  um número natural par, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{L}$$

Estas regras operatórias sobre limites de funções vão-nos permitir calcular muitos tipos de limites.

TR

### TAREFA RESOLVIDA 3

Considera as funções definidas por  $f(x) = 2x^2 + x + 1$  e  $g(x) = 2x^3$ . Aplicando as propriedades de limites já vistas determina:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

i)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{2f(x) \times g(x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)}$

j)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{f(x)}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$

g)  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))^2$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) - g(x))$

h)  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) \times g(x))$

## RESOLUÇÃO

a) Temos, pelo Teorema 1a), b), c) e e) que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2) + \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \\ &= 2 \times \lim_{x \rightarrow -1} (x^2) + \lim_{x \rightarrow -1} (x) + \lim_{x \rightarrow -1} (1) = 2 \times (\lim_{x \rightarrow -1} x)^2 + (-1) + 1 = 2 \times (-1)^2 = 2\end{aligned}$$

b) Temos, pelo mesmo Teorema, que

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x^3) = 2 \times \lim_{x \rightarrow -1} (x^3) = 2 \times (\lim_{x \rightarrow -1} x)^3 = 2 \times (-1)^3 = -2$$

c) Temos, pelo Teorema 1b) que

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2 + (-2) = 0$$

d) Temos, pelo Teorema 1b) e c) que

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} (-g(x)) = 2 + (-1) \times \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2 + 2 = 4$$

e) Como temos um quociente temos de começar por nos certificar que o denominador é diferente de zero num intervalo aberto que contenha  $a = -1$  (isto é verdade pois basta considerar, por exemplo, o intervalo  $]-2,0[$ ). Por outro lado, o limite do denominador é diferente de zero pois

$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -2$ . Temos então:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} g(x)} = \frac{2}{-2} = -1$$

f) Mais uma vez, por estarmos em presença de um quociente, temos de começar por nos certificar que o denominador é diferente de zero num intervalo aberto que contenha  $a = -1$  (isto é verdade pois basta considerar, por exemplo, o mesmo intervalo  $]-2,0[$ ). Por outro lado o limite do denominador é diferente de zero pois  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$ . Temos então:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)} = \frac{-2}{2} = -1$$

g) Temos que, pelo Teorema 1e),

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))^2 = \left( \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \right)^2 = 2^2 = 4$$

h) Temos, pelo Teorema 1b), que

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2 \times (-2) = -4$$

i) Temos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{2f(x) \times g(x)} = \sqrt[3]{2 \times \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1} g(x)} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times (-2)} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

- j) Como estamos em presença de uma raiz de índice par, temos de nos certificar que a função dada é positiva ou nula 0 num intervalo aberto contendo  $a$ . Tal acontece para a função dada, por exemplo no intervalo  $] -2, 0[$ . Assim,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)} = \sqrt{2}$$

## A NÃO ESQUECER

**Quando se aplicam teoremas relativos a limites de sucessões é importante que se verifiquem as condições em que se podem aplicar esses teoremas.**

Os teoremas que acabámos de ver são ainda válidos para o caso em que  $a = +\infty$  ou em que  $a = -\infty$ , com as adaptações obviamente necessárias e alguns cuidados:

- a) quanto ao intervalo onde alguma função deve ser diferente de zero ou positiva deverá ser do tipo  $]b, +\infty[$  ou  $]-\infty, b[$  respetivamente;
- b) teremos sempre de garantir que o limite obtido faz sentido. Por exemplo se tivermos que

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , então não poderemos recorrer a um teorema para calcular o li-

mite da soma das duas funções  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ , porque o limite obtido não faz sentido, teremos de usar outros métodos.

Repete-se: os teoremas são generalizáveis para os limites infinitos mas não são válidos para todos os casos em que  $a = +\infty$  ou em que  $a = -\infty$ .

## EXERCÍCIOS

5. Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -5$

Calcula:

5.1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2g(x))$

5.3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^2$

5.2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$

5.4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x))$

6. Considera as funções definidas por  $f(x) = |x - 2|$  e  $g(x) = -5x$

Calcula:

6.1  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

6.4  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \times g(x))$

6.2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)}$

6.5  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{2g(x)}$

6.3  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))^2$

6.6  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)}$

## HISTÓRIA(S)

### Os paradoxos de Zenão

É o conceito de limite que, passados 24 séculos, permite esclarecer o tão debatido problema dos paradoxos de Zenão.



Consideremos por exemplo o paradoxo de “Aquiles e a tartaruga”. Suponhamos que Aquiles, o maior corredor da Grécia antiga, anda 10 vezes mais depressa do que a tartaruga, começando por estar a uma distância de 10 metros atrás desta. Então, quando Aquiles percorre os 10m, a tartaruga andará 1m, depois, quando Aquiles percorre esta distância, a tartaruga desloca-se mais um decímetro, e assim sucessivamente. Deste modo, as distâncias de Aquiles ao seu ponto de partida vão sendo as seguintes (expressas em metros):

0; 10; 11; 11,1; 11,11; 11,111; 11,1111; 11,11111; ...

Ao mesmo tempo, as distâncias da tartaruga ao ponto de partida de Aquiles vão sendo:

10; 11; 11,1; 11,11; 11,111; 11,1111; 11,11111; 11,111111;...

Ora, ambas estas sucessões **têm por limite** o mesmo número:  $11,11111\dots = 11 + \frac{1}{9}$

Assim, para alcançar a tartaruga, Aquiles deverá percorrer 11 metros e  $\frac{1}{9}$  do metro – o que, de resto, se podia ver diretamente, resolvendo a equação  $x = 10 + \frac{x}{10}$ , que traduz algebricamente o problema.

Afinal, o vício de raciocínio que se introduziu no paradoxo de Zenão consistia em admitir, inconscientemente, que os espaços parciais 10m, 1m, 1 dm, 1 cm, etc., seriam todos percorridos por Aquiles em tempos iguais e, portanto, cada vez mais lentamente – o que não sucede, com certeza, se o movimento for sensivelmente uniforme. Assim, por exemplo, se Aquiles caminhar à razão de 1 metro por segundo, ao fim de 11 segundos e  $\frac{1}{9}$  do segundo estará precisamente no ponto em que deve encontrar a tartaruga.

É preciso não esquecer que estamos a raciocinar com esquemas abstratos de espaço e tempo, que são apenas simplificações da realidade.

Adaptado de “Compêndio de Álgebra”, J. Sebastião e Silva, J.D. da Silva Paulo, tomo 1, 1970



## Limites Laterais

No conceito de limite de função  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  não distinguimos o que se passa à direita e à esquerda do ponto  $a$ . Mas fazê-lo pode ser, por vezes, muito útil. Vejamos como.

*Limite Lateral Direito* – Diz-se que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  se e só se para qualquer sucessão  $(u_n)$  tal que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  e tal que os termos da sucessão  $(u_n)$  sejam superiores a  $a$  se tenha que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$

A este limite chama-se **limite lateral direito de  $f$  no ponto  $a$** . Dito de outro modo: na definição de limite segundo Heine de  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  consideramos apenas os valores do domínio de  $f$  superiores

a  $a$ . Claro que isto não é equivalente a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  pois não estamos a considerar todas as sucessões  $(u_n)$  de limite  $a$  mas apenas uma parte delas.

*Limite Lateral Esquerdo* – Diz-se que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  se e só se para qualquer sucessão  $(u_n)$  tal

que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  e tal que os termos da sucessão  $(u_n)$  sejam inferiores a  $a$  se tenha que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$

A este limite chama-se **limite lateral esquerdo de  $f$  no ponto  $a$** . Neste caso consideramos apenas os valores do domínio de  $f$  inferiores a  $a$ .

O interesse prático deste conceito é visível no seguinte Teorema:

*Teorema 2* – Temos que o limite de uma função  $f$  quando a variável independente tende para  $a$  é  $L$ , se e somente se os limites laterais esquerdo e direito de  $f$  no ponto  $a$  são ambos iguais a  $L$ .

### EXERCÍCIOS

7. Considera a função  $f$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 1 \\ 5 - 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Prova que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

8. Estuda, recorrendo aos limites laterais, o limite  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x - 3|}$

## HUMOR MATEMÁTICO

### Ovelha negra

Um grupo de cientistas ia num comboio em direção a Edimburgo, capital da Escócia, para participar num congresso científico. Mal entraram na Escócia viram uma ovelha negra no campo.

O astrónomo disse: “Olha, na Escócia as ovelhas são negras!” “Não, não, não!” diz o físico, “Algumas ovelhas escocesas são negras!” Mas o matemático não concorda: “Nada disso. Na Escócia há pelo menos um campo onde há uma ovelha com pelo menos um lado que parece ser negro visto daqui.” O estatístico não está satisfeito: “Não podemos concluir nada, a amostra é demasiado pequena!” O cientista da computação estava um bocado assustado e tinha uma opinião diferente: “Oh não! Um caso particular!”



Lambing Time in Brick Hill Lane Allesley por Amanda Slater, <http://www.flickr.com/photos/pikerslanefarm/7110438481>

### Limites infinitos

Um professor estava a explicar limites infinitos na aula e explicou porque é que

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1}{x - 8} = +\infty$$

Depois colocou um exercício no quadro para os alunos resolverem. Um aluno deu a seguinte resposta:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x - 5} = +\infty$$

### Um método simples para limites infinitos

Eis a resposta que um aluno deu a um exercício do seu livro:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 &= +\infty \end{aligned}$$

## Indeterminações

Muitas vezes, quando se tenta aplicar algum dos teoremas vistos anteriormente, chega-se a uma situação que não nos permite avançar. Por exemplo, suponhamos que queremos determinar o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 2x - 1}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x - 1) = +\infty$ , não podemos usar nenhum teorema para determinar o limite que pretendemos. Neste caso dizemos que estamos em presença de uma **indeterminação do tipo**  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Que fazer então? Um processo muito expedito é **colocar em evidência no numerador e no denominador a maior potência de  $x$** , pois depois podemos fazer uma simplificação algébrica. No nosso caso a maior potência de  $x$  será  $x^3$  e então vem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left( 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

### EXERCÍCIOS

9. Mostra que os limites seguintes são indeterminações do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  e encontra um modo de determinar esses limites.

9.1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 2x - 2012}$

9.4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 2x^4 - 19}{x^6 + x^3 + 2x - 1}$

9.2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2012x + 1}{x^4 - 2x - 1}$

9.5  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 2x}{x^3 + 3x - 1}$

9.3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x - 1}{x^3 + 2x + 1}$

9.6  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 3x + 1}{x^2 + 2x - 2}$

Quando estamos em presença de limites quando  $x$  tende para zero podemos encontrar uma situação semelhante. Por exemplo, suponhamos que queremos determinar o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 2x}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2x) = 0$ , não podemos usar nenhum teorema para determinar o limite que pretendemos. Neste caso dizemos que estamos em presença de uma **indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$** .

Que fazer então? Um processo muito expedito é **colocar em evidência no numerador e no denominador a menor potência de  $x$** , pois depois podemos fazer uma simplificação algébrica. No nosso caso a menor potência de  $x$  será  $x$  e então vem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x(x^2+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2+2} = \frac{-2}{2} = -1$$

## EXERCÍCIOS

10. Mostra que os limites seguintes são indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$  e encontra um modo de determinar esses limites.

10.1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{x^3 + 2x}$

10.3  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2012x}{x^4 - 2x}$

10.2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x}{4x^3 + 2x}$

10.4  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 2x^4 + 2x}{2x^6 + x^3}$

Outra situação complicada tem a ver com a **indeterminação do tipo  $\infty - \infty$** . Por exemplo, como

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x+1} = +\infty$ , não temos nenhum teorema que nos permita calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-2} - \frac{x^3}{x+1} \right)$$

Mas nestes casos mais simples basta **efetuar os cálculos algébricos** para desfazer a indeterminação. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-2} - \frac{x^3}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(x+1)x^2}{(x+1)(x-2)} - \frac{(x-2)x^3}{(x-2)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)x^2 - (x-2)x^3}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 3x^3 + x^2}{(x+1)(x-2)} = -\infty \end{aligned}$$

Esta indeterminação pode ainda surgir no contexto de um limite com raízes, como a de

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{1-x} - \sqrt{2-x} \right)$$

visto que neste caso  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$ . Para simplificar a expressão com raízes

quadradas vamos multiplicar e dividir pela mesma quantidade, a soma das duas raízes (dita “soma conjugada” por mudar apenas o sinal de ligação). Temos então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} - \sqrt{2-x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{2-x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x})}{\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1-x})^2 - (\sqrt{2-x})^2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x) - (2-x)}{\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}} = 0 \end{aligned}$$

Multiplicar e dividir por  $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}$  permitiu-nos aplicar no numerador da fracção obtida um dos **casos notáveis da multiplicação**:  $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ . A conclusão final depois era fácil se pensarmos na definição de limite de função segundo Heine e nos teoremas de infinitamente grandes.

Temos ainda outra situação complicada: a **indeterminação do tipo**  $0 \times \infty$ . Podemos querer calcular limites como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x2^x$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$  não podemos recorrer a nenhum teorema sobre limites. Aqui **temos**

**de recorrer ao limite notável** seguinte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$$

que foi estudado no capítulo da função exponencial. Para usarmos este limite notável temos ainda de mudar a variável no limite dado, fazendo  $x = -y$ . Como  $x \rightarrow -\infty$  só poderá ser  $y \rightarrow +\infty$  e então vem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x2^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y)2^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{2^y} = 0$$

## Limites Notáveis

Os limites notáveis que nos poderão ser úteis no contexto das indeterminações são os seguintes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$$

onde  $a$  é um número real superior a 1 e  $p$  é um número real positivo.

## EXERCÍCIOS

11. Calcula

$$11.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$$

$$11.2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}}{x}$$

12. Calcula

$$12.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}$$

$$12.4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4x)}{x}$$

$$12.7 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_3 x}{x-1}$$

$$12.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$$

$$12.5 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-4x)}{x}$$

$$12.8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x^{12}}$$

$$12.3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$12.6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

## Assíntotas

Já vimos, quando estudámos as funções racionais, que uma função racional definida por

$$f(x) = b + \frac{c}{dx + p}$$

se aproxima tanto quanto se quiser da reta horizontal  $y = b$  quando  $x$  tende para  $+\infty$  ou tende para  $-\infty$ . Vimos que uma reta dessas se chama **assíntota horizontal do gráfico da função  $f$** . A reta

vertical  $x = -\frac{p}{d}$  também é uma assíntota do gráfico da função  $f$  porque, quando  $x$  tende para  $-p/d$

(à esquerda ou à direita) o gráfico da função se aproxima tanto quanto se quiser da reta vertical de

equação  $x = -\frac{p}{d}$ . Recordemos as definições.

Uma reta de equação  $y = b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , diz-se uma **assíntota horizontal**

do gráfico de uma função  $f$  se e somente se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

Uma reta de equação  $x = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , diz-se uma **assíntota vertical** do

gráfico de uma função  $f$  se e somente se  $\lim_{x \rightarrow k+} |f(x)| = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow k-} |f(x)| = +\infty$ .

Podemos alargar o conceito de assíntota para as funções racionais definidas por

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{dx + p}$$

porque o gráfico de uma tal função se aproxima tanto quanto se quiser da reta  $y = ax + b$  quando  $x$  tende para  $+\infty$  ou tende para  $-\infty$ . Com efeito,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{dx + p} = 0$$

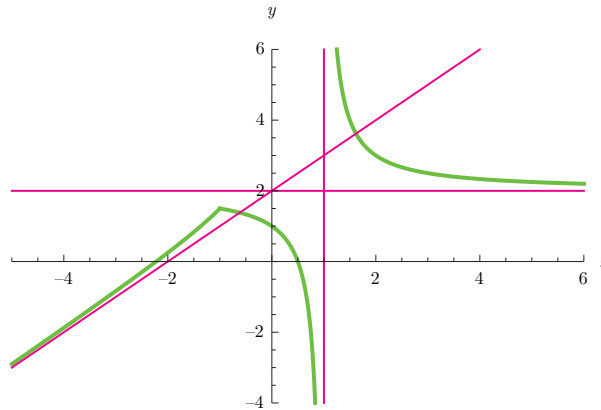
Tem então sentido dizer que a reta é uma **assíntota do gráfico da função**  $f$ . Com esta abordagem podemos generalizar a ideia de assíntotas para uma função qualquer.

Uma reta de equação  $y = ax + b$  é uma **assíntota do gráfico da função**

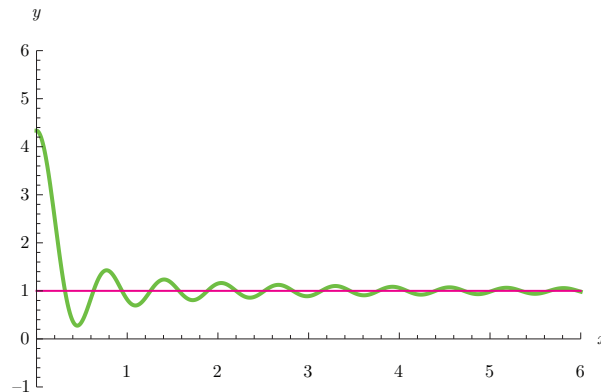
$f$  se e só se tivermos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

ou tivermos  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

A função  $f$ , cujo gráfico é representado na figura seguinte, exhibe três assíntotas:  $y = x + 2$ ,  $x = 1$  e  $y = 2$ .



Observe-se que a assíntota pode interseçar (um número finito ou infinito de vezes) o gráfico da função. No gráfico seguinte tal situação é visível.



Já sabemos como determinar as assíntotas horizontais e verticais. Como determinar todas as assíntotas? O método já conhecido para assíntotas verticais é o melhor (identificar pontos do domínio da função, ou fora do domínio, perto dos quais a função possa tomar valores arbitrariamente

grandes em módulo). E para as assíntotas não verticais? Vejamos. Por definição de assíntota, a reta  $y = ax + b$  será uma assíntota (não vertical) do gráfico da função  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$  se tivermos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Mas se este limite é zero, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

também será, pelo teorema 1b),  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0$

Então, efetuando cálculos,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0$  e como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$  de novo pelo teorema 1b) vem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a \right) = 0$$

Esta é então a condição para determinar o valor de  $a$ , que (ainda pelo teorema 1b) se adicionarmos com a função constante igual a  $a$ ) também pode ser escrita de forma equivalente como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

Retomemos a condição de definição de assíntota  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ .

Reagrupemos os termos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((f(x) - ax) - b) = 0$ .

Novamente pelo teorema 1b), adicionando com a função constante igual a  $b$ , vem  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$

Podemos repetir este mesmo raciocínio quando  $x \rightarrow -\infty$ , podendo assim obter uma nova assíntota. Acabámos então de provar o seguinte teorema:

*Teorema 3* – O gráfico de uma função  $f$  admite a assíntota não vertical  $y = ax + b$  se e somente se existirem dois números reais  $a$  e  $b$  tais que  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  e  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$   
ou então  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  e  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$

Claro que pode aparecer  $a = 0$  e então obtemos uma assíntota horizontal  $y = b$ . Por isso não vale a pena ter um método em separado para assíntotas horizontais a não ser que nos interessem apenas estas.



## EXERCÍCIOS

13. Considera as funções racionais definidas por  $f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$  e  $g(x) = \frac{3x}{x - 1}$ .
- 13.1 Determina o domínio de  $f$  e de  $g$ .
- 13.2 Calcula, se existir,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .
- 13.3 O gráfico da função  $f$  tem assíntotas verticais? E o da função  $g$ ?
14. Procura as assíntotas oblíquas dos gráficos das funções racionais definidas por
- 14.1  $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x - 2}$
- 14.2  $g(x) = x - 2 + \frac{3x}{x^2 - 1}$
- 14.3  $h(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{2x^2 + 1}$

## Continuidade

Já encontramos funções contínuas em anos anteriores. Vamos agora definir de forma rigorosa o que é uma função contínua, usando a noção de limite de uma função. De acordo com o dicionário, o que é contínuo é “aquilo que não tem intervalos, interrupções ou lacunas.” Com a noção de limite de função podemos dar um sentido preciso a esta ideia.

Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto  $a$  (ou num intervalo fechado com extremidade no ponto  $a$ ). Dizemos que a função  $f$  é contínua no ponto  $x = a$  se e somente se

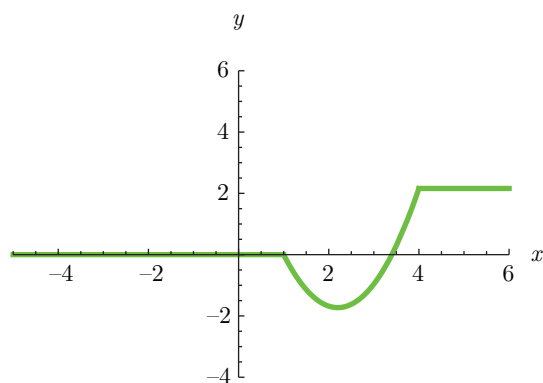
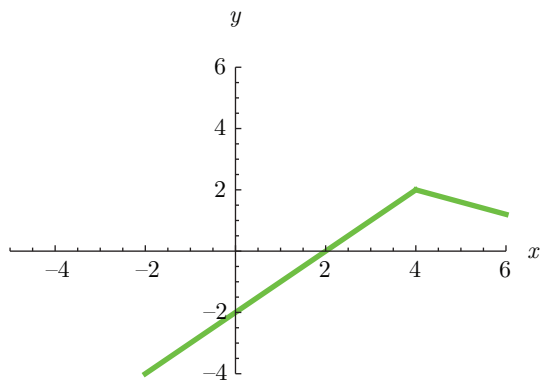
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Podemos ainda exprimir esta ideia de outro modo: Dizemos que a função  $f$  é contínua no ponto  $x = a$  se e somente se:

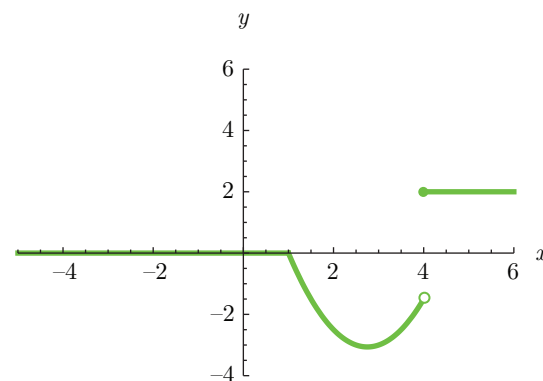
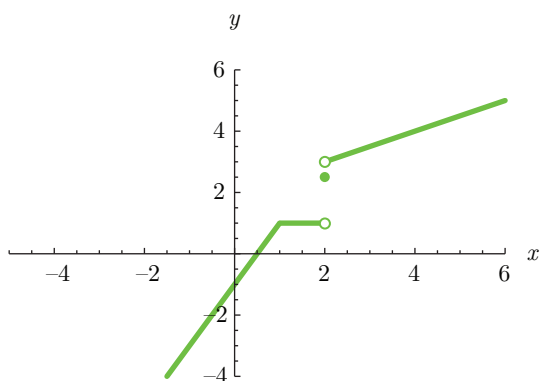
- a) Existe  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ;
- b) Tem-se que  $L = f(a)$ .

Num ponto do domínio em que  $f$  não seja contínua, diz-se que é **descontínua** nesse ponto (não se consideram nesta discussão os pontos que não pertencem ao domínio).

Usando esta definição é fácil concluir que as duas funções seguintes são contínuas em todos os pontos do seu domínio.



E a mesma definição nos ajuda a concluir que as duas funções seguintes são descontínuas nos pontos  $x = 2$  e  $x = 4$ , respectivamente, e contínuas em todos os outros pontos do seu domínio.



Neste segundo exemplo, se a função estivesse definida apenas no intervalo  $[4, +\infty[$ , diríamos que a função era contínua em todos os pontos do seu domínio? De acordo com a definição de continuidade que demos a resposta é sim, se realmente o domínio da função for apenas o intervalo  $[4, +\infty[$ . Vamos então estabelecer uma caracterização para estas situações.

**Continuidade lateral** – Diremos que **uma função  $f$  é contínua à direita**

**num ponto  $x = a$**  do seu domínio se e só se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Diremos que **uma função  $f$  é contínua à esquerda num ponto  $x = a$**

do seu domínio se e somente se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Claro que se uma função é simultaneamente contínua à direita e à esquerda num mesmo ponto  $x = a$  então é contínua em  $x = a$ .

Depois de definir a continuidade de uma função num ponto vamos ver como se define continuidade num intervalo. Claro que teremos de distinguir os intervalos fechados dos intervalos abertos.

*Continuidade num intervalo* – Diremos que uma função  $f$  é **contínua no intervalo aberto**  $]a,b[$  se  $f$  for contínua em todos os pontos desse intervalo. Diremos que  $f$  é **contínua no intervalo**  $[a,b[$  se  $f$  for contínua em todos os pontos do intervalo aberto  $]a,b[$  e for contínua à direita no ponto  $x = a$ . Diremos que  $f$  é **contínua no intervalo**  $]a,b]$  se  $f$  for contínua em todos os pontos do intervalo aberto  $]a,b[$  e for contínua à esquerda no ponto  $x = b$ . Diremos que  $f$  é **contínua no intervalo fechado**  $[a,b]$  se  $f$  for contínua em todos os pontos do intervalo aberto  $]a,b[$ , for contínua à direita no ponto  $x = a$  e for contínua à esquerda no ponto  $x = b$ .

Como consideramos apenas funções definidas em intervalos ou uniões de intervalos abertos ou fechados, tem sentido dar agora uma definição de continuidade de função.

*Função contínua* – Uma função diz-se **contínua** se for contínua em todos os intervalos que constituem o seu domínio.

É costume também designar esta propriedade como: “**Uma função diz-se contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio**”. Mas então é preciso ter cuidado em traduzir essa ideia, verificando se os pontos do domínio são extremidades de intervalos ou não, caso em que teremos de usar a continuidade à direita ou a continuidade à esquerda.

Para facilitar o estudo da continuidade das funções é conveniente ter alguma lista de funções que já sabemos serem contínuas. Anteriormente já vimos:

- a) Funções polinomiais
- b) Função módulo
- c) Funções racionais em intervalos que não incluam os zeros do denominador
- d) Função exponencial
- e) Função logarítmica

Além deste conhecimento convém conhecer propriedades que permitam obter outras funções contínuas. Como a noção de continuidade depende da noção de limite podemos utilizar as propriedades dos limites de funções do Teorema 1 para obter as propriedades para as funções contínuas.

*Teorema 4 – Operações com funções contínuas* – Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas num mesmo intervalo. Então, são contínuas nesse mesmo intervalo as seguintes funções:

- a)  $af + bg$ , sendo  $a$  e  $b$  números reais
- b)  $fg$
- c)  $\frac{f}{g}$ , exceto nos pontos onde a função  $g$  se anula
- d)  $f^n$ , sendo  $n$  um número inteiro positivo
- e)  $\sqrt[n]{f}$ , sendo  $n$  um número inteiro positivo ímpar
- f)  $\sqrt[n]{f}$ , se  $f$  for positiva ou nula, sendo  $n$  um número inteiro positivo par



## TAREFA RESOLVIDA 4

---

Estuda a continuidade da função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{se } x < 2 \\ 2 & \text{se } x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

## RESOLUÇÃO

---

Temos de considerar separadamente os seguintes casos:

- a)  $]-\infty, 2]$
- b)  $[2, +\infty[$

Para isso precisamos de analisar separadamente o que se passa nos intervalos  $]-\infty, 2[$  e  $]2, +\infty[$  e no ponto  $x = 2$ . No intervalo  $]-\infty, 2[$  podemos utilizar o Teorema 4 para concluir que a função  $f$  é contínua porque é uma função polinomial nesse intervalo. Para vermos o que acontece no intervalo  $]2, +\infty[$  precisamos de ver quais são os pontos que anulam o denominador da fracção racional. Como

$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$  concluímos que os zeros do denominador estão fora do intervalo  $]2, +\infty[$  pelo que a função  $f$  também é contínua no intervalo  $]2, +\infty[$ . Falta agora ver o que se passa no ponto 2, à direita e à esquerda. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 4) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{x - 1} = 4$$

Assim,  $f$  será contínua à esquerda no ponto  $x = 2$  mas não será contínua à direita nesse mesmo ponto. Em conclusão, de acordo com a definição de continuidade num intervalo,  $f$  é contínua em  $]-\infty, 2]$  e em  $]2, +\infty[$ , mas não é contínua em  $[2, +\infty[$ .

## A NÃO ESQUECER

Para estudar a continuidade de uma função dada por vários ramos terá sempre que se estudar o que se passa à esquerda e à direita dos pontos onde varia a expressão que define a função.

## EXERCÍCIOS

15. Prova que é contínua no ponto  $x = 0$  função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

16. Verifica que é descontínua no ponto  $x = 0$  a função real de variável real assim definida

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

17. Considera a função real de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 7 - \frac{3}{5}x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- 17.1 Verifica que  $h$  é descontínua no ponto 0.

- 17.2 Que poderás dizer sobre a continuidade lateral da função  $h$ ?

## Teorema de Bolzano-Cauchy

As funções contínuas têm propriedades muito interessantes e profundas. Uma delas vai-nos permitir garantir que uma função tem zeros mesmo quando não os conseguimos determinar explicitamente.

Suponhamos por exemplo que fizemos duas observações do percurso de um automóvel e que o vimos antes de ele chegar a determinada rotunda e que pouco depois o vimos após a rotunda.

Como o movimento de um automóvel é contínuo e não se faz aos saltos, podemos concluir que entre os dois instantes o automóvel esteve na rotunda. O Teorema seguinte estabelece este princípio de forma rigorosa.

*Teorema 5 – Bolzano-Cauchy (ou dos valores intermédios) – Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  e seja  $k$  um valor intermédio entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Então existe (pelo menos) um ponto  $c$  do intervalo  $]a, b[$  onde se tem que  $f(c) = k$*

Dito de outro modo: Uma função contínua assume todos os valores intermédios entre dois pontos dados. Esta é uma propriedade muito forte das funções contínuas e pode ainda ser tornada mais prática com os seguintes Corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy.

### Teorema 6 – Corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy

- I. Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  e suponhamos que  $f(a)$  e  $f(b)$  têm sinais contrários. Então a função  $f$  tem (pelo menos) um zero no intervalo  $]a, b[$ .
- II. Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  e suponhamos que  $f(a) \times f(b) < 0$ . Então a função  $f$  tem (pelo menos) um zero no intervalo  $]a, b[$ .

TR

## TAREFA RESOLVIDA 5

Suponhamos que a temperatura  $T$ , expressa em graus Celsius, em determinado Parque Natural, é dada por meio da expressão

$$T(x) = -7x2^{-0,1x} + 3x + 1$$

em função das horas expressas pela variável  $x$ .

Usando a função definida pela expressão dada e considerando o domínio  $[0, 18]$  responde às seguintes questões:

- c) Calcula  $T(0)$  e  $T(18)$  e tenta aplicar um corolário do teorema de Bolzano-Cauchy para concluir que a função  $T$  se anula no intervalo  $[0, 18]$ . Explica a tua conclusão.
- d) Calcula  $T(8)$ . Já podes aplicar um corolário do teorema de Bolzano-Cauchy para concluir que a função  $T$  se anula no intervalo  $[0, 18]$ ? Explica a tua conclusão.
- e) Calcula  $T(16)$ . Prova que a temperatura atingiu os 10 graus Celsius durante algum momento do dia.



Lower Falls, Ball's Falls por elPadawan, <http://www.flickr.com/photos/elpadawan/2694103185>

## RESOLUÇÃO

A função definida por  $T(x)$  é uma função contínua em toda a reta real por ser o produto de duas funções contínuas (uma função polinomial e uma função exponencial) a que se adiciona outra função contínua (um polinómio).

- a) É fácil ver que  $T(0) = 1$ . Usando uma calculadora obtemos aproximadamente, com 2 casas decimais,  $T(18) = 18,82$ . Assim, como estes valores da função  $T$  são ambos positivos, não podemos aplicar nenhum Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy. A função  $T$  pode anular-se ou não, mas sabendo apenas estes dois valores nada podemos concluir.
- b) Usando uma calculadora obtemos aproximadamente, com 2 casas decimais,  $T(8) = -7,16$ . Como  $T(8) = -7,16 < 0$  e  $T(18) = 18,82 > 0$  concluímos, pelos corolários do Teorema de Bolzano-

-Cauchy, que existe um ponto do intervalo  $]8,18[$  onde a função  $T$  se anula. Curiosamente, como  $T(0) = 1 > 0$  e  $T(8) = -7,16 < 0$  também podemos concluir que a função  $T$  se anula no intervalo  $]0,8[$ . Só nos era pedido para encontrar um zero da função  $T$ , pelo que ambas as resoluções são aceitáveis.

- c) Usando uma calculadora obtemos aproximadamente, com 2 casas decimais,  $T(16) = 12,05$ . Como  $T(8) = -7,16 < 10 < T(16) = 18,82$  concluímos, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que em determinado momento entre as 8h e as 16h a temperatura foi de 10 graus Celsius.

O teorema de Bolzano-Cauchy permite obter métodos numéricos muito expeditos para resolver equações que de outro modo não se conseguem resolver. Por exemplo, não há métodos simples para resolver equações como

$$x + 1 = \ln(x^2 + 6) \quad \text{ou} \quad x^5 - 4x + 2 = 0$$

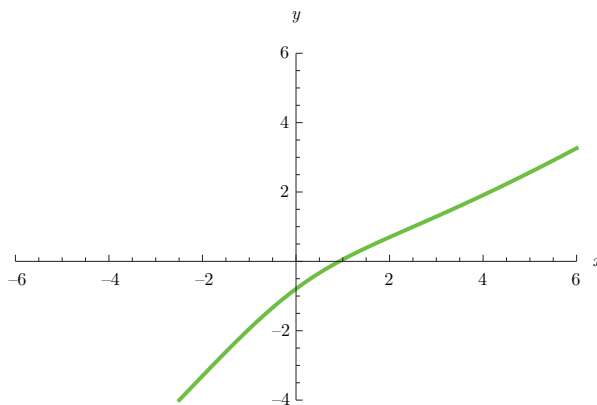
Existem dois métodos que permitem obter soluções aproximadas de qualquer tipo de equações que se reduzam à forma  $f(x) = 0$ . Como proceder?

### 1.º método – Método da bissecção

Seja dada uma equação da forma  $f(x) = 0$  num intervalo  $[a, b]$  tal que  $f(a) \times f(b) < 0$  e tal que  $f$  é uma função contínua. Partimos do intervalo dado e dividimos o intervalo ao meio (bissectamos). Calculamos o valor da função  $f$  nas extremidades do intervalo e no ponto médio; em seguida comparamos o sinal dos 3 valores obtidos e aplicamos os corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy a um dos dois intervalos obtidos. Repetimos o método com este novo intervalo até atingirmos a precisão pretendida.

Vejamos como aplicar este método na primeira equação  $x + 1 = \ln(x^2 + 6)$ . Primeiro colocamo-la na forma  $f(x) = 0$ . Temos que a equação dada é equivalente a  $x + 1 - \ln(x^2 + 6) = 0$

Agora procuremos um intervalo  $[a, b]$  onde  $f(a) \times f(b) < 0$ . Para tal tracemos um gráfico da função  $f$ .



Do gráfico rapidamente concluímos que o intervalo  $[0, 2]$  é adequado. Efetuando os cálculos obtemos:  $f(0) = -0,792\dots$  e  $f(2) = 0,697\dots$ . Agora calculemos o valor de  $f$  no ponto médio deste intervalo. Temos  $f(1) = 0,054\dots$ . Então, pelos corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy podemos concluir

que a função  $f$  tem um zero no intervalo  $[0,1]$ . Dividamos agora este intervalo ao meio. Temos  $f(0,5) = -0,333\dots$ . Então, pelos corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy podemos concluir que a função  $f$  tem um zero no intervalo  $[0,5 ; 1]$ . Dividamos novamente este intervalo ao meio. Temos  $f(0,75) = -0,131\dots$ . Então podemos concluir que a função  $f$  tem um zero no intervalo  $[0,75 ; 1]$ . Dividindo o intervalo ao meio:  $f(0,875) = -0,037\dots$ . A função tem um zero no intervalo  $[0,875 ; 1]$ . Façamos uma tabela para prosseguir:

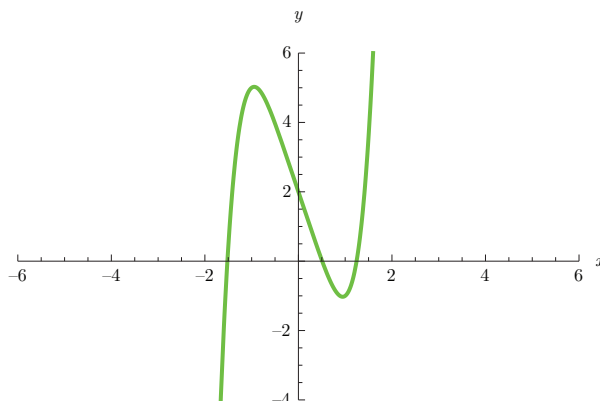
Intervalo	Ponto médio	Valor da função no ponto médio
$[0,875 ; 1]$	0,9375	0,009...
$[0,875 ; 0,9375]$	0,90625	-0,0138...
$[0,90625 ; 0,9375]$	0,921875	-0,002...
$[0,921875 ; 0,9375]$	0,9296875	0,003...
$[0,921875 ; 0,9296875]$	0,92578125	0,0005...

Poderemos continuar do mesmo modo como quisermos, mas neste momento já podemos dizer que o zero pretendido é aproximadamente 0,925.

## 2.º método – Método da 10-secção

Este método é idêntico ao anterior mas em vez de calcularmos o valor da função no ponto médio do intervalo, dividimos o intervalo original em 10 subintervalos e determinamos o valor da função em cada um dos pontos divisórios.

Vejamos o que acontece para a segunda equação  $x^5 - 4x + 2 = 0$ . Traçando o gráfico da nova função  $f$ , obtemos



Observamos que no intervalo  $[0,1]$  existe um zero. Dividindo em 10 subintervalos e calculando o valor de  $f$  em cada ponto obtido, resulta a seguinte tabela:

ponto	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
valor	2	1,6	1,2	0,802	0,41	0,031	-0,322	-0,632	-0,872	-1,01	-1

Pelos corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy podemos concluir que a função  $f$  tem um zero no



intervalo  $[0,5 ; 0,6]$ . Agora dividimos este intervalo em 10 subintervalos.

ponto	0,5	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,6
valor	0,031	-0,005	-0,042	-0,078	-0,114	-0,15	-0,185	-0,22	-0,254	-0,289	-0,322

Pelos corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy podemos concluir que a função  $f$  tem um zero no intervalo  $[0,5 ; 0,51]$ . Neste momento já podemos dizer que a função  $f$  tem um zero aproximadamente igual a 0,5.

## EXERCÍCIOS

18. Determina, aproximadamente, uma raiz da equação  $x^2 - 5 = 2^{x-1}$ , uma inteira e uma não inteira com aproximação às centésimas.
19. Determina, aproximado às centésimas, um zero da função definida por  $f(x) = x - \log(x + 2)$

## Platonismo, formalismo e construtivismo

Se se fizer matemática todos os dias, ela parecerá a coisa mais natural do mundo. Se se parar para pensar sobre o que está a fazer-se e qual o seu significado, ela parecerá uma das coisas mais misteriosas. Como é que conseguimos falar de coisas que nunca ninguém viu e percebê-las melhor do que os objetos reais do dia a dia? Por que razão a geometria euclidiana ainda é correta, quando a física aristotélica já morreu há muito? O que sabemos em matemática e como o sabemos?

Em discussões sobre fundamentos da matemática são apresentados três pontos de vista: platonismo, formalismo e construtivismo.

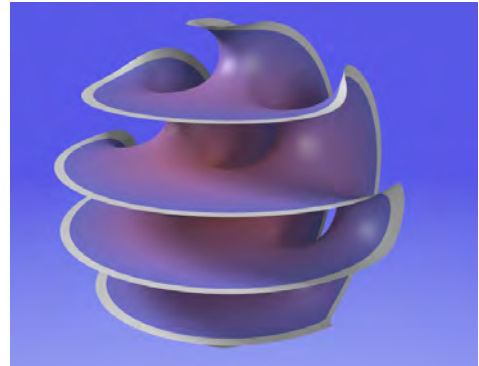
De acordo com o platonismo, os objetos matemáticos são reais. A sua existência é um fato objetivo, independente do nosso conhecimento sobre esses objetos. Conjuntos infinitos, superfícies de dimensão infinita, curvas que preenchem o espaço - todos os membros do jardim zoológico matemático são objetos definidos, com propriedades definidas, algumas conhecidas, muitas desconhecidas. Estes objetos não são físicos ou materiais, existem fora do espaço e do tempo. São imutáveis - não foram criados e não se alterarão ou desaparecerão. Qualquer pergunta com significado acerca de um objecto matemático tem uma resposta definida, quer consigamos determiná-la, quer não. De acordo com o platonismo, um matemático é um cientista empírico, como um geólogo: não pode inventar nada, porque já existe tudo. Ele só pode descobrir.

De acordo com o formalismo, não há nenhum objecto matemático. A matemática consiste apenas em axiomas, definições e teoremas - por outras palavras, em fórmulas. Numa visão extrema: existem regras através das quais se obtêm fórmulas a partir de outras, mas as fórmulas não são acerca de nada, apenas cadeias de símbolos. É claro que o formalista também sabe que as fórmulas matemáticas são por vezes aplicadas a problemas físicos. Quando se dá uma interpretação física a uma fórmula, esta adquire um significado e pode ser verdadeira ou falsa. Mas enquanto fórmula matemática pura, não tem qualquer significado nem qualquer valor de veracidade.

Para o formalista, pelo contrário, a interpretação platonista não tem sentido, porque não existe nenhum sistema de números reais, excepto como o criamos, utilizando axiomas para o descrevermos. É evidente que podemos mudar este sistema de axiomas, se o desejarmos. Tal mudança pode ser por conveniência, utilidade ou outro critério; não pode ser uma questão de melhor correspondência com a realidade, pois não existe realidade.

Formalistas e platonistas estão em lados opostos na questão da existência e da realidade, mas não divergem sobre os princípios de raciocínio que devem ser permissíveis na prática matemática. Opostos a ambos estão os construtivistas. Os construtivistas consideram matemática genuína apenas o que pode ser obtido por uma construção finita. O conjunto dos números reais, ou qualquer outro conjunto infinito, não pode ser obtido daquela maneira.

Adaptado de “A experiência matemática” de Philip J. Davis e Reuben Hersh, Gradiva, 1995.



## SÍNTESE

### O essencial passado em revista

Diremos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , ou que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  é  $L$ , se e somente se para qualquer sucessão  $(u_n)$  de termos no domínio de  $f$ , diferentes de  $a$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , se tenha que a sucessão  $(f(u_n))$  tende para  $L$ :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$

### Teorema da unicidade do limite

Se uma função tem limite num ponto então esse limite é único.

### Teorema 1

a) O limite de uma função constante é a própria constante, isto é, se  $L$  for um número real

$$\lim_{x \rightarrow a} L = L$$

b) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , com  $L$  e  $M$  números reais, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M \qquad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = L \times M$$

c) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , com  $L$  número real, e sendo  $k$  outro número real, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = kL$$

d) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , com  $L$  e  $M$  números reais e  $M \neq 0$ , e com  $g(x) \neq 0$  num intervalo aberto contendo  $a$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g(x)} \right) = \frac{1}{M} \qquad \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M}$$

e) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $p$  um número natural, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^p = L^p$

f) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e sendo  $p$  um número natural ímpar, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{L}$

- g) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  com  $f(x) \geq 0$  num intervalo aberto contendo  $a$  e sendo  $p$  um número natural par, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{L}$

### Teorema 1\* - versão para limites infinitos

- a) O limite de uma função constante é a própria constante, isto é, se  $L$  for um número real

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} L = L$$

- b) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = +\infty$$

- c) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , e sendo  $k$  um número real negativo, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = +\infty$

- d) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , com  $L$  número real, e com  $g(x) \neq 0$  num intervalo aberto contendo  $a$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g(x)} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$$

- e) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  e  $p$  um número natural, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^p = +\infty$

- f) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  e sendo  $p$  um número natural ímpar, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = -\infty$

- g) Sendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  com  $f(x) \geq 0$  num intervalo aberto contendo  $a$  e sendo  $p$  um número

natural par, temos que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = +\infty$

### Limite Lateral Direito

Diz-se que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  se e somente se para qualquer sucessão  $(u_n)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  e tal que os termos da sucessão  $(u_n)$  sejam superiores a  $a$  se tenha que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$

### Limite Lateral Esquerdo

Diz-se que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$  se e somente se para qualquer sucessão  $(u_n)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  e tal

que os termos da sucessão  $(u_n)$  sejam inferiores a  $a$  se tenha que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$

## Teorema 2

Temos que o limite de uma função  $f$  quando a variável independente tende para  $a$  é  $L$ , se e somente os limites laterais esquerdo e direito de  $f$  no ponto  $a$  são ambos iguais a  $L$ .

## Indeterminações

**indeterminação do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$** : Num quociente de polinómios deve-se colocar em evidência no numerador e no denominador a maior potência de  $x$ .

**indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$** : Num quociente de polinómios deve-se colocar em evidência no numerador e no denominador a menor potência de  $x$ .

**indeterminação do tipo  $\infty - \infty$** : Numa diferença de polinómios basta efetuar os cálculos algébricos. Numa diferença de raízes basta multiplicar e dividir pela mesma quantidade, a soma das duas raízes (dita “soma conjugada”).

**indeterminação do tipo  $0 \times \infty$** : recorrer a um limite notável.

## Limites Notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$$

onde  $a$  é um número real superior a 1 e  $p$  é um número real positivo.

## Assíntotas

Uma reta de equação  $y = b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , diz-se uma **assíntota horizontal** do gráfico de uma função  $f$  se e somente se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ .

Uma reta de equação  $x = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , diz-se uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função  $f$  se e somente se  $\lim_{x \rightarrow k^+} |f(x)| = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow k^-} |f(x)| = +\infty$ .

Uma reta de equação  $y = ax + b$  é uma **assíntota do gráfico da função  $f$**  se e somente se tivermos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  ou tivermos  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ .

### Teorema 3

O gráfico de uma função  $f$  admite a assíntota não vertical se e somente se existirem dois números reais  $a$  e  $b$  tais que

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

ou então  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  e  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$

### Função contínua num ponto

Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto  $a$  (ou num intervalo fechado com extremidade no ponto  $a$ ). Dizemos que a **função  $f$  é contínua no ponto  $x = a$**  se e somente se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

### Continuidade lateral

Diremos que **uma função  $f$  é contínua à direita num ponto  $x = a$**  do seu domínio se e somente se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

Diremos que **uma função  $f$  é contínua à esquerda num ponto  $x = a$**  do seu domínio se e somente se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

### Continuidade num intervalo

Diremos que uma função  $f$  é **contínua no intervalo aberto  $]a, b[$**  se  $f$  for contínua em todos os pontos desse intervalo. Diremos que  $f$  é **contínua no intervalo fechado  $[a, b]$**  se  $f$  for contínua em todos os pontos do intervalo aberto  $]a, b[$ , for contínua à direita no ponto  $x = a$  e for contínua à esquerda no ponto  $x = b$ .

### Função contínua (no seu domínio)

Uma função diz-se **contínua** se for contínua em todos os intervalos que constituem o seu domínio.

### Lista de algumas funções contínuas

- a) Funções polinomiais
- b) Função módulo
- c) Funções racionais em intervalos que não incluam os zeros do denominador
- d) Função exponencial
- e) Função logarítmica

### **Teorema 4 – Operações com funções contínuas**

Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas num mesmo intervalo. Então, são contínuas nesse mesmo intervalo as seguintes funções:

a)  $af + bg$ , sendo  $a$  e  $b$  números reais

b)  $fg$

c)  $\frac{f}{g}$ , exceto nos pontos onde a função  $g$  se anula

d)  $f^n$ , sendo  $n$  um número inteiro positivo

e)  $\sqrt[n]{f}$ , sendo  $n$  um número inteiro positivo ímpar

f)  $\sqrt[n]{f}$ , se  $f$  for positiva ou nula, sendo  $n$  um número inteiro positivo par

### **Teorema 5 – Bolzano-Cauchy (ou dos valores intermédios)**

Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  e seja  $k$  um valor intermédio entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Então existe (pelo menos) um ponto  $c$  do intervalo  $]a, b[$  onde se tem que

$$f(c) = k$$

### **Teorema 6 – Corolários do Teorema de Bolzano-Cauchy**

I. Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  e suponhamos que  $f(a)$  e  $f(b)$  têm sinais contrários. Então a função  $f$  tem (pelo menos) um zero no intervalo  $]a, b[$ .

II. Seja  $f$  uma função contínua num intervalo fechado  $[a, b]$  e suponhamos que  $f(a) \times f(b) < 0$ . Então a função  $f$  tem (pelo menos) um zero no intervalo  $]a, b[$ .

## Exercícios globais

### Prática ↑

1. Considera as sucessões de termo geral

$$u_n = -3 + \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{e} \quad v_n = -3 - \frac{2}{n^2}$$

- 1.1 Determina os cinco primeiros termos de cada uma das sucessões.

- 1.2 Calcula  $\lim u_n$  e  $\lim v_n$ .

2. Verifica que  $u_n = -3 + \frac{(-1)^n}{n}$  tende para  $-3$  por valores alternadamente superiores e inferiores a  $-3$ .

3. Considera a função  $h$ , definida por,  $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  duas sucessões tais que:

$$a_n = 1 + \frac{3}{n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{n-2}{n}$$

- 3.1 Mostra que:

$$3.1.1 \quad h(a_n) = \frac{2n}{n+3}$$

$$3.1.2 \quad h(b_n) = 3 - \frac{2}{n}$$

- 3.2 Determina

$$3.2.1 \quad \lim h(a_n)$$

$$3.2.2 \quad \lim h(b_n)$$

4. Considera as funções  $f$  e  $g$ , tais que:

$$f(x) = -3x \quad \text{e} \quad g(x) = 3x - 2$$

Calcula:

$$4.1 \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$4.3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} [f(x)]^2$$

$$4.2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

$$4.4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)]^3$$



4.5  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^8$

5. Considera duas funções tais que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

Calcula:

5.1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x)$

5.4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x))^3$

5.2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x)$

5.5  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f}{g} \right)(x)$

5.3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{g} \right)(x)$

6. Calcula:

6.1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^4 - 5x^3 + 2x)$

6.3  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^8 - 6x^2 + 5)$

6.2  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x - 4x^3 + 2)$

6.4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5 + 5x^6 - 3x^8)$

7. Considera a função  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ .

7.1 Determina o domínio de  $f$ .

7.2 Averigua a existência de assíntotas horizontais ou verticais ao gráfico de  $f$ .

8. Prova que a reta de equação  $y = 3x - 2$  é assíntota do gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x - 5}$ .

9. A função real de variável real  $g$  está definida por:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} - 3 & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ 3 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

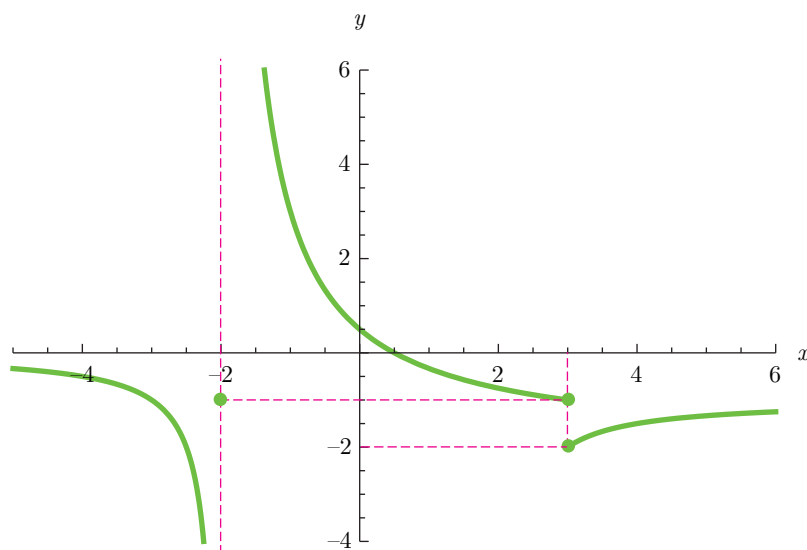
9.1 Prova que  $g$  é descontínua para  $x = -1$  e para  $x = 1$ .

9.2 Estuda a continuidade de  $g$ .

10. Prova que a função polinomial  $g$  definida por  $g(x) = \frac{1}{3}x^6 - 8x + 4$  tem um zero no intervalo  $]1, 2[$ .

## Pensa e Resolve ↑↑

11. Seja  $g$  a função representada graficamente na figura



Calcula  $\lim g(u_n)$ , sabendo que

11.1  $u_n = -2 - \frac{1}{n}$

11.3  $u_n = \frac{6n + \pi}{2n}$

11.2  $u_n = \frac{1 - 2n^2}{n^2}$

11.4  $u_n = 3 - \frac{1}{n}$

12. Prova, recorrendo à definição de limite segundo Heine, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x-2} = 0$ .

13. Recorrendo à definição de Heine, prova que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{2}{5x-4} \right) = 3$ .

14. Considera a função

$$t : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2 + 4}{3 - x}$$

14.1 Calcula

14.1.1  $\lim_{x \rightarrow 3^+} t(x)$

**14.1.2**  $\lim_{x \rightarrow 3^-} t(x)$

**14.2** Existe  $\lim_{x \rightarrow 3} t(x)$ ? Porquê?

**15.** Calcula, se existirem, os seguintes limites:

**15.1**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{3 - x}$

**15.3**  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 2x - 3}$

**15.2**  $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{(t+1)^2}{t^2 - 1}$

**15.4**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

**16.** Calcula:

**16.1**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$

**16.2**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{5x - 6}}{x - 2}$

**16.3**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

**17.** Calcula:

**17.1**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ (x + 2) \cdot \frac{1}{x^2 + x - 2} \right]$

**17.3**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (7 - x)^2 \cdot \frac{3x^4}{2x + 3x^5} \right]$

**17.2**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (5 + x)^2 \cdot \frac{5}{x^5 - 3x^3} \right]$

**18.** Investiga a existência de assíntotas não verticais ao gráfico da função  $f(x) = 2x + 3^x$ .

**19.** Estuda a continuidade das funções reais de variável real definidas por:

**19.1**  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^4 - 3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

**19.2**  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & \text{se } x < -2 \\ 0 & \text{se } x = -2 \\ 3 & \text{se } x > -2 \end{cases}$

20. Recorrendo ao Teorema de Bolzano–Cauchy prova que a equação  $e^x = x^2$  tem, pelo menos, uma solução no intervalo  $] -2, 2[$ . Determina um valor aproximado às centésimas da solução da equação.

### Reflete ↑ ↑ ↑

21. Seja  $h$  uma função definida em  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Sabe-se que } \lim_{x \rightarrow 0} h\left(\frac{1}{n}\right) = 3, n \in \mathbb{N}.$$

Poderemos concluir que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$ ? Porquê?

22. Considera a função  $h$  tal que  $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{|1-x|}{x-1}$$

e sejam  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$  e  $v_n = 1 + \frac{1}{n}$  com  $n \in \mathbb{N}$ .

22.1 Calcula  $\lim h(u_n)$  e  $\lim h(v_n)$ .

22.2 Existe  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ ? Porquê?

22.3 Esboça o gráfico de  $h$  e confirma os resultados obtidos na alínea 1.

23. Encontra exemplos de funções  $f$  e  $g$  tais que:

23.1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$

23.3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

23.2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

23.4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

24. Considera a função real de variável real definida por  $h(x) = \ln x + e^x$

24.1 Determina o domínio de  $h$  e calcula  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .

24.2 O que concluis acerca da existência de assíntotas do gráfico de  $h$ ?

25. Dá exemplo de uma função racional contínua em  $\mathbb{R}$ .

## CONSELHOS PARA OS EXAMES – N.º 9

### Como reconhecer as indeterminações

Os teoremas operatórios sobre limites são muitos e os casos de combinações possíveis ainda mais. Em  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$  podemos ter  $a$  número real, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ , podemos ter  $L$  e  $M$  ambos reais, diferentes de zero ou iguais a zero, ou um deles  $+\infty$  ou  $-\infty$  ou ambos iguais  $+\infty$ , ambos iguais  $-\infty$  ou um deles igual a  $+\infty$  e o outro igual a  $-\infty$ .

Podemos tomar algumas orientações para nos ajudar:

- a) Um limite que seja  $+\infty$  ou  $-\infty$  tem “mais força” que os outros limites, ou seja, quando estamos a somar, multiplicar ou dividir e há um dos limites que é  $+\infty$  ou  $-\infty$  esse limite domina e influencia de forma decisiva o resultado. Por exemplo, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  e se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , com  $L$  real negativo, então teremos

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = +\infty$$

- b) Se aparecem limites infinitos em denominadores, então devemos aplicar os teoremas sobre infinitamente grandes (os limites de funções reduzem-se a limites de sucessões de acordo com a definição de Heine).
- c) Se temos mais de um limite infinito podemos ter problemas pois teremos dois termos com “igual força”. Nessa situação podem aparecer indeterminações, como quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , e queremos determinar

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- d) Note-se que se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  e queremos determinar  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$  então

não temos indeterminação, pois o limite será  $-\infty$  pois os limites “puxam ambos para o mesmo lado”. Basta lembrarmos dos teoremas de limites de sucessões com infinitamente grandes.

- e) Convém verificar se algum limite notável nos pode ajudar.

Nos casos em que surgem indeterminações teremos de transformar o limite a calcular para que deixe de ser uma indeterminação. Há inúmeras técnicas para isso... sendo que a famosa regra de Ruffini é muito útil quando temos um quociente de polinómios.

## Itens de exame

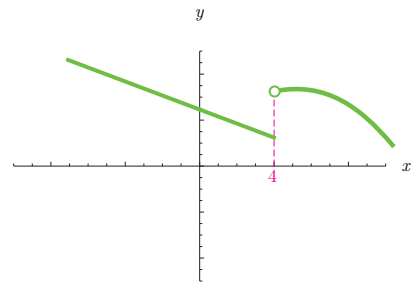
### Escolha múltipla

- Qual é o limite da sucessão de termo geral  $u_n = 1 + e^{-n}$  ?  
 (A)  $-\infty$                       (B)  $+\infty$                       (C) 0                      (D) 1
- Considera a função  $g$  definida por  $g(x) = \frac{2x-5}{x-1}$ . Indica qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$   
 (A) 0                      (B) 2                      (C)  $-\infty$                       (D)  $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 e^{-x})$  é  
 (A)  $-\infty$                       (B) 0                      (C) 2                      (D)  $+\infty$
- Indica o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{e^x - 1}$   
 (A) 0                      (B) 1                      (C)  $-\infty$                       (D)  $+\infty$

- Na figura está representada parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ .

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

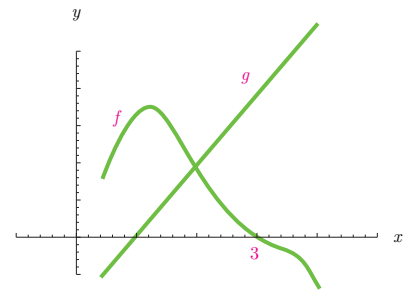
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$  e  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$  e  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$  e  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$  e  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$



- Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções  $f$  e  $g$ , contínuas em  $\mathbb{R}$ .

O gráfico de  $f$  intersesta o eixo  $Ox$  no ponto de abcissa 3. Indica o valor de  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g(x)}{f(x)}$

- (A) 0                                      (B) 1  
 (C)  $+\infty$                                 (D)  $+\infty$



7. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

- O gráfico de  $g$  é uma reta, que designamos por  $s$

-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira**?

- (A) A reta  $s$  é tangente ao gráfico de  $f$   
 (B) A reta  $s$  é secante ao gráfico de  $f$   
 (C) A reta  $s$  não intersesta o gráfico de  $f$   
 (A) A reta  $s$  é uma assíntota do gráfico de  $f$

8. O gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 0.1 + 0.2e^{0.3x}$  tem uma assíntota.

Qual das condições seguintes é uma equação dessa assíntota?

- (A)  $y = 0$                                 (B)  $y = 0.1$                                 (C)  $y = 0.2$                                 (D)  $y = 0.3$

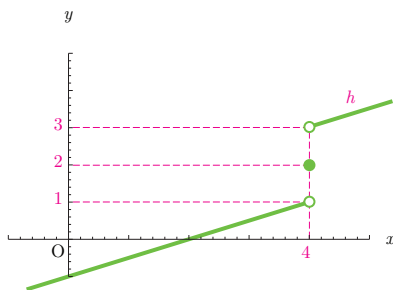
9. Considera a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{2x + 1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função  $g$ , no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) É contínua.  
 (B) É contínua à esquerda e descontínua à direita.  
 (C) É contínua à direita e descontínua à esquerda.  
 (D) É descontínua à esquerda e à direita.

10. Na figura está representada parte do gráfico de uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ .



Seja  $(u_n)$  a sucessão de termo geral  $u_n = h\left(4 - \frac{1000}{n}\right)$

Qual é o valor de  $\lim(u_n)$  ?

- (A)  $+\infty$                                       (B) 1                                      (C) 2                                      (D) 3
11. De uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que:

-  $h$  é uma função par;

-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0$ .

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ ?

- (A)  $+\infty$                                       (B)  $-2$                                       (C) 0                                      (D)  $-\infty$
12. Seja  $g$  a função de domínio  $[0, +\infty[$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3^x - \sqrt{x} & \text{se } 0 < x < 2 \\ x - 5 + \log_2(x - 1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função  $g$ ?

- (A)  $]0, 1[$                                       (B)  $]1, 3[$                                       (C)  $]3, 5[$                                       (D)  $]5, 9[$
13. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , contradomínio  $]1, 4[$ , contínua e estritamente crescente.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira, relativamente à equação  $f(x) = 2$  ?

- (A) Não tem solução                                      (B) Tem exatamente uma solução  
(C) Tem exatamente duas soluções                                      (D) Tem mais de duas soluções



## Resposta aberta

14. Seja  $f$  a função de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3 - \sqrt{9 - x}} & \text{se } x < 0 \\ 6 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\ln(x+1) + 5x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

14.1 Utilizando **métodos exclusivamente analíticos**, estuda a função  $f$  quanto à continuidade.

14.2 A equação  $f(x) = x^2$  tem exatamente duas soluções. Utilizando a tua calculadora, determina-as **graficamente**. Apresenta os valores arredondados às décimas. Explica como procedeste, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

15. Considera a função  $f$ , de domínio  $]0, +\infty[$ , definida por  $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ .

15.1 Mostra que  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(4e^2)$ .

15.2 Estuda a função  $f$  quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

16. Considera num referencial o. n.  $xOy$ :

- a curva  $C$ , que representa graficamente a função  $f$  de domínio  $[0,1]$ , definida por  $f(x) = e^x + 3x$

- a reta  $r$ , de equação  $y = 5$

16.1 Sem recorrer à calculadora, justifica que a reta  $r$  intersesta a curva  $C$  em pelo menos um ponto.

16.2 **Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora**, visualiza a curva  $C$  e a reta  $r$  na janela  $[0,1] \times [0,7]$  (janela em que  $x \in [0,1]$  e  $y \in [0,7]$ ).

Reproduz na tua folha de teste, o referencial, a curva  $C$  e a reta  $r$ , visualizados na calculadora.

Assinala ainda os pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$ , em que:

-  $O$  é a origem do referencial;

-  $P$  é o ponto de coordenadas  $(0, e)$  ;

-  $Q$  é o ponto de interseção da curva  $C$  com a reta  $r$ ; relativamente a este ponto, indica, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deves determinar com recurso à calculadora.

Desenha o triângulo  $[OPQ]$  e determina a sua área. Apresenta o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

17. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância a massa, em gramas, ao fim de  $t$  horas de observação, é dada pelo modelo matemático  $M(t) = 15 \times e^{-0.02t}$ ,  $t \geq 0$ .

**Nota:** em eventuais cálculos intermédios, sempre que proceder a arredondamentos, usa três casas decimais.

17.1 Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioativa? Apresenta o resultado em horas e minutos, estes arredondados às unidades.

17.2 Utiliza o Teorema de Bolzano para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

18. Considera uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}^+$ . Admite que  $f$  é positiva e que o eixo  $Ox$  é assíntota do gráfico de  $f$ .

Mostra que o gráfico da função  $\frac{1}{f}$  não tem assíntota horizontal.

19. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura é constante e igual a  $25^\circ$  Celsius.

Interrompeu-se o processo de aquecimento e nesse instante, a água começou a arrefecer.

O arrefecimento da água segue a lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático  $T(t) = 25 + 48e^{-0.05t}$ , em que  $T(t)$  representa a temperatura da água em graus Celsius,  $t$  minutos após o início do arrefecimento.

**Nota:** em eventuais cálculos intermédios, sempre que procederes a arredondamentos, usa quatro casas decimais.

19.1 Determina  $T(0)$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ .

Interpreta os valores obtidos, no contexto do problema.

19.2 Determina ao fim de quanto tempo, após o início do arrefecimento, a temperatura da água atinge os  $36^\circ$  Celsius. Apresenta o resultado em minutos e segundos, com estes arredondados às unidades.

20. Seja  $f$  uma função contínua de domínio  $[0, 5]$  e contradomínio  $[3, 4]$ .

Seja  $g$  a função, de domínio  $[0, 5]$ , definida por  $g(x) = f(x) - x$ .

Prova que a função  $g$  tem, pelo menos, um zero.

21. Seja  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f(0) = f(2) = 0$  e  $f(1) > 0$ .

Prova que existe, pelo menos um número real  $c$  no intervalo  $]0, 1[$  tal que  $f(c) = f(c + 1)$ .

**Sugestão:** considera a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(x) - f(x + 1)$ .

22. Considera a função  $g$ , de domínio  $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \ln(1 + x - x^2) & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- 22.1 Verifica que a função  $g$  é contínua em  $x = 1$ , **sem recorrer à calculadora**.

- 22.2 **Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora**, determina o valor de  $x$

pertencente ao intervalo  $[-\frac{1}{2}, 1[$  tal que  $g(x) = -2 + g(4)$ .

Indica o valor pedido arredondado às décimas e apresenta o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

23. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções, ambas de domínio  $\mathbb{R}^+$ . Sabe-se que:

-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ ;

- a função  $g$  é definida por  $g(x) = f(x) + x^2$ .

Prova que o gráfico de  $g$  não tem assíntotas oblíquas.

24. Considera a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \frac{e^x + 3}{e^x}$ .

Estuda, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a função  $g$ , quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso existam, escreve as suas equações.

# Prova global

90 minutos

Grupo I

1. Seja  $g$  a função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$  e seja  $(w_n)$  a sucessão de termo geral  $w_n = \frac{n+1}{n}$ .

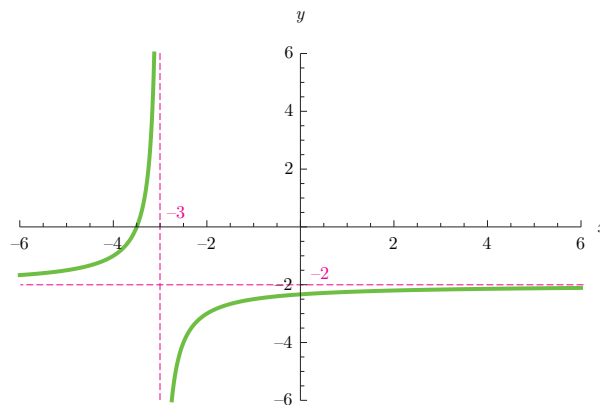
A sucessão  $g(w_n)$  pode ser definida por:

- (A)  $\frac{n+2}{n}$       (B)  $\frac{2n+2}{n}$       (C)  $\frac{2n+1}{n}$       (D)  $\frac{n+2}{n+1}$

2. Considera a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = \frac{4+3x}{3-x}$ . Indica o valor de  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ .

- (A)  $-\infty$       (B) 0      (C)  $\frac{4}{3}$       (D)  $+\infty$

3. Considera a função  $g$  de domínio  $\mathbb{R}$ . As retas de equações  $x = -3$  e  $y = -2$  são assíntotas do gráfico da função.



Indica o valor de  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{e^{x-3} + 23}{g(x)}$ .

- (A)  $-\infty$       (B) 0      (C)  $\frac{1}{23}$       (D)  $+\infty$

4. Seja  $h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{kx} & \text{se } x > 0 \\ \frac{x^2 - 3x}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ . Qual o valor de  $k$  para o qual existe  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ ?

(A)  $-\frac{1}{3}$                       (B)  $-3$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $3$

5. Seja  $f$  uma função par e tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ , com  $m$  e  $b$  não nulos.

O gráfico de  $f$  admite como assíntota, para  $-\infty$ , a reta de equação:

- (A)  $y = mx + b$                       (B)  $y = mx - b$   
 (D)  $y = -mx + b$                       (D)  $y = -mx - b$

### Grupo II

6. Mostra, usando a definição de limite segundo Heine, que a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida

por  $g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$  não tem limite quando  $x$  tende para  $-1$ .

7. Calcula os seguintes limites:

7.1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

7.2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x - 1}$

7.3  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}$

8. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{5x+1}{3x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x}{e^x - 1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ .

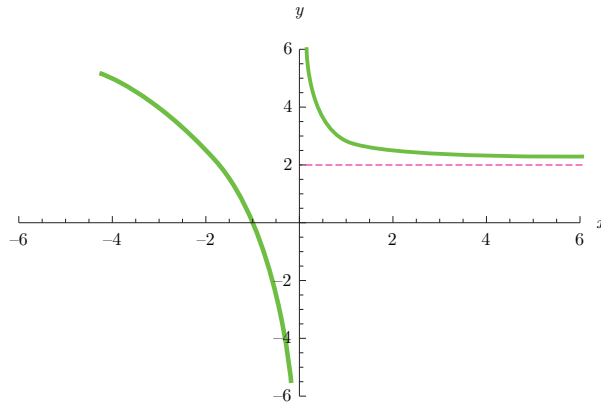
8.1 Recorrendo a **métodos exclusivamente analíticos** prova que existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

8.2 Calcula, por **métodos exclusivamente analíticos**, cada um dos seguintes limites:

8.2.1  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

8.2.2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

9. Considera a função  $f$  representada graficamente.



Calcula os seguintes limites e identifica as situações de indeterminação:

9.1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3]$

9.4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) \times \frac{1}{x} \right]$

9.2  $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x) + x]$

9.5  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x \times f(x)]$

9.3  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \times f(x)]$

9.6  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ f(x) + \frac{1}{x^2} \right]$

10. Considera a função  $f$  definida por  $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ x & \text{se } x = 0 \end{cases}$ .

Estuda a continuidade de  $f$  no ponto 0. Caso não seja contínua, estuda a continuidade lateral.

11. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções contínuas em  $[a, b]$  tais que  $f(a) < g(a)$  e  $f(b) > g(b)$ .

Prova que os gráficos de  $f$  e  $g$  se intersectam, pelo menos, num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo  $]a, b[$ .

12. Considera a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 7}{x - 3}$ .

Estuda-a quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

# 10. Cálculo Diferencial

*“O cálculo diferencial foi o primeiro sucesso da matemática moderna e é difícil sobrestimar a sua importância. E o sistema da Análise Matemática, que é o seu desenvolvimento lógico, ainda constitui o maior avanço técnico no pensamento exato.”*

John von Neumann (1903–1957)

*“Não sei se é possível calcular o número de volumes publicados anualmente em Inglaterra. Não me espantaria que se pudessem contar por dezenas de milhares.”*  
In “Crónicas de Inglaterra” de Eça de Queirós (1845–1900)

É já conhecido que, por definição, a **taxa média de variação** de uma função  $f$  no intervalo  $[a, b]$  é o quociente entre a variação da função neste intervalo,  $f(b) - f(a)$ , e a amplitude do mesmo,  $b - a$ , ou seja

$$tmv_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se considerarmos a taxa média de variação em intervalos  $[a, a + h]$ , para o caso  $h > 0$ , obtemos

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

A este quociente chamamos **razão incremental**. Para o caso  $[a + h, a]$ , com  $h$  negativo chegamos à mesma expressão.

Definimos **taxa de variação** da função  $f$  no ponto  $x = a$  como sendo o valor para que tende a taxa média de variação quando a amplitude do intervalo de extremidades  $a$  e  $a + h$ , com  $h$  de sinal qualquer, tende para zero, isto é, o limite da taxa média de variação quando  $h$  tende para zero.

Este valor é também chamado **derivada** da função  $f$  no ponto de abcissa  $a$  e designa-se por  $f'(a)$ . Quando estudámos a taxa de variação usámos uma ideia intuitiva de limite mas não a definimos de forma rigorosa. Contudo, no capítulo anterior, já definimos rigorosamente o conceito de limite de uma função, pelo que agora podemos definir rigorosamente o conceito de derivada.

*Derivada* – Seja  $f$  uma função definida, pelo menos, num intervalo aberto contendo o ponto fixo  $a$ . Consideremos valores de  $h$  arbitrários (mas diferentes de zero), tal que  $a + h$  esteja dentro do domínio de  $f$ . Por definição, a **derivada da função  $f$  no ponto  $a$**  é o valor  $f'(a)$  dado por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

desde que o limite exista (isto é seja um número real). Diz-se que a **derivada é infinita** se o limite for igual a  $+\infty$  ou for igual a  $-\infty$ . Para distinguir as diversas situações, quando existe derivada e a derivada não é infinita, diz-se que temos uma **derivada finita**.

*Função derivável* – Seja  $f$  uma função definida, pelo menos, num intervalo aberto contendo o ponto  $a$ . A função  $f$  diz-se **derivável no ponto  $a$**  se e somente se existe (isto é, é um número real) a derivada de  $f$  no ponto  $a$ .

*Função derivada* – Se  $f$  for uma função derivável em todos os pontos do intervalo  $]a, b[$  então a função que a cada ponto  $x$  de  $]a, b[$  faz corresponder  $f'(x)$  diz-se que é a **função derivada** de  $f$  e designa-se simplesmente por  $f'$ .

TR

## TAREFA RESOLVIDA 1

Calculemos a derivada da função definida por  $f(x) = 3x - 2$  no ponto  $a = 5$ .

## RESOLUÇÃO

Temos que a derivada  $f'(5)$  é obtida, por definição, a partir de

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(5+h) - 2 - 13}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15 + 3h - 15}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 \end{aligned}$$

Mas, pelo teorema 9.1 a), isto é, pelo teorema 1 do capítulo 9, alínea a), sabemos que o limite procurado é igual a 3, pelo que  $f'(5) = 3$ .

## A NÃO ESQUECER

Calcular uma derivada é o mesmo que calcular um limite de um quociente (dito razão incremental).



## TAREFA RESOLVIDA 2

Calculemos a derivada da função definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$  no ponto  $a = 1$ .

## RESOLUÇÃO

Por definição, a derivada  $f'(1)$ , se existir, será o valor do limite

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 / ((1+h) - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3/h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h^2} \end{aligned}$$

Mas, pela definição de limite de função segundo Heine e pelas propriedades dos limites de sucessões, concluímos que este limite é  $+\infty$ , pelo que a derivada  $f'(1)$  é infinita.

## EXERCÍCIOS

1. Calcula a função derivada das funções:

1.1  $f(x) = -6x$

1.2  $g(x) = 44x + 12$

2. Mostra que a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

tem derivada infinita no ponto 0.

3. Mostra que a função definida por  $m(x) = |x|$  não tem derivada (finita ou infinita) no ponto 0.

No capítulo anterior introduzimos a noção de limite lateral. Vamos usar essa noção para introduzir a noção de derivada lateral.

*Derivada lateral direita* – Seja  $f$  uma função definida, pelo menos, num intervalo aberto do tipo  $[a, b]$ . Consideremos valores de  $h$  positivos, tal que  $a + h$  esteja dentro do domínio de  $f$ . Por definição, a **derivada lateral direita da função  $f$  no ponto  $a$**  é o valor  $f'_d(a)$  dado por

$$f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

desde que o limite exista (isto é seja um número real). Diz-se que a **derivada lateral direita é infinita** se o limite for igual a  $+\infty$  ou for igual a  $-\infty$ .

Identicamente se define derivada lateral esquerda  $f'_e(a)$ , usando o limite lateral esquerdo.



### TAREFA RESOLVIDA 3

Determina as derivadas laterais direita e esquerda da função definida por  $m(x) = |x|$  no ponto 0.

### RESOLUÇÃO

Temos que

$$m'_d(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(0+h) - m(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h}$$

Mas, como  $h$  é positivo,

$$m'_d(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Para a derivada lateral esquerda a situação é diferente, mas não muito:

$$m'_e(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{m(0+h) - m(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h}$$

Claro que agora, como  $h$  é negativo,

$$m'_e(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

Em conclusão:  $m'_d(0) = 1$  e  $m'_e(0) = -1$ .

Obtivemos as duas derivadas laterais e observamos que são diferentes. Em geral, podemos dizer alguma coisa sobre quando são iguais e quando são diferentes? Usando o teorema 2 do capítulo

anterior podemos concluir o seguinte importante resultado:

**Teorema 1** – Existe derivada num ponto se e somente se as derivadas laterais nesse ponto existem e são iguais. Ou seja,  $f'(a)$  existe, se e somente se  $f'_d(a)$  e  $f'_e(a)$  existem e são iguais.

O mesmo se pode dizer se a derivada for  $+\infty$  ou for  $-\infty$ .

## EXERCÍCIOS

4. Determina as derivadas laterais direita e esquerda no ponto 0 da **função sinal** definida por:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5. Mostra que a **função rampa** definida por

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

não é derivável no ponto 0, calculando as derivadas laterais.

Relacionemos o conceito de derivada com o de continuidade. Vamos usar o seguinte teorema (que demonstraremos no capítulo 12):

**Teorema 2 (Derivabilidade e Continuidade)** – Uma função que seja derivável num ponto é contínua nesse ponto.

Isto significa que se  $f'(a)$  existe (é um número real), então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Se  $f$  não for derivável

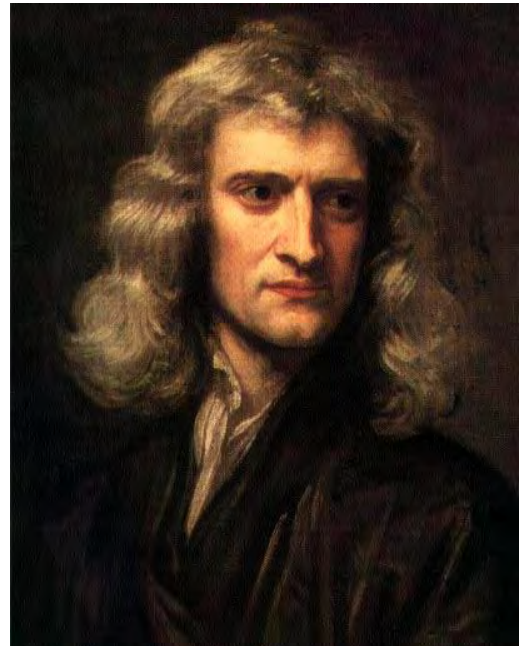
tudo pode acontecer. Por exemplo, a função rampa do exercício 5 acima é contínua no ponto zero mas não é derivável nesse ponto.

## HISTÓRIA(S)

### Isaac Newton (1642–1727)

Isaac Newton nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, no mesmo ano em que faleceu Galileu. O pai tinha morrido pouco antes do seu nascimento e a mãe voltou a casar-se quando ele tinha três anos. Foi educado pela avó e frequentou a escola em *Woolsthorpe*. A Inglaterra vivia um período política e intelectualmente tempestuoso. A guerra civil começara alguns meses antes. A revolução científica, que começara com a publicação da famosa obra de Copérnico em 1543, havia sido bastante desenvolvida pelas obras de outros astrónomos como Kepler e Galileu.

Quando completou catorze anos, a mãe, viúva pela segunda vez, regressa a *Woolsthorpe* com os três filhos do segundo casamento. Enquanto frequenta a *Grantham Grammar School*, Newton é encarregue de ajudar na gestão dos negócios da família, o que não lhe agrada. Por isso divide o seu tempo entre os livros e a construção de engenhosos entretenimentos como, por exemplo, um moinho de vento em miniatura ou um relógio de água. Um tio materno ao aperceber-se do seu talento extraordinário convenceu a mãe de Newton a matriculá-lo em *Cambridge*. Enquanto se preparava para ingressar



em *Cambridge*, Newton instalou-se na casa do farmacêutico da vila. Aí conheceu a menina Storey por quem se apaixonou e de quem ficou noivo antes de deixar *Woolsthorpe* para ingressar no *Trinity College*, em Junho de 1661. Tinha então dezanove anos. Apesar de ter muito afecto por este primeiro e único amor da sua vida, a absorção crescente com o trabalho levou-o a relegar a sua vida afectiva para segundo plano. Na verdade, Newton nunca se casou.

Vários factores influenciaram o desenvolvimento intelectual e a direção das pesquisas de Newton, em especial as ideias que encontrou nos seus primeiros anos de estudo, os problemas que descobriu através da leitura e o contacto com outros que trabalhavam no mesmo campo. No início do seu primeiro ano estudou um exemplar dos *Elementos* de Euclides (séc. IV-III A.C.), a *Geometria* de Descartes (1596-1650), a *Óptica* de Kepler (1571-1630) e outras. Depois de 1663, assistiu a aulas dadas por Barrow e conheceu obras de Galileu (1564-1642), Fermat (1601-1665) e outros.

Quer isto dizer que, em grande parte, Newton foi um autodidata. Nos finais de 1664, tendo atingido as fronteiras do conhecimento matemático, estava pronto para realizar as suas próprias contribuições. Nos primeiros meses de 1665 exprimiu funções em termos de somas infinitas. De igual modo começou a pensar na taxa de variação e, ligando estes dois problemas, considerou-os como «o meu método».

Durante 1665/1666, após ter obtido o seu grau de Bacharel, o *Trinity College* foi encerrado devido à peste. Este foi para Newton o período mais produtivo pois, nesses meses, na sua casa de *Lin-*

*colnshire*, realizou quatro das suas principais descobertas: o teorema binomial, o cálculo diferencial e integral, a lei da gravitação e a natureza das cores. Esse ano foi considerado extremamente frutuoso para a história das Ciências e, em consequência, foi denominado por “*Annus mirabilis*” por muitos historiadores.

Newton não se concentrou apenas numa só área de estudos. Os seus esforços e o seu génio estavam voltados para muitos interesses. Para além da Matemática e da Filosofia Natural, as suas duas outras grandes paixões foram a Teologia e a Alquimia. Homem de espírito científico nato, Newton propôs-se encontrar por meios experimentais a que é que correspondiam exatamente as afirmações dos alquimistas. Enquanto teólogo, Newton acreditava, sem questionar, no criador todo poderoso do Universo, fazendo contudo questão de entender por ele próprio o que a generalidade dos seus contemporâneos acreditava sem discussão: o relato da criação. Nesse sentido, desenvolveu esforços para provar que as profecias de Daniel e que o “Apocalipse” faziam sentido, e realizou pesquisas cronológicas com o objectivo de harmonizar historicamente as datas do Antigo Testamento.

Adaptado de “Biografia de Isaac Newton” de Olga Pombo

A partir das propriedades dos limites de funções, podemos agora obter propriedades para as derivadas.

**Teorema 3 (Derivada da Soma)** – Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis num intervalo aberto  $A$ , então a função soma  $f + g$  também é derivável no mesmo conjunto e tem-se a seguinte relação entre as derivadas:  $(f + g)' = f' + g'$

## Demonstração

Seja  $a$  um ponto arbitrário do intervalo aberto  $A$ . Provemos que  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Por definição de derivada da função  $f + g$  no ponto  $a$ ,  $(f + g)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(a + h) - (f + g)(a)}{h}$

Por definição da soma de duas funções, temos que  $(f + g)(a + h) = f(a + h) + g(a + h)$  e que  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ . Logo

$$(f + g)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) + g(a + h) - f(a) - g(a)}{h}$$

Vamos agora agrupar os termos obtidos de modo a podermos ligar à definição de derivada de  $f$  em  $a$  e de derivada de  $g$  em  $a$ . Assim, e como o limite da soma é igual à soma dos limites (Teorema 1b) do capítulo anterior),

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) + g(a + h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \end{aligned}$$

Obtivemos exatamente as derivadas de  $f$  e de  $g$  no ponto  $a$  pelo que  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Como o ponto  $a$  era arbitrário, concluímos que  $(f + g)' = f' + g'$

c.q.d.

**Teorema 4 (Derivada do produto de duas funções)** – Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis num intervalo aberto  $A$ , então a função produto  $f \times g$  também é derivável no mesmo conjunto e tem-se a seguinte relação entre as derivadas:

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

## Demonstração

Seja  $a$  um ponto arbitrário do intervalo aberto  $A$ . Provemos que  $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$

Por definição de derivada da função  $f \times g$  no ponto  $a$ ,  $(f \times g)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \times g)(a+h) - (f \times g)(a)}{h}$

Por definição de produto de duas funções, temos que  $(f \times g)(a+h) = f(a+h) \times g(a+h)$  e que  $(f \times g)(a) = f(a) \times g(a)$ . Logo

$$(f \times g)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h}$$

Não é fácil agora agrupar os termos obtidos de modo a podermos ligar à definição de derivada de  $f$  e de  $g$  em  $a$ . Teremos de fazer aparecer um termo com  $f(a)g'(a)$ , ou seja,

$$f(a)g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h}$$

Para isso podemos somar e subtrair  $f(a) \times g(a+h)$  ao numerador:

$$\begin{aligned} (f \times g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a+h) + f(a) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ f(a+h) - f(a) \right] \times g(a+h) + f(a) \times \left[ g(a+h) - g(a) \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ f(a+h) - f(a) \right] \times g(a+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) \times \left[ g(a+h) - g(a) \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \end{aligned}$$

Agora observemos que, pelo Teorema 2, sendo  $g$  derivável, é contínua, pelo que  $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$

Por outro lado  $f(a)$  é uma constante. Recorrendo aos teoremas de limites de funções do capítulo

anterior podemos agora concluir que

$$\begin{aligned}(f \times g)'(a) &= g(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= g(a) \times f'(a) + f(a) \times g'(a)\end{aligned}$$

Como o ponto  $a$  era arbitrário, concluímos que  $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

c.q.d.

De modo idêntico se provam os teoremas seguintes (a demonstração será feita no capítulo 12).

**Teorema 5 (Derivada do produto de uma constante por uma função)** – Se  $f$  é uma função derivável num intervalo aberto, e  $k$  é uma constante, então a função  $kf$  também é derivável no mesmo conjunto e tem-se a seguinte relação entre as derivadas:  $(kf)' = kf'$

**Teorema 6 (Derivada da potência de uma função)** – Se  $f$  é uma função derivável num intervalo aberto, e  $w$  é um número racional, positivo ou negativo, então a função  $f^w$  também é derivável no mesmo conjunto (se  $f^w$  estiver bem definida) e tem-se a seguinte relação entre as derivadas:  $(f^w)' = w \times f^{w-1} \times f'$

**Teorema 7 (Derivada do quociente de duas funções)** – Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis num intervalo aberto  $A$ , e se  $g$  não se anula em  $A$ , então a função quociente  $f/g$  também é derivável no mesmo conjunto e tem-se a seguinte

relação entre as derivadas: 
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

TR

## TAREFA RESOLVIDA 4

Calcula a derivada da função definida por  $h(x) = \frac{2x-3}{x^2-x}$ .

## RESOLUÇÃO

Vamos recorrer aos teoremas 3, 5, 6 e 7 para calcular a derivada da função  $h$ . Pelo teorema 7, temos de garantir que a função do denominador,  $g(x) = x^2 - x$ , não se anula. Tal acontece apenas se  $x = 0$  ou se  $x = 1$  (porquê?) pelo que, se  $x \neq 0$  e  $x \neq 1$ , temos

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{(2x-3)'(x^2-x) - (2x-3)(x^2-x)'}{(x^2-x)^2} \\
 &= \frac{2(x^2-x) - (2x-3)(2x-1)}{(x^2-x)^2} \\
 &= \frac{2x^2 - 2x - 4x^2 + 2x + 6x - 3}{(x^2-x)^2} \\
 &= \frac{-2x^2 + 6x - 3}{(x^2-x)^2}
 \end{aligned}$$



## TAREFA RESOLVIDA 5

Calcula a derivada da função definida por  $r(x) = \sqrt[3]{2x+3}$ .

## RESOLUÇÃO

Temos que  $\sqrt[3]{2x+3} = (2x+3)^{1/3}$ , pelo que podemos recorrer ao teorema 6 para calcular a derivada da função  $r$ . Assim,

$$r'(x) = \frac{1}{3} \times (2x+3)^{1/3-1} \times (2x+3)' = \frac{1}{3} \times (2x+3)^{-2/3} \times 2 = \frac{2}{3} \sqrt[3]{(2x+3)^2}$$

## A NÃO ESQUECER

Para calcular a derivada de uma função com radicais deve sempre escrever-se a função sob a forma de uma potência, através de  $\sqrt[n]{f^p} = f^{p/n}$

## EXERCÍCIOS

6. Calcula as funções derivadas das seguintes funções:

6.1  $f(x) = \frac{3}{x}$

6.3  $h(x) = (3x-7)^3$

6.5  $g(x) = 2$

6.2  $g(x) = x^{15} + 6x^{11}$

6.4  $f(x) = -\frac{3-x}{x-7}$

6.6  $h(x) = \left(-\frac{3}{x-1}\right)^3$

7. Calcula as funções derivadas das seguintes funções com radicais:

7.1  $\sqrt{3x-2}$

7.2  $\sqrt[3]{2x+4}$



Recordemos em que consiste a **função composta** de duas funções  $f$  e  $g$ :  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

Recordemos que o domínio de  $f \circ g$  será constituído pelos pontos  $x$  tais que  $g(x)$  está bem definida, mas também tais que  $g(x)$  esteja no domínio da função  $f$ .

**Teorema 8 (Derivada da Função Composta)** – Dadas duas funções  $f$  e  $g$  e um ponto  $a$  do domínio da função composta  $f \circ g$ , se  $f$  é derivável em  $g(a)$  e se  $g$  é derivável em  $a$ , então a derivada da função composta  $f \circ g$  no ponto  $a$  é dada por  $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \times g'(a)$

Podemos dizer que a derivada de uma função composta num ponto é o produto das derivadas das funções correspondentes em pontos correspondentes. Podemos também escrever a expressão da derivada da função composta como  $(f \circ g)'(a) = f'(y) \Big|_{y=g(a)} \times g'(a)$ .

Como aplicação deste novo resultado vamos determinar a derivada da função exponencial de base  $a$  qualquer. Temos que, se  $f$  for definida por  $f(x) = a^x$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , a sua derivada num ponto arbitrário  $x$  de  $\mathbb{R}$  será dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \times a^h - a^x}{h} = a^x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

Conseguimos pôr  $a^x$  em evidência porque não depende de  $h$ , mas agora chegámos a uma indeterminação que não sabemos resolver. Contudo, no capítulo anterior, estudámos um limite notável que

vai agora ser útil, pelo menos para o caso em que  $a = e$ . Vimos que se tem que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Então, no caso em que  $a = e$ , temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \end{aligned}$$

Para obter a derivada no caso geral basta relembrar que  $a^x = e^{x \ln a}$  e observar que estamos em presença de uma função composta  $f \circ g$  com  $f(y) = e^y$  e  $g(x) = x \ln a$ . Então, pelo **teorema da derivada da função composta**, podemos dizer que

$$\begin{aligned} (a^x)' &= (e^{x \ln a})' \\ &= (e^y)' \Big|_{y=x \ln a} \times (x \ln a)' \\ &= e^y \Big|_{y=x \ln a} \times (\ln a) \\ &= e^{x \ln a} \times (\ln a) \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

O **número  $e$** , conhecido como **número de Euler** (e também erradamente chamado número de Neper, apesar de o inventor dos logaritmos John Neper nada ter a ver com esse número), é um número muito importante na Matemática com inúmeras propriedades. É um número irracional mas que tem regularidades curiosas que têm fascinado todas as gerações de matemáticos e curiosos.

Este número  $e$  foi definido anteriormente como sendo o valor do seguinte limite de sucessão:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

O seu valor é, aproximadamente, igual a 2,7. Contudo, a derivada também serve para definir o próprio número  $e$  de Euler. Com efeito, temos:

**Teorema 9 – O número  $e$  de Euler** é o único número real base de uma função exponencial, tal que a derivada da função exponencial é igual à própria função.

Se usarmos esta propriedade para definir o **número  $e$  de Euler**, então a anterior definição a partir do limite de uma sucessão aparece como propriedade, ou seja, as duas definições do número  $e$  de Euler são equivalentes.

## EXERCÍCIOS

8. Calcula a derivada das seguintes funções:

8.1  $f(x) = e^{2x+1}$

8.4  $g(x) = \frac{e^{2x+1}}{x+1}$

8.2  $g(x) = e^{\frac{2}{x}}$

8.5  $h(x) = (e^{2x+1} + 1)^2$

8.3  $f(x) = 5^{2x+1}$

Vejamos agora qual a derivada da função logarítmica. Temos que, por definição de derivada,

$$\ln'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Apliquemos agora uma propriedade básica dos logaritmos: o logaritmo do quociente é igual à diferença dos logaritmos:

$$\ln'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

Obtemos uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Que fazer? Observemos que o limite notável, estudado no capítulo anterior,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

é muito próximo do limite que precisamos de calcular. Mudemos, no limite que queremos calcular, a variável  $h$  para a variável  $y$  de modo que  $y = \frac{h}{x}$ . Se  $h \rightarrow 0$ , também será  $y \rightarrow 0$ . Virá então

$$\ln'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{xy} = \frac{1}{x} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{1}{x}$$

Para calcular a derivada de um logaritmo de base qualquer podemos recorrer à fórmula de mudança de base (volume 2, pg. 100) para obter

$$\log'_a(x) = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

## EXERCÍCIOS

9. Calcule as funções derivadas das seguintes funções:

9.1  $f(x) = \ln(1 + 2x)$

9.3  $h(x) = \log_3(x^2 - 2x + 1)$

9.2  $g(x) = \log(1 - 3x)$

## T

## TAREFA 6

Prova que a definição de Anastácio da Cunha no texto seguinte é equivalente à que estudamos neste livro.

## HISTÓRIA(S)

### José Anastácio da Cunha (1744–1787)

O romancista Aquilino Ribeiro qualifica uns sonetos do matemático português Anastácio da Cunha como uma “gema rara”, e outros como “mais horripilantes que gasómetros”. Estes extremos caracterizam de algum modo não só a vida deste matemático e poeta mas também a maneira como a sua vida e obra foram lembradas desde que morreu em 1 de Janeiro de 1787. A maioria dos textos que, desde então, foram escritos sobre si é parcial e preconceituosa. O que se sabia sobre a sua vida resultava em grande parte do processo da Inquisição de 1778. Ora, um processo judicial, sobretudo feito nas condições dos da Inquisição, dificilmente será um relato muito fiel da realidade. Mas a importância da obra matemática de Anastácio da Cunha era tão grande que João Manuel de Abreu, seu discípulo e amigo, editou uma tradução francesa dos “*Principios Mathematicos*” e estes chegaram à Academia das Ciências de Paris, tendo ficado registado nas atas das sessões da Academia de 1811 que o matemático francês Lacroix ficou de elaborar um parecer sobre o mesmo (mas este nunca foi apresentado na Academia). O seu livro “*Composições poéticas*”, editado em 1839, foi apreendido pela censura por abuso de liberdade de imprensa em matéria religiosa, tendo sido considerado um dos precursores do romantismo em Portugal:



Tantos anos de amor na prisão dura.  
padecendo martírios cento a cento.  
já sair não espero da amargura.  
nem para me queixar já tenho alento.

Foi também professor de Matemática na Universidade de Coimbra. A maioria dos estudantes que frequentava a Faculdade de Matemática não era da licenciatura em Matemática, como por exemplo aspirantes a Médicos, Juristas e Teólogos, que frequentavam a sua cadeira de “*Geometria*”; os alunos foram-se queixar ao Reitor do seu ensino. Mas este defendeu-se dizendo que:

“Não me demorava em ler ou repetir literalmente (como os meus companheiros costumavam) as propriedades que por fáceis nem carecem de explicação, só para poder empregar tempo suficiente em indicar aos estudantes as verdadeiras dificuldades da lição. Porém queria que também os estudantes trabalhassem e os obrigava a resolver problemas. Sem trabalho não se aprende Matemática!”

Os “*Principios Mathematicos*” são, sem dúvida, a obra principal de Anastácio da Cunha. Aí aparecem pela primeira vez com singular clareza as definições de função, infinitésimo, infinitamente grande, derivada, soma infinita, função exponencial. Em escrita moderna, a sua definição de derivada pode ser escrita como:

“Chama-se derivada da função  $G(x)$ , em cada ponto  $x$ , a grandeza  $G'(x)$  que faz com que  $\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - G'(x)$  seja um infinitésimo ou seja zero, quando  $h$  for um infinitésimo.”

## SÍNTESE

### O essencial passado em revista

Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto fixo  $a$ . Por definição, a

**derivada da função  $f$  no ponto  $a$**  é o valor  $f'(a)$  dado por  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

desde que o limite exista (isto é seja um número real). Diz-se que a **derivada é infinita** se o limite for igual a  $+\infty$  ou for igual a  $-\infty$ . Quando existe derivada e a derivada não é infinita, diz-se que temos uma **derivada finita**. A função  $f$  diz-se **derivável no ponto  $a$**  se e somente se existe (isto é, é um número real) a derivada de  $f$  no ponto  $a$ .

Se  $f$  for uma função derivável em todos os pontos do intervalo  $]a, b[$  então a função que a cada ponto  $x$  de  $]a, b[$  faz corresponder  $f'(x)$  é a **função derivada de  $f$**  e designa-se simplesmente por  $f'$ .

A **derivada lateral direita da função  $f$  no ponto  $a$**  é o valor  $f'_d(a)$  dado por

$$f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

desde que o limite exista (isto é seja um número real). Diz-se que a **derivada lateral direita é infinita** se o limite for igual a  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

A **derivada lateral esquerda da função  $f$  no ponto  $a$**  é o valor  $f'_e(a)$  dado por

$$f'_e(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

desde que o limite exista (isto é, seja um número real). Diz-se que a **derivada lateral esquerda é infinita** se o limite for igual a  $+\infty$  ou a  $-\infty$ .

**Teorema 1:** Existe derivada num ponto se e somente se as derivadas laterais nesse ponto existem e são iguais. Ou seja,  $f'(a)$  existe, se e somente se  $f'_d(a)$  e  $f'_e(a)$  existem e são iguais. O mesmo se pode dizer se a derivada for  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**Teorema 2 – Derivabilidade e Continuidade:** Uma função que seja derivável num ponto é contínua nesse ponto.

**Teorema 3 – Derivada da soma:**  $(f + g)' = f' + g'$

**Teorema 4 – Derivada do produto de duas funções:**  $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

**Teorema 5 – Derivada do produto de uma constante por uma função:**  $(kf)' = kf'$

**Teorema 6 – Derivada da potência de uma função:**  $(f^w)' = w \times f^{w-1} \times f'$

**Teorema 7 – Derivada do quociente de duas funções:**  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

### Teorema 8 – Derivada da Função composta:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \times g'(a) \qquad (f \circ g)'(a) = f'(y) \Big|_{y=g(a)} \times g'(a)$$

As derivadas das funções exponencial e logarítmica são:

$$(e^x)' = e^x \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad (a^x)' = a^x \ln a \qquad \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

EG

## Exercícios globais

### Prática ↑

1. Calcula as funções derivada das seguintes funções:

1.1  $f(x) = \sqrt{\ln(2x+1)}$

1.3  $h(x) = \log(2+10^x)$

1.2  $g(x) = \frac{x^3}{2} - 5x + 7$

1.4  $r(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$

2. Caracteriza a função derivada de cada uma das seguintes funções (isto é, indica o domínio e a lei de transformação):

2.1  $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$

2.2  $g(x) = \sqrt{2x+3}$

3. Calcula as derivadas das funções definidas por

3.1  $a(x) = (2^{x+1} + 1)^2$

3.3  $c(x) = 5^{1+\ln(2x+2)}$

3.2  $b(x) = 2^{x^2}$

4. Considera a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Definamos a função  $R$  por meio de

$$R(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

4.1 Mostra que  $R(h) = \frac{-2-h}{(1+h)^2}$ .

**4.2** Mostra que  $f$  é derivável no ponto 1 e determina  $f'(1)$ .

### Pensa e Resolve ↑ ↑

5. Analisa em que pontos do domínio de  $f$  a seguinte função tem derivada:  $f(x) = |6x - 3|$
6. Mostra que a função definida por  $g(x) = \ln(x^2 + 1)$  é contínua em toda a reta real, calculando a sua derivada.
7. Seja  $h$  a função definida por  $h(x) = x + |1 + \ln(2x - 1)|$ . Caracteriza (isto é, indica o domínio e a lei de transformação) a função derivada de  $h$ .
8. Lembrando que, geometricamente, a derivada de uma função  $f$  no ponto  $a$  é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $a$ , determina a equação da reta tangente, no ponto de abscissa  $-1$  ao gráfico da função  $f$  definida por  $f(x) = 2^{x+1}$ .

### Reflete ↑ ↑ ↑

9. Caracteriza (isto é, indica o domínio e a lei de transformação) a função derivada da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2x-1} & \text{se } x > 1 \\ x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

10. Caracteriza (isto é, indica o domínio e a lei de transformação) a função derivada da função definida por

$$g(x) = \begin{cases} \ln(2x+3) & \text{se } x > 1 \\ \ln(1-x) & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

11. Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  por  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x}$

- 11.1 Determina, a partir da definição, o valor de  $f'(1)$ .
- 11.2 Determina, a partir das regras de derivação, a função derivada da função  $f$ . Com a ajuda do resultado obtido verifica o resultado da alínea anterior.
- 11.3 Lembrando que, geometricamente, a derivada de uma função  $f$  no ponto  $a$  é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $a$ , determina a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1.
- 11.4 Existirão tangentes ao gráfico de  $f$  que sejam paralelas à reta de equação  $y = -7x - 5$ ?  
Se a resposta for afirmativa, indica os pontos do gráfico de  $f$  onde isso acontece.

## Conselhos para os exames n.º 10

### Cuidado com os cálculos de derivadas

Muitas vezes os alunos confundem as regras de derivação e inventam modos incorretos de derivar funções. Por exemplo, como a derivada da soma de duas funções é igual à soma das derivadas das funções, não se apercebem que:

A derivada do produto de duas funções não é igual ao produto das derivadas das duas funções

Havendo dúvidas sobre qual a regra de derivação a aplicar existem duas boas alternativas:

- Verificar no formulário ou tabela qual a regra a aplicar;
- Testar com funções particulares se a regra que queremos aplicar é válida.

Aplicamos esta segunda alternativa para testar a regra incorreta acima referida. Se for  $f(x) = x$  e  $g(x) = 2$  então temos:

$$f'(x) = 1 \text{ e } g'(x) = 0$$

pelo que  $f'(x)g'(x) = 0$  mas  $(2x)' = 2$  pelo que se constata, com este contraexemplo, que a derivada do produto **não é igual** ao produto das derivadas.

Do mesmo modo se pode verificar que

A derivada do quociente de duas funções não é igual ao quociente das derivadas das duas funções

Vejam também com um contra exemplo que esta regra não é realmente válida: Se for  $f(x) = x$  e  $g(x) = 2$  então temos

$$f'(x) = 1 \text{ e } g'(x) = 0$$

pelo que  $f'(x)/g'(x)$  nem sequer faz sentido. A derivada do quociente existe e é  $(x/2)' = 1/2$ .

É por isso muito útil saber sem hesitação as regras de derivação.



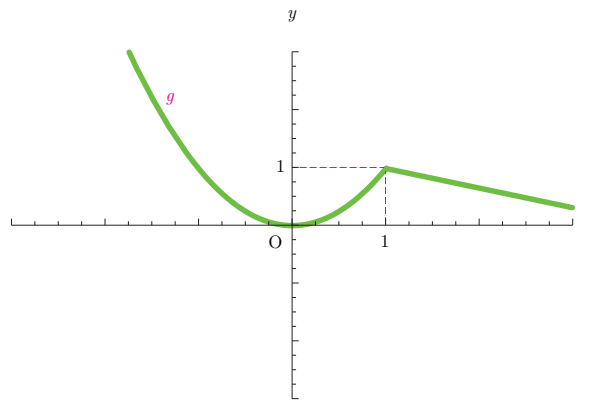
## Itens de exame

### Escolha múltipla

1. Sendo  $f$  a função definida por  $f(x) = x^e$ , a expressão analítica de  $f'$  é:  
 (A)  $x^e$                       (B)  $x^{e-1}$                       (C)  $e x^{e-1}$                       (D)  $x^e \ln(x)$
2. Considera a função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x) = e^{2x-1}$ . O valor de  $h'(1)$  é  
 (A) 0                      (B) 1                      (C)  $e$                       (D)  $2e$
3. Seja  $f$  uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4. Indica o valor de

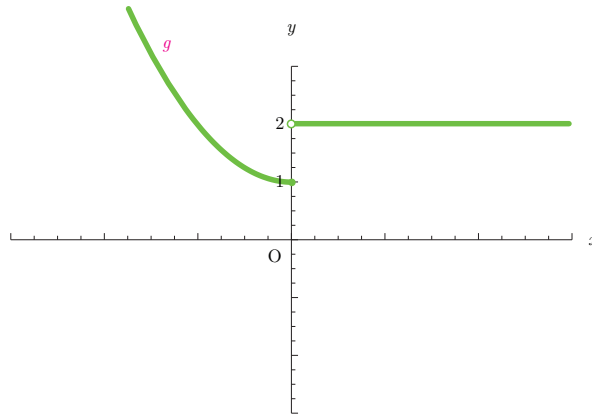
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}.$$

- (A)  $\frac{2}{3}$                       (B)  $\frac{3}{2}$                       (C) 4                      (D) 0
4. A representação gráfica de uma função  $g$  é:



Podemos então concluir que

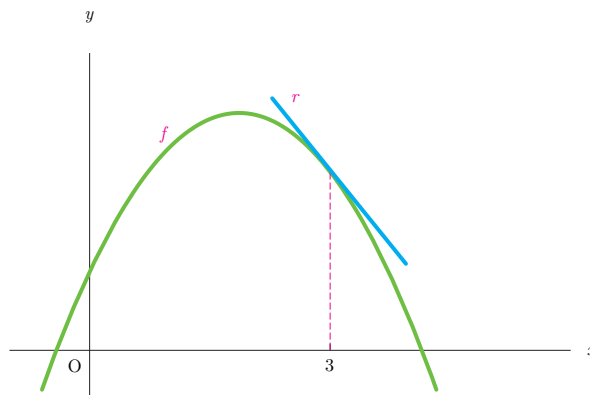
- (A)  $g'(1) = 0$                       (B)  $g'(1) = +\infty$                       (C)  $g'(1) = 1$                       (D) não existe
5. Na figura está parte da representação gráfica de uma função  $g$ .



Indica o valor de  $g'(0^+)$ , derivada lateral direita no ponto 0.

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D)  $+\infty$

6. Na figura estão representadas:

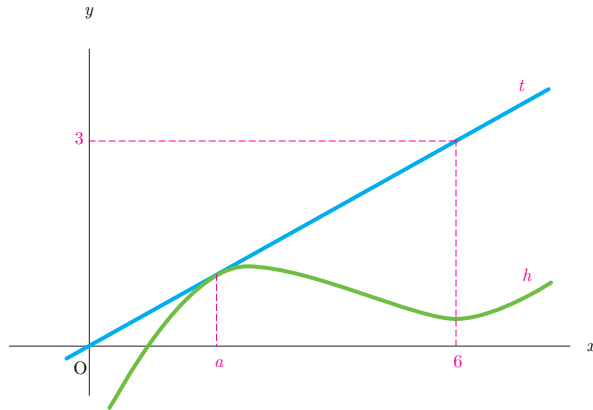


- parte do gráfico de uma função  $f$  diferenciável em  $\mathbb{R}$ ;
- uma reta  $r$  tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 3.

O valor de  $f'(3)$ , derivada da função  $f$  no ponto 3, pode ser igual a

- (A)  $-1$                       (B)  $0$                       (C)  $\frac{1}{f(3)}$                       (D)  $1$

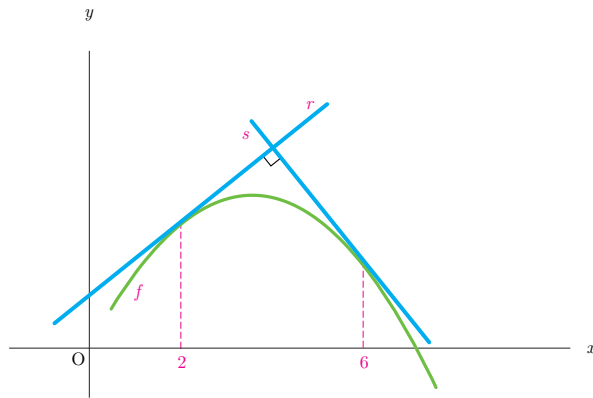
7. Na figura junta está a representação gráfica de uma função  $h$  e de uma reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $h$  no ponto de abcissa  $a$ .



A reta  $t$  passa pela origem do referencial e pelo ponto de coordenadas  $(6, 3)$ . O valor de  $h'(a)$  é:

- (A)  $-\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{1}{6}$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{1}{2}$

8. Na figura estão representados:



- o gráfico de uma função  $f$ ;

- a reta  $r$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 2 e de equação  $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$ ;

- a reta  $s$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 6.

Sabendo que as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares, indica o valor de  $f'(6)$ , derivada da função  $f$  no ponto 6.

- (A)  $-\frac{3}{2}$                       (B)  $-\frac{4}{5}$                       (C)  $-\frac{2}{5}$                       (D)  $\frac{5}{3}$

9. Considera uma função  $h$  de domínio  $\mathbb{R}^+$ .

A reta de equação  $y = -2$  é assíntota ao gráfico de  $h$ .

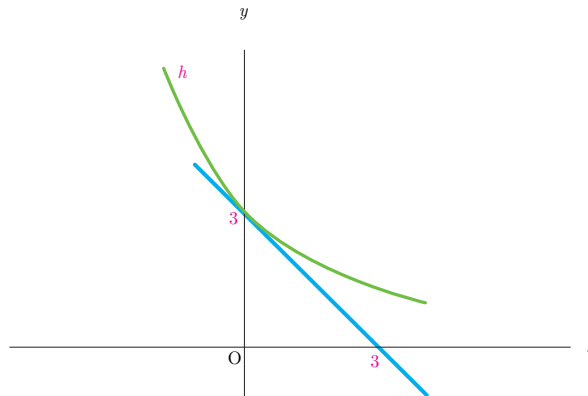
Seja  $h'$  a função derivada de  $h$ .

Indica qual dos valores seguintes pode corresponder ao valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x)$ .

- (A) 0                      (B) -2                      (C)  $+\infty$                       (D)  $-\infty$
10. Para um certo número real  $a$ , o gráfico da função  $g$ , definida por  $g(x) = ax^2 + 3$ , tem, no ponto de abcissa 1, uma reta tangente com declive 4.

Qual é o valor de  $a$ ?

- (A) 4                      (B) 2                      (C)  $\frac{1}{2}$                       (D)  $\frac{3}{2}$
11. Na figura está representada parte do gráfico de uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , bem como parte da reta tangente ao gráfico de  $h$ , no ponto  $(0, 3)$ .



Esta reta intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abcissa 3. Qual das expressões seguintes pode definir  $h'$ , função derivada de  $h$ ?

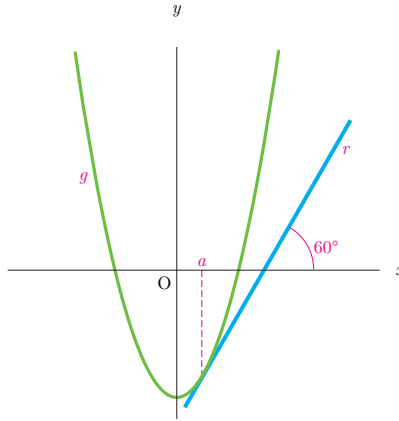
- (A)  $2 - \frac{x}{3}$                       (B)  $1 - \frac{x}{2}$                       (C)  $\frac{x}{3} - 2$                       (D)  $\frac{x}{2} - 1$
12. Na figura estão representadas, num referencial o. n.  $xOy$ :

- parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = 1 + 2\ln(x)$ ;
- a reta  $r$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1.

Qual é o declive da reta  $r$ ?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4

13. Na figura estão representadas:



- parte do gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$ ;

- uma reta  $r$  tangente ao gráfico de  $g$ , no ponto de abscissa  $a$ .

A inclinação da reta  $r$  é  $60^\circ$ . Indica o valor de  $a$ .

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$                       (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       (C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{1}{2}$

14. Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = 4 + \ln x$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).

Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de  $f$ , num certo ponto  $P$ , é paralela à reta de equação

$y = \frac{x}{3} + 2$ . Qual é a abscissa de  $P$ ?

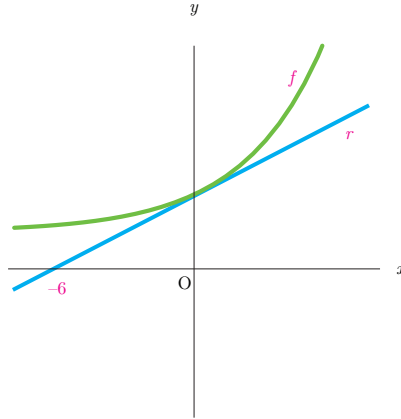
- (A) 3                      (B) 4                      (C) 5                      (D) 6

15. Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = e^x + 2x$ .

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto de abscissa 0?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3

16. Na figura está representada, num referencial o. n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^{ax} + 1$  ( $a$  é uma constante real positiva).

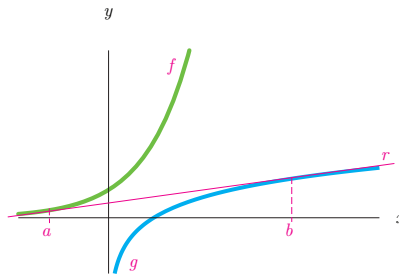


Na figura está também representada a reta  $r$ , que é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto em que este intersecta o eixo  $Ox$ , ou seja no ponto de abscissa  $-6$ . Qual é o valor de  $a$ ?

- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{1}{3}$                       (C)  $\frac{2}{3}$                       (D)  $\frac{3}{2}$

17. Na figura abaixo estão representadas graficamente duas funções:

- a função  $f$ , definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = e^x$ ;
- a função  $g$ , definida em  $\mathbb{R}^+$  por  $g(x) = \ln x$  ( $\ln$  designa o logaritmo de base  $e$ ).



A reta  $r$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $a$  e é tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa  $b$ . Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- (A)  $e^a = \frac{1}{b}$                       (B)  $e^a = \ln b$                       (C)  $e^{a+b} = 1$                       (D)  $\ln(ab) = 1$

**Resposta aberta**

18. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

Determina a função derivada de  $f$ .

19. Seja  $f$  a função, de domínio  $]1, +\infty[$ , definida por  $f(x) = x + x \ln(x - 1)$ .

Determina a função derivada de  $f$ .

20. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

Determina a função derivada de  $f$ .

21. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , definida por  $f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$ .

Determina a função derivada de  $f$ .

22. Considera a função  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \ln(1 + x) - x$ .

Determina a função derivada de  $g$ .

23. Determina a função derivada de cada uma das funções definidas por:

23.1  $f(x) = 3x - 2 \ln x$

23.5  $f(x) = 2xe^{-0.3x}$

23.2  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

23.6  $f(x) = 36 - 9(e^{0.06x} + e^{-0.06x})$

23.3  $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

23.7  $f(x) = 1 - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$

23.4  $f(x) = e^{-x}$

23.8  $f(x) = 12 - 3x + 5\sqrt{x^2 + 4}$

24. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x(x^2 + x)$ .

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, verifica que  $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ .

25. De uma certa função  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  sabe-se que a sua derivada é definida por  $f'(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ .

Mostra que  $f''(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ .

26. Considera a função definida por  $r(t) = \frac{1 + 4t}{2 + t}$  ( $t \geq 0$ ).

Determina a sua derivada.

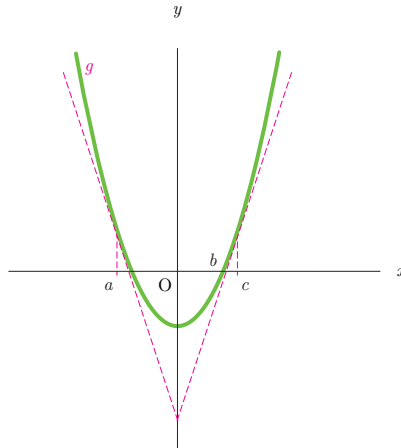
27. Determina a derivada da função definida por  $A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$ .

Prova global

45 minutos

Grupo I

1. Considera a função  $g$  representada graficamente por



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A)  $g'(a) = g'(c)$       (B)  $g'(a) < g'(c)$       (C)  $g'(a) > g'(c)$       (D)  $g'(b) = 0$

2. Considera a função  $f$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ x^3 + x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

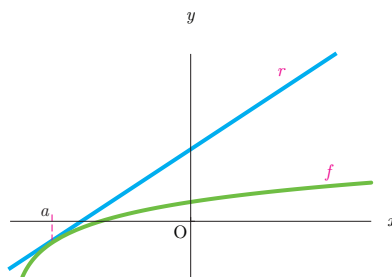
A derivada da função  $f$  pode ser definida por:

- (A)  $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$       (B)  $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$
- (C)  $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$       (D)  $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 1 \\ 3x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$



3. Na figura está representada, num referencial  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$ , de domínio

$$]-6, +\infty[, \text{ definida por } f(x) = \ln\left(\frac{x}{3} + 2\right)$$



Sabe-se que:

- a reta  $r$  é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $a$ ;

- a inclinação da reta  $r$  é, em radianos,  $\frac{\pi}{4}$ .

Qual é o valor de  $a$ ?

- (A)  $-4$                       (B)  $-\frac{9}{2}$                       (C)  $-\frac{11}{2}$                       (D)  $-5$

### Grupo II

4. Determina a função derivada de cada uma das seguintes funções:

4.1  $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2-2x+4}$

4.3  $h(x) = e^{2x-3} + \sqrt{x^2-1}$

4.2  $g(x) = 2 + \frac{\ln(3-x)}{x-3}$

5. Define a segunda derivada de cada uma das seguintes funções:

5.1  $f(x) = (3x-2)^2$

5.3  $h(x) = 147$

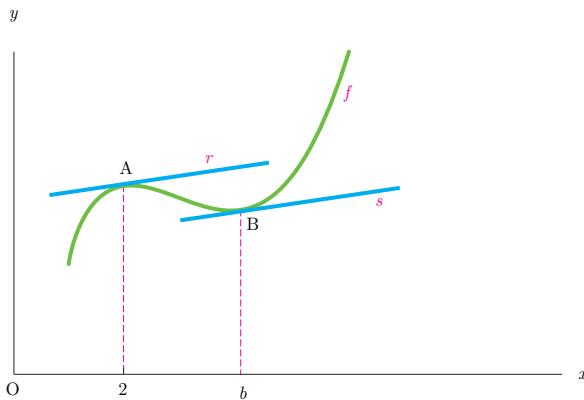
5.2  $g(x) = \frac{1}{x}$

6. De uma certa função  $f$  sabe-se que:

- o seu domínio é  $]1, +\infty[$ ;

- a sua derivada é dada por  $f'(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4 \ln(x - 1)$ .

**6.1** Na figura estão representadas:



- parte do gráfico da função  $f$ ;
- a reta  $r$  que é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $A$ , de abcissa 2;
- a reta  $s$  que é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $B$ .

As retas  $r$  e  $s$  são paralelas.

Seja  $b$  a abcissa do ponto  $B$ .

Determina, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de  $b$ .

Na tua resposta, deves:

- equacionar o problema;
- reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiveres necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
- assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
- apresentar o valor de  $b$  arredondado às centésimas.

**6.2** Determina a segunda derivada da função  $f$ .

# 11. Aplicações do Cálculo Diferencial

*“Eu encaro como sendo bastante inútil a leitura de tratados de Análise pura: passam demasiados métodos diante dos olhos. É no trabalho das aplicações que nós os devemos estudar; julgamos a sua utilidade aí e apreendemos a maneira de fazer uso deles.”*

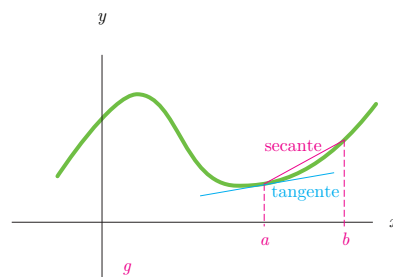
Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

“Solução certa procura  
Um problema à sua altura  
Com quem possa partilhar  
Uma vida sem incógnitas.”

In “Pequeno livro de Desmatemática” Manuel António Pina (1943–2012)

Seja  $f$  uma função real de variável real. Já sabemos que, geometricamente, a taxa média de variação da função  $f$  num intervalo  $[a, b]$  representa o declive da reta secante ao gráfico da função  $f$  e que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

Sabemos também que a taxa de variação (isto é, a derivada) no ponto  $a$  é numericamente igual ao declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $a$ .



TR

## TAREFA RESOLVIDA 1

Determina a equação da reta tangente ao gráfico da função definida por  $f(x) = \log_3\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ , no ponto de abcissa  $a = 4$ .

## RESOLUÇÃO

Se a reta pretendida é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $a$ , então o ponto de coordenadas  $(a, f(a))$  pertence à reta. No nosso caso  $f(a) = f(4) = \log_3 3 = 1$ . O declive da reta é a derivada de  $f$

$$\text{no ponto } x = a. \text{ Temos } f'(4) = \left( \log_3\left(\frac{x}{2} + 1\right) \right)' \Big|_{x=4} = \frac{\frac{1}{2}}{\ln 3 \left(\frac{x}{2} + 1\right)} \Big|_{x=4} = \frac{1}{6 \ln 3}$$

A equação da reta tangente será então  $y - 1 = \frac{1}{6 \ln 3}(x - 4)$

## A NÃO ESQUECER

A equação de uma reta que passa pelo ponto  $(a, f(a))$  e tem declive  $m$  é dada por

$$y - f(a) = m(x - a)$$

### EXERCÍCIOS

1. Considera a função  $g(x) = \sqrt{x}$ .
  - 1.1 Caracteriza a função  $g'$ .
  - 1.2 Determina a equação reduzida da reta,  $t$ , tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa  $x = 9$ .
2. Determina uma equação da reta tangente ao gráfico de cada uma das seguintes funções, nos pontos indicados:
  - 2.1  $f(x) = x^2$ ,  $x = 4$
  - 2.2  $f(x) = e^x - 2x + 1$ ,  $x = 0$
  - 2.3  $f(x) = -x + \ln(2x - 3)$ ,  $x = 2$
  - 2.4  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$

Se a derivada de uma função é (estritamente) positiva num intervalo aberto, a função é (estritamente) **crescente** no intervalo, e se a derivada for (estritamente) negativa a função é (estritamente) **decrescente** no intervalo. O **Teorema de Fermat** diz que se uma função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto do intervalo, então a derivada é nula nesse ponto.

TR

## TAREFA RESOLVIDA 2

Estuda os intervalos de monotonia e extremos relativos da função definida por  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ .

### RESOLUÇÃO

Calculemos a derivada da função dada  $f'(x) = x^2 - 4$

Se determinarmos os intervalos onde a derivada é positiva ou negativa obtemos logo os intervalos de monotonia da função. Como a função  $f$  é derivável, pelo Teorema de Fermat, deveremos procurar os zeros da derivada, que são os pontos onde poderá haver extremo; se há ou não extremo, só analisando a situação concreta poderemos concluir.

Convém então estabelecer o seguinte quadro de variações:

$x$		-2		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	22/3	↘	-10/3	↗
		máximo relativo		mínimo relativo	

Concluimos então que a função dada é crescente nos intervalos  $]-\infty, -2[$  e  $]2, +\infty[$  e é decrescente no intervalo  $]-2, 2[$ . Por observação do quadro concluimos imediatamente que o ponto de abcissa -2 é um máximo e o ponto de abcissa 2 é um mínimo.

### A NÃO ESQUECER

Os pontos onde a derivada se anula não são necessariamente pontos onde há extremo (basta pensar na função  $g(x) = x^3$  que tem derivada nula para  $x = 0$  e contudo não tem aí extremo).

TR

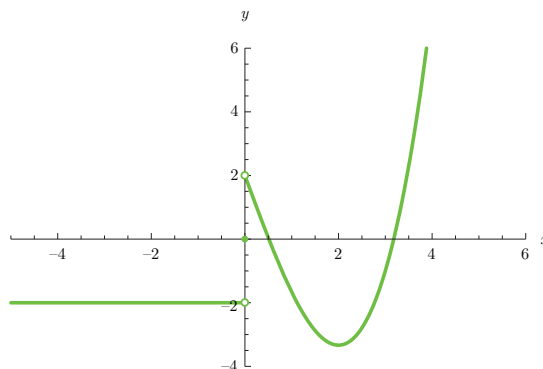
### TAREFA RESOLVIDA 3

Estuda os intervalos de monotonia e extremos relativos da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2 & \text{se } x > 0 \\ 3 & \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

### RESOLUÇÃO

Como a função está definida por vários ramos, temos de estudar os intervalos  $]-\infty, 0[$  e  $]0, +\infty[$  separadamente, assim como o que se passa para  $x = 0$ . Numa situação como esta é aconselhável traçar um gráfico para percebermos melhor o que se passa com a função. Temos



Observamos que a função parece ser descontínua para  $x = 0$ . Com efeito, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

Como os valores são diferentes, pelo teorema 2 do capítulo 9, concluímos que a função não tem limite para  $x = 0$  e portanto, é descontínua no ponto  $x = 0$ . Assim, pelo teorema 2 do capítulo 10, a função não pode ser derivável nesse ponto. No intervalo aberto  $]-\infty, 0[$  podemos aplicar as regras de derivação (teoremas 3 a 8 do capítulo 10) para obter  $f'(x) = (-2)' = 0$ .

No intervalo aberto  $]0, +\infty[$  também podemos aplicar as regras de derivação para obter

$$f'(x) = \left( \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2 \right)' = x^2 - 4$$

Agora é fácil fazer o seguinte quadro de variações:

$x$		0		2	
$f'(x)$	0	Não existe	-	0	+
$f(x)$	constante	0	$\searrow$	-10/3	$\nearrow$
				mínimo relativo	

Combinando estas informações com a obtida pelo gráfico concluímos que, para  $x > 0$ , a função tem apenas um mínimo para  $x = 2$ . É constante no intervalo aberto  $]-\infty, 0[$ , decrescente no intervalo aberto  $]0, 2[$  e crescente no intervalo aberto  $]2, +\infty[$ .

## EXERCÍCIOS

3. Estuda os intervalos de monotonia e extremos relativos das funções definidas por

3.1  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

3.2  $g(x) = \ln(2x+1)$

3.3  $h(x) = \frac{e^x}{x}$

4. Estuda os intervalos de monotonia e extremos relativos das funções definidas por

4.1  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

4.2  $g(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \ln(-x) & \text{se } x < -1 \end{cases}$

## HISTÓRIA(S)

### Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre-Simon de Fermat, filho de um comerciante de couros, foi educado em casa. O exercício da profissão de advogado deixava-lhe tempo para a sua atividade preferida (a Matemática) à qual começou a dedicar-se tarde (com cerca de 30 anos de idade). Destacava-se pela honestidade e ponderação, mas não pela modéstia, a julgar pelos penetrantes desafios matemáticos que dirigia a matemáticos como Wallis, na tentativa de provar que se outros países não eram capazes de resolver os problemas que ele propunha, o sul da França o era. Os seus escritos matemáticos consistiam em notas desorganizadas, observações em margens de livros e cartas, cujo objetivo não era a publicação. Em carta dirigida ao matemático Gregory, Collins comenta que quando Fermat se depara com um problema complicado, frequentemente lamenta a falta de espaço e acaba deixando a questão intocada. O insucesso de Fermat para encontrar “espaço” vem atormentando os matemáticos desde então.



Pierre de Fermat:

“Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste livro é muito estreita para contê-la.”

Fermat inventou, independentemente, a geometria analítica, quase dez anos antes de Descartes publicar o seu trabalho sobre o assunto, e o método das tangentes de Fermat — que se sabe ter inspirado Newton — é um passo gigantesco rumo ao cálculo diferencial.

O primeiro dos grandes métodos variacionais da física–matemática, “o princípio de Fermat do tempo mínimo”, mantém-se até hoje como uma base adequada para a óptica geométrica. O princípio deixou de ser mera especulação após Fermat ter desenvolvida a necessária teoria dos mínimos e provado alguns resultados, como a lei de Snell.

Deixando de lado o inspirado texto de Cardano, a teoria das probabilidades data da correspondência entre Pascal e Fermat. O mérito talvez possa ser partilhado igualmente entre os dois, posto que Fermat corrigiu os erros de Pascal e não cometeu nenhum.

Sobrepondo-se a essas realizações está o fato de Fermat ser o criador da moderna teoria dos números. Além do Pequeno Teorema de Fermat, deixou resultados profundos. São típicos de entre eles: Todo o número primo da forma  $4n + 1$  pode ser expresso univocamente como a soma de dois quadrados; todo o número inteiro é soma de 3 números triangulares, quatro quadrados e assim por diante. Muita matemática fundamental nasceu das tentativas, até bem recentemente frustradas, de demonstrar o seu Último Teorema. O próprio Fermat afirmou ter conseguido uma demonstração notável desse teorema mas que **“a margem deste livro é muito estreita para contê-la”**.

Texto adaptado do quadro “Men of modern Mathematics” da IBM. Trad. de Higyno H. Domingues

## Segunda derivada e concavidade

A função derivada pode ser obtida a partir de qualquer função derivável. Se a função  $f$  for derivável num intervalo aberto, a função derivada  $f'$  está bem definida nesse intervalo. Nada impede que a função dada seja já uma função derivada de outra função. Se a função  $g = f'$  for por sua vez derivável então podemos obter uma nova função, a função derivada de  $g$ , a que chamaremos a **segunda derivada de  $f$**  e que designaremos por  $f''$ . E se agora a função  $h = f''$  for por sua vez derivável, podemos obter uma nova função, a função derivada de  $h$ , a que chamaremos a **terceira derivada de  $f$**  e que designaremos por  $f'''$ .

### EXERCÍCIOS

5. Calcula a segunda derivada das funções definidas do seguinte modo:

5.1  $f(x) = 2^{2x+1}$

5.2  $g(x) = \log_2(3x+1)$

5.3  $h(x) = \ln(2x)$

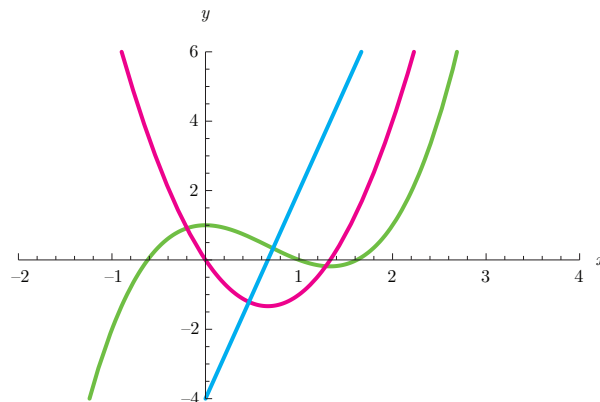
6. Calcula a terceira derivada da função definida por  $p(x) = x^5 + 4x^3 + 2x + 127$ .

Será que o conhecimento da segunda derivada nos poderá ajudar a conhecer melhor a função dada? Já vimos que se a primeira derivada for positiva num intervalo aberto então a função é crescente nesse intervalo. Logo, se a segunda derivada for positiva num intervalo aberto a primeira derivada será crescente nesse mesmo intervalo. Tem-se mesmo mais, conforme o seguinte teorema mostra:

*Teorema 1* – Num intervalo aberto a função  $f'$  é crescente se e só se  $f'' \geq 0$  nesse intervalo.

Num intervalo aberto a função  $f'$  é decrescente se e só se  $f'' \leq 0$  nesse intervalo.

Observemos graficamente esta propriedade. Tracemos os gráficos da função definida por  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  e as suas primeira e segunda derivadas, respetivamente  $f'(x) = 3x^2 - 4x$  e  $f''(x) = 6x - 4$ :



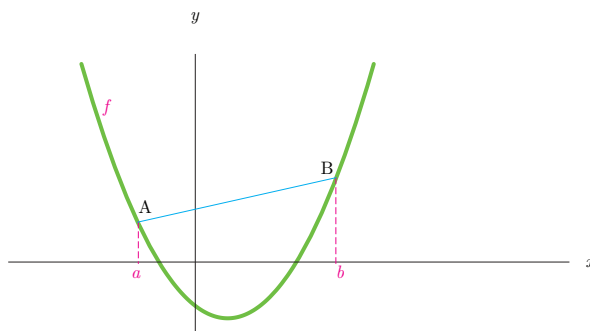


Observamos claramente que, quando a segunda derivada (a verde) é negativa a primeira derivada (a vermelho) é decrescente, o que acontece no intervalo  $]-\infty, 2/3[$ . No intervalo  $]2/3, +\infty[$  observamos que a segunda derivada é positiva e que a primeira derivada é crescente.

Mas observamos mais: quando a segunda derivada é negativa a “concavidade” do gráfico da função  $f$  (a azul) está voltada para baixo e quando a segunda derivada é positiva a “concavidade” do gráfico da função  $f$  (a azul) está voltada para cima. Este é também um fato geral e até podemos tomar esta característica como definição de “concavidade” do gráfico de uma função que tenha segunda derivada:

**Definição 1 (Concavidade)** – Diz-se que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima num intervalo aberto quando nesse intervalo a segunda derivada de  $f$  é positiva ou nula. Diz-se que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo num intervalo aberto quando nesse intervalo a segunda derivada de  $f$  é negativa ou nula.

Voltando ao exemplo estudado atrás, podemos dizer que o gráfico da função definida por  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]2/3, +\infty[$  e a concavidade voltada para baixo no intervalo aberto  $]-\infty, 2/3[$ . O sentido da concavidade também pode ser descrito, equivalentemente, sem se referir a primeira ou a segunda derivadas de  $f$ . Demonstra-se que, para uma função  $f$ , tal que  $f'$  existe nalgum intervalo aberto, o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima no intervalo aberto  $]a, b[$  quando, considerados os pontos  $A = (a, f(a))$ ,  $B = (b, f(b))$  do gráfico de  $f$ , o gráfico de  $f$  em  $]a, b[$  fica abaixo do segmento de recta  $AB$ .

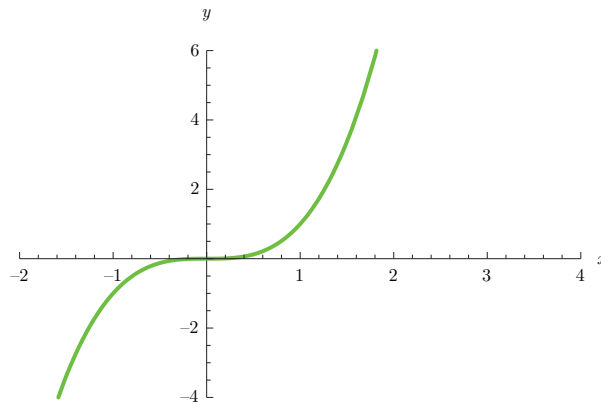
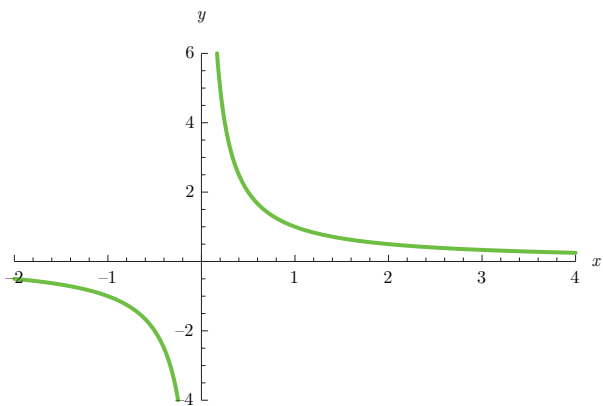
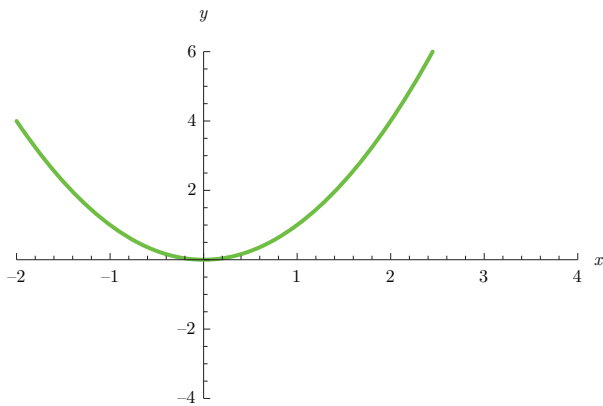


Será que conseguimos identificar facilmente os pontos do gráfico de uma função onde a concavidade do gráfico muda? A resposta é positiva e por isso vamos definir e caracterizar tais pontos.

**Definição 2 (Ponto de inflexão)** – Diz-se que o ponto  $(a, f(a))$  é ponto de inflexão do gráfico de  $f$  se existirem intervalos abertos  $]a_1, a[$  e  $]a, a_2[$  tais que os sentidos da concavidade nesses dois intervalos sejam opostos.

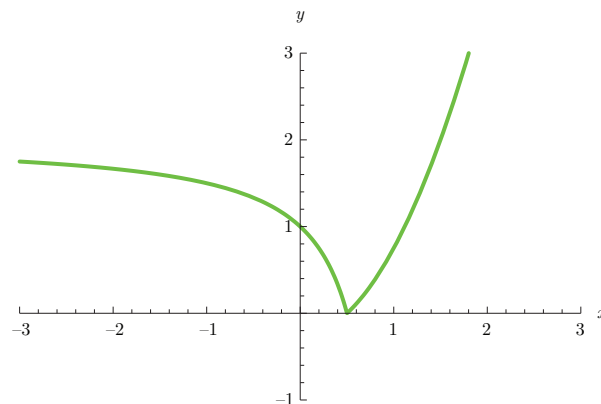
Vejam alguns exemplos. As funções definidas por  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = \frac{1}{x}$  não têm pontos de inflexão porque, no primeiro caso, a concavidade do gráfico da função  $f$  não muda, e no segundo caso o ponto  $x = 0$  não pertence ao domínio da função  $g$ .

A função definida por  $h(x) = x^3$  tem um ponto de inflexão para  $x = 0$ .



A função definida por  $r(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + 2 & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{1}{4} & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

muda de concavidade no ponto  $x = 1/2$  que é um ponto do domínio logo o ponto  $(1/2, r(1/2))$  é um ponto de inflexão do gráfico de  $r$ . Contudo a função  $r$  não tem derivada nesse ponto pois trata-se de um ponto anguloso (isto é, um ponto onde não se pode traçar uma tangente ao gráfico da função).



A função definida por  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , já estudada atrás, muda de concavidade no ponto

$(2/3, f(2/3))$ , ou seja, esse é um ponto de inflexão do gráfico de  $f$ . Nesse ponto tem-se que  $f''(2/3) = 0$ . No caso da função definida por  $h(x) = x^3$  tem-se também que, no ponto de inflexão,  $h''(0) = 0$ . Esta é uma situação geral, quando existe segunda derivada:

**Teorema 2** – Se  $f$  tem segunda derivada num intervalo aberto  $a$  que pertence  $x = a$  e  $(a, f(a))$  é um **ponto de inflexão** do gráfico de  $f$ , então tem-se que  $f''(a) = 0$ .

Note-se que este teorema nada permite concluir quando sabemos apenas que a segunda derivada é nula num ponto. Por exemplo, a função definida por  $s(x) = x^4$  tem segunda derivada nula para  $x = 0$ , mas não tem pontos de inflexão. Se não existe segunda derivada no ponto de inflexão então não se pode concluir nada sem mais dados. Os possíveis pontos de inflexão são pois aqueles onde a segunda derivada é nula ou onde não existe segunda derivada.

## EXERCÍCIOS

7. Usando a segunda derivada, estuda, quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão as funções definidas por:

7.1  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x + 2, D_f = \mathbb{R}$

7.2  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

7.3  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, D_f = \mathbb{R}$

7.4  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}, D_f = \mathbb{R}$

7.5  $f(x) = x^2 \ln(x) - 2, D_f = ]0, +\infty[$

7.6  $f(x) = \sqrt{12 - 2x - 2x^2}, D_f = [-3, 2]$

7.7  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}, D_f = ]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$

8. Seja  $h$  uma função real de variável real, de domínio  $\mathbb{R}$ . Sabe-se que a sua segunda derivada,  $h''$ , é definida, em  $\mathbb{R}$ , por  $h''(x) = \ln\left((x+1)^2 + 2\right)$ .

Estuda a função  $h$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

## Estudo completo de funções (sem calculadora)

Já estudámos muitas ferramentas que nos permitem analisar um número considerável de propriedades de funções reais de variável real. Tanto poderemos fazer o estudo de funções sem calculadora gráfica ou computador (apenas com verificação no final) ou então, para funções mais complicadas, usando a calculadora gráfica ou o computador. Vejamos o primeiro caso; seguiremos normalmente o seguinte plano no estudo de funções:

- a) Determinação do domínio (se o domínio não for fornecido, ele será o maior conjunto de números reais onde a expressão que define a função tem significado)
- b) Determinação de paridade (será uma função par ou ímpar?)
- c) Existência de assíntotas
- d) Determinação da primeira derivada
- e) Construção do quadro de variações e obtenção de extremos relativos e de intervalos de monotonia
- f) Determinação dos limites nas extremidades do domínio para completar o quadro de variações
- g) Determinação do contradomínio
- h) Determinação da segunda derivada
- i) Construção do quadro de concavidades e determinação dos pontos de inflexão
- j) Determinação dos pontos de interseção com os eixos coordenados
- k) Esboço do gráfico
- l) Determinação do gráfico usando a calculadora gráfica ou o computador e correção de eventuais erros de cálculo

TR

### TAREFA RESOLVIDA 4

---

Estuda a função polinomial definida por  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$ .

### RESOLUÇÃO

---

- a) O **domínio** é o conjunto dos números reais.
- b) **Determinação de paridade.** Temos  $f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 7$ . Como este valor não é igual (para todos os números reais) nem a  $f(x)$  nem a  $-f(x)$  então a função não é par nem ímpar.
- c) **Existência de assíntotas.** Não há assíntotas verticais pois não aparecerão limites infinitos para valores reais do domínio, por a função ser polinomial. Como a função é polinomial os limites nas extremidades infinitas do domínio irão dar sempre  $+\infty$  ou  $-\infty$ ; assim não há assíntotas não verticais.
- d) **Determinação da primeira derivada.** Temos  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$
- e) **Construção do quadro de variações.** Os zeros da derivada são:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -2$$

Podemos então construir o quadro de variação:

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		mínimo relativo		máximo relativo		mínimo relativo	

A função  $f$  tem um mínimo relativo em  $(-2, -25)$ , um máximo relativo em  $(0, 7)$  e um mínimo relativo em  $(1, 2)$ . A função  $f$  é crescente em  $] -2, 0[$  e  $] 1, +\infty[$ . A função  $f$  é decrescente em  $] -\infty, -2[$  e  $] 0, 1[$ .

f) **Determinação dos limites nas extremidades do domínio.** Temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4) = +\infty$$

Assim o quadro de variações completo será

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$1$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	$+\infty$	$-25$		$7$		$2$	$+\infty$

g) **Determinação do contradomínio.** Olhando para o quadro de variações completo concluímos que o contradomínio é  $[-25, +\infty[$ .

h) **Determinação da segunda derivada.** Temos  $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24$

i) **Construção do quadro de concavidades.** Começemos por determinar os zeros de  $f''$ . Temos

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 36x^2 + 24x - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow 12(3x^2 + 2x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

Podemos então construir o quadro de concavidades:

$x$	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$		$\frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$
		ponto de inflexão		ponto de inflexão	

A função tem a concavidade voltada para cima em  $\left] \frac{-\infty, -1 - \sqrt{7}}{3} \right[$  e em  $\left] \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}, +\infty \right[$  e tem a

concavidade voltada para baixo no intervalo  $\left] \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \right[$ . Tem dois pontos de inflexão nos pontos de abscissa  $\frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$  e  $\frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$ .

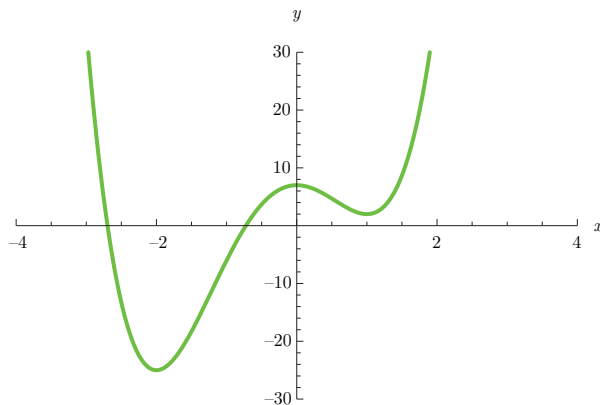
**j) Determinação dos pontos de interseção com os eixos coordenados.** Já vimos que o ponto  $(0,7)$  pertence ao gráfico e assim temos a interseção com o eixo dos YY. Vejamos as possíveis interseções com o eixo dos XX:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7 = 0$ .

Há 4 possíveis interseções mas não temos formas simples de as determinar de forma exata. Recorrendo a uma calculadora obtemos que as interseções são os pontos de abscissa  $-2,7$  e  $-0,7$  (aproximadamente).

**k) Esboço do gráfico**

Combinando os dois quadros podemos esboçar o gráfico da função  $f$ .

**l) Obtenção do gráfico com uma calculadora gráfica ou computador.** Obtemos algo como



Se porventura este gráfico for diferente do anterior podemos concluir que deverá ter havido algum erro, tendo assim a oportunidade de rever o que foi feito e emendá-lo.

## EXERCÍCIOS

9. Considera a função polinomial  $f$  definida por  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ .
- 9.1 Determina a ordenada do ponto de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo Oy.
- 9.2 O gráfico de  $f$  intersesta o eixo Ox em três pontos. Sabendo que um deles tem abcissa  $-3$  determina os outros dois.
- 9.3 Estuda  $f$  quanto à monotonia e extremos relativos.
- 9.4 Estuda a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
- 9.5 Com base no estudo efetuado, esboça o gráfico de  $f$ .
10. Considera a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{1}{e} - \frac{\ln(x)}{x}$ .
- 10.1 Determina o domínio de  $f$ .
- 10.2 Estuda a função  $f$  quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.
- 10.3 Mostra que  $f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x^2}$ .
- 10.4 Estuda a função  $f$  quanto à monotonia e quanto à existência de extremos.
- 10.5 Prova que  $f(x) \geq 0, \forall x \in D_f$ .
- 10.6 Mostra que  $f''(x) = \frac{3 - 2\ln(x)}{x^3}$ .
- 10.7 Estuda a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

## Estudo completo de funções (com calculadora)

Vejam agora como poderemos fazer o estudo de funções, usando uma calculadora gráfica ou um computador. Seguiremos normalmente o seguinte plano no estudo de funções com a calculadora:

- Determinação do domínio (se o domínio não for fornecido, ele será o maior conjunto de números reais onde a expressão que define a função tem significado)
- Determinação do gráfico da função e da sua derivada, usando a calculadora gráfica ou o computador (note-se que nesta primeira determinação pode não se conseguir descobrir todas as particularidades interessantes do gráfico da função)
- Determinação de paridade (será uma função par ou ímpar?) e de outras propriedades orientadoras (pertence a uma família de funções conhecida?)

- d) Determinação de valores aproximados para pontos notáveis já identificados (zeros, extremos, interseção com os eixos coordenados...)
- e) Existência de assíntotas
- f) Determinação da primeira derivada
- g) Construção do quadro de variações e obtenção dos valores exatos dos extremos relativos e determinação dos intervalos de monotonia
- h) Determinação dos limites nas extremidades do domínio para completar o quadro de variações
- i) Determinação do contradomínio
- j) Determinação da segunda derivada
- k) Construção do quadro de concavidades e determinação dos pontos de inflexão
- l) Confronto das conclusões do estudo analítico com os resultados numéricos e gráficos
- m) Registo do(s) gráfico(s) no papel, recorrendo eventualmente a escalas deformadas, assinalando as características notáveis obtidas



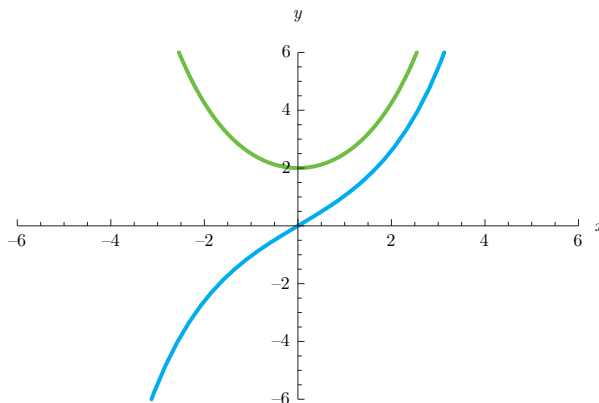
## TAREFA RESOLVIDA 5

Estuda a função definida por  $f(x) = 2^{-x} + 2^x$ .

Adaptado da brochura “Funções 12” – Ministério da Educação, 1999

## RESOLUÇÃO

- a) O domínio é o conjunto dos números reais.
- b) **Determinação do gráfico da função e da sua derivada usando a calculadora gráfica ou o computador.** Neste caso os gráficos da função e da sua derivada são algo do tipo:



A observação dos gráficos da função e da sua derivada permite-nos pensar que:



- a função é par;
- tem um mínimo absoluto que é 2, para  $x = 0$ ;
- é decrescente em  $]-\infty, 0[$  e crescente em  $]0, +\infty[$ ;
- tem contradomínio  $[2, +\infty[$ ;
- a concavidade está sempre voltada para cima

c) **Determinação de paridade.** Já vimos que  $f$  deve ser par. Temos  $f(-x) = 2^x + 2^{-x} = f(x)$  pelo que a função dada é par e por isso basta estudar o que se passa no intervalo  $]0, +\infty[$ .

d) **Determinação de valores aproximados para pontos notáveis já identificados** (zeros, extremos, interseção com os eixos coordenados...). Parece haver um mínimo absoluto para  $x = 0$ , que é também a interseção do gráfico de  $f$  com o eixo dos YY.

e) **Existência de assíntotas.** No gráfico traçado já vimos que não deve haver assíntotas. É claro que não há assíntotas verticais. Temos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  pelo que também não há assíntotas não verticais.

f) **Determinação da primeira derivada.** Temos  $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2$

g) **Construção do quadro de variações e obtenção dos valores exatos dos extremos relativos e determinação dos intervalos de monotonia.** Começemos por determinar os zeros da derivada. Temos

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^x = 2^{-x} \\ &\Leftrightarrow x = -x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Podemos agora fazer o quadro de variações

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		mínimo relativo	

Como a função é par poderíamos não ter estudado o que se passa em  $]-\infty, 0[$  mas neste caso, como há poucos intervalos com comportamento diferente, é mais fácil considerar todos os intervalos possíveis.

Concluimos então que a função  $f$  tem mínimo absoluto em  $(0, 2)$ . A função  $f$  é crescente  $]0, +\infty[$  e decrescente em  $]-\infty, 0[$ .

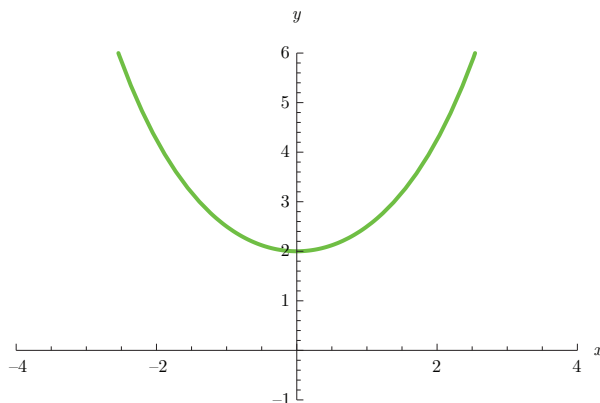
h) **Determinação dos limites nas extremidades do domínio para completar o quadro de variações.** Temos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Podemos então completar o quadro de variações:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
	$+\infty$	$2$	$+\infty$

Até ao momento o que obtivemos coincide com o que obtivemos no gráfico traçado inicialmente.

- i) **Determinação do contradomínio.** Olhando para o quadro de variações e o gráfico é claro que o contradomínio é  $[2, +\infty[$ .
- j) **Determinação da segunda derivada.** Temos  $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 + 2^{-x}(\ln 2)^2$
- k) **Construção do quadro de concavidades e determinação dos pontos de inflexão.** Observamos que a segunda derivada é sempre positiva pelo que a concavidade do gráfico da função é sempre a mesma e sempre voltada para cima. Não há pois pontos de inflexão.
- l) **Confronto das conclusões do estudo analítico com os resultados numéricos e gráficos.** As duas análises feitas são totalmente concordantes.
- m) **Registo do(s) gráfico(s) no papel, recorrendo eventualmente a escalas deformadas, assinalando as características notáveis obtidas.** O gráfico representativo de todas as características obtidas é o seguinte:



## EXERCÍCIOS

11. Estuda, com o auxílio de uma calculadora gráfica ou de um computador, a função definida por  $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$ .
12. Estuda, com o auxílio de uma calculadora gráfica ou um computador, a função definida por  $h(x) = \frac{x}{1 - \log x}$ .

Adaptado da brochura “Funções 12” – Ministério da Educação, 1999

## Problemas de máximos e mínimos

O conceito de derivada é um dos mais utilizados nas aplicações de Matemática. Já vimos várias vezes que a taxa de variação (instantânea) é a derivada pelo que situações como a da velocidade ou aceleração da Física, a do custo marginal da Economia, etc, são resolvidas usando as técnicas das derivadas.

Em presença de um problema que envolva máximos e mínimos (também dito problema de optimização) podemos usar o seguinte método de trabalho:

- analisar bem a situação fornecida, reconhecendo quais as quantidades, variáveis em jogo e as possíveis relações entre elas;
- definir uma função que permita responder ao pedido (normalmente será uma função para a qual se pretende determinar um máximo ou um mínimo);
- simplificar a função obtida de modo a incluir apenas uma variável independente;
- estudar a função obtida de modo a determinar os seus extremos (ou qualquer outra propriedade requerida pelo enunciado);
- confrontar o resultado obtido com os dados fornecidos pelo problema para nos certificarmos de que o resultado é compatível com os mesmos.

TR

### TAREFA RESOLVIDA 6

Uma empresa concluiu que o custo de fabrico (em milhares de euros)  $C$  varia em função da quantidade de peças produzidas  $x$  (em milhares de peças) de acordo com a expressão  $C(x) = 2x^3 - x^2 + 4x$

O **custo médio** de fabrico do produto é dado pelo quociente  $\frac{C(x)}{x}$ . O **custo marginal** para um

fabrico de  $p$  milhares de peças é dado por  $C'(p)$  e é aproximadamente igual ao valor do aumento do custo quando em vez de  $p$  milhares de peças se fabricam  $p + 1$  milhares de peças.

- Qual é o número de peças que torna mínimo o custo médio?
- Determina o custo marginal na presente situação.
- Verifica que o número de peças que torna mínimo o custo médio faz com que este custo médio se torne igual ao custo marginal.

### RESOLUÇÃO

a) O custo médio no presente caso é dado por  $M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^3 - x^2 + 4x}{x} = 2x^2 - x + 4$

Para determinar o valor que torna a função  $M$  mínima temos de determinar a função derivada e os seus zeros. Temos  $M'(x) = 4x - 1$

Podemos então construir o seguinte quadro de variação:

$x$	$-\infty$	$1/4$	$+\infty$
$M'(x)$	$-$	$0$	$+$
$M(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		mínimo relativo	

Do quadro de variações concluímos ainda que o mínimo relativo obtido é o mínimo absoluto, pelo que podemos dizer que o número de peças a produzir para minimizar o custo médio é  $1/4$  de milhar de peças, ou seja, 250 peças.

b) Neste caso o custo marginal é dado por  $C'(x)$ . Ou seja  $C'(x) = 6x^2 - 2x + 4$

c) Para responder à questão temos de mostrar que  $M(0,25) = C'(0,25)$

$$\text{Ora } M(0,25) = \frac{C(0,25)}{0,25} = 3,875 \text{ e } C'(0,25) = 6 \times 0,25^2 - 2 \times 0,25 + 4 = 3,875$$

Provámos assim que se verifica o que era pedido.

## EXERCÍCIOS

13. Admite que  $t$  dias após as zero horas do dia 1 de janeiro de 2012, o número  $P$ , de Gambuzinos, em milhares, existentes numa determinada cultura, é dado aproximadamente

$$\text{por } P(t) = \frac{80}{4 + 25e^{-0.1t}}, \quad t \geq 0$$

13.1 Determina quantos Gambuzinos havia às 12 horas do dia 1 de Fevereiro de 2012. Apresenta o resultado em milhares de Gambuzinos, arredondado às décimas.

13.2 Determina em que dia do ano de 2012, o número de Gambuzinos foi pela primeira vez superior a nove milhares.

13.3 Recorrendo às capacidades da calculadora, mostra que o aumento instantâneo máximo atingido pela cultura foi de 500 Gambuzinos por dia. Explica como procedeste.

14. Admite que a biomassa  $M$ , em miligramas, de uma cultura bacteriana,  $t$  horas após o

$$\text{início da observação da cultura, é dada por } M(t) = \frac{800}{1 + 43e^{-0.4t}}, \quad t \geq 0$$

14.1 Determina o tempo necessário para que a cultura atinja 400 mg de massa.

14.2 Determina uma expressão para  $M'(t)$  e mostra que a função  $M$  é estritamente crescente.

14.3 Mostra que o gráfico da função  $M$  tem uma assíntota horizontal e interpreta esse facto no contexto da situação descrita.

## LEITURA(S)

## O estudo matemático do cancro

O cancro é uma doença na qual um grupo de células cresce de forma descontrolada formando um tumor que, com exceção do caso da leucemia, destrói as células e os tecidos próximos. Na realidade, um tumor inclui células normais, para além das células cancerosas, provindo estas últimas de uma célula normal que sofreu um processo de transformação maligna. Tratando-se de uma doença clássica, o cancro é um dos temas de estudo da biologia matemática. A sua importância é tal que recentemente existe uma base de dados conhecida como QCDB (**Quantitative Cancer Modelling Database**), na qual a informação existente sobre esta doença é armazenada para uso por parte de biomatemáticos do mundo inteiro.

O papel da Matemática no estudo do cancro incide na aplicação de modelos matemáticos e na realização de simulações por computador. A contribuição da matemática na luta contra esta doença tem assim duas vertentes. Por um lado, fornece auxílio quando é necessário propor novas hipóteses ou conjecturas sobre as causas que levam à formação de um tumor. Por outro, a utilização de modelos matemáticos permite integrar e, portanto, compreender muito melhor a abundância de dados experimentais e clínicos de que se dispõe.

Em 1964, uma investigadora americana chamada Anna Kane Laird observou que o crescimento dos tumores, quando estes se desenvolvem em condições limitadas tanto de espaço como de alimento, rege-se pela conhecida equação de crescimento de Gompertz. Um exemplo clássico a este respeito é o do cancro da mama. Segundo esta lei de crescimento, o ritmo ou a velocidade  $\gamma'$  à qual aumenta com o tempo  $t$  o tamanho  $\gamma$  de um tumor nessas circunstâncias – tamanho que se pode exprimir através do seu volume ou, se se preferir, pelo seu número de células – é modelado de acordo com a seguinte equação com derivadas (dita equação diferencial):

$$\gamma'(t) = c \log \left( \frac{K}{\gamma(t)} \right) \gamma(t)$$

Nesta expressão,  $c$  é um parâmetro relacionado com a capacidade de proliferação das células cancerosas do tumor, sendo  $K$  o tamanho máximo que o tumor pode atingir, já que, lembre-se, a quantidade de tecido disponível para o tumor se propagar é limitada, tal como são limitados os nutrientes. Resolvendo esta equação obtém-se a solução, que neste caso corresponde à lei de crescimento de Gompertz. Esta lei foi proposta em 1825 pelo matemático britânico Benjamin Gompertz como um refinamento do modelo de Malthus, tendo pela primeira vez sido usada pelas companhias de seguros. A ideia subjacente à lei de Gompertz é que a taxa de mortalidade aumenta em progressão geométrica com a idade.

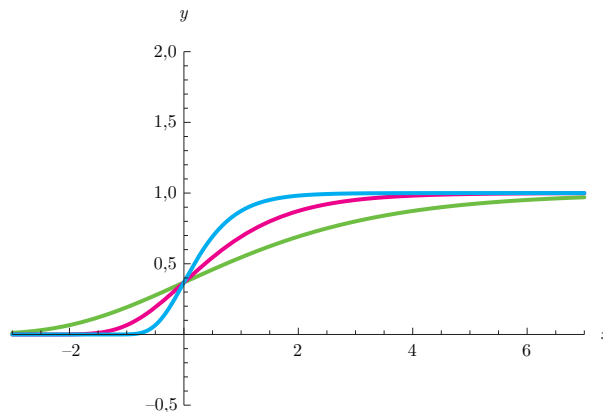


Sobreviventes do cancro fotografados durante a “Corrida para a cura” organizada em Madison, Wisconsin, EUA em 4 de Junho de 2005

Se aplicarmos a lei de Gompertz num contexto diferente, nomeadamente ao cancro, o tamanho de um tumor  $\gamma$  será então regido pela expressão

$$\gamma(t) = Ke^{\frac{\log \gamma(0)}{K} e^{-ct}}$$

sendo  $\gamma(0)$  o tamanho inicial do tumor. De acordo com este modelo, se o paciente estiver em tratamento, então  $\gamma(0)$  será inferior a  $K$ , aumentando de tamanho no caso contrário.



Esta é uma função com uma forma sigmoide muito semelhante à da função logística, partilhando com esta a particularidade do crescimento ser mais lento no início e no final do processo.

Na década de 1980, um investigador inglês chamado T.E. Wheldon observou que o crescimento dos tumores de pequena dimensão não se encaixava muito bem nesta lei, a qual, na realidade, não tem em conta vários aspetos biológicos, como por exemplo a função desempenhada pelo sistema imunitário. O aperfeiçoamento introduzido por Wheldon considera que no início do crescimento do tumor as células cancerosas não competem pelos recursos disponíveis, sendo por isso o seu crescimento exponencial. No entanto, existe um valor crítico para o tamanho do tumor, acima do qual o crescimento abandona o seu comportamento exponencial e se ajusta à lei de Gompertz.

Adaptado de “A Matemática da Vida” de Rafael Lahoz-Beltra, RBA, 2011

## SÍNTESE

### O essencial passado em revista

A equação da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  é dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Se a derivada de uma função é (estritamente) positiva num intervalo aberto, a função é (estritamente) **crecente** nesse intervalo, e se a derivada for (estritamente) negativa a função é (estritamente) **decrecente** nesse intervalo.

O **Teorema de Fermat** diz que se uma função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo, então a derivada é nula nesse ponto. Os pontos onde a derivada se anula não são necessariamente pontos onde há extremo (basta pensar na função  $g(x) = x^3$  que tem derivada nula para  $x = 0$  e contudo não tem aí extremo).

Se a função  $g = f'$  for derivável então a função derivada de  $g$  chamaremos a **segunda derivada de  $f$**  e designamo-la por  $f''$ .

Se a função  $h = f''$  for derivável então a função derivada de  $h$  chamaremos a **terceira derivada de  $f$**  e designamo-la por  $f'''$ .

**Teorema 1:** Num intervalo aberto a função  $f'$  é crescente se e somente se  $f'' \geq 0$  nesse intervalo. Num intervalo aberto a função  $f'$  é decrescente se e somente se  $f'' \leq 0$  nesse intervalo.

**Definição 1 – Concavidade:** Diz-se que o gráfico de  $f$  tem a **concavidade voltada para cima** num intervalo aberto quando nesse intervalo a segunda derivada de  $f$  é positiva ou nula. Diz-se que o gráfico de  $f$  tem a **concavidade voltada para baixo** num intervalo aberto quando nesse intervalo a segunda derivada de  $f$  é negativa ou nula.

**Definição 2 – Ponto de inflexão:** Diz-se que o ponto  $(a, f(a))$  é **ponto de inflexão** do gráfico de  $f$  se existirem intervalos abertos  $]a_1, a[$  e  $]a, a_2[$  tais que os sentidos da concavidade nesses dois intervalos sejam contrários.

**Teorema 2:** Se  $f$  tem segunda derivada e  $(a, f(a))$  é um **ponto de inflexão** do gráfico de  $f$ , então tem-se que  $f''(a) = 0$ .

## Exercícios globais

### Prática ↑

1. Seja  $g$  uma função real de variável real, de domínio  $\mathbb{R}$ , tal que  $g(x) = 2 + e^{x^2}$ .
  - 1.1 Mostra que  $g'(1) = 2e$ .
  - 1.2 Determina uma equação da reta,  $r$ , tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa 1.
  - 1.3 Determina a abscissa do ponto de interseção da reta  $r$  com o eixo  $Ox$ , com uma aproximação às centésimas.
2. Usando a função derivada, estuda, quanto à monotonia e existência de extremos relativos, cada uma das seguintes funções, começando por determinar, para cada uma das funções, o seu domínio.

$$2.1 \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x + 2$$

$$2.2 \quad f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$2.3 \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$2.4 \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

$$2.5 \quad f(x) = x^2 \ln(x) - 2$$

$$2.6 \quad f(x) = \sqrt{12 - 2x - 2x^2}$$

$$2.7 \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$$

3. Considera a função real de variável real  $g$  definida por  $g(x) = \ln(16x - x^2)$ .  
Estuda a função quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
4. Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = 3(\ln(x))^2 + 6\ln(x) - 9$ .
  - 4.1 Determina, caso existam os zeros da função  $g$ .
  - 4.2 Estuda a função  $g$  quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
  - 4.3 Estuda a função  $g$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
5. Considera a função real de variável real,  $h$ , definida por  $h(x) = -\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + \ln(x)$ .
  - 5.1 Determina o domínio da função  $h$ .



**5.2** Resolve a inequação  $h(x) \leq 0$ .

Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

**5.3** Mostra que  $h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x}$ .

Usa este resultado para mostrar que  $h(x) \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$

**5.4** Estuda a função  $h$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

### Pensa e Resolve ↑ ↑

**6.** Seja  $g$  uma função real de variável real, de domínio  $\mathbb{R}$ . A reta de equação  $y = 3x - 1$  é tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa 2.

Determina o valor de  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x - 2)}$ .

**7.** Considera a função  $g$  definida por  $g(x) = x(1 - \ln(x))$ .

**7.1** Determina o domínio de  $g$ .

**7.2** Determina uma equação da reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa  $x = e^3$ .

**7.3** Determina uma equação da reta que passa pelo ponto de coordenadas  $(e^{-1}, e)$  e é paralela à reta que é tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abscissa 1.

**7.4** Seja  $s$  a reta tangente ao gráfico de  $g$  que tem declive 1. Determina a equação reduzida da reta  $s$ .

**7.5** Determina uma equação da reta tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto onde este intersesta o eixo  $Ox$ .

**7.6** Considera a reta  $r$ , uma reta tangente ao gráfico de  $g$  e que tem ordenada na origem igual a 3. Determina as coordenadas do ponto de tangência.

**8.** Considera as funções reais de variável real definidas por  $f(x) = \ln(x) - 1$  e  $g(x) = \frac{1}{2}e^x - 3$ .

Considera, ainda, a reta  $s$  que passa pelo ponto  $A$ , ponto de interseção da reta  $y = \frac{3}{2}$  com o gráfico da função  $g$  e pelo ponto  $B$ , ponto de interseção da função  $g$  com o eixo das ordenadas.

Determina o ponto de tangência da reta tangente ao gráfico de  $f$  que é paralela à reta  $s$ , com uma aproximação às centésimas.

9. Seja  $f$  uma função real de variável real tal que  $f'(5) = 3$  e  $f(5) = 2$ .

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ ? Justifica a tua resposta.

10. A D. Esmeralda acabou de fazer uma sopa e, às dez horas, colocou-a no frigorífico, onde nesse momento, a temperatura era de  $6^\circ$  Celsius.

Como era de esperar, assim que colocou a sopa no frigorífico, a temperatura dentro dele começou a aumentar, tendo atingido um valor máximo e voltado depois a diminuir, aproximando-se da temperatura inicial.

Admite que a temperatura,  $T$ , no interior do frigorífico, medida em graus Celsius,  $t$ , minutos após a sopa ter sido lá colocada, é dada por  $T(t) = 6 + 0.3te^{-0.03t}$ ,  $t \geq 0$

Nas duas primeiras alíneas, sempre que nos cálculos intermédios procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.

- 10.1 Qual era a temperatura no interior do frigorífico às dez horas e um quarto? Apresenta o resultado em graus Celsius, arredondado às décimas.

- 10.2 Recorrendo à calculadora, resolve o seguinte problema:

A que horas começou a temperatura no interior do frigorífico a diminuir?

Apresenta o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

- 10.3 Determina ao fim de quanto tempo é que a temperatura no interior do frigorífico estava a diminuir mais rapidamente. Apresenta o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

11. Admite que a quantidade,  $B$ , de milhares de bactérias, existentes nas águas de uma piscina, desde o instante em que se inicia o tratamento das águas é dada aproximadamente por

$$B(t) = (t + 1.5)^2 e^{-0.55t+3}, \quad (t \geq 0)$$

A variável  $t$  designa o tempo, medido em dias, que decorre desde o instante em que se iniciou o tratamento das águas.

- 11.1 Determina ao fim de quantos dias as medidas tomadas para o tratamento das águas se tornaram eficazes, começando a fazer diminuir o número de bactérias. Apresenta o resultado aproximado às décimas.

- 11.2 Mostra, utilizando o teorema de Bolzano, que, ao longo do nono dia de tratamento, houve pelo menos um instante em que o número de bactérias era de 20 milhares.

- 11.3 Utiliza as capacidades gráficas da tua calculadora para calcular durante quanto tempo é que o número de bactérias foi superior ao seu valor inicial. Apresenta o resultado em dias e horas, com as horas arredondadas às unidades. Na resposta deves apresentar o(s) gráfico(s) e as coordenadas de alguns pontos relevantes visualizados na calculadora (coordenadas arredondadas às décimas).

## Reflete ↑ ↑ ↑

12. Determina uma equação das retas tangentes ao gráfico da função definida por  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  nos pontos de abscissas:  $x = 0$  e  $x = 2$ .

Usa a tua calculadora para visualizares uma representação gráfica conjunta do gráfico da função  $f$  e das duas retas. Esboça a imagem que visualizas na calculadora na folha de papel.

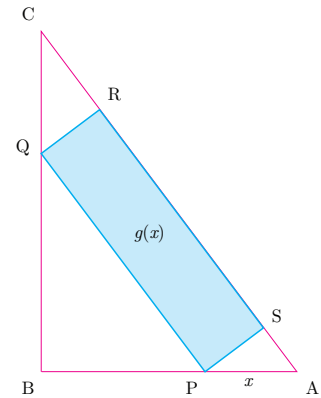
13. Na figura está representado um triângulo retângulo  $[ABC]$  em que  $\overline{AB} = 9$  e  $\overline{BC} = 12$ .

Considera que um ponto  $P$  se desloca ao longo do cateto sem coincidir, nem com  $A$  nem com  $B$ .

Para cada posição do ponto  $P$ , considera o retângulo  $[PQRS]$  em que o vértice  $Q$  pertence ao cateto  $[BC]$  e o lado  $[RS]$  está

contido na hipotenusa  $[AC]$ .

Seja  $x$  a distância de  $A$  a  $P$  e seja  $g(x)$  a área do retângulo  $[PQRS]$ .



- 13.1 Determina o domínio da função  $g$ .

- 13.2 Mostra que  $\overline{PS} = \frac{4}{5}x$  e que  $\overline{PQ} = \frac{5}{3}(9 - x)$ .

- 13.3 Define a função  $g$  por meio de uma expressão analítica.

- 13.4 Utilizando a derivada, estuda a função  $g$  quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

- 13.5 Determina as dimensões do retângulo de área máxima, tendo em conta o estudo feito na alínea anterior.

14. Considera a função  $g$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $g(x) = \begin{cases} \ln(e^x - 1) & \text{se } x > 0 \\ e^{x^2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ .

- 14.1 Determina os zeros de  $g$ .

- 14.2 Estuda  $g$  quanto à continuidade.

- 14.3 Estuda a função  $g$  quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

- 14.4 Determina a função derivada de  $g$ .

- 14.5 Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abscissa  $-1$ .

15. Seja  $f$  uma função, tal que  $f'$  existe nalgum intervalo aberto contendo o intervalo  $]a, b[$ . Mostra que se no intervalo aberto  $]a, b[$ , quando considerados os pontos  $A = (a, f(a))$ ,  $B = (b, f(b))$  do gráfico de  $f$ , o gráfico de  $f$  em  $]a, b[$  fica abaixo do segmento de recta  $AB$  então  $f'$  é crescente em  $]a, b[$ .

## Conselhos para os exames – n.º 11

### Sugestões para abordar problemas de máximos e mínimos

O enunciado de um problema de máximos e mínimos nem sempre é muito esclarecedor sobre qual o caminho a seguir. Eis algumas sugestões para os tentar entender:

- Lê o enunciado duas vezes;
- identifica quais as variáveis em jogo e atribui letras a cada uma;
- decide qual a quantidade a maximizar ou minimizar;
- faz um esboço da situação, se possível;
- procura relações entre as variáveis em jogo (umas poderão ser dadas no enunciado, outras poderão estar implícitas no mesmo: áreas, volumes, teorema de Pitágoras, etc.);
- procura uma equação que defina a quantidade a maximizar ou minimizar em função das restantes;
- simplifica a equação de modo a que a quantidade a maximizar ou minimizar seja função de apenas uma variável;
- aplica as técnicas de derivação para resolver o problema.

Vejamos como aplicar estas regras numa situação concreta. Pretendemos resolver o seguinte problema:

“Estão disponíveis 330 euros para fazer uma cerca para delimitar um jardim retangular. O custo da cerca no lado que está virado para uma rua custa 6 euros por metro. O custo da cerca para os outros três lados é de 2 euros por metro. Determina as dimensões do jardim, nestas condições, que tenha a maior área possível.”

- Quais as variáveis em jogo?  $C$  = Custo da cerca retangular,  $L$  = largura da cerca,  $P$  = comprimento da cerca,  $A$  = área da cerca.
- Pretendemos determinar o valor máximo para a área  $A$ .

d) Um esboço pode ser:

e) Temos que  $A = P \times L$ , que  $C = 6P + 2 \times 2 \times L + 2P = 8P + 4L$

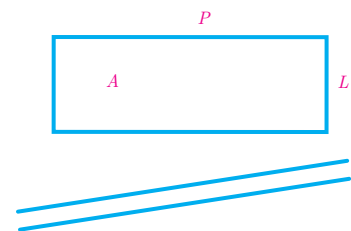
e que  $C = 330$ .

f) Vamos maximizar a área  $A = P \times L$ .

g) Como  $C = 330$  e  $C = 8P + 4L$  vem que  $330 = 8P + 4L$  e  $L = 330/4 - 2P$ . Substituindo em  $A = P \times L$  vem que  $A = P \times (330/4 - 2P) = 330/4 \times P - 2P^2$ .

h) Temos que derivar a função  $A(P) = 330/4 \times P - 2P^2$

Temos que  $A'(P) = 330/4 - 4P$  e esta função derivada tem um zero para  $P = 330/16$ . Este valor é um maximizante (porquê?) pelo que a área será máxima quando o comprimento do jardim for  $P = 330/16$  e a largura for  $L = 330/8$ .



## Itens de exame

### Escolha múltipla

1. A reta de equação  $y = x$  é tangente ao gráfico de uma certa função  $f$ , no ponto de abscissa 0. Qual das seguintes expressões pode definir a função  $f$ ?

(A)  $x^2 + x$                       (B)  $x^2 + 2x$                       (C)  $x^2 + 2x + 1$                       (D)  $x^2 + x + 1$

2. Um projétil é lançado verticalmente de baixo para cima.

Admite que a sua altitude  $h$  (em metros),  $t$  segundos após ter sido lançado, é dada pela expressão  $h(t) = 100t - 5t^2$

Qual é a velocidade (em metros por segundo) do projétil, dois segundos após o lançamento?

(A) 80                      (B) 130                      (C) 170                      (D) 230

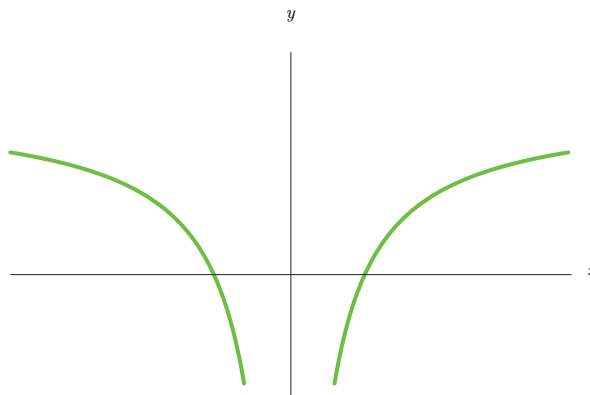
3. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que a sua **derivada**,  $f'$ , é tal que  $f'(x) = x - 2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

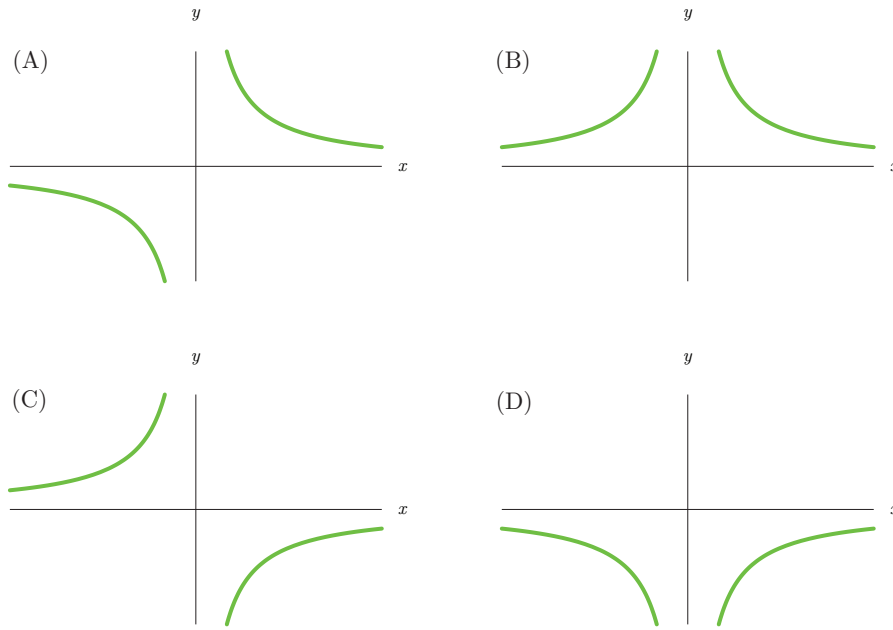
Relativamente à **função**  $f$ , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A)  $f$  é crescente em  $\mathbb{R}$ .                      (B)  $f$  é decrescente em  $\mathbb{R}$ .  
 (C)  $f$  tem um mínimo para  $x = 2$ .                      (D)  $f$  tem um máximo para  $x = 2$ .

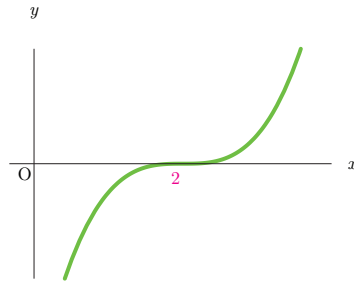
4. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .



Qual das figuras seguintes pode ser parte da representação gráfica da função  $g'$ , derivada de  $g$ ?

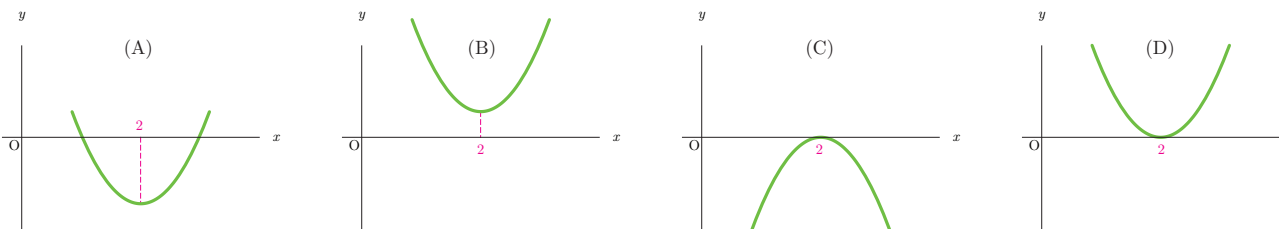


5. Na figura junta está a representação gráfica de uma função  $f$ .



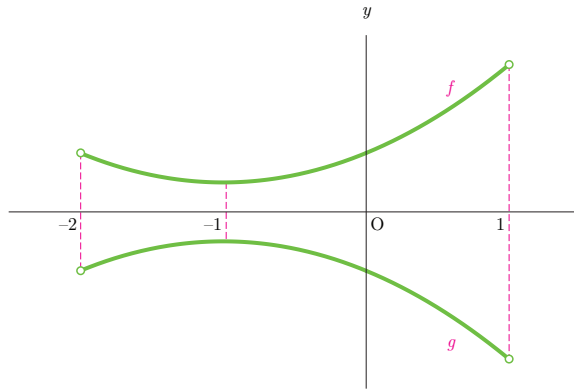
O eixo  $Ox$  é tangente à curva representativa do gráfico de  $f$ .

A representação gráfica de  $f'$  pode ser



6. Na figura abaixo estão representadas graficamente duas funções diferenciáveis  $f$  e  $g$ .

As duas funções têm extremo para  $x = -1$ .



O conjunto solução da condição  $f'(x) < g'(x)$  é

- (A)  $] -2, -1[$       (B)  $] -2, -1]$       (C)  $] -1, 1[$       (D)  $[-1, 1[$

7. Seja  $g$  uma função contínua de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

-  $g$  tem mínimo absoluto igual a 3, para  $x = 2$ ;

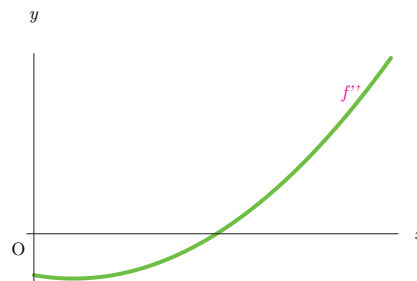
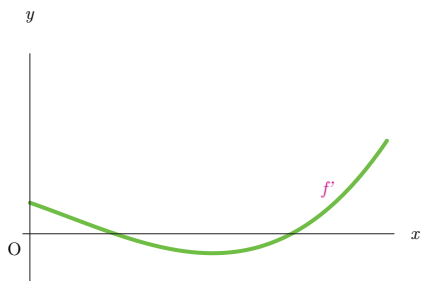
-  $g$  tem máximo absoluto igual a 7, para  $x = 5$ .

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

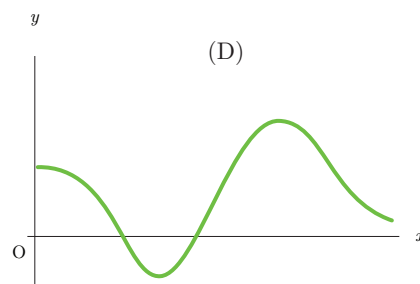
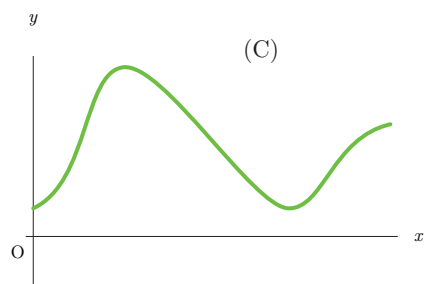
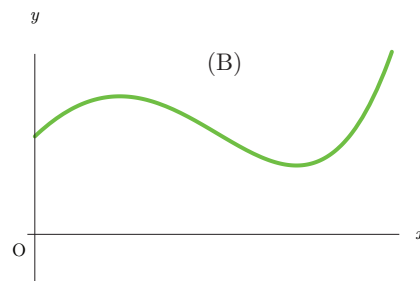
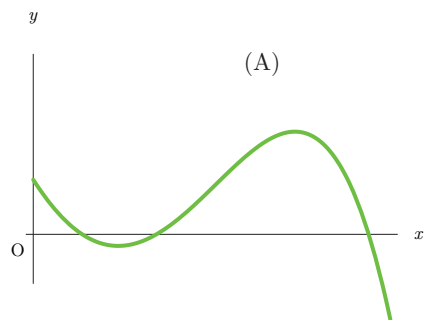
- (A)  $g$  é crescente em  $[2, 5]$       (B) O contradomínio de  $g$  é  $[3, 7]$   
 (C)  $g$  tem derivada nula em  $x = 2$  e  $x = 5$       (D)  $g$  tem pelo menos um zero

8. Seja  $f$  uma função de domínio  $[0, +\infty[$ .

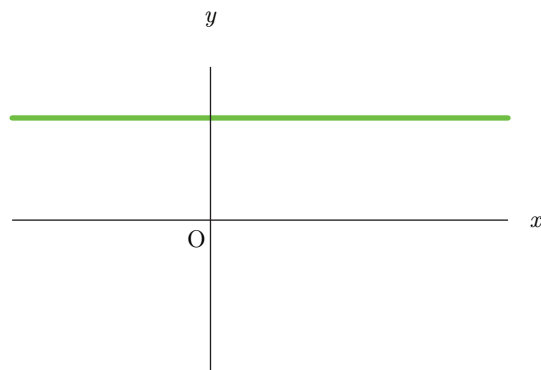
Na figura abaixo à esquerda está parte da representação gráfica da função  $f'$  e, na figura à direita, parte da representação gráfica da função  $f''$ , respetivamente **primeira** e **segunda** derivadas de  $f$ .



Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica da função  $f$ ?

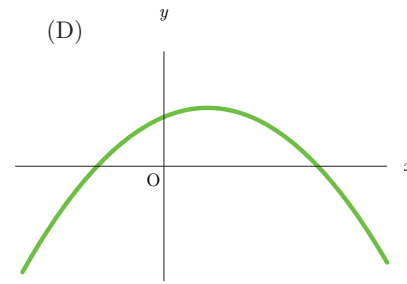
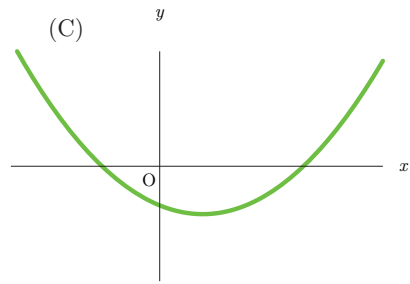
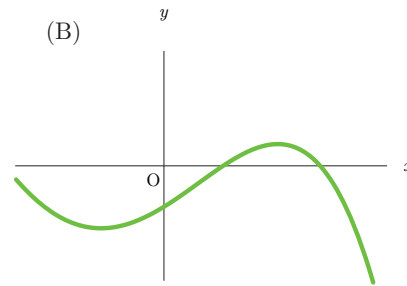
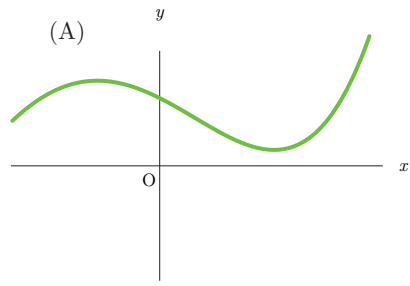


9. Na figura ao lado está representado o gráfico de  $g''$ , segunda derivada de uma certa função  $g$ .



Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função  $g$ ?

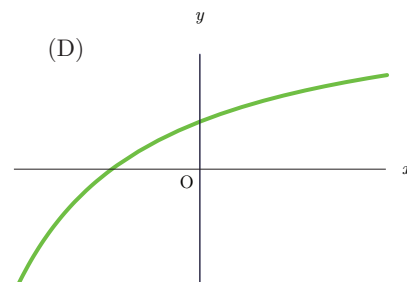
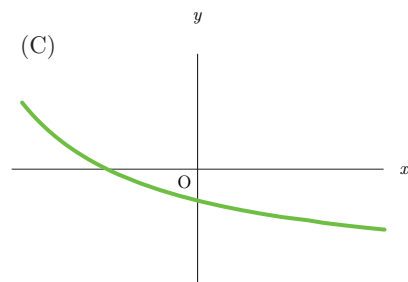
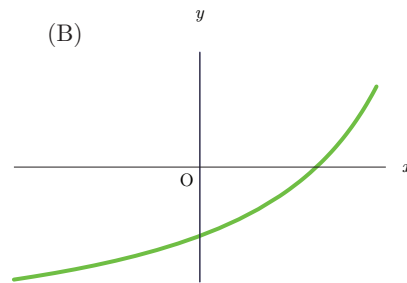
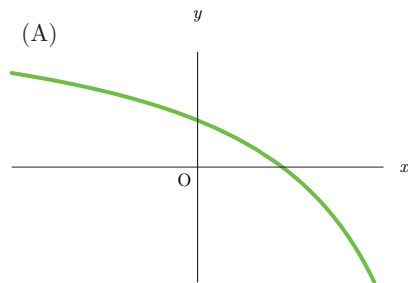




10. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que a primeira e a segunda derivadas de  $f$  são negativas em  $\mathbb{R}$ .

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função  $f$ ?



11. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$  e  $a$  um ponto do domínio de  $f$  tal que  $f'(a) = 0$ .

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A)  $a$  é zero de  $f$

(B)  $f(a)$  é extremo relativo de  $f$

(C)  $(a, f(a))$  é ponto de inflexão do gráfico de  $f$

(D) A reta de equação  $y = f(a)$  é tangente ao gráfico de  $f$

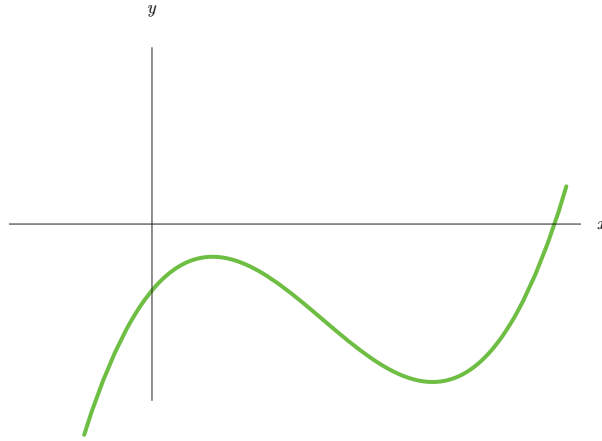
12. De uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que a sua derivada é dada por

$$f'(x) = x^3 - 3x + 1$$

Em qual dos conjuntos seguintes **o gráfico de  $f$**  tem a concavidade voltada para baixo?

(A)  $] -1, 1[$       (B)  $] -\infty, -1[$       (C)  $] 0, 3[$       (D)  $] -\infty, 0[$

13. Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ .



Sejam  $h'$  e  $h''$  a primeira e a segunda derivadas de  $h$ , respetivamente.

Admite que estas duas funções também têm domínio  $\mathbb{R}$ .

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A)  $h(0) + h''(0)$       (B)  $h(0) - h'(0)$   
(C)  $h'(0) - h''(0)$       (D)  $h'(0) \times h''(0)$

14. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2 + 1$ .

Seja  $g$  a função cujo gráfico é a reta representada na figura.

Seja  $h = f + g$

Seja  $h'$  a função derivada da função  $h$ .

O gráfico da função  $h'$  é uma reta. Sejam  $m$  e  $b$ , respetivamente, o declive e a ordenada na origem desta reta.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A)  $m > 0$  e  $b > 0$                       (B)  $m > 0$  e  $b < 0$   
(C)  $m < 0$  e  $b > 0$                       (D)  $m < 0$  e  $b < 0$

## Resposta aberta

15. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .

15.1 Determina, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa 2.

15.2 No intervalo  $]0, 5]$ , a reta de equação  $y = 6$  interseca o gráfico da função nos pontos  $A$  e  $B$ . Determina a distância de  $A$  a  $B$ , com aproximação às décimas recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora. Apresenta o gráfico, ou os gráficos, em que te baseaste para dares a tua resposta, assinalando os pontos  $A$  e  $B$  e indicando as suas coordenadas com aproximação às décimas.

16. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

16.1 Sem recorrer à calculadora, resolve as duas alíneas seguintes:

16.1.1 Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1.

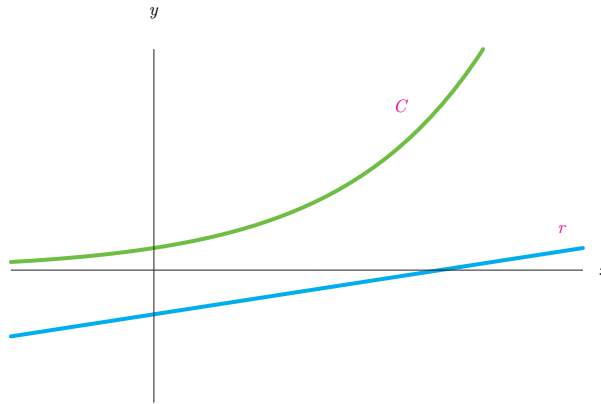
16.1.2 Estuda a função  $f$  quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

16.2 O conjunto solução da inequação  $f(x) \leq 3 + \ln(x)$  é um intervalo fechado  $[a, b]$ .

Recorrendo à tua calculadora, determina, **graficamente**, valores para  $a$  e  $b$ , arredondados às centésimas. Apresenta, na tua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

17. Na figura estão representados num referencial o. n.  $xOy$ :

- uma curva  $C$ , gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x$ ;
- uma reta  $r$ , gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = x - 2$ .

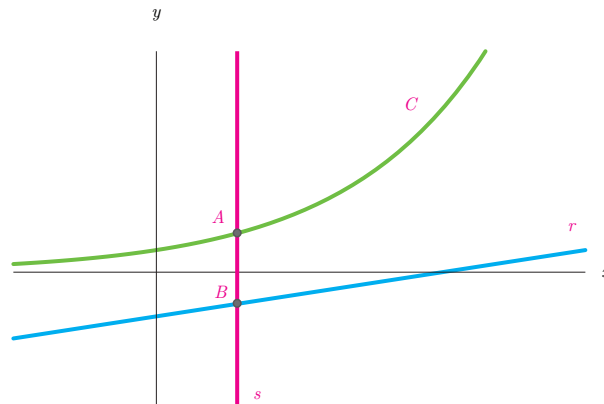


17.1 Utiliza métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

17.1.1 Determina uma equação da reta paralela à reta  $r$  e tangente à curva  $C$ .

17.1.2 Estuda a função  $f + g$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

17.2 Considera agora que se acrescentou à figura anterior uma reta  $s$ , paralela ao eixo  $Oy$ .



Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseção da reta  $s$  com a curva  $C$  e com a reta  $r$ , respetivamente.

Imagina que a reta  $s$  se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo  $Oy$ . Os pontos  $A$  e  $B$  acompanham, naturalmente, o deslocamento da reta  $s$ .

Seja  $x$  a abcissa do ponto  $A$ .

**Recorrendo à calculadora**, determina  $x \in [0, 2]$  tal que  $AB = 5$ . Apresenta o resultado aproximado às décimas. Explica como procedeste (na tua explicação, deves incluir o gráfico, ou gráficos, que consideraste para resolver esta questão).

18. Prova que, para qualquer função quadrática  $g$ , existe um e um só ponto do gráfico onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

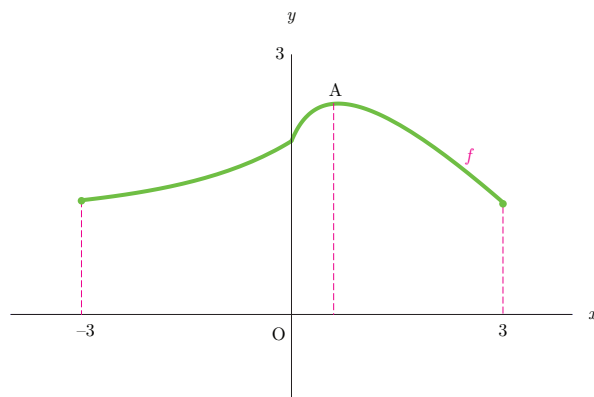
19. O polinómio  $A(x) = x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x - 6$  tem quatro raízes reais distintas.

Recorrendo à tua calculadora, determina, com aproximação às décimas, o número real positivo  $k$  para o qual o polinómio  $B(x) = A(x) - k$  tenha três raízes reais distintas.

Explica como procedeste. Na tua explicação, deves incluir o(s) gráfico(s) obtido(s) na tua calculadora, bem como coordenada(s) que consideres relevante(s) de algum(ns) ponto(s).

20. Seja  $f$  a função de domínio  $[-3, 3]$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + x}{x} & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 2 - x + \ln(1 + 3x) & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Na figura está representado o gráfico da função  $f$ .

Tal como a figura sugere:

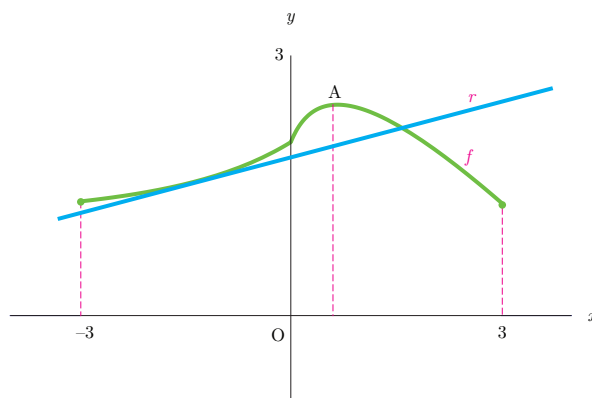
- $A$  é o ponto do gráfico de  $f$  de ordenada máxima;
- a abcissa do ponto  $A$  é positiva.

20.1 Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolve as duas alíneas seguintes:

20.1.1 Determina a abcissa do ponto  $A$ .

20.1.2 Mostra que, tal como a figura sugere,  $f$  é contínua no ponto 0.

20.2 Na figura está novamente representado o gráfico de  $f$ , no qual se assinalou um ponto  $B$ , no segundo quadrante.



A reta  $r$  é tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto  $B$ .

Considera o seguinte problema:

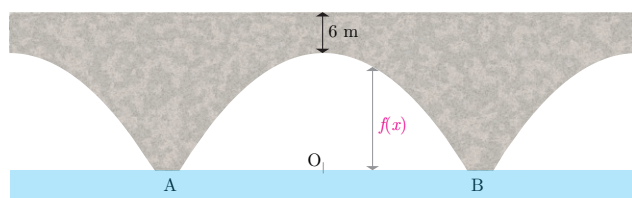
**Determinar a abscissa do ponto  $B$ , sabendo que a reta  $r$  tem declive  $0.23$**

Traduz este problema por meio de uma equação e, recorrendo à calculadora resolve-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abscissa do ponto  $B$ .

Podes realizar algum trabalho analítico antes de recorrer à calculadora.

Reproduz o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresenta **o valor pedido arredondado às centésimas**.

21. A figura representa uma ponte sobre um rio.



A distância mínima do arco central da ponte ao tabuleiro é de 6 metros.

Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseção do arco central da ponte com o nível de água do rio, e seja  $O$  o ponto médio de  $[AB]$ .

Considera a reta  $AB$  como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto  $O$  e onde uma unidade corresponde a um metro.

Para cada ponto situado entre  $A$  e  $B$ , de abscissa  $x$ , a altura do arco, em metros, é dada por

$$f(x) = 36 - 9(e^{0.06x} + e^{-0.06x})$$

- 21.1 Recorrendo ao estudo da derivada da função  $f$ , mostra que, tal como a figura sugere, é

no ponto de abscissa zero que a altura do arco é máxima.

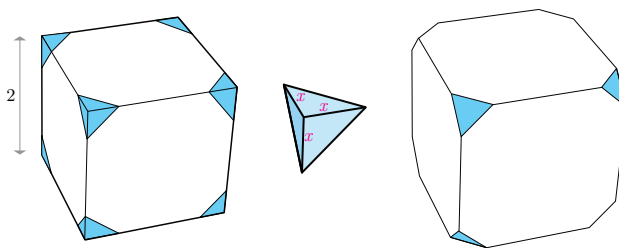
- 21.2** Uma empresa está a estudar a hipótese de construir uma barragem neste rio. Se tal empreendimento se concretizasse, o nível das águas no local da ponte subiria 27 metros.

Nesse caso, a ponte ficaria totalmente submersa? Justifica a tua resposta.

- 21.3** Mostra que a distância, em metros, entre  $A$  e  $B$  é um valor compreendido entre 43 e 44.

- 22.** A figura A representa um cubo de aresta 2.

Considera, para cada vértice, os pontos das arestas que estão à distância  $x$  ( $0 < x \leq 1$ ) desse vértice. Seccionado o cubo por planos que contêm esses pontos, obtemos o poliedro (**cubo truncado**) representado na figura B.



- 22.1** Mostra que o volume do **cubo truncado** é dado, em função de  $x$ , por

$$V(x) = \frac{24 - 4x^3}{3} \quad (x \in ]0, 1])$$

- 22.2** Determina o valor de  $x$  para o qual o volume do **cubo truncado** é mínimo. Para esse valor de  $x$ , indica, justificando, quantas arestas tem o poliedro.

- 23.** Seja  $f$  uma função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , tal que a sua **derivada** é dada por

$$f'(x) = 2 + x \ln(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

**Sem recorrer à calculadora**, resolve as alíneas seguintes:

- 23.1** Seja  $r$  a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 1.

Seja  $P$  o ponto de interseção da reta  $r$  com o eixo  $Ox$ .

Sabendo que  $f(1) = 3$ , determina a abscissa do ponto  $P$ .

- 23.2** Estuda a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

- 24.** Numa certa pastelaria, a temperatura ambiente é constante.

Admite que a temperatura em graus centígrados, de um café servido nessa pastelaria,  $t$  **mi-**

nutos após ter sido colocado na chávena, é dado por

$$f(t) = 20 + 50e^{-0.04t}, \quad (t \geq 0)$$

- 24.1 Determina a temperatura do café no instante em que é colocado na chávena.
- 24.2 Estuda a função  $f$  quanto à existência de assíntotas, à monotonia e ao sentido das concavidades. Esboça o gráfico de  $f$ .
- 24.3 Com o decorrer do tempo, a temperatura do café tende a igualar a temperatura ambiente. Indica, justificando, a temperatura ambiente.
- 24.4 Justifica a seguinte afirmação: **a taxa de variação média da função  $f$ , em qualquer intervalo do seu domínio, é negativa.**
- 24.5 Quanto tempo decorre entre o instante em que o café é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge 65 graus Celsius? Apresenta o resultado em minutos e segundos.

**Nota:** sempre que nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva no mínimo três casas decimais.

25. De uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que a sua derivada é dada por  $f'(x) = (x + 1)e^x - 10x$

Seja  $A$  o único ponto de inflexão do gráfico de  $f$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora, determina a abcissa do ponto  $A$ , arredondada às décimas.

Explica como procedeste. Inclui na tua explicação, o(s) gráfico(s) que obtiveste na calculadora.

26. Considera, para cada  $\alpha \in ]0, 1[$ , a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = x^\alpha$ .

Prova que, qualquer que seja o valor de  $\alpha \in ]0, 1[$ , o gráfico da função  $f$  tem a concavidade voltada para baixo.



## Prova global

90 minutos

### Grupo I

1. De duas funções,  $f$  e  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que:

$$f(-2) = -3; f'(-2) = 3; g(-2) = 4; g'(-2) = 1.$$

Seja  $h$  a função definida por  $h(x) = f(x) \times g(x)$

Qual é o valor de  $h'(-2)$ ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 7                      (D) 9

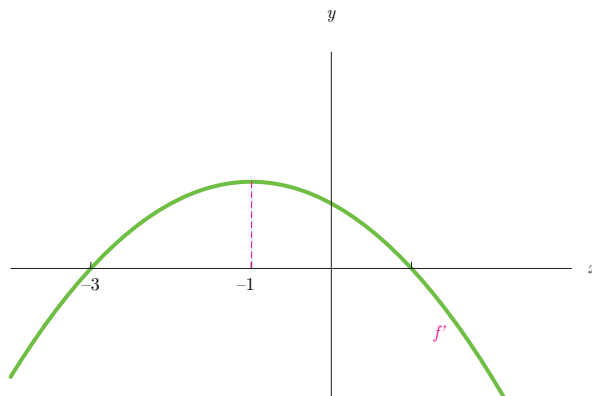
2. Qual das seguintes expressões pode ser a expressão analítica de uma função  $f$  cuja derivada é definida por  $f'(x) = 3e^{4x}$

- (A)  $12e^{4x}$                       (B)  $e^{\frac{3}{4}x} + 3$                       (C)  $\frac{3}{4}e^{4x} + \frac{3}{4}$                       (D)  $\frac{3}{4}e^{4x+1}$

3. A reta de equação  $y = ex + 3$  é tangente ao gráfico de uma das seguintes funções. Qual é a função?

- (A)  $f(x) = e^x$                       (B)  $g(x) = e^x + 3$   
 (C)  $h(x) = \ln(x)$                       (D)  $j(x) = 3 + \ln(x)$

4. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ .



A sua função derivada,  $f'$ , é a função quadrática cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.

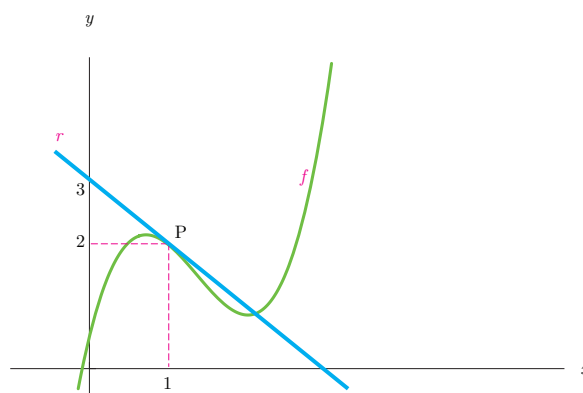
Indica o intervalo em que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo.

- (A)  $] -1, +\infty[$                       (B)  $] -\infty, -1[$                       (C)  $] -3, 1[$                       (D)  $] -\infty, +\infty[$

5. Na figura está representada parte do gráfico de uma função  $f$ , bem como a reta tangente a esse gráfico no ponto  $P = (1, 2)$ .

Qual dos seguintes valores corresponde a  $f'(1)$ ?

- (A)  $-1$                       (B)  $-\frac{1}{2}$   
 (C)  $\frac{1}{2}$                       (D)  $1$



### Grupo II

6. Seja  $g$  a função definida por  $g(x) = x - \ln(1 - e^{-x})$ .

6.1 Determina o domínio de  $g$ .

6.2 Prova que, para todo o  $x$  pertencente ao domínio de  $g$ , se verifica que  $g(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{e^x - 1}\right)$

6.3 Estuda  $g$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

6.4 Prova que para todo o  $x$  pertencente ao domínio de  $g$ , a função derivada pode ser

definida por  $g'(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$  e estuda  $g$  quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

7. Seja  $g$  a função definida por  $g(x) = x + \ln(2 - x)$ .

7.1 Determina o domínio de  $g$ .

7.2 Estuda a função  $g$  quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

7.3 Seja  $t$  a reta tangente ao gráfico da função  $g$  para a qual é isósceles o triângulo  $[OAB]$ , onde  $A$  e  $B$  são os pontos de interseção da reta  $t$  com os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respetivamente.

Determina a equação reduzida da reta  $t$ , assim como as coordenadas do ponto de tangência.

7.4 Determina uma equação da única assíntota vertical do gráfico da função  $g$ .

8. Considera a função  $f$ , definida por  $f(x) = 5 \ln(x) - \frac{1}{2}x$ .

8.1 Determina o domínio de  $f$ .

8.2 Prova que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo.

8.3 Determina uma equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1.

8.4 Estuda o gráfico de  $f$ , quanto à existência de assíntotas e, caso existam, determina as suas equações.

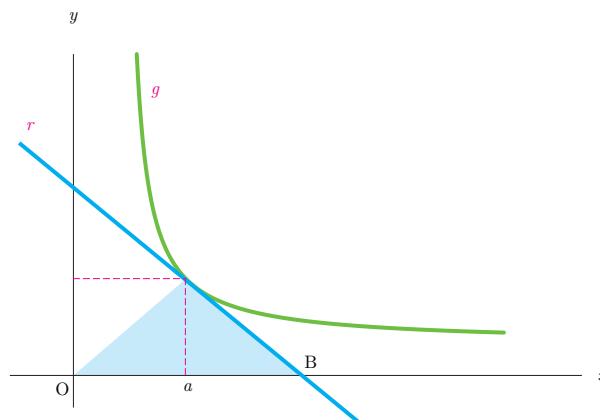
9. Considera  $g$  a função de domínio  $]1, +\infty[$  definida por  $g(x) = \frac{x}{x-1}$ .

Para cada número real  $a > 1$  considera:

-  $r$ , a reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $A$  de abcissa  $a$ ;

-  $B$ , o ponto de interseção da reta  $r$  com o eixo  $Ox$ ;

-  $f$ , a função que dá a área do triângulo  $[OAB]$ .



9.1 Define a função  $f$  por meio de uma expressão analítica.

9.2 Determina o valor de  $a$  a que corresponde o triângulo que tem área mínima.

9.3 Qual o perímetro do triângulo considerado na alínea anterior?

10. Considera a fórmula que nos dá a área de um círculo em função do seu raio,  $r$ , em função de  $r$ :  $A(r) = \pi r^2$

10.1 Define analiticamente a derivada da função  $A$ .

10.2 O resultado parece-te familiar? O que representa geometricamente?

# 12\*

## Teoremas elementares do Cálculo Diferencial

*“Não se pode realmente argumentar contra um teorema matemático.”*

Stephen Hawking (1942– )

*“El-rei D. Pedro, o cruel, está na janela sobre a praça onde sobressai a estátua municipal do marquês Sá da Bandeira. Gosto deste rei louco, inocente e brutal. (...) Ele diz um gracejo. Toda a gente ri. (...)”*

In “Teorema” de Herberto Helder (1930– )

Neste manual, como em todos os outros, em todos os países do mundo, apenas se podem demonstrar alguns teoremas. Por um lado, o tempo é limitado e muitas áreas da Matemática nem sequer são mencionadas nos Programas Oficiais. Por outro lado, como dizia o grande matemático português José Sebastião e Silva (1914–1972), “se não houver tempo - o que é bem provável - podem-se omitir as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar”. E de tal modo enfatizava a importância das intuições que defendia que se devia “dar ao ensino uma orientação de tal modo natural, que o aluno seja levado a aceitar os factos intuitivamente, e com uma força de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa desses factos”.

Contudo, só por via da demonstração se pode garantir que um resultado é efetivamente válido. Sebastião e Silva também escreveu: “Especialmente em matemática, nenhum resultado pode merecer inteira confiança, enquanto não for sancionado pela razão, isto é, demonstrado logicamente.”

Neste capítulo vamos demonstrar alguns teoremas do Cálculo Diferencial já vistos anteriormente. Vamos começar com algumas propriedades das funções contínuas. A primeira propriedade diz-nos que se a função é contínua num ponto, não pode variar demasiado na vizinhança desse ponto.

*Teorema 1 – Se a função  $f$  é contínua num ponto então existe um intervalo aberto contendo esse ponto onde a função  $f$  é limitada.*

### Demonstração

Se  $f$  é contínua então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Ou seja, qualquer que seja a sucessão  $(x_n)$  de elementos do domínio diferentes de  $a$  e a convergir para  $a$ , temos sempre que a sucessão  $(f(x_n))$  converge para  $f(a)$ . Isto significa que, qualquer que seja o número real positivo  $\delta$  escolhido, existe uma ordem  $p$  tal  $n > p \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \delta$ .

Pretendemos provar que existe um intervalo aberto contendo  $a$  e que existe um número real positivo  $M$  de modo que para todo o  $x$  desse intervalo aberto se tenha  $|f(x)| < M$ .

Vamos fazer a **demonstração por redução ao absurdo**. Se a conclusão não fosse verdadeira

\* Este capítulo é, de acordo com o Programa Oficial, opcional e deve ser lecionado apenas se houver tempo. Deve ser sempre recomendado como leitura aos alunos mais interessados.

então, qualquer que fosse o intervalo aberto contendo  $a$  que fosse escolhido e qualquer que fosse o número real  $M$  escolhido, haveria sempre um número real  $x$  desse intervalo tal que  $|f(x)| \geq M$ .

Sendo assim, escolhamos sucessivos intervalos abertos  $\left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[$  que supomos estarem todos contidos<sup>1</sup> no domínio da função  $f$ . Vamos também escolher uma sucessão de números reais  $(M_n)$  verificando  $M_n = n$ .

Pela nossa hipótese de trabalho, qualquer que seja o intervalo escolhido e qualquer que seja o número real  $M_n$  escolhido, haverá sempre um número real  $x_n$  pertencente a esse intervalo aberto e tal que se tenha  $|f(x_n)| \geq M_n$ .

Dito por outras palavras, para todo o intervalo aberto  $\left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[$  e para todo o número real  $M_n$  antes definido, existe  $x_n \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[$  tal que  $|f(x_n)| \geq M_n = n$ .

Isto significa que  $(x_n)$  é uma sucessão que converge para  $a$  mas a sucessão  $(f(x_n))$  não pode convergir para  $f(a)$ . Mas isto é uma contradição com as hipóteses do teorema (em particular significaria que  $f$  não seria contínua no ponto  $a$ ) e por isso a nossa hipótese de trabalho não pode ser válida. Logo só podemos ter que existe um intervalo aberto contendo  $a$  e que existe um número real positivo  $M$  de modo que para todo o  $x$  desse intervalo aberto se tenha

$$|f(x)| < M \quad \text{c.q.d.}$$

**Teorema 2** – Se uma função é contínua num ponto e é positiva nesse ponto então existe um intervalo aberto contendo esse ponto onde a função também é positiva.

### Demonstração

A demonstração deste teorema é semelhante à do teorema anterior e fica como desafio ao leitor.

Vamos agora demonstrar o teorema 2 do capítulo 10:

**Teorema (Derivabilidade e Continuidade)** – Uma função que seja derivável num ponto é contínua nesse ponto.

### Demonstração

Suponhamos que a função  $f$  é derivável no ponto  $a$ . Para todo o  $x$  do domínio de  $f$  e diferente de  $a$

$$\text{temos } f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$$

<sup>1</sup> Se isto não acontecer, mesmo assim podemos demonstrar o teorema (porquê?).

Logo, sendo  $f$  derivável em  $x = a$  existe (e é um número real) o limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Por outro lado  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$

Assim, pelo teorema do limite do produto de duas funções (Teorema 1b do capítulo 9), temos

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \times 0 = 0$$

Mas isto significa que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ou seja, a função  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

c.q.d.

Os próximos teoremas já foram vistos no capítulo 10. Vamos agora demonstrar alguns.

*Teorema (Derivada do produto de uma constante por uma função) – Se  $f$  é uma função derivável num intervalo aberto  $A$ , e  $k$  é uma constante, então a função  $kf$  também é derivável no mesmo intervalo e tem-se a seguinte relação entre as derivadas:  $(kf)' = kf'$*

## Demonstração

A demonstração deste teorema é semelhante à dos teoremas demonstrados no capítulo 10 pelo que fica como desafio ao leitor.

*Teorema (Derivada da potência de uma função) – Se  $f$  é uma função derivável num intervalo aberto e  $w$  é um número racional, positivo ou negativo, então a função  $f^w$  também é derivável no mesmo conjunto (se  $f^w$  estiver bem definida) e tem-se a seguinte relação entre as derivadas:*

$$(f^w)' = w \times f^{w-1} \times f'$$

## Demonstração

Vamos demonstrar este teorema para o caso em que  $w$  é um número natural  $n$ . Vamos usar o **método de indução matemática** (ver capítulo 6, pg. 48 do volume 2).

a) caso  $n = 1$ . Temos que  $(f^1)' = f'$  e  $1 \times f^{1-1} \times f' = f^0 \times f' = f'$  pelo que a fórmula pretendida é válida para  $n = 1$ .

b) Passo indutivo. Tentemos provar que  $(f^{n+1})' = (n+1) \times f^{(n+1)-1} \times f'$

supondo que é válido que  $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$

Temos, pelo teorema da derivada do produto (teorema 4 do capítulo 10) que

$$(f^{n+1})' = (f^n \times f)' = (f^n)' \times f + f^n \times f'$$

Mas, pela hipótese do passo indutivo, podemos calcular a derivada de  $f^n$ , pelo que vem

$$\begin{aligned}(f^{n+1})' &= (n \times f^{n-1} \times f') \times f + f^n \times f' \\ &= n \times f^n \times f' + f^n \times f' \\ &= (n \times f^n + f^n) \times f' \\ &= (n+1) \times f^n \times f'\end{aligned}$$

c.q.d.

**Teorema (Derivada do quociente de duas funções)** – Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis num intervalo aberto  $A$  e se  $g$  não se anula em  $A$ , então a função quociente  $f/g$  também é derivável

no mesmo conjunto e tem-se a seguinte relação entre as derivadas:  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

### Demonstração

Podemos tentar aplicar a definição de derivada ao quociente  $f/g$ , mas provavelmente os cálculos iriam ser demasiado complicados. Sigamos então o conselho de George Polya e comecemos por estudar um caso particular. Suponhamos então para começar que  $f$  é constante e igual a 1. A fórmula

a provar neste caso será simplesmente:  $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

Estudemos então a derivada de  $1/g$ , usando a definição:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g(a)}{hg(a)g(a+h)} - \frac{g(a+h)}{hg(a+h)g(a)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{hg(a)g(a+h)}\end{aligned}$$

Sendo  $g$  derivável também é contínua (pelo teorema 2 do capítulo 10), pelo que  $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$

Temos assim

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{hg(a)g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g(a) - g(a+h)}{h} \times \frac{1}{g(a)g(a+h)} \right] = -\frac{g'(a)}{g(a)g(a)}$$

o que prova a fórmula que pretendíamos. Poderemos agora alargar esta fórmula ao caso geral? Na realidade até podemos reduzir o caso geral ao caso particular estudado. Com efeito

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{1}{g} \times f\right)' = \left(\frac{1}{g}\right)' \times f + \frac{1}{g} \times f' = -\frac{g'}{g^2} \times f + \frac{1}{g^2} \times (g \times f') = \frac{g \times f' - f \times g'}{g^2}$$

c.q.d.

## HISTÓRIA(S)

### Gottfried Leibniz (1646-1716) e o cálculo diferencial

“No caso de quase todos os outros matemáticos importantes – escreveu J. E. Hofmann, o grande estudioso da matemática de Leibniz na primeira metade do século XX – a grande paixão é já reconhecível durante a puberdade e conduz, no período imediatamente a seguir, a ideias novas e decisivas. No caso de Leibniz, este significativo período biológico decorreu sem nenhuma experiência matemática especial.” Neste sentido, como em muitos outros, a formação e a trajetória de Leibniz foram diferentes das de Newton.

Quando chegou a Paris, aos vinte e seis anos, Leibniz conhecia apenas, e mal, o primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, e pouco mais sabia do que a aritmética aprendida na escola. Conforme confessou anos mais tarde a Johann Bernoulli, um dos seus primeiros discípulos, a *Geometria* de Descartes, que folheara na universidade, tinha-lhe parecido demasiado complicada. Embora tivesse a matemática no sangue, para usar a expressão de Hofmann, eram estes os seus rudimentares conhecimentos matemáticos quando chegou a Paris em Março de 1672.



Tal como no caso de Newton, também se conserva uma enorme quantidade de manuscritos e documentos de Leibniz, em especial quase tudo o que escreveu em Paris durante o seu período de formação, que Leibniz teve o cuidado de guardar. Através deles é possível reconstituir convenientemente a sequência temporal da sua formação e da descoberta do seu método do cálculo diferencial.

Durante o primeiro ano da sua permanência em Paris, Leibniz revelou-se bastante diletante no que diz respeito à matemática, tendo ele próprio posteriormente reconhecido a ignorância matemática que o assolava naquela época. Dado que durante esse primeiro ano visitou Londres pela primeira vez e iniciou os seus contatos com os matemáticos ingleses através de Oldenburg e Collins, a sua “inocente ignorância” do que em matemática se sabia, que o levou a sobrestimar as suas próprias capacidades, aliada a um carácter demasiado cativante, provocaram-lhe problemas e mal-entendidos com os britânicos, lançando as primeiras pedras para as posteriores acusações de plágio.

Até ao Outono de 1672 não entrou em contacto com Christian Huygens, o cientista e matemático mais conhecido da Europa, que trabalhava então para a Academia Real das Ciências de Paris. Por essa altura, Leibniz tinha feito a sua primeira descoberta matemática: como usar diferenças para somar números. Insistiria mais tarde que nessa relação inversa entre somas e diferenças vislumbrara já a relação entre derivações e uma outra operação matemática, a integração.

O raciocínio de Leibniz foi: queremos somar os números  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  e sabemos que cada um deles é a diferença entre outros dois, digamos  $a_k = b_{k+1} - b_k$ ; então um simples cancelamento sucessivo dos  $b_k$  significa que  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = b_{n+1} - b_1$ .



O otimismo inerente ao caráter de Leibniz e o seu diletantismo matemático nessa época levaram-no a pensar que tinha descoberto um método que iria permitir somar qualquer série de números. Esta sua ideia viu-se confirmada quando contou a sua descoberta a Huygens, que, para a testar, lhe propôs que calculasse a soma infinita dos inversos dos números triangulares:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

Quis o acaso que esta soma infinita fosse precisamente uma das poucas que pode ser somada usando o método de Leibniz, dado que o inverso de um número triangular tem a forma  $\frac{1}{n(n+1)}$ , sendo, portanto, a diferença entre  $\frac{1}{n}$  e  $\frac{1}{n+1}$ , de modo que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots = 1$

A partir daqui, Leibniz calculou outras somas infinitas semelhantes formadas por números piramidais e elaborou um pequeno tratado para ser publicado no Journal des Savants, que aliás nunca chegou a ver a luz do dia porque a revista interrompeu a sua publicação durante 1673.

Adaptado de “A verdade está no limite” de Antonio J. Durán, RBA, 2011

## LEITURA(S)

## Sonya Kovalevskaya (1850-1891): a poetisa das equações

**Como Sonya Kovalevskaya venceu preconceitos e abriu portas para as mulheres**

Se dependesse de seus pais e da sociedade russa, Sonya Kovalevskaya (1850-1891) teria abandonado os estudos na adolescência e levado uma vida fútil no meio da aristocracia da Rússia Imperial. Mas não foi assim que aconteceu. Ainda menina, ela passava horas no seu quarto olhando para as paredes forradas com anotações de cálculo diferencial. Como não podia aprender matemática com os homens em escolas, Sonya estudava sozinha e fora das vistas da sua família. Ela surpreendeu o seu tutor com a habilidade com que assimilava conceitos e até descobria novas formas de solucionar problemas matemáticos.



Disposta a continuar seus estudos fora do país, já que as universidades russas não admitiam mulheres, Sonya arranhou um casamento de fachada com um paleontólogo. Ela precisava da condição de mulher casada para viajar para a Europa.

Mas a Matemática, paixão proibida da estudante de 18 anos, também era inacessível para as mulheres em quase toda a Europa do século XIX. Apesar de Sonya ter impressionado os professores na Alemanha, não conseguiu ser admitida nas universidades. Foi então que o alemão Karl Weierstrass (1815-1897), um dos mais respeitados matemáticos da época, passou a dar-lhe aulas particulares.

Com apenas 24 anos, Sonya tinha já três trabalhos que o seu mestre considerava equivalentes a teses de doutoramento. Weierstrass conseguiu fazer com que a universidade também reconhecesse o doutoramento da sua aluna especial. O trabalho mais importante dela foi a continuidade que deu ao estudo do matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) sobre as chamadas equações diferenciais.

Apesar de todo o seu talento matemático e trabalho, só depois de alguns anos e com a ajuda dos seus mestres e ex-colegas, conseguiu ser professora na Universidade de Estocolmo, Suécia.

Além dos trabalhos em matemática pura, contribuiu para a matemática aplicada com estudos sobre a estrutura dos anéis de Saturno, a propagação da luz e a rotação de corpos sólidos num ponto fixo. Após receber importantes prémios em França e na Suécia, Sonya foi finalmente reconhecida pela Academia Russa de Ciências, em 1889, que mudou as suas regras para aceitar uma mulher como integrante.

Para Sonya, matemática era como poesia, não algo árido e frio, e era necessária muita imaginação para estudá-la. Além de grande matemática, Sonya apreciava a literatura e foi também escritora. O seu grupo de estudos na Alemanha definia-se com a seguinte frase: “É impossível ser matemático sem ter alma de poeta”.

Adaptado de um texto de Carmen Kawano incluído na revista Galileu

# Soluções

## Capítulo 9 - Teoria de Limites

### Exercícios - p. 9

1.

$$1.1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2^- \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2^+$$

1.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = -2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(v_n) = -2; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h(u_n) = -1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} h(v_n) = -1;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} j(u_n) = -\infty; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} j(v_n) = +\infty$$

1.3

Tendo em atenção os resultados anteriores, podemos conjecturar (porque só provámos para duas sucessões de elementos do domínio a tender para 2, por valores diferentes de 2, e para provar que existe limite tínhamos que provar para

todas as sucessões o que não foi feito) que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$ . E quanto a  $\lim_{x \rightarrow 2} j(x)$  pode-

mos afirmar que não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} j(x)$  porque existem, pelo

menos, duas sucessões que tendem para 2 e cujos limites são diferentes.

2.

$$2.1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1^- \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1^-$$

2.2 Uma vez que só temos a função  $f$  definida graficamente não podemos afirmar com toda

a certeza que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = 1$

2.3 Não, porque só se conclui que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = 1 \text{ para duas}$$

sucessões, para poder concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ teria que provar para todas}$$

as sucessões convergentes para 2 por valores do domínio diferentes de 2.

3.

3.1 Não tem limite

3.2  $+\infty$

4.

4.1  $+\infty$

4.3  $-\infty$

4.2  $+\infty$

4.4  $+\infty$

### Exercícios - p. 15

5.

5.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3 + 2 \times (-5) = -7$$

5.2 8

5.3 9

5.4 -15

6.

6.1 0

6.4 0

6.2 0

6.5  $\sqrt[3]{-20}$

6.3 9

6.6 0

### Exercícios - p. 17

7. -

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|} = +\infty$$

### Exercícios - p. 19

9.

9.1  $\frac{1}{2}$

9.4 0

9.5 3

9.2 0

9.6  $+\infty$

9.3  $+\infty$

### Exercícios - p. 20

10.

10.1 -1

10.3 -1

10.2 -1006

10.4 Infinito sem sinal.

O sinal vai depender se  $x$  tender para zero por valores inferiores, e neste caso o limite será  $-\infty$ , no caso de  $x$  tender para zero por valores superiores o limite será  $+\infty$ .

Exercícios - p. 22

11.

11.1 0

11.2 0

12.

12.1 4

12.6  $\ln(2)$

12.2 1

12.7  $\frac{1}{\ln(3)}$

12.3 1

12.4 0

12.8  $+\infty$

12.5 0

Exercícios - p. 25

13.

13.1  $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

13.2  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$        $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$

13.3 O gráfico da função  $f$  não tem assíntotas verticais. O gráfico da função  $g$  tem uma assíntota vertical.

14.

14.1  $y = 2x + 1$

14.3  $y = x$

14.2  $y = x - 2$

Exercícios - p. 29

15. -

16. -

17.

17.1 -

17.2  $h$  é contínua à direita do ponto  $x = 0$

Exercícios - p. 33

18. 5,89

19. 0,37



Exercícios globais - p.40

Prática ↑

1.

1.1

$u_1 = -3 + \frac{-1}{1} = -4$        $u_2 = -3 + \frac{1}{2} = -2.5$        $u_3 = -3.333$

$u_4 = -2.75$        $u_5 = -3.2$

$v_1 = -3 - \frac{2}{1^2} = -5$        $v_2 = -3.5$        $v_3 = -3.222$        $v_4 = -3.125$

$v_5 = -3.08$

1.2  $\lim u_n = -3$        $\lim v_n = -3$

2. Sem solução

3.

3.1

3.1.1 -

3.1.2 -

3.2

3.2.1 2

3.2.2 3

4.

4.1 -9

4.4  $-\infty$

4.2  $-\infty$

4.5  $+\infty$

4.3 81

5.

5.1  $-\infty$

5.4  $-\infty$

5.2  $+\infty$

5.5 0

5.3 0

6.

6.1  $+\infty$

6.3  $+\infty$

6.2  $+\infty$

6.4  $-\infty$

7.

7.1  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

7.1 Não tem assíntotas horizontais;  
Assíntota vertical:  $x = -2$

8. -

9.

9.1 -

9.2 A função  $g$  é contínua à direita de  $-1$  e à esquerda de  $1$ .

10. -

Pensa e Resolve ↑↑

11.

11.1 -2

11.3 3

11.2 -2

11.4 3

12. -

13. -

14.

14.1

14.1.1  $+\infty$

14.1.2  $-\infty$

14.2 Não existe  $\lim_{x \rightarrow 3} t(x)$  porque os limites laterais são diferentes.

15.

15.1 -2

15.3  $\frac{9}{4}$

15.2 0

15.4 3

16.

16.1  $+\infty$

16.3 0

16.2  $-\frac{1}{2}$

17.

17.2 0

17.1  $-\frac{1}{3}$

17.3  $+\infty$

18. Não tem assíntotas horizontais;

A reta de equação  $y = 2x$  é assíntota do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$

Não existe assíntota do gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$

19.

19.1 Não é contínua em  $\mathbb{R}$

19.2 A função  $g$  é contínua à esquerda de  $-2$

20.  $x = -0.70$

Reflete ↑↑↑

21. Não podemos concluir que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$ , porque para

podermos tirar aquela conclusão necessitamos de provar que o limite de qualquer sucessão de imagens, de elementos do domínio que converge para zero, converge para 3 e nós só temos a garantia de que isso acontece com uma e uma só sucessão, que

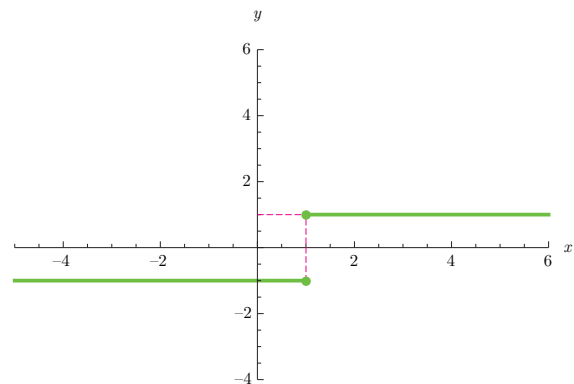
neste caso é a sucessão de termo geral  $\frac{1}{n}$ .

22.

22.1  $\lim h(u_n) = -1$   $\lim h(v_n) = 1$

22.2 Não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$  porque os limites laterais são diferentes.

22.3



23.

23.1 Por exemplo considerando  $f(x) = 3$  e  $g(x) = 1$ .

23.2 Por exemplo considerando  $f(x) = 1$  e  $g(x) = x$ .

23.3 Por exemplo considerando  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = x^2$ .

23.4 Por exemplo considerando  $f(x) = x^4$  e  $g(x) = x^3$ .

24. A

24.1  $D_h = ]0, +\infty[$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

24.1 O gráfico de  $h$  contém uma assíntota vertical para  $x = 0$ .

25. Por exemplo a função  $h(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$ .

IE

Itens de exame - p. 46

Escolha múltipla

- |      |       |       |
|------|-------|-------|
| 1. D | 6. D  | 11. A |
| 2. C | 7. D  | 12. C |
| 3. B | 8. B  | 13. B |
| 4. C | 9. D  |       |
| 5. B | 10. B |       |

Resposta aberta

14.

14.1 A função é contínua em  $\mathbb{R}$ .

14.1 -2,5 e 2,3

15.

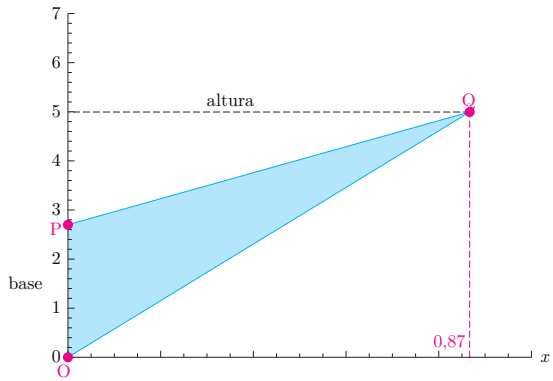
15.1 -

15.2  $x = 0$  é assíntota vertical do gráfico de  $f$  e  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ .

16.

16.1 -

16.2 Área igual a 1,2



17.

17.1 Ao fim de 34 horas e 39 minutos

17.2 -

18. -

19.

19.1  $T(0) = 73$ ;  $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 25$ .

19.2 Ao fim de 29 minutos e 28 segundos

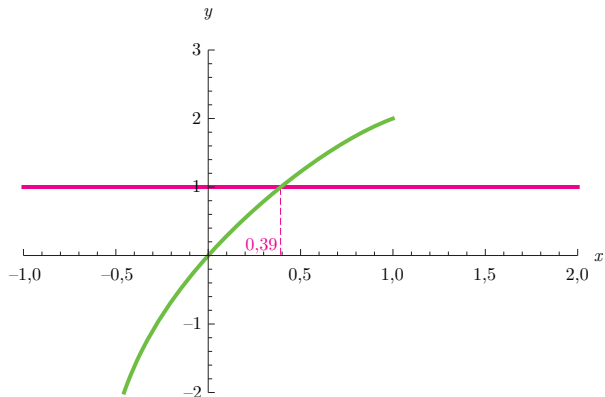
20. -

21. -

22.

22.1 -

22.2



$x = 0,4$

23. -

24. Não tem assíntotas verticais.

$y = 1$  é assíntota horizontal do gráfico de  $g$

Prova Global - p. 52

Grupo I

- |      |      |
|------|------|
| 1. C | 4. B |
| 2. D | 5. D |
| 3. B |      |

Grupo II

6. -
- 7.
- |     |   |                   |
|-----|---|-------------------|
| 7.1 | 2 |                   |
| 7.2 | 1 | 7.3 $\frac{1}{3}$ |
- 8.
- |     |       |               |
|-----|-------|---------------|
| 8.1 | -     |               |
| 8.2 |       |               |
|     | 8.2.1 | $+\infty$     |
|     | 8.2.2 | $\frac{5}{3}$ |
- 9.
- |     |                |     |                |
|-----|----------------|-----|----------------|
| 9.1 | -1             | 9.4 | 0              |
| 9.2 | $-\infty$      | 9.5 | $-\infty$      |
| 9.3 | Indeterminação | 9.6 | Indeterminação |

10. A função  $f$  não é contínua em  $x = 0$ , no entanto é contínua à esquerda do ponto 0.

11. -

12.  $x = 3$  é assíntota vertical e  $y = 3x - 7$  é assíntota não vertical do gráfico de  $f$ .

Capítulo 10 - Cálculo Diferencial

Exercícios - p. 57

- 1.
- |     |              |     |              |
|-----|--------------|-----|--------------|
| 1.1 | $f'(x) = -6$ | 1.2 | $f'(x) = 44$ |
|-----|--------------|-----|--------------|
2. -
3. -

Exercícios - p. 59

4.  $f(x) = x^3; f'_e(0) = +\infty$
5. -

Exercícios - p. 64

- 6.
- 6.1  $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$
- 6.2  $g'(x) = 15x^{14} + 66x^{10}$
- 6.3  $h'(x) = 81x^2 - 378x + 441$
- 6.4  $f'(x) = \frac{-4}{(x-7)^2}$
- 6.5  $g'(x) = 0$
- 6.6  $h'(x) = \frac{81}{(x-1)^4}$
- 7.

7.1  $(\sqrt{3x-2})' = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

7.2  $(\sqrt[3]{2x+4})' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-4)^2}}$

Exercícios - p. 66

- 8.
- 8.1  $f'(x) = 2e^{2x+1}$
- 8.2  $g'(x) = -\frac{2}{x^2}e^x$
- 8.3  $f'(x) = 10 \ln(5)25^x$
- 8.4  $g'(x) = \frac{e^{2x+1}(2x+1)}{(x+1)^2}$

8.5  $h'(x) = 4(e^{2x+1} + 1)$

Exercícios - p. 67

9.

9.1  $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$

9.2  $g'(x) = \frac{3 \log(e)}{3x-1}$

9.3  $h'(x) = \frac{2 \log_3(e)}{x-1}$



Tarefa - p. 67



Exercícios globais - p. 70

Prática ↑

1.

1.1  $f'(x) = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{\ln(2x+1)}}$

1.2  $g'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5$

1.3  $h'(x) = \frac{10^x}{10^x + 2}$

1.4  $r'(x) = \frac{-3x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{x+1}(x^2+1)^2}$

2.

2.1  $f'(x) = \frac{1}{x(x+2)} - \frac{\ln(x)}{(x+2)^2}, D = \mathbb{R}^+$

2.2  $g'(x) = -\frac{3}{\sqrt{2x+3}}, D = \left] -\frac{3}{2}, +\infty \right[$

3.

3.1  $a'(x) = 4 \ln(2) 2^x (2^{x+1} + 1)$

3.2  $b'(x) = 2 \ln(2) x 2^{x^2}$

3.3  $c'(x) = \frac{5 \ln(5) (2(x+1))^{\ln(5)}}{x+1}$

4.

4.1 Sem solução

4.2  $f'(1) = -2$

Pensa e Resolve ↑ ↑

5.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

6.  $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

7.  $h'(x) = 1 + \frac{2}{2x-1} \wedge x > \frac{1}{2}$

8.  $y = \ln(2)x + 1 - \ln(2)$

Reflete ↑ ↑ ↑

9.  $f'(x) = \begin{cases} \frac{-5}{2x-1} & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

10.  $g'(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x+3} & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

11.

11.1  $f'(1) = -1$

11.2  $f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$

11.3  $y = -x - 5$

11.4 Sim, nos pontos de coordenadas  $\left( -\frac{1}{2}, -\frac{7}{2} \right)$

e  $\left( \frac{1}{2}, \frac{11}{2} \right)$



Itens de exame - p. 73

Escolha múltipla

- |      |       |       |
|------|-------|-------|
| 1. C | 7. D  | 13. D |
| 2. D | 8. A  | 14. A |
| 3. A | 9. A  | 15. D |
| 4. D | 10. B | 16. B |
| 5. D | 11. D | 17. A |
| 6. A | 12. B |       |

Resposta aberta

18.  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$

19.  $f'(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + 2$

20.  $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

21.  $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

22.  $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$

23.

23.1  $f'(x) = 3 - \frac{2}{x}$

23.2  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

23.3  $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$

23.4  $f'(x) = -e^{-x}$

23.5  $f'(x) = (2 - 0.6x)e^{-0.3x}$

23.6  $f'(x) = 0.54(e^{0.06x} - e^{-0.06x})$

23.7  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

23.8  $f'(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} - 3$

24. Sem solução

25. Sem solução

26.  $r'(t) = \frac{7}{(t+2)^2}$

27.  $A'(x) = \frac{4x^3 - 8}{x^2}$

Prova Global - p. 80

Grupo I

1. B                      2. C                      3. D

Grupo II

4.

4.1  $f'(x) = \frac{-6x^2 - 6x + 10}{(3x^2 - 2x + 4)^2}$

4.2  $g'(x) = \frac{1 - \ln(3-x)}{(x-3)^2}$

4.3  $h'(x) = 2e^{2x-3} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

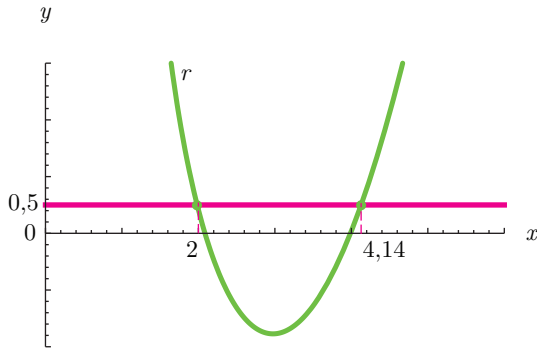
5.

5.1  $f''(x) = 18$                       5.3  $h''(x) = 0$

5.2  $g''(x) = \frac{2}{x^3}$

6.

6.1  $b \approx 4.14$



6.2  $f''(x) = 2x - \frac{4}{x-1} - 4$

Capítulo 11 - Aplicações do Cálculo Diferencial

Exercícios - p. 84

1.

1.1  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.2  $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

2.

2.1  $y = 8x$

2.3  $y = x - 4$

2.2  $y = -x + 2$

2.4  $y = -x + 2$

Exercícios - p. 86

3.

3.1  $f$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $]-1, +\infty[$  não apresenta nenhum extremo.

3.2 A função é estritamente crescente e não apresenta extremos.

3.3 A função  $h$  é decrescente em  $]-\infty, 0[$  e em  $]0, 1[$  e crescente em  $]1, +\infty[$ . Apresenta um mínimo igual a  $e$  para  $x = 1$ .

4.

4.1 A função é decrescente de  $-\infty$  até  $\frac{1}{2}$ , abscissa para a qual a função apresenta um mínimo absoluto e igual a  $-\frac{5}{4}$  e é crescen-

te em  $]-\frac{1}{2}, 1[$  e de  $]1, +\infty[$ .

4.2 A função  $g$  é decrescente de  $]-\infty, -1[$ , constante e igual a zero para  $x \in [-1, 1]$  e crescente em  $]1, +\infty[$ . A função apresenta um mínimo igual a zero para  $x \in [-1, 1]$ .

Exercícios - p. 88

5.

5.1  $f''(x) = 8(\ln(2))^2 4^x$

5.2  $g''(x) = -\frac{9}{\ln(2)(3x+1)^2}$

5.3  $h''(x) = -\frac{2}{x^2}$

6.  $p'''(x) = 60x^2 + 24$

Exercícios - p. 91

7.

7.1 O gráfico da função  $f$  apresenta concavida-

de voltada para baixo em  $]-\infty, -\frac{1}{2}[$  e

concavidade voltada para cima em

$]-\frac{1}{2}, +\infty[$ . Para  $x = -\frac{1}{2}$  apresenta um

ponto de inflexão, dado que a segunda derivada se anula e muda de sinal nesse ponto.

7.2 O gráfico da função  $f$  tem, nesse intervalo, concavidade voltada para baixo; é positivo em  $]1, +\infty[$  onde o gráfico da função tem concavidade voltada para cima. Não apresenta nenhum ponto de inflexão visto que o ponto onde a concavidade muda não pertence ao domínio da função.

7.3 O gráfico da função  $f$  apresenta concavida-

de voltada para baixo em  $]-\infty, -\sqrt{3}[$  e

em  $]0, \sqrt{3}[$ ; apresenta concavidade

voltada para cima em  $]-\sqrt{3}, 0[$  e em

$]\sqrt{3}, +\infty[$ . Apresenta três pontos de inflexão para  $x = -\sqrt{3}$ ;  $x = 0$ ; e  $x = \sqrt{3}$ .

**7.4** O gráfico da função  $f$  apresenta concavida-

de voltada para cima em  $]-\infty, 2 - \sqrt{2}[$  e em  $]\sqrt{2}, +\infty[$ , apresentando concavidade voltada para baixo em

$]2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}[$ . O gráfico da função  $f$  apresenta dois pontos de inflexão para  $x = 2 - \sqrt{2}$  e para  $x = 2 + \sqrt{2}$ .

**7.5** O gráfico de  $f$  apresenta concavidade

voltada para baixo no intervalo  $]0, e^{-\frac{3}{2}}[$  e

concavidade voltada para cima no

intervalo  $]e^{-\frac{3}{2}}, +\infty[$ . Apresenta um ponto

de inflexão para  $x = e^{-\frac{3}{2}}$ .

**7.6** O gráfico da função apresenta concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio não apresentando nenhum ponto de inflexão.

**7.7** O gráfico da função apresenta concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio não apresentando nenhum ponto de inflexão.

**8.** O gráfico da função  $h$  tem concavidade voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

### Exercícios - p. 95

**9.**

**9.1**  $-6$

**9.2**  $x = -1$  e  $x = 2$

**9.3**  $f$  é crescente em  $]-\infty, \frac{-2 - 2\sqrt{19}}{3}[$  e em

$]\frac{-2 + 2\sqrt{19}}{3}, +\infty[$ , sendo decrescente no

intervalo  $]\frac{-2 - 2\sqrt{19}}{3}, \frac{-2 + 2\sqrt{19}}{3}[$ .

Apresenta dois extremos relativos, a saber: um máximo, aproximadamente, igual a

4,06 para  $x = \frac{-2 - 2\sqrt{19}}{3}$  e um mínimo,

aproximadamente, igual a  $-8,21$  para

$x = \frac{-2 + 2\sqrt{19}}{3}$ .

**9.4** O gráfico da função tem concavidade

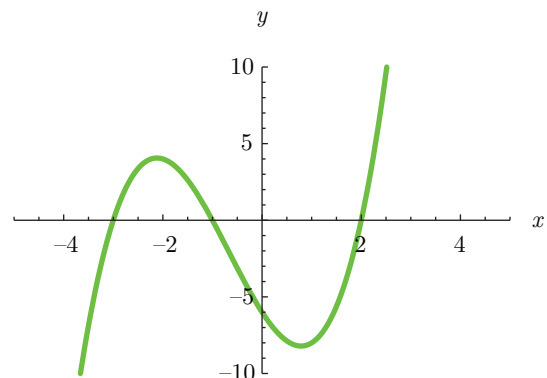
voltada para baixo no intervalo  $]-\infty, -\frac{2}{3}[$

e concavidade voltada para cima no

intervalo  $]-\frac{2}{3}, +\infty[$ . Apresenta o ponto

de coordenadas  $(-\frac{2}{3}, -\frac{56}{27})$  como ponto de inflexão.

**9.5**



**10.**

**10.1**  $D_f = \mathbb{R}^+$

10.2 Assíntota vertical:  $x = 0$

Assíntotas não verticais:  $y = \frac{1}{e}$

10.3 -

10.4  $f$  é crescente em  $]e, +\infty[$ . Uma vez que  $f'$  se anula para  $x = e$  passando de negativa a positiva significa que a função  $f$  apresenta um mínimo absoluto para  $x = e$  e igual

$$a \quad f(e) = \frac{1}{e} - \frac{\ln(e)}{e} = 0.$$

10.5 -

10.6 -

10.7 No intervalo  $]0, e^{\frac{3}{2}}[$  o gráfico de  $f$  tem

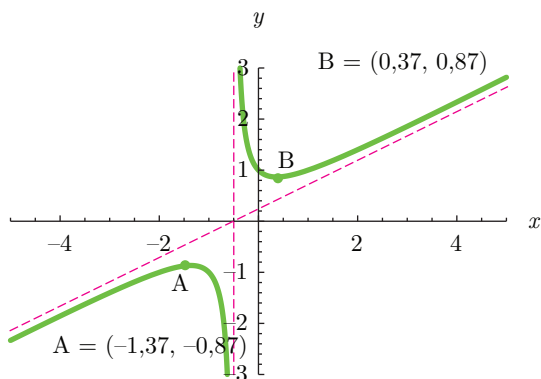
concavidade voltada para cima e no

intervalo  $]e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$  o gráfico de  $f$  tem

concavidade voltada para baixo. Ponto de inflexão:  $e^{\frac{3}{2}}$ .

### Exercícios - p. 98

11.



Da representação gráfica tiramos que o domínio de  $g$  é

$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ . Apresenta um assíntota vertical que é a reta

de equação  $x = -\frac{1}{2}$ . Vemos que a função  $g$  é negativa

para  $x \in ]-\infty, -\frac{1}{2}[$  e positiva para  $x \in ]-\frac{1}{2}, +\infty[$ , nestes

intervalos a função tem concavidade voltada para baixo e para cima, respetivamente. A função é crescente em

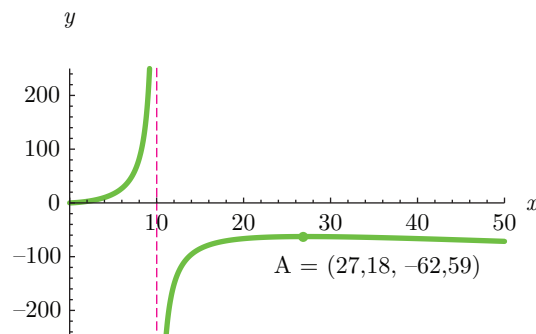
$] -\infty, -1,37[$  e em  $]0,37, +\infty[$ , sendo decrescente em

$] -1,37, -\frac{1}{2}[$  e em  $] -\frac{1}{2}, 0,37[$ . Apresenta um máximo

relativo igual a  $-0,87$  para  $x = -1,37$  e um mínimo relativo igual a  $0,87$  para  $x = 0,37$ . Tem também uma

assíntota oblíqua de equação  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ .

12.



Da representação gráfica tiramos que o domínio de  $h$  é

$\mathbb{R}^+ \setminus \{10\}$ . Apresenta um assíntota vertical que é a reta de

equação  $x = 10$ . Vemos que a função  $h$  é positiva para

$x \in ]0, 10[$  e negativa para  $x \in ]10, +\infty[$ , nestes intervalos

a função tem concavidade voltada para cima e para baixo,

respetivamente. A função é crescente em  $]0, 10[$  e em

$]10, 27,18[$ , sendo decrescente em  $]27,18, +\infty[$ . Apresenta

um máximo relativo igual a  $-62,59$  para  $x = 27,18$ .

**Exercícios - p. 100**

13.

- 13.1 15,8 milhares  
 13.2 No dia 17 de janeiro de 2012

13.3 -

14.

14.1 Aproximadamente 9.4 horas

14.2 
$$M'(t) = \frac{13760e^{-0.4t}}{(1 + 43e^{-0.4t})^2}$$

14.3 Assíntota:  $y = 800$

à medida que o tempo passa indefinidamente, o valor da biomassa vai aproximando-se das 800 mg tanto quanto se queira.



**Exercícios globais - p. 104**

**Prática ↑**

1.

- 1.1 Não tem solução  
 1.2  $y = 2ex + 2 - e$   
 1.3  $x = 0.132$

2.

2.1  $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x^2 + 2x - 12$

A função é monótona crescente de  $]-\infty, -3[$  e de  $]2, +\infty[$

É monótona decrescente em  $]-3, 2[$ . Apresenta um máximo relativo igual a 29 para  $x = -3$  e um mínimo

relativo igual a  $-\frac{38}{3}$  para  $x = 2$ .

2.2  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$

a função é monótona decrescente em  $]-\infty, 1[$  e em  $]1, +\infty[$  não apresentando nenhum extremo relativo.

2.3  $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

$f$  é monótona decrescente em  $]-\infty, -1[$  e em  $]1, +\infty[$ , é monótona crescente em  $]-1, 1[$ . Apresenta um mínimo

absoluto igual a  $-\frac{1}{2}$  para  $x = -1$  e um máximo absoluto

igual a  $\frac{1}{2}$  para  $x = 1$ .

2.4  $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$

$f$  é monótona decrescente em  $]-\infty, 0[$  e em  $]2, +\infty[$ , é monótona crescente em  $]0, 2[$ . Apresenta um mínimo absoluto igual a 0 para  $x = 0$  e um máximo absoluto igual a

$\frac{4}{e^2} \approx 0.54$  para  $x = 2$ .

2.5  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = ]0, +\infty[$

$f'(x) = x(2 \ln(x) + 1)$

A função é monótona decrescente em  $]0, e^{-\frac{1}{2}}[$  e monótona

crescente em  $]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$  Apresenta um mínimo absoluto

igual a  $-\frac{1}{2e} - 2 \approx -2.18$  para  $x = e^{-\frac{1}{2}}$ .

2.6  $D_f = [-3, 2]$

$f'(x) = \frac{-2x-1}{\sqrt{12-2x-2x^2}}$

A função é monótona crescente em  $]-3, -\frac{1}{2}[$  e monótona

decrecente em  $]-\frac{1}{2}, 2[$ . Apresenta um máximo absoluto

igual a  $\frac{\sqrt{42}}{2} \approx 3.24$  para  $x = -\frac{1}{2}$ .

$$2.7 \quad D_f = ]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$$

A função é monótona decrescente em  $]-\infty, 0]$  e monótona crescente em  $[5, +\infty[$ . Apresenta um mínimo absoluto igual a 0 para  $x = 0$  e para  $x = 5$ .

3. A função é monótona crescente em  $]0, 8[$  e monótona decrescente em  $]8, 16[$ . Apresenta um máximo absoluto igual a  $6 \ln(2) \approx 4.16$  para  $x = 8$ .

4.

$$4.1 \quad x = e^{-3} \vee x = e$$

4.2 No intervalo  $]0, e^{-1}[$  a função é decrescente e no intervalo  $]e^{-1}, +\infty[$  a função é crescente, para  $x = e^{-1}$  existe um mínimo absoluto igual a  $-12$ .

4.3 No intervalo  $]0, 1[$  a concavidade do gráfico é voltada para cima e no intervalo  $]1, +\infty[$  a concavidade é voltada para baixo. O gráfico de  $g$  apresenta um ponto de inflexão para  $x = 1$ , sendo as suas coordenadas  $(1, -9)$ .

5.

$$5.1 \quad D_h = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$5.2 \quad h(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]0, 1] \cup [e^2, +\infty[$$

5.3 -

5.4 No intervalo  $]0, e^2[$  o gráfico de  $h$  tem concavidade voltada para baixo; no intervalo  $]e^2, +\infty[$  o gráfico de  $h$  tem concavidade voltada para cima. O ponto

$(e^2, 0)$  é ponto de inflexão do gráfico de  $h$ .

**Pensa e Resolve** ↑ ↑

6. 3

7.

$$7.1 \quad D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$$

$$7.2 \quad y = -3x + e^3$$

$$7.3 \quad y = e$$

$$7.4 \quad y = x + e^{-1}$$

$$7.5 \quad y = -x + e$$

$$7.6 \quad (3, 3 - \ln(27))$$

$$8. \quad \left( \frac{\ln(3)}{2}, \ln\left(\frac{\ln(3)}{2}\right) - 1 \right) \approx (0.55, -1.56)$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$$

10.

10.1 Aproximadamente,  $8,9^\circ \text{C}$ .

10.2 Às dez horas e trinta e três minutos.

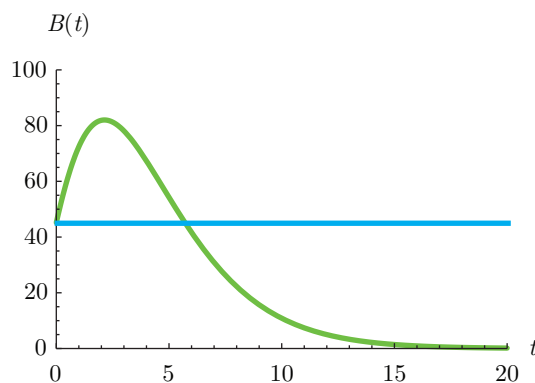
10.3 1 hora e 7 minutos.

11. A

11.1 2,1 dias.

11.2 -

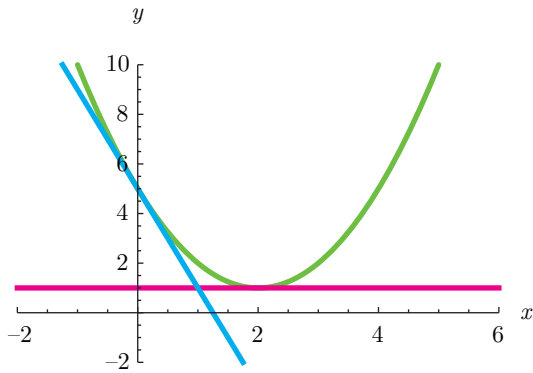
11.3



O número de bactérias foi superior ao seu valor inicial durante 5 dias e 17 horas.

**Reflete** ↑

12. A equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x = 0$  é  $y = -4x + 5$ . A equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x = 2$  é  $y = 1$ .



13.

13.1  $D_g = ]0, 9[$

13.2 -

13.3  $g(x) = 12x - \frac{4}{3}x^2$

13.4  $g'(x) = 12 - \frac{8}{3}x$

A função é crescente em  $\left]0, \frac{9}{2}\right[$  e decres-

cente em  $\left]\frac{9}{2}, 9\right]$ , em  $x = \frac{9}{2}$  apresenta um

máximo absoluto igual a 27.

13.5 3,6 por 7,5

14.

14.1  $x = \ln(2)$

14.2 A função é contínua em  $\mathbb{R}^+$  e em  $\mathbb{R}^-$ , não sendo contínua para  $x = 0$ , é, no entanto, à esquerda de zero.

14.3 Não tem assíntotas verticais. Assíntotas não verticais:  $y = x$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ .

14.4 
$$g'(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x - 1} & \text{se } x > 0 \\ 2xe^{x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

14.5  $y = -2ex - e$

15. -

IE

Itens de exame - p. 109

Escolha múltipla

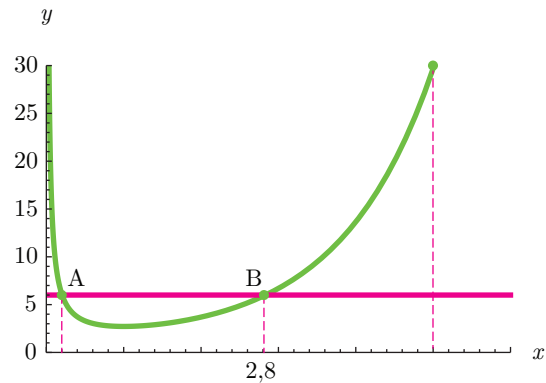
- |      |       |       |
|------|-------|-------|
| 1. A | 6. A  | 11. D |
| 2. A | 7. B  | 12. A |
| 3. C | 8. B  | 13. C |
| 4. A | 9. C  | 14. B |
| 5. C | 10. A |       |

Resposta aberta

15.

15.1  $y = \frac{e^2}{4}x$

15.2 Aproximadamente 2,6



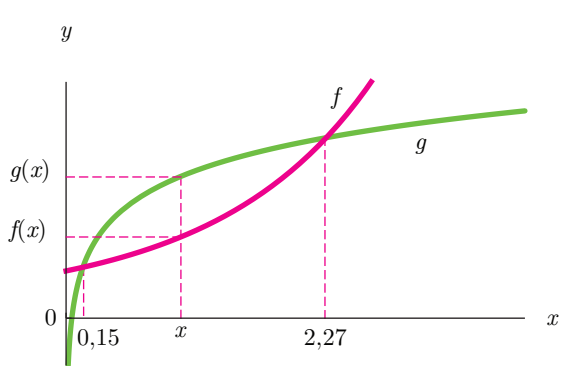
16.

16.1

16.1.1  $y = x + e - 2$

16.1.2 Não tem assíntotas verticais. Assíntota horizontal:  $y = 0$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ .

16.2  $a \approx 0.15$  e  $b \approx 2.27$



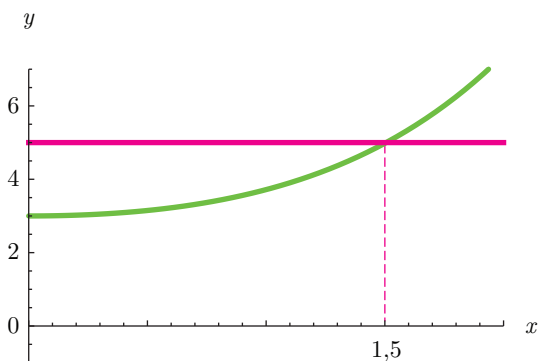
17.

17.1

17.1.1  $y = x + 1$

17.1.2 Não tem assíntotas verticais.  
Assíntotas não verticais: equação  
 $y = x - 2$  quando  $x \rightarrow -\infty$ .

17.2  $x \approx 1.5$



18. -

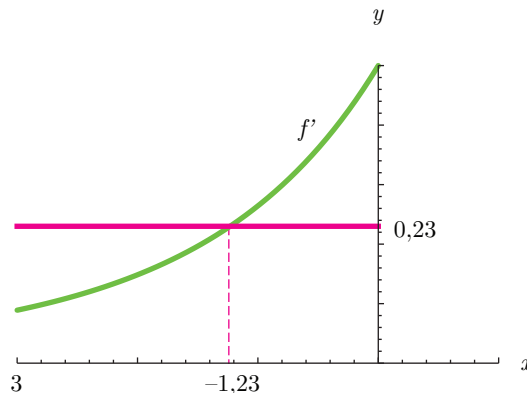
19.  $k = 13.8$

20.

20.1  $x = \frac{3}{2}$

20.2 -

20.3 A abscissa do ponto B é  $-1.23$



21.

21.1  $f'(x) = -0.54e^{0.06x} + 0.54e^{-0.06x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x$		0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$M$	$\searrow$

21.2 A ponte ficaria submersa.

21.3 -

22.

22.1 -

22.2  $x = 1$  e tem 24 arestas.

23.

23.1  $-\frac{1}{2}$

23.2  $f''(x) = \ln(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]0, e^{-1}[$  e tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]e^{-1}, +\infty[$ ; o ponto de abscissa  $e^{-1}$  é ponto de inflexão do gráfico de  $f$ .

24.

24.1 70 graus Celsius.

24.2 Não existem assíntotas verticais.

A reta de equação  $y = 20$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .

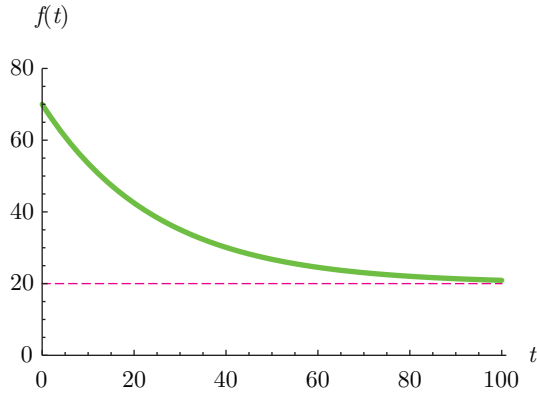


$$f'(t) = 50 \times (-0.04) \times e^{-0.04t} = -2e^{-0.04t}$$

$f$  é estritamente decrescente.

$$f''(t) = -2 \times (-0.04) \times e^{-0.04t} = 0.08e^{-0.04t}$$

O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima.

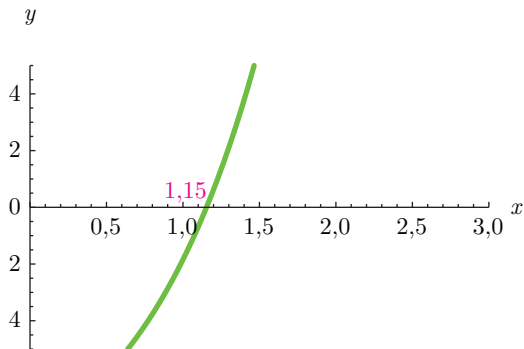


24.1 20 graus Celsius, porque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$

24.2 -

24.3 2 minutos e 38 segundos

25.  $x_A = 1.2$



26. -

PG

Prova Global - p. 121

Grupo I

1. D                      3. B                      5. D

2. C                      4. A

Grupo II

6.

6.1 -

6.2  $D_g = ]0, +\infty[$

6.3  $x = 0$  é assíntota vertical do gráfico de  $g$ . Não tem assíntotas horizontais.

6.4  $g$  é monótona decrescente em  $]0, \ln(2)[$  e monótona crescente em  $] \ln(2), +\infty[$ .  $g$  apresenta um mínimo absoluto igual a  $2 \ln(2)$  para  $x = \ln(2)$ .

7.

7.1  $D_g = ]-\infty, 2[$

7.2  $g'(x) = \frac{x-1}{x-2}$

$g$  é monótona crescente em  $] -\infty, 1[$  e monótona decrescente em  $]1, 2[$ . Assim, para  $x = 1$  a função tem um máximo absoluto igual a 1.

7.3  $y = -x + 3 - \ln(2)$

7.4  $x = 2$

8.

8.1  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$

8.2 -

8.3  $y = \frac{9}{2}x - 5$

8.4 Só tem uma assíntota vertical:  $x = 0$

9.

9.1  $f(a) = \frac{a^3}{2(a-1)}$

9.2  $a = \frac{3}{2}$

9.3 Aproximadamente 8,7

10.

10.1  $A'(r) = 2\pi r$

10.2 O resultado é-nos familiar e representa o perímetro do círculo.

## Jaime Carvalho e Silva

Professor Associado do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Licenciado e Doutorado em Matemática pela Universidade de Coimbra, estudou na Universidade de Paris 6. Foi professor visitante na Arizona State University (EUA) e é Secretário-Geral da Comissão Internacional de Instrução Matemática (2009-2012).

Professor há 36 anos na Universidade de Coimbra, leccionou disciplinas de Matemática para Matemáticos e Engenheiros, assim como da formação de professores de Matemática e orientou Estágios Pedagógicos de Matemática em sete escolas diferentes. Coordenador das Equipas Técnicas que elaboraram os programas de Matemática A, Matemática B, MACS, Matemática dos Cursos Profissionais e Matemática das Escolas Artísticas. Consultor do GAVE desde a sua criação.

Autor de Manuais Escolares do Ensino Básico e do Ensino Secundário tendo ganho o Prémio Sebastião e Silva da SPM para Manuais Escolares em 2005 e obtido uma Menção Honrosa em 2000.

## Joaquim Pinto

Professor de Matemática do Ensino Básico e Secundário há 20 anos, licenciado em Matemática, ramo de formação Educacional, pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e Mestre em Ensino da Matemática pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Desempenhou funções de Professor Acompanhante do Novo Programa de Matemática do Ensino Secundário e de Supervisor dos Exames de Matemática A, continuando a ser classificador de Exames de Matemática A.

Orientou Estágio Pedagógico pelas Universidades de Aveiro e de Coimbra.

Formador acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua, nas áreas: A43 – Matemática / Métodos Quantitativos; C05 – Didáticas específicas (Matemática); e C15 – Tecnologias Educativas (Informática / Aplicações da Informática). Dinamizou várias ações dentro dos referidos domínios.

## Vladimiro Machado

Professor de Matemática do Ensino Básico e Secundário há 30 anos, licenciado em Matemática, ramo de formação Educacional, pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e Mestre em Ensino da Matemática pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Desempenhou funções de Professor Acompanhante do Novo Programa de Matemática do Ensino Secundário e de Supervisor dos Exames de Matemática B. Desempenha as funções de Professor Acompanhante do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Orientador de Estágio Pedagógico do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Formador acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua, nas áreas: A43 – Matemática / Métodos Quantitativos; C05 – Didáticas específicas (Matemática); e C15 – Tecnologias Educativas (Informática / Aplicações da Informática).



**Obra em 4 volumes**  
(Não é permitida a venda em separado)

EDIÇÃO DE AUTOR

**PVP (4 Volumes)**

EUR 18,75 IVA INCLUIDO A 6%

**ISBN 978-989-97839-0-4**



9 789899 783904 >