Introdução ao Cálculo

Carmem Suzane Comitre Gimenez
Rubens Starke

2ª Edição
Florianópolis, 2010

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Claudia Regina Flores

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Felipe Augusto Franke

Ilustrações: Gabriela Medved Vieira, Pricila Cristina da Silva, Kallani Maciel Bonelli

Capa: Alexandre dos Santos Oliveira

Design Instrucional

Coordenação: Juliana Machado

Design Instrucional: Elenira Oliveira Vilela

Revisão do Design Instrucional: Dyan Carlo Pamplona

Revisão Gramatical: Jane Maria Viana Cardoso

Ficha Catalográfica

G491i Gimenez, Carmem S. Comitre
Introdução ao Cálculo / Carmem Suzane Comitre Gimenez, Rubens Starke. – 2. ed. – Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.
261p.

ISBN 978-85-99379-89-9

1. Cálculo. I. Starke, Rubens. II Título.

CDU 519.6

Elaborada pela Bibliotecária Eleonora M. F. Vieira – CRB – 14/786

Sumário

Apresentação

A disciplina "Introdução ao Cálculo" trabalha basicamente dois conteúdos essenciais a todo professor de matemática: Números reais e Funções. Estes conteúdos estão presentes em todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e constituem não só uma base fundamental para a compreensão de outros conteúdos (como Cálculo Diferencial e Integral), mas também da própria Matemática e de sua presença em nossas vidas.

Este texto teve origem em notas de aulas que produzimos quando da criação da disciplina MTM 5109 - Introdução ao Cálculo, para o Curso de Matemática-Licenciatura em 1995, devido à ausência de um texto que tratasse de Números Reais e Funções sem o conceito de limite e sem o caráter de "revisão" do Ensino Médio. Ao longo destes anos pudemos comprovar a importância desta disciplina para as disciplinas subseqüentes de Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear. Por outro lado, os conteúdos aqui estudados são o objeto de trabalho do futuro professor. Por este motivo, acreditamos que estes conteúdos devem ser tratados com a profundidade e o rigor necessários a fim de possibilitar-lhe as melhores escolhas de abordagem em nível de Ensino Fundamental e Médio.

No Capítulo 1 tratamos da Linguagem de Conjuntos, que, como o próprio título diz, é necessária para nos expressarmos formal e corretamente em matemática. No Capítulo 2, Números Reais, abordamos o conjunto $\mathbb{R}$ e seus subconjuntos (alguns foram estudados na disciplina de Fundamentos de Matemática I), com uma especial atenção para o conjunto dos números irracionais. Os conceitos de supremo e ínfimo são aqui introduzidos com o objetivo de familiarizar o estudante com esta característica especial do conjunto $\mathbb{R}$ .Também neste Capítulo fazemos o estudo das equações e inequações que se resolvem por meio das propriedades de números reais.

No Capítulo 3 tratamos das Relações, um conceito essencial para as próximas disciplinas e para a compreensão da idéia de Função, que abordamos no Capítulo 4. Neste Capítulo fazemos um estudo das Funções e de suas propriedades de modo geral: domínio e imagem de funções, seus gráficos, funções crescentes, decrescentes, injetoras, sobrejetoras, composição de funções, função inversa. No Capítulo 5 tratamos detalhadamente das Funções Elementares: função afim, função quadrática, funções polinomiais de modo geral, funções racionais, função módulo e funções trigonométricas. Os conceitos trabalhados no Capítulo anterior são aqui de fundamental importância, uma vez que eles estarão presentes no estudo de cada função em particular. As funções exponencial e logarítmica serão estudadas com material complementar no ambiente virtual de aprendizagem.

Carmem Suzane Comitre Gimenez

Rubens Starke

Capítulo 1

Linguagem de conjuntos

Capítulo 1

Linguagem de conjuntos

Neste capítulo temos como objetivos estudar a linguagem de conjuntos e as operações entre eles, desenvolvendo os instrumentos necessários para que os estudantes utilizem a linguagem de conjuntos como representação de situações e conceitos matemáticos.

Introdução

Não se desanime com a sensação de estar aprendendo coisas que já estudou. O objetivo é realmente retomar conhecimentos já estudados, aprofundá-los e torná-los mais precisos. Serão trabalhados conhecimentos novos, assim você poderá ampliar seu saber.

Você se lembra do que é um conjunto? Se você já é professor, como você introduz este assunto? Discuta com seus colegas, formas de se introduzir este assunto e como desenvolver a compreensão dos seus estudantes.

Neste capítulo vamos estudar Conjuntos como uma linguagem essencial na construção dos conceitos matemáticos. Nosso estudo está inserido numa teoria mais ampla, a Teoria dos Conjuntos, desenvolvida no final do século XIX e início do século XX. Ao longo de seu desenvolvimento, a teoria dos conjuntos manteve um estreito relacionamento com a Filosofia, mais especificamente com a Lógica.

Os conceitos que apresentaremos neste capítulo serão utilizados durante todo o curso, uma vez que constituem ferramentas indispensáveis para a compreensão dos conteúdos de Álgebra, Cálculo, Geometria Analítica, Análise e outros. Não temos a pretensão de esgotar o estudo de Conjuntos: estaremos aqui desenvolvendo apenas o essencial para que você possa se sentir confortável com a linguagem, a notação e o tipo de raciocínio necessários para acompanhar os próximos capítulos e outras disciplinas. Veremos a representação dos conjuntos, as relações de pertinência e inclusão, cardinalidade, as operações entre conjuntos e o produto cartesiano.

1.1 Conjuntos e elementos

Converse sobre a noção de conceito primitivo. Faça uma pesquisa. Essa noção é derivada da Filosofia e tem implicações importantes para toda a ciência.

As noções de conjunto, elemento e a relação de pertinência entre elemento e conjunto são conceitos primitivos, que não se definem. A idéia de conjunto é intuitivamente a da linguagem comum, quando estamos pensando em alguns objetos situados coletivamente; podemos pensar num conjunto como uma coleção (ou classe) de objetos, sem repetição e não ordenado. Os objetos de um conjunto são chamados, em geral, de elementos ou membros do conjunto. A maneira mais simples de especificar um conjunto consiste em listar seus elementos entre chaves. Por exemplo: $\{1,3,5,7,9\}$ representa a coleção dos números naturais ímpares menores do que 10. Observe que $\{3,7,5,9,1\}$ e $\{1,1,3,5,5,9,7,7\}$ são o mesmo conjunto, uma vez que o segundo conjunto apresenta elementos repetidos. Não importa a ordem com que listamos os elementos, nem se repetimos um elemento; tudo que importa é: quais objetos são elementos do conjunto e quais não são. Em nosso exemplo, exatamente cinco objetos são elementos do conjunto e nenhum outro objeto o é.

Veja que usamos a palavra "elemento" para indicar que um objeto está em uma coleção (conjunto). Simbolicamente, a pertinência de um elemento a um conjunto é indicada pelo símbolo $\in$. Convenciona-se representar conjuntos com letras maiúsculas e seus elementos com letras minúsculas (no entanto, isto é apenas uma convenção e não uma regra geral). A notação "$x \in A$" (lê-se: x pertence ao conjunto A) significa que o objeto x é elemento do conjunto A. Denotando por A o conjunto do exemplo anterior, $A = \{1,3,5,7,9\}$, podemos escrever $3 \in A$ ou $7 \in A$. Quando um objeto não pertence a um conjunto usamos o símbolo $\notin$; ainda no exemplo, podemos escrever $2 \notin A$ (lê-se: 2 não pertence ao conjunto A).

Observação 1. "$x \in A$" também se lê como "x é membro de A" ou "x é elemento de A" ou "x está em A".

Observação 2. Os conjuntos numéricos são representados por letras especiais, como já foi estudado na disciplina de Fundamentos I:

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ - Conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

Quando escrevemos “seja $x \in \mathbb{Z}$”, isso significa “seja x um elemento do conjunto $\mathbb{Z}$” ou simplesmente “seja x um inteiro”. Um asterisco $*$ indica que estamos considerando o conjunto sem o zero; por exemplo, $\mathbb{N}^*$ é o conjunto dos números naturais sem o zero e $x \in \mathbb{N}^*$ significa que x é um número natural não nulo. Para o conjunto $\mathbb{Z}$ temos ainda as notações:

$\mathbb{Z}_+$: conjunto dos números inteiros não negativos (notação: $x \geq 0$)

$\mathbb{Z}_+^*$: conjunto dos números inteiros positivos (notação: $x > 0$)

Usamos notações similares para os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

1.2 Representação de conjuntos

Há duas maneiras de se especificar um conjunto:

1) *Listar entre chaves os elementos ou alguns elementos do conjunto*

   Esta notação é apropriada para conjuntos com um número “pequeno” de elementos, como $\{1,3,5,7,9\}$ ou $\{-1,0,1\}$. Outra situação para a qual esta notação é adequada é quando fica evidente a regra de formação dos elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números naturais menores do que 100 pode ser anotado por $\{0,1,2,3,4,5,...,100\}$. Neste caso usamos as reticências $(...)$. Um outro exemplo da utilização das reticências é a notação do conjunto dos números naturais pares: $\{0,2,4,6,8,10,...\}$. No entanto, deve-se tomar cuidado ao utilizar reticências. Por exemplo, o conjunto $\{3,5,7,...\}$ seria o conjunto dos números naturais ímpares? Ou seria o conjunto dos números naturais primos maiores do que 2? Com esta notação não podemos precisar qual dos dois conjuntos está sendo representado. Por este motivo, use reticências somente quando não houver qualquer possibilidade de confusão, ou seja, quando a regra de formação dos elementos estiver bem clara.

2) *Descrever a propriedade que caracteriza os elementos do conjunto*

   Um conjunto fica determinado quando conhecemos as propriedades características de seus elementos. Por exemplo, o conjunto de todos os números naturais maiores do que 20 pode ser anotado por $B = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n > 20\}$. Observe que este é o conjunto dos objetos que satisfazem duas condições: são números naturais e são maiores do que 20. Lê-se: "B é o conjunto dos números naturais n $(n \in \mathbb{N})$ tais que (/) n é maior do que 20 $(n > 20)$".

Observação 3. O símbolo " / " de "tal que" pode ser substituído por dois pontos (:) ou por ponto e vírgula (;).

Observação 4. A representação de um conjunto não é única; por exemplo, o conjunto dos números naturais que são divisores de 20 pode ser representado por $\{1,2,4,5,10,20\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} \,/\, n \mid 20\}$ ou $\{n \in \mathbb{N} \,/\, n \text{ é divisor de } 20\}$.

Observação 5. Algumas vezes a propriedade que caracteriza o conjunto envolve a relação de pertinência. Neste caso, esta relação aparece no sentido de "percorre". Veja o exemplo:

$A = \{3n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$; A é o conjunto dos números da forma $3n$, quando n "percorre" os naturais, ou seja, é o conjunto dos números $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \ldots$ Listando os elementos entre chaves teríamos $A = \{0,3,6,9,12,15,18,\ldots\}$, que é o conjunto dos múltiplos de 3.

Observação 6. Um conjunto desprovido de elementos é chamado conjunto vazio e anotado $\varnothing$ ou $\{\}$. Por exemplo:

i) é vazio o conjunto dos dias da semana que começam com a letra b.

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = -1\}$ é o conjunto vazio, pois não existe um número real cujo quadrado é negativo.

Observação 7. Um conjunto com um único elemento é chamado conjunto unitário. Por exemplo, o conjunto das soluções reais da equação $x + 4 = 3$ é o conjunto $\{-1\}$.

1.3 Inclusão – subconjuntos

Observemos os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é divisível por } 6\} \text{ e}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é divisível por } 3\}.$$

Existe alguma relação entre eles? Números divisíveis por 6 são os elementos de A e números divisíveis por 3 são os elementos de B. Sabemos também que todo número divisível por 6 também é divisível por 3. Combinando estas duas informações vemos que todo elemento de A é também elemento de B.

Observemos outro par de conjuntos: M é o conjunto dos polígonos no plano e T é o conjunto dos triângulos no plano. Como todo triângulo é um polígono (de três lados), podemos concluir que todo elemento de T é também elemento de M.

A palavra inclusão tem muitos sentidos. Pense como o sentido social, por exemplo, se relaciona, ou não, com o sentido matemático que estamos discutindo. Procure os significados dessa palavra em um bom dicionário.

Os exemplos acima nos mostram a ocorrência de uma relação entre dois conjuntos: a relação de inclusão. Quando todo elemento de um conjunto X é também elemento de um conjunto Y, dizemos que X está contido em Y e escrevemos $X \subset Y$. Neste caso X é chamado um subconjunto de Y. Nos exemplos temos $A \subset B$ e $T \subset M$.

Outros exemplos:

1) Para $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 1 < x < 12\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 2 \leq x < 9\}$, temos que $B \subset A$, pois todo número inteiro entre 2 e 9 também está entre 1 e 12.

2) Para $A = \{-1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 = 0\}$, temos que $A \subset B$ pois, $B = \{-1\,,\ 1\}$.

Observação 8. Quando não ocorre relação de inclusão?
Obervemos os conjuntos $X = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é divisível por } 5\}$ e
$Y = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ é divisível por } 6\}$.
Existem elementos de X que não pertencem a Y. Por exemplo, o 15 (é divisível por 5 mas não é divisível por 6). Neste caso dizemos que X não está contido em Y. Assim, X não está contido em Y quando existe pelo menos um elemento de X que não pertence a Y.

(Note também que Y não está contido em X, uma vez que 24 é elemento de Y, é divisível por 6 e não é divisível por 5).

Observação 9. Há duas inclusões "extremas": $A \subset A$ (pois é claro que todo elemento de A pertence a A) e $\varnothing \subset A$. Esta última é curiosa: se quiséssemos mostrar que $\varnothing$ não está contido em A, teríamos que obter um objeto x tal que $x \in \varnothing$ mas $x \notin A$. Como $x \in \varnothing$ é impossível, pois $\varnothing$ não tem elementos, somos levados a concluir que não é possível mostrar que $\varnothing$ não está contido em A, ou seja, o conjunto vazio é um subconjunto de A. Se $B \subset A$ e B é diferente de $\varnothing$ e do próprio A, dizemos que B é um subconjunto próprio de A.

Pense bem sobre essa justificativa. Você consegue compreender sua validade? Perceba que nem sempre o conjunto vazio é elemento de um conjunto, mas sempre é subconjunto de qualquer conjunto. Esta demonstração segue um padrão muito usado. Procure descobrir que padrão é esse.

Propriedades da inclusão

A relação de inclusão tem algumas propriedades que nos serão úteis:

i) *Reflexiva*: Todo conjunto é subconjunto de si próprio, ou simbolicamente, $A \subset A$ para todo conjunto A (veja Observação 9).

ii) *Anti-simétrica*: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Esta propriedade é constantemente usada nos raciocínios matemáticos: quando se deseja mostrar que dois conjuntos são iguais, mostra-se que duas inclusões ocorrem. Na verdade esta propriedade contém, nela embutida, a condição de igualdade entre conjuntos: os conjuntos A e B são iguais se e somente se têm exatamente os mesmos elementos. Simbolicamente,

$$A = B \text{ se e somente se } A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

Em outras palavras, $A = B$ se e somente se todo elemento de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de A. Assim, para mostrarmos que dois conjuntos A e B são iguais basta mostrar que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

iii) *Transitiva*: Para A, B e C conjuntos, se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Observemos que se x é elemento de A, então será elemento de B e, como $B \subset C$, x será também elemento de C. Assim, todo elemento de A será elemento de C, ou seja, $A \subset C$.

Silogismo
Leia a discussão sobre silogismo nos sites indicados abaixo.

- http://www.simpozio.ufsc.br/Port/1-enc/y-micro/SaberFil/PeqLogica/2211y025,2.html
- http://www.paralerepensar.com.br/silogismos.htm

Consulte também seu material de Problemas – Sistematização e Representação.

Esta propriedade é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de silogismo. Um exemplo de silogismo é o seguinte: todo ser humano é um animal, todo animal é um ser mortal, logo todo ser humano é mortal. Na linguagem de conjuntos: A, B e C são respectivamente o conjunto dos seres humanos, dos animais e dos mortais. Temos $A \subset B$ e $B \subset C$, logo $A \subset C$.

Exercícios propostos

1) Listar entre chaves os elementos dos conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 - 0\}$

$B = \{x / x \text{ é letra da palavra abracadabra}\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 9\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / 3x + 1 = 9 \text{ e } 2x^2 = x = 1 = 0\}$

$E = \{x / x \text{ é algarismo do número } 234543\}$

2) Representar os conjuntos:

a) Dos números naturais múltiplos de 5.

b) Dos números naturais divisores de 50.

c) Dos números naturais maiores estritamente do que 5 e menores estritamente do que 30 e que sejam divisíveis por 3.

d) Dos números inteiros x que satisfazem a igualdade $x^2 - 2x + 1 = 0$.

3) Em cada caso, verifique se A está contido em B:

$A = \{x \in \mathbb{N} / n = 4p,\ p \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} / n = 4k,\ \text{k} \in \mathbb{N}\}$

$A = \{n \in \mathbb{N} / \text{n é divisor de } 484\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} / \text{n é divisor de } 242\}$

4) Determinar todos os possíveis conjuntos X que satisfazem simultaneamente as condições $X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{1, 2\} \subset X$.

5) Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{b, d, e\}$, listar os conjuntos Y tais que $Y \subset A$ e $Y \subset B$.

6) Considere os subconjuntos de números naturais $M_a = \{na / n \in \mathbb{N}\}$ e $M_b = \{nb / n \in \mathbb{N}\}$, com a e b números naturais fixos. Determine sob que condições M_a é subconjunto de M_b.

1.4 Cardinalidade de um conjunto

Nos exemplos anteriores trabalhamos com conjuntos finitos como $\{1,3,5,7\}$ e infinitos, como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Intuitivamente sabemos distinguir quando um conjunto é finito ou infinito, mas como caracterizá-los?

Um conjunto A é finito quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre A e um subconjunto de números naturais da forma $B = \{1,2,3,...,n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Isso significa que cada elemento de A está associado a um único elemento de B cada elemento de B está associado a um único elemento de A. Veja o exemplo:

Correspondência Biunívoca
Procedimento que domina toda a matemática(...). Esta consiste em atribuir a cada objeto de um conjunto um objeto de outro, e continuar assim até que um ou ambos os conjuntos se esgotem(...). A correspondência biunívoca resume-se numa operação de "fazer corresponder". (Fonte: http://www.somatematica.com.br/numeros.php).

$$A = \{a,e,i,o,u\} \quad B = \{1,2,3,4,5\}$$

a	1
e	2
i	3
o	4
u	5

No exemplo acima cada elemento de A está associado a um único elemento de B e vice-versa; assim, A é finito e possui 5 elementos (o mesmo número de elementos de B). De modo geral, se existe uma correspondência dessa natureza entre um conjunto A e um conjunto $B = \{1,2,3,4,...,n\}$, podemos concluir que A é um conjunto *finito* com n elementos e podemos expressar A como $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n\}$. Conseqüentemente, um conjunto é *infinito* quando não é finito, ou seja, quando não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca com um conjunto $B = \{1,2,3,4,...,n\}$, *qualquer que seja* n.

No decorrer do curso vamos mostrar que existem diferenças entre cardinalidades infinitas, isto é, existem estudos, iniciados pelo matemático Georg Cantor (1845-1918), que mostram que conjuntos com infinitos elementos possuem cardinalidades diferentes. Este é um assunto interessante, que mexe com nossas crenças e intuições. Procure notícias sobre isso!

A cardinalidade de um conjunto nada mais é do que a "quantidade" de elementos do conjunto. Quando A é um conjunto finito, sua cardinalidade é um número natural anotado por $|A|$. Quando A é um conjunto infinito, dizemos que sua cardinalidade é *infinita*.

Observação 10. Evite dizer "número infinito de elementos". Se é *número, é finito.* Se um conjunto é infinito, podemos dizer que ele possui uma *infinidade* de elementos.

Observação 11. A cardinalidade do conjunto vazio é zero.

1.5 Conjunto das partes de um conjunto

Quantos subconjuntos tem um conjunto? Veja um primeiro exemplo.

Exemplo 1. Para $A=\{1,2,3\}$ os possíveis subconjuntos de A são:

$$A_1=\varnothing;\ A_2=\{1\};\ A_3=\{2\};\ A_4=\{3\};\ A_5=\{1,2\};$$
$$A_6=\{1,3\};\ A_7=\{2,3\};\ A_8=\{1,2,3\}.$$

Observe que A possui pelo menos dois subconjuntos: $\varnothing$ e o próprio A (*veja Observação 9*). Note também que a quantidade de subconjuntos de A depende da cardinalidade de A: no exemplo $|A|=3$ e A possui oito subconjuntos.

Exemplo 2. Para $A=\{a,b\}$ os subconjuntos de A são:

$$A_1=\varnothing;\ A_2=\{a\};\ A_3=\{b\};\ A_4=\{a,b\}.$$

Neste caso, $|A|=2$ e A possui quatro subconjuntos.

Observação 12. Você já deve ter percebido que a quantidade de subconjuntos de A resulta de uma contagem que provém das diferentes maneiras de dispor os elementos de A em conjuntos, ou seja, quantos subconjuntos com um elemento, quantos subconjuntos com dois elementos, etc.

Pergunta: como isso se relaciona com os conceitos de análise combinatória? Vejamos no terceiro exemplo.

Exemplo 3. $A=\{a\}$ possui dois subconjuntos: $\varnothing$ e A.

Observando, ainda, um quarto exemplo:

Exemplo 4. O conjunto vazio possui um único subconjunto: ele mesmo.

Note que nos exemplos estamos fazendo contagem de subconjuntos em conjuntos *finitos*. Observe agora um padrão:

- Se $|A| = 0$, teremos **um** subconjunto, $1 = 2^0$
- Se $|A| = 1$, teremos **dois** subconjuntos, $2 = 2^1$
- Se $|A| = 2$, teremos **quatro** subconjuntos, $4 = 2^2$
- Se $|A| = 3$, teremos **oito** subconjuntos, $8 = 2^3$

Assim, parece razoável inferir que se $|A| = n$, teremos 2^n subconjuntos. Esta afirmação é verdadeira. No entanto, você não deve esperar que apenas quatro exemplos possam justificar a veracidade da afirmação; para prová-la de fato, é necessário recorrer a argumentos da análise combinatória.

Pergunta: Quantos subconjuntos tem um conjunto infinito?

Quando a cardinalidade de um conjunto A é infinita, A terá também uma infinidade de subconjuntos: uma infinidade de conjuntos com um elemento, uma infinidade com dois elementos, etc.

Definição: O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é chamado conjunto das partes de A e denotado por $P(A)$.

Exemplos:

1) $A = \varnothing$, $P(A) = \{\varnothing\}$

   Observe que $P(A)$ é um conjunto unitário, cujo único elemento é o conjunto vazio.

2) $A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

   Neste caso $P(A)$ possui quatro elementos: $\varnothing, \{a\}, \{b\}$ e o próprio A. Não se impressione com a quantidade de chaves que usamos! $P(A)$ é um conjunto onde cada elemento é também um conjunto. Na idéia de conjunto, nada impede que estes objetos sejam conjuntos.

Exercícios propostos

7) Determine $P(A)$ para:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = 1\}$

b) $A = \{3, \{2, 5\}\}$

c) $A = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$

8) Quantos são os subconjuntos de $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ que possuem três elementos?

1.6 Operações entre conjuntos

Assim como podemos operar com números, também podemos fazer operações com conjuntos. É claro que são objetos diferentes, mas você verá que são muitas as semelhanças, especialmente nas propriedades destas operações. Em nosso estudo estaremos considerando que os conjuntos envolvidos são subconjuntos de um conjunto U que chamaremos de *conjunto universo*. Com isso deixamos explícito que estamos atuando num determinado conjunto como referência (o nosso universo de trabalho).

1.6.1 União

Definição: Dados os conjuntos A e B, a união (ou reunião) de A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou pertencem a B. A notação para este conjunto é $A \cup B$ (lê-se "A união B").

Exemplos:

1) Para $A = \{1, 2, 7, 4\}$ e $B = \{2, 4, 9, 6, 43\}$ temos $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 43\}$.

2) Para $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \le x < 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} / 0 \le x < 19\}$, temos $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \le x < 19\}$.

Observação 13. Simbolicamente escrevemos:

$$A \cup B = \{x \in U \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Note que o conectivo **ou** que aparece na representação de $A \cup B$ não é exclusivo, ou seja, um elemento de $A \cup B$ pode pertencer aos dois conjuntos (assim, quando um elemento x pertence à união de conjuntos A e B, x deve pertencer a pelo menos um dos conjuntos). Sugestão: veja os exemplos novamente.

Observação 14. Podemos visualizar a união de conjuntos através de figuras no plano que representam os conjuntos e a operação união. Estas figuras são chamadas "diagramas de Euler-Venn" e constituem um recurso didático para a abordagem das operações com conjuntos.

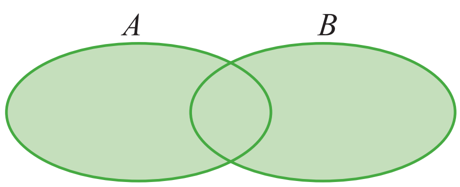


Figura 1.1 – A parte hachurada é o conjunto $A \cup B$

Tarefa de pesquisa

Por que estes diagramas têm o nome "Euler-Venn"?

1.6.2 Propriedades da união

As propriedades a seguir são válidas para quaisquer conjuntos A, B e C; todas podem ser provadas utilizando a definição de união e os conceitos vistos anteriormente. Note a semelhança com as propriedades da adição de números reais:

1) *Propriedade associativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   Esta propriedade permite operar mais de dois conjuntos (note que a definição de união se refere somente a dois conjuntos); basta operar de dois em dois.

A prova da quinta propriedade está feita a seguir. Tente fazer a prova das outras a partir da definição e pensando sobre o raciocínio que a organiza.

2) *Propriedade Comutativa:* $A \cup B = B \cup A$

Assim como a adição de números reais, a ordem dos conjuntos não altera a união.

3) *Elemento neutro:* $A \cup \varnothing = A$

O $\varnothing$ está aqui fazendo o papel que o zero faz na adição: como $\varnothing$ não tem elementos, sua união com qualquer conjunto A resulta no próprio A.

4) $A \subset A \cup B$

Decorre diretamente da definição: os elementos de A são também elementos da união, uma vez que estão em A.

5) $A \cup B = B$ *se e somente se* $A \subset B$.

Prova: Inicialmente tomamos como hipótese $A \cup B = B$ e devemos mostrar que $A \subset B$.

De fato, seja $x \in A$; pela propriedade anterior (propriedade 4), temos que $x \in A \cup B$ e como, por hipótese, temos $A \cup B = B$ podemos concluir que $x \in B$. Logo, $A \subset B$.

Reciprocamente, tomamos $A \subset B$ como hipótese e devemos mostrar que $A \cup B = B$, ou seja, que (i) $A \cup B \subset B$ e também que (ii) $B \subset A \cup B$ (propriedade anti-simétrica da inclusão). Como (ii) já ocorre pela propriedade 4, basta provar (i).

De fato: (i) seja $x \in A \cup B$; então $x \in A$ ou $x \in B$. Como por hipótese $A \subset B$, podemos concluir que $x \in B$. Logo, $A \cup B \subset B$ e teremos $A \cup B = B$.

1.6.3 Intersecção

Definição: Dados os conjuntos A e B, a intersecção de A com B é o conjunto dos elementos que pertencem a A e também a B. A notação para este conjunto é $A \cap B$ (lê-se "A intersecção B").

Exemplos:

1) Para $A = \{10, 20, 25, 30\}$ e $B = \{2, 5, 10, 15, 20\}$, $A \cap B = \{10, 20\}$.

2) Se $A = \{n \in \mathbb{N} / n \mid 45\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} / n \mid 54\}$, $A \cap B = \{1,3,9\}$, ou seja, $A \cap B$ é o conjunto dos números naturais que são divisores de 45 e também de 54.

Observação 15. Simbolicamente escrevemos:

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

O conectivo **e** indica que quando um elemento x pertence a $A \cap B$, x deve pertencer simultaneamente a A e a B.

Observação 16. O diagrama de Euler-Venn para a intersecção é:

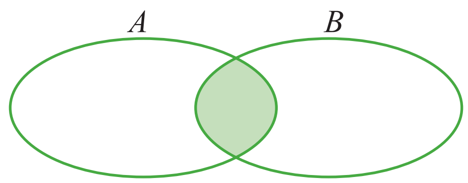


Figura 1.2 – A parte hachurada é o conjunto $A \cap B$

Observação 17. Quando a intersecção de dois conjuntos A e B é o conjunto vazio, dizemos que A e B são *conjuntos disjuntos.*

1.6.4 Propriedades da intersecção

As propriedades da intersecção que enunciaremos a seguir são válidas para quaisquer conjuntos A, B e C, subconjuntos de um conjunto U. Também aqui, note a semelhança com as propriedades das operações com números reais. (Continuaremos a numeração a partir das propriedades da união)

6) *Propriedade associativa:* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   Como na propriedade 1, esta propriedade nos permite fazer a intersecção de mais de dois conjuntos.

7) *Propriedade comutativa:* $A \cap B = B \cap A$

8) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Para um elemento x pertencer ao conjunto $A \cap \varnothing$, ele deve pertencer simultaneamente a A e ao $\varnothing$. Como o conjunto vazio não tem elementos, também não haverá elementos em $A \cap \varnothing$.

9) $A \cap B = A$ se e somente se $A \subset B$.

Deixamos a prova desta propriedade como exercício (veja propriedade 4).

10) $A \cap B \subset A$

Se $x \in A \cap B$, então x é elemento de A e também de B. Isto garante a inclusão de $A \cap B$ em A (e também em B).

11) Sejam A, B e C conjuntos. Então

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Para provar esta propriedade utilizamos a igualdade de conjuntos (propriedade anti-simétrica da inclusão) e as definições de união e intersecção. Deixamos como exercício.

1.6.5 Diferença

Definição: Dados os conjuntos A e B, a diferença de A e B é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. A notação para este conjunto é $A - B$ e podemos escrever:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Exemplos:

1) $A = \{1,3,5,7,9,11\}$ e $B = \{1,5,11\}$, $A - B = \{3,7,9\}$.

2) $\mathbb{N}$ e $B = \{2n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} - B = \{2n+1 \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

3) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números reais que não são racionais, ou seja, é o conjunto dos números irracionais.

Observação 18. Note que os conjuntos $A - B$ e $B - A$ não são necessariamente iguais, assim como também não é comutativa a operação subtração de números reais. Em nosso primeiro exemplo $A - B = \{3, 7, 9\}$ e $B - A = \varnothing$.

Tarefa

É possível encontrar conjuntos A e B de modo que se tenha $A - B = B - A$?

Exercícios propostos

9) Determinar os conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{Q} / x > 1\} \cap \left\{-2 < x < \dfrac{37}{2}\right\}$

b) $\{\{1, 2\}, \{3\}\} \cap \{1, 2, \{1, 2\}\}$

c) $\{x \in \mathbb{N} / 5 \leq x\} \cup \{x \in \mathbb{N} / x \leq 5\}$

d) $\{x \in \mathbb{N} / x < 0\} \cup \mathbb{N}$

e) $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

10) Dados os subconjuntos de $\mathbb{N}$, $A = \{x / 2 \mid x\}$, $B = \{2n + 1 / n \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x / 3 \mid x\}$, determinar:

a) $A \cap B$

b) $\mathbb{N} \cap A \cap B$

c) $B \cap \mathbb{N}$

d) $A \cap C$

11) Construir subconjuntos A, B e C de $\mathbb{N}$ que satisfaçam simultaneamente as condições:

i) $A \subset B$

ii) $C \subset B$

iii) $A \cap C = \varnothing$

12) Indicar as condições que devem satisfazer os conjuntos A e B para que se verifique $A \cup B = B$.

13) Indicar as condições que devem satisfazer os conjuntos A e B para que se verifique $A \cap B = B$.

14) Prove que para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subset B$ e $A \subset C$, então $A \subset (B \cap C)$.

15) Para $A = \{x \in \mathbb{N} / x = 4n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ e

$$B = \left\{x \in \mathbb{N}^* / \frac{20}{x} = n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\right\},$$

qual o número de elementos de $A \cap B$?

16) Um subconjunto A de números naturais contém doze múltiplos de 4, sete múltiplos de 6, cinco múltiplos de 12 e oito números ímpares. Qual o número de elementos de A?

17) Numa pesquisa de mercado, foram entrevistadas várias pessoas acerca de suas preferências em relação a 3 produtos: W, X e Y. Os resultados da pesquisa indicaram que:

- 210 pessoas compram o produto W;
- 210 pessoas compram o produto X;
- 250 pessoas compram o produto Y;
- 20 pessoas compram os três produtos;
- 100 pessoas não compram nenhum dos três produtos;
- 60 pessoas compram os produtos W e X;
- 70 pessoas compram os produtos W e Y;
- 50 pessoas compram os produtos X e Y.

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas foram entrevistadas?

b) Quantas pessoas compram apenas o produto W?

c) Quantas pessoas compram apenas o produto X?

d) Quantas compram apenas o produto Y?
(Sugestão: use diagramas)

18) Para conjuntos A e B finitos, prove que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

19) Determinar os conjuntos A, B e C que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

a) $A \cup B \cup C = \{z, x, v, u, t, s, r, p, q\}$

b) $A \cap B = \{r, s\}$

c) $B \cap C = \{s, x\}$

d) $C \cap A = \{s, t\}$

e) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$

f) $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$

20) Desenhar um diagrama de Euler-Venn representando quatro conjuntos A, B, C e D, de modo que se tenha $A \not\subset B$, $B \not\subset C$, $C \supset (A \cup B)$ e $D \subset (A \cap B)$.

21) A união é uma operação que pode ser estendida a mais de dois conjuntos: para conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, denotamos a união como $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. É possível também uma generalização para uma infinidade de conjuntos; para uma família de conjuntos A_i com $i \in J$, onde J é um conjunto infinito de índices, a união dos conjuntos A_i é denotada por $\bigcup_{i \in J} A_i$. Assim, $x \in \bigcup_{i \in J} A_i$ se e somente se $x \in A_i$, para algum $i \in J$. Determine agora o conjunto resultante da união infinita da seguinte família de conjuntos: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, $B_i = \{2i\}$, para $i \in \mathbb{N}$.

23) Dados os conjuntos A e B, desenhe os diagramas de Venn-Euler dos conjuntos, considerando os casos (i) A e B disjuntos; (ii) $A \subset B$; (iii) $A \cap B \neq \varnothing$; (iv) $B \subset A$:

a) $A - B$

b) $A \cup (A - B)$

c) $A - (A - B)$

d) $B \cap (A - B)$

24) Considere os conjuntos $A=\{0,1,3,5,7\}$ e $B=\{2,4,5,8\}$. Determine:

a) $A-B$

b) $(A-B)\cup(B-A)$

c) $(A\cup B)-(B\cap A)$

1.7 Complementar de um conjunto

Considere um conjunto A; o complementar de A (ou complemento de A) é o conjunto dos elementos que não pertencem a A. Se, por exemplo, $A=\{0,1\}$, o complementar de A teria como elementos o -5, $\sqrt{17}$, o planeta Urano, os dias da semana, todos os números primos, enfim, qualquer objeto que não fosse 0 e não fosse 1 seria elemento do complementar de A. Esta situação tão ampla não parece muito interessante! Para evitar isto, a idéia de "complementar de um conjunto" terá como referência um conjunto "maior", que contém o conjunto A. Assim, devemos pensar em "complementar de A em relação a um conjunto B, com $A\subset B$".

Notações:

- Indicamos o complementar de A em relação a um conjunto B como $C_B A=\{x\in B\,/\,x\notin A\}$.
- Quando B é o conjunto universo, denotamos o complementar de A por A^c; então $A^c=\{x\,/\,x\notin A\}$.

Observação 19. Note que $x\in A^c$ se e somente se $x\notin A$. E $x\notin A^c$ se e somente se $x\in A$; assim, $A\cap A^c=\varnothing$. Consequentemente, para o conjunto universo U, temos $\varnothing^c=U$ e $U^c=\varnothing$.

Exemplos:

1) $A=\{x\in Z\ /\ 2\mid x\}\subset\mathbb{Z};\ A^c=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x \text{ é ímpar}\}$

2) $A=\{x\in\mathbb{Z}/2\mid x\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Z}/-6<x<20\}$;

$C_B A=\{-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,12,13,15,17,19\}$, ou

$C_B A=\{2n+1/n\in\mathbb{Z}\ \text{ e } -3\le n\le 19\}$.

Propriedades da complementação

Para A e B subconjuntos de um conjunto U, temos as seguintes propriedades (continuaremos a numeração a partir das propriedades da intersecção):

12) $(A^c)^c = A$

Sabemos da Obs. 19 que $x \in (A^c)^c$ se e somente se $x \notin A^c$. Mas $x \notin A^c$ se e somente se $x \in A$. Logo, a igualdade é verdadeira.

13) $A - B = A \cap B^c$

Lembrando a definição de intersecção e da diferença, note que:

$$A \cap B^c = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B^c\} = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\} = A - B$$

14) (i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Estes resultados são conhecidos como "Leis de De Morgan", devido ao seu autor (tarefa: pesquise quem foi De Morgan). Vamos demonstrar (i) (para lembrar como demonstrar a igualdade de conjuntos veja Propriedade Anti-simétrica da Inclusão):

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou}$$

$$x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$$

Deixamos a demonstração de (ii) como exercício.

15) $A \subset B$ se e somente se $B^c \subset A^c$.

Deixamos a demonstração como exercício; você pode fazer separadamente as duas implicações:

$$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c \text{ e } B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B.$$

16) Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^c$.

Devemos mostrar que todo elemento de B é elemento de A^c. Seja $x \in B$; como $A \cap B = \varnothing$, x não é elemento de A. Logo, $x \in A^c$ e, assim, $B \subset A^c$.

Exercícios propostos

25) Desenhe o diagrama de Venn-Euler do complementar de A em relação a um conjunto universo U.

26) Considere subconjuntos A e B de um conjunto U; definimos a *diferença simétrica* de A e B e anotamos $A \vartriangle B$ como sendo o conjunto $A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Usando esta definição:

a) Faça o diagrama de Venn-Euler de $A \vartriangle B$.

b) Calcule $\{a, b, c, d\} \vartriangle \{c, d, e, f\}$ considerando U o conjunto das letras do alfabeto português.

c) Prove que $A \vartriangle A = \varnothing$ para todo conjunto A.

d) Prove que $A \vartriangle \varnothing = A$ para todo conjunto A.

e) Prove que $A \vartriangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

27) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$ num universo $U = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$, calcule:

a) $(A - B)^c$

b) $(A \cap C)^c$

c) $(A \cup B)^c$

d) $(B \vartriangle C)^c$

28) Prove que $A \subset B$ se e somente se $A - B = \varnothing$.

29) Determine os elementos dos conjuntos A e B, subconjuntos de U, sabendo que $A \vartriangle B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A^c = \{2, 3, 5, 7\}$, $B^c = \{1, 4, 7\}$ e $U = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x \leq 8\}$.

30) Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} / x = 6n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} / x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Determine:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $B - A$

31) Considere os seguintes conjuntos: $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ $B = \{\{1\}, 2\}, C = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Classifique as afirmações abaixo em V ou F, justificando:

a) $A \cap B = \{2\}$

b) $B \cap C = \{\{1\}\}$

c) $B - C = A \cap B$

d) $B \subset A$

e) $A \cap P(A) = \{\{1, 2\}\}$, onde $P(A)$ é o conjunto das partes de A.

1.8 Produto cartesiano

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 5\}$. Vamos construir um novo conjunto, denotado por $A \times B$, cujos elementos são "pares ordenados" formados por elementos de A e de B, isto é, todos os possíveis pares de números de modo que o primeiro seja elemento de A e o segundo seja elemento de B:

$$A \times B = \{(1,1), (1,5), (2,1), (2,5), (3,1), (3,5)\}$$

O conjunto formado é chamado "produto cartesiano de A por B". Note que o nome "par ordenado" significa que a ordem em que os elementos aparecem no par é importante; por exemplo, o par $(1,2)$ é diferente do par $(2,1)$ e $(1,2)$ não pertence ao conjunto $A \times B$. O conjunto $B \times A$ seria dado por $B \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$, que é um conjunto diferente de $A \times B$.

Conjuntos de pares ordenados são úteis para descrever várias situações em Matemática e em outras áreas; você deve lembrar de como construía gráficos de funções, da descrição de curvas no plano, ou de como procurar uma rua no mapa de uma cidade.

Genericamente, dados os conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B é o conjunto $A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ e } b \in B\}$. A expressão "$a \in A$ e $b \in B$" aí aparece no sentido de "a percorre A e b percorre B" (veja a observação 4). Isto significa que usamos **todos** os elementos de A e **todos** os elementos de B, construindo todos os possíveis pares ordenados.

Mais exemplos:

1) $A=\{n\}$ e $B=\{13,17,19,23,29\}$,

$A\times B=\{(n,13),(n,17),(n,19),(n,23),(n,29)\}$

2) $A=\{a,b,c\}$ e $B=\{2n/n\in\mathbb{N}\}$,

$A\times B=\{(x,2n)/\,x=a, x=b \text{ ou } x=c \text{ e } n\in\mathbb{N}\}$

Observação 20. Em um par ordenado (a,b), a é a primeira coordenada e b é a segunda coordenada.

Observação 21. Quando os conjuntos são iguais, o produto cartesiano $A\times A$ também é denotado por A^2; $A^2=\{(a,b)/\,a\in A \text{ e } b\in A\}$.

Observação 22. O que acontece quando um dos conjuntos de um produto cartesiano é o conjunto vazio? Como o conjunto vazio não tem elementos, não podemos construir pares ordenados e consequentemente temos que $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$, qualquer que seja o conjunto A.

Observação 23. Às vezes podemos descrever um conjunto de pares ordenados mesmo que não estejam explícitos os conjuntos que o compõem; por exemplo, o conjunto

$$L=\{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}/\,a \text{ é divisor de } b \text{ e } b<7\}$$

é um *subconjunto próprio* do conjunto cartesiano $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ (veja Observação 9) e seus pares ordenados são especificados por meio de uma *relação* entre as coordenadas; o conjunto L será dado por:

$$L=\{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,0),(2,2),(2,4),\\ (2,6),(3,0),(3,3),(3,6),(4,0),(4,4),(5,0),(5,5),(6,0),(6,6)\}$$

Para escrever o conjunto, tomamos todas as possibilidades para a segunda coordenada b, ou seja, $0,1,2,3,4,5,6$ e para a primeira coordenada tomamos os possíveis divisores desses números.

Subconjuntos de produtos cartesianos serão estudados na unidade *Relações*.

1.8.1 Representação gráfica do produto cartesiano

Você deve lembrar de como desenhava gráficos de funções reais, usando dois eixos perpendiculares para neles representar o domínio (eixo horizontal) e contra-domínio (eixo vertical) da função e localizando os pontos $(x, f(x))$ por meio de retas paralelas aos eixos. No caso de funções reais, domínio é subconjunto de $\mathbb{R}$, contra-domínio é $\mathbb{R}$ e o plano (identificado como $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$) determinado pelos dois eixos é chamado plano cartesiano (tarefa: descubra a origem da palavra "cartesiano"). O gráfico da função é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$, que é um subconjunto do plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Podemos generalizar esta idéia para qualquer par de conjuntos A e B. Tracemos dois eixos perpendiculares nos quais representamos o conjunto A no eixo horizontal (primeiro conjunto) e o conjunto B no eixo vertical (segundo conjunto); os pares ordenados (a,b) podem ser representados pelas intersecções de retas paralelas aos dois eixos pelos pontos que representam os elementos de A e de B. Veja a figura 1.3.

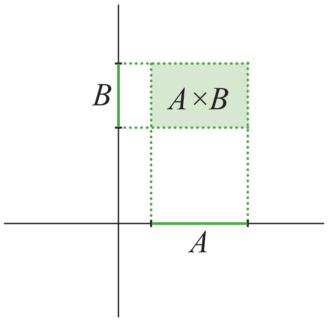


Figura 1.3

O fato de podermos representar o conjunto $A\times B$ como pontos de um plano é que permite sua utilização para descrever sistemas de localização, principalmente mapas. Introduzir o produto cartesiano por meio de mapas tornou-se um recurso muito útil, que pode ser observado em muitos livros didáticos.

1.8.2 Igualdade de pares ordenados

Se pensarmos num par ordenado (a,b) como a posição de um objeto no plano, podemos perguntar: quando um objeto localizado em (x,y) estará na posição (a,b)? É razoável responder: quando as coordenadas de (x,y) coincidirem com as coordenadas (a,b). Podemos então definir:

Definição: Dois pares ordenados (a,b) e (x,y) são iguais se e somente se $a = x$ e $b = y$.

Exemplo:

Determine os valores de t para que o par $(t,0)$ pertença ao conjunto $S = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,/\, y = x^2 - 4\}$.

Resolução: Podemos escrever o conjunto S como

$$S = \{(x\ ,\ x^2 - 4) \,/\, x \in \mathbb{Z}\}.$$

Para que o par $(t,0)$ pertença ao conjunto S, devemos ter $(t,0) = (x, x^2 - 4)$, ou seja, $t = x$ e $x^2 - 4 = 0$. Isto significa $t^2 - 4 = 0$ e, portanto, $t = 2$ ou $t = -2$. Nenhum outro valor de t satisfaz a condição. Assim, os valores de t para que $(t,0) \in S$ são $t = 2$ ou $t = -2$ (o que significa que os pares $(2,0)$ e $(-2,0)$ são elementos de S).

1.8.3 Propriedades do produto cartesiano

Sejam A, B e C conjuntos. Valem as seguintes propriedades:

1) Se A é diferente de B, tem-se $A \times B \neq B \times A$. (veja o primeiro exemplo)

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Você pode verificar intuitivamente a igualdade dos conjuntos através da representação gráfica:

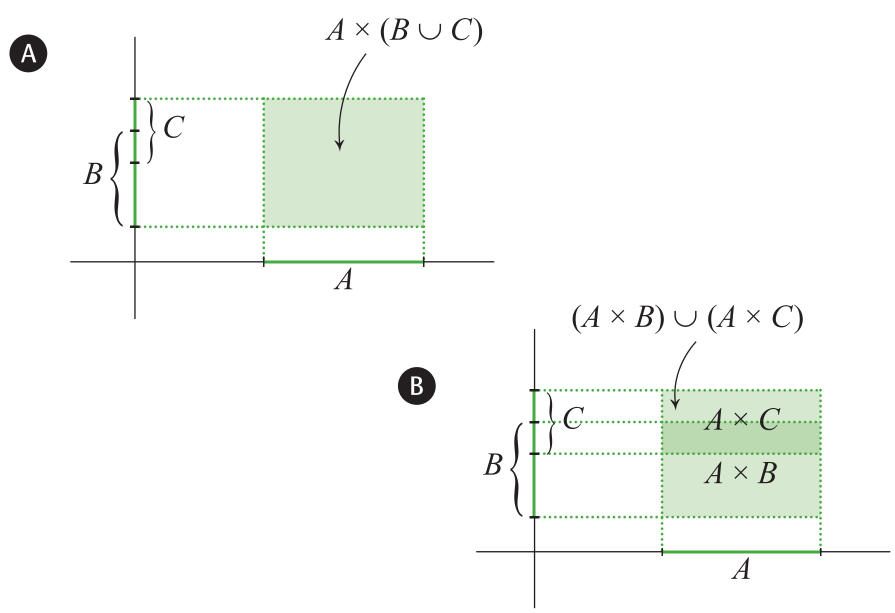


Figura 1.4 - (A) $A \times (B \cup C)$ e (B) $(A \times B) \cup (A \times C)$

Analogamente temos também $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. Faça a representação gráfica como exercício.

Exercícios

32) Dados $A = \{3,4,5\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$ escreva os conjuntos:

a) $A \times B$

b) $B \times A$

c) $(A \times A) \cup (B \times B)$

d) $(A \times B) \cup (B \times A)$

e) $(A \times B) \cap (B \times A)$

f) $(A \times A) \cap (B \times B)$

33) Se A tem dois elementos e B tem seis elementos, quantos elementos tem $A \times B$? Você pode generalizar?

34) Determine x e y de modo que sejam iguais os pares ordenados:

a) $(2x-1, 5)$ e $(x, y+1)$

b) $(x+y, 1)$ e $(3, x-y)$

c) $(y-2, 2x+1)$ e $(x-1, y+2)$

35) Da mesma forma como foi feito para a união e intersecção de conjuntos, o produto cartesiano pode ser estendido a mais de dois conjuntos. Para três conjuntos temos:

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \,/\, a \in A, b \in B \text{ e } c \in C\}$$

O conjunto $A \times B \times C$ é o conjunto das ternas ordenadas (a,b,c) com $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$. Um exemplo de conjunto desta natureza é o espaço tridimensional $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde cada coordenada representa uma dimensão: comprimento, largura e altura.

Também podemos definir para uma família de n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) / a_i \in A_i, \text{ para } 1 \le i \le n\}$$

Os elementos deste conjunto são chamados de "*n*-uplas" ordenadas (costuma-se falar "ênuplas").

O conjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ é um exemplo para o caso $n=3$.

Agora faça o exercício. Descreva o produto cartesiano dos conjuntos:

a) $A=\{1,2,3\}, B=\{2,5\}, C=\{7\}$

b) $A_i=\{n\in\mathbb{N}\,/\,n \text{ é divisor de } i\}$ para $1\leq i\leq 8$ (A_i é o conjunto dos divisores de 1, A_2 é o conjunto dos divisores de 2, A_3 é o conjunto dos divisores de 3 etc.).

Tarefa de pesquisa

1) Você já sabe que produtos cartesianos são úteis para descrever posições de objetos. Em geografia você aprendeu que a localização de pontos na Terra é feita através de duas coordenadas: latitude e longitude. Produza um texto explicando detalhadamente o que é latitude e o que é longitude. Dê as coordenadas de sua cidade natal e de mais quatro cidades de sua escolha.

2) A localização de estrelas também é feita através de coordenadas. Produza um texto explicando detalhadamente um sistema de coordenadas estelares (existe mais de um!). Você vai encontrar este tema em livros de introdução à astronomia e em *sites* da internet.

Resumo

Neste capítulo você estudou Conjuntos, a linguagem universal da Matemática. Os tópicos trabalhados foram:

1) Conjuntos e elementos: relação de pertinência e representação de conjuntos.
2) Inclusão – Subconjuntos: propriedades da inclusão e subconjuntos especiais do conjunto $\mathbb{R}$.
3) Cardinalidade de um conjunto: número de elementos de um conjunto.
4) Conjunto das partes de um conjunto: conjunto formado por todos os seus subconjuntos.
5) Operações entre conjuntos: União, Intersecção, Diferença e propriedades dessas operações.
6) Complementar de um conjunto: relação com a inclusão e propriedades.
7) Produto cartesiano de conjuntos: representação, igualdade de pares ordenados, propriedades.

Bibliografia comentada

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática)

O primeiro capítulo do livro trata de Conjuntos, com comentários sobre lógica e recomendações ao professor, além de exercícios.

CASTRUCCI, B. *Elementos de teoria dos conjuntos*. Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (G.E.E.M.), São Paulo: distribuição da Livraria Nobel, 1972.

Um livro mais clássico (e mais antigo). Contém também todo o conteúdo deste capítulo, com muitos exercícios.

Capítulo 2

Números reais

Capítulo 2

Números reais

Estudaremos o conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$, *suas operações e propriedades, e sua relação de ordem. As propriedades das operações e da relação de ordem serão utilizadas para o estudo das equações e inequações. Além disso, estudaremos as primeiras noções de supremo e ínfimo, características especiais de subconjuntos de* $\mathbb{R}$.

Introdução

No estudo do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais continuamos uma caminhada que começou na disciplina de Fundamentos de Matemática I com os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Os conjuntos numéricos estão presentes em todos os conteúdos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio: nas primeiras séries do Ensino Fundamental são estudadas as operações em $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}_+$; nas séries iniciais do segundo ciclo do Ensino Fundamental introduz-se $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}_-$ e em seguida $\mathbb{R}$. A partir daí as "ferramentas" de trabalho são os números.

É curioso observar como os alunos, de modo geral, "classificam" os números em "grandes" quando têm mais de dois algarismos; "não dão certo" quando são irracionais; uma fração é suspeita! Os "preconceitos" com determinadas classes de números acabam interferindo em outras áreas, como Física e Química. Por este motivo, o professor de matemática tem a tarefa de conduzir seus alunos no "mundo" dos números sem restrições e comentários que possam reforçar ou criar os "preconceitos". Para tanto, é preciso que o professor também não os tenha! Um exemplo claro é o conjunto dos números irracionais (cujo estudo é iniciado na sétima série do Ensino Fundamental, quando aparecem os radicais), pouco explorado no Ensino Fundamental e pouquíssimo explorado no Ensino Médio. No entanto, as representações dos fenômenos naturais utilizam em geral números irracionais; ao apresentar este universo para os alunos, estaremos contribuindo para que eles tenham um entendimento melhor da natureza.

Ao longo deste capítulo estudaremos o conjunto dos números reais não só como uma ferramenta útil na construção de outros conceitos matemáticos, mas como um objeto matemático próprio. O conhecimento do conjunto dos números reais é de extrema importância no estudo do Cálculo, juntamente com as funções, nosso objeto de estudo dos próximos capítulos.

2.1 O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais: racionais e irracionais

Você já estudou os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, as operações definidas neles e suas propriedades. O que falta para chegarmos aos números reais é o conjunto dos números irracionais. Não faremos aqui a construção formal; você terá oportunidade de construir $\mathbb{R}$ em disciplinas de Análise. Mas o que é um número irracional? É um número real que não é racional, ou seja, que não pode ser expresso como uma razão de números inteiros $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$. Exemplos clássicos de números irracionais são as raízes "não exatas", como $\sqrt{5}$ e, de modo mais geral, $\sqrt{b}$ quando b não é o quadrado de um número. Talvez o irracional mais famoso seja o π, resultado da divisão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Aqui cabe uma pergunta: mas π não é a razão entre dois números? Por que não é racional? (deixaremos que você responda!). Outra maneira de caracterizar os números irracionais é por meio da representação decimal; sabemos que os números racionais podem ser representados na forma $\frac{a}{b}$ e também na forma decimal, resultado da divisão do inteiro a pelo inteiro b. O Algoritmo da Divisão (visto em Fundamentos de Matemática I) nos garante que, ao dividirmos a por b, temos duas opções: ou a conta "dá exata", com resto zero, ou os restos começam a se repetir (pois estão limitados pelo divisor b), gerando uma dízima periódica. Assim, a representação decimal de um número racional será finita, no primeiro caso, ou infinita periódica no segundo. Reciprocamente, um número na forma decimal finita ou infinita periódica pode ser representado também na forma fracionária. Alguns exemplos:

1) $1,456 = \frac{1456}{1000}$

2) $2,343434... = 2 + \frac{34}{99} = \frac{232}{99}$

3) $0,2454545... = 0,2 + 0,0454545... = \frac{2}{10} + \frac{45}{990} = \frac{243}{990}$

Tendo em conta que um número irracional é aquele que não é racional, ele pode então ser caracterizado como aquele que possui uma representação decimal infinita não-periódica, ou seja, os algarismos após a vírgula não se apresentam como blocos repetidos, sucedendo-se uma infinidade de casas decimais, como por exemplo, 0,101001000100001000001... Os exemplos a seguir mostram números irracionais conhecidos em sua representação infinita não-periódica:

4) $\pi = 3,1415926535...$

5) $e = 2,7182818284...$

6) $\sqrt{2} = 1,4142135623...$

Pergunta: se os números irracionais possuem uma infinidade não-periódica de casas decimais e não podemos saber todas elas, como eles são utilizados na prática? Por exemplo: o volume de uma lata de leite condensado (cilíndrica) é $V = A.h$, em que A é a área da base e h é a altura; a área da base é πr^2, sendo r o raio. Se r = 3,75cm e a altura for de 8 cm (dimensões aproximadas da lata de leite condensado), o volume V é dado por $V = \pi \times (3,75)^2 \times 8$, que é um número irracional (apesar da lata ser um objeto de uso comum para medidas nas receitas de pudim!). O que acontece nestes casos é que são usadas aproximações racionais para estas medidas. Você deve lembrar que na prática muitas vezes o professor dizia para usar π como $3,14$. Esta é uma aproximação racional para um número que possui uma infinidade não-periódica de casas decimais: $3,14$ não é o número π, e o resultado da substituição de π por $3,14$ apresentará um erro. No entanto, este erro pode não ser significativo e a aproximação do resultado servirá também aos nossos propósitos. Quanto mais casas decimais considerarmos, menor será o erro decorrente da substituição. Usando 3,14 como aproximação para π, o volume da lata de leite condensado é $353,25\ \text{cm}^3$ (na embalagem de uma das marcas de leite condensado aparece $353\ \text{cm}^3$). Observe outras aproximações na tabela:

Aproximação de π	$V = \pi \times (3{,}75)2 \times 8\ \text{cm}^3$
3,14	353,25
3,1415	353,41
3,141592	353,4291
3,14159265	353,429173125
3,1415926535	353,429173519

Já podemos nos sentir mais confortáveis: usar uma aproximação racional ao invés de uma infinidade não-periódica de casas decimais pelo menos nos permite fazer contas. Mas como encontrar as casas decimais para poder usar aproximações racionais? Em outras palavras: como determinar que $\sqrt{2} = 1,4142135623...$ se não é o resultado de uma divisão? Vale a mesma pergunta para $\pi = 3,1415926535...$: como estas casas decimais foram determinadas? Responder esta última pergunta é o primeiro exercício do capítulo 2; você vai precisar pesquisar em livros de História da Matemática.

Atividade de pesquisa

1) Dê exemplos de quatro tipos de aproximações de π feitas antes do século XX. Explique cada uma delas.

Exemplo de aproximação por racionais

Vamos estudar agora um método para aproximar números irracionais por racionais. Este método já era conhecido na antigüidade (foi desenvolvido pelos babilônios) e é bastante eficiente. No entanto, só pode ser utilizado para aproximar raízes quadradas "não-exatas", da forma $\sqrt{b}$, quando b não é o quadrado de um número.

Faremos como exemplo as aproximações para $\sqrt{2}$:

Inicialmente observamos que $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, uma vez que

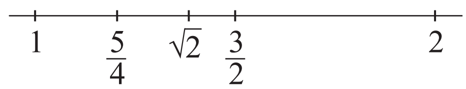
$$1^2 < 2 < \frac{9}{4} = 2,25\,.$$

Tomamos como ponto de partida a média aritmética entre 1 e $\frac{3}{2}$, que na reta significa o ponto médio entre entre 1 e $\frac{3}{2}$; esta média aritmética será nossa

- **1ª aproximação**: $\dfrac{1+\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{5}{4} = 1,25$

  Como $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16} = 1,56 < 2$, concluímos que $\dfrac{5}{4} < \sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$.

  Na reta:



  $\frac{5}{4} = 1,25$ é uma aproximação "por falta", uma vez que é menor do que $\sqrt{2}$.

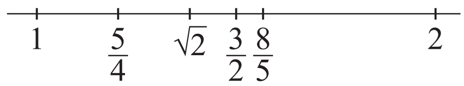
  Posso chegar ainda mais próximo de $\sqrt{2}$ por valores racionais? Para chegarmos mais "perto", lembramos que estamos procurando números racionais próximos de um número x cujo quadrado é 2, ou seja, $x^2 = x.x = 2$. Fazendo $x.\frac{5}{4} = 2$, obtemos $x = \frac{8}{5}$ e tomando a média aritmética (ou o ponto médio) entre $\frac{5}{4}$ e $\frac{8}{5}$, obtemos nossa

- **2ª aproximação:** $\dfrac{\frac{5}{4}+\frac{8}{5}}{2} = \dfrac{25+32}{20\cdot 2} = \dfrac{57}{40} = 1,425$

  Mas por que efetuamos estas inesperadas operações para obtermos nossa segunda aproximação? De fato, é um procedimento bastante razoável. Buscamos um número x tal que $x.x = 2$; se $\frac{5}{4}$ é uma aproximação de $\sqrt{2}$ e encontramos x tal que $x.\frac{5}{4} = 2$, ou seja, $\frac{5}{4}.\frac{8}{5} = 2$, podemos concluir que $\frac{8}{5}$ é também uma aproximação de

$\sqrt{2}$. Além disso, se uma destas aproximações é menor do que $\sqrt{2}$, a outra deverá ser maior. De fato, $\left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25} > \frac{50}{25} = 2$ e conseqüentemente $\sqrt{2} < \frac{8}{5}$. Por este motivo é que tomamos o ponto médio entre $\frac{5}{4}$ e $\frac{8}{5}$ para nossa segunda aproximação.

Na reta

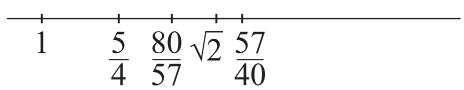


Observe que diminuímos o intervalo no qual se encontra o número $\sqrt{2}$: agora temos $\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{8}{5}$ e esta $2^{\underline{a}}$ aproximação está à direita de $\sqrt{2}$, pois $\left(\frac{57}{40}\right)^2 = \frac{3249}{1600} > \frac{3200}{1600} = 2$.

Novamente usamos $\frac{57}{40}$ para fazer o papel de um "x" na igualdade $x.x = 2$, obtendo um número à esquerda de $\sqrt{2}$: $x.\frac{57}{40} = 2$, o que nos dá $x = \frac{80}{57}$.

Como $\left(\frac{80}{57}\right)^2 = \frac{6400}{3249} < \frac{6498}{3249} = 2$, concluímos que $\frac{80}{57} < \sqrt{2} < \frac{57}{40}$.

Na reta



Com um intervalo ainda mais reduzido, tomamos o ponto médio (a média aritmética) entre $\frac{80}{57}$ e $\frac{57}{40}$, para produzir nossa

- **$3^{\underline{a}}$ aproximação**: $\dfrac{\frac{80}{57} + \frac{57}{40}}{2} = \frac{6449}{4560} \cong 1{,}41425...$

Continuando este procedimento encontramos uma sucessão de números racionais $\frac{5}{4}, \frac{57}{40}, \frac{6449}{4560}$ ... que se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$.

Compare esta sucessão com o número que a calculadora nos dá como $\sqrt{2}$:

Calculadora	Aproximações	Erro (diferença entre o valor dado pela calculadora e as aproximações)
1,41421356237...	$\frac{5}{4} = 1,25$	0,16421356237 (erro na 1ª casa decimal)
	$\frac{57}{40} = 1,425$	0,01078643763 (erro na 2ª casa decimal)
	$\frac{6449}{4560} = 1,41425...$	0,00003643763 (erro na 5ª casa decimal)

Faça você a $4^{\underline{a}}$ e a $5^{\underline{a}}$ aproximações e observe como o erro diminui a ponto de não mais o reconhecermos!

Observação 1. As aproximações que encontramos dependem do ponto de partida (da 1ª aproximação), quando consideramos o intervalo que contém $\sqrt{2}$. Se tomássemos 2 como 1ª aproximação (em vez de $\frac{3}{2}$) nossa sucessão seria diferente, mas ainda assim se aproximaria de $\sqrt{2}$. Experimente!

Observação 2. Todos os números irracionais podem ser aproximados por racionais; este é um resultado que você estudará com detalhes na disciplina de Análise.

Observação 3. O conjunto dos números irracionais é anotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, uma vez que se trata do conjunto dos números reais que não são racionais: $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \notin \mathbb{Q}\}$

Exercícios propostos

1) Utilizando o procedimento anterior, encontre a 4ª aproximação de $\sqrt{30}$, começando as aproximações com 5 (1ª aproximação). Comparando com o resultado da calculadora, em qual casa decimal está o erro?

2) Encontre três aproximações racionais para $\sqrt{5}$, escolhendo diferentes intervalos que contém $\sqrt{5}$ (1ª aproximação). Compare os resultados.

3) Você conhece um programa computacional que pode ser usado para calcular as aproximações por racionais? Caso conheça, dê um exemplo. Caso desconheça, informe-se!

2.2 Operações e propriedades no conjunto $\mathbb{R}$: a estrutura de corpo

Durante todo o Ensino Médio você operou com números reais e utilizou as propriedades das operações e da relação de ordem definida em $\mathbb{R}$ na resolução de equações e inequações. Na verdade você utilizou o fato de $\mathbb{R}$ ter uma **"estrutura de corpo ordenado"**. Uma "estrutura" (também chamada estrutura algébrica) é obtida em um conjunto equipado com operações quando estas operações têm determinadas propriedades. A construção formal de $\mathbb{R}$ nos permitiria definir as operações e provar todas as propriedades; no entanto, esta construção não será feita neste momento, como dissemos anteriormente. Assim, vamos considerar conhecidos o conjunto $\mathbb{R}$ e suas operações e vamos apresentar algumas propriedades como um conjunto de axiomas. A partir daí, provaremos outros resultados importantes para a compreensão do conjunto $\mathbb{R}$.

Este assunto será estudado de maneira aprofundada na disciplina de Álgebra I deste curso.

Axiomas
São afirmações que admitimos verdadeiras, sem demonstração. Este assunto já foi discutido em outras disciplinas, você se lembra?

Vamos então estabelecer como conhecidos:

i) o conjunto dos números reais denotado por $\mathbb{R}$;

ii) as operações de adição e multiplicação de números reais.

Para quaisquer x e y em $\mathbb{R}$, a adição faz corresponder a soma $x+y \in \mathbb{R}$ e a multiplicação faz corresponder o produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

Estas operações satisfazem os seguintes axiomas: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

A1) $x+(y+z)=(x+y)+z$	(Associativa)
A2) $x+y=y+x$	(Comutativa)
A3) Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x+0=x$	(Existência do elemento neutro)
A4) Existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x)=0$	(Existência do elemento oposto)
M1) $x.(y.z)=(x.y).z$	(Associativa)
M2) $x.y=y.x$	(Comutativa)
M3) Existe 1 $\in$ $\mathbb{R}$ tal que $x.1=x$	(Existência do elemento neutro)
M4) Se $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x.x^{-1}=1$	(Existência do elemento inverso)
D) $x.(y+z)=x.y+x.z$. Por M2, também vale $(x+y).z=x.z+y.z$	(Distributiva)

Com estes axiomas as operações de adição e multiplicação definem em $\mathbb{R}$ uma estrutura de "corpo comutativo".

Observação 4. Os quatro primeiros axiomas referem-se à operação adição; os quatro seguintes, à operação multiplicação. O último axioma (D) relaciona as duas operações; lembre que este axioma também é conhecido como "colocar em evidência".

Observação 5. Você deve lembrar de um conjunto de propriedades consideradas como axiomas quando estudou os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. À medida que "ampliamos" nosso universo numérico, "ganhamos" mais propriedades relativas às operações. Vamos fazer uma retrospectiva das propriedades relativas às operações dos conjuntos estudados até agora (para identificar as propriedades, usaremos a notação das propriedades de $\mathbb{R}$ que acabamos de estabelecer):

Conjunto numérico	Propriedades da Adição	Propriedades da Multiplicação	Dist.
Naturais ($\mathbb{N}$)	A1, A2, A3	M1, M2, M3	D
Inteiros ($\mathbb{Z}$)	A1, A2, A3, A4	M1, M2, M3	D
Racionais ($\mathbb{Q}$)	A1, A2, A3, A4	M1, M2, M3, M4	D
Reais ($\mathbb{R}$)	A1, A2, A3, A4	M1, M2, M3, M4	D

Podemos observar na tabela que, ao ampliarmos de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, ganhamos A4, ou seja, os opostos dos números; de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ ganhamos M4, ou seja, os inversos dos números não- nulos. Mas de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ não ganhamos nada. Isto significa que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ se comportam da mesma maneira em relação às operações, isto é, têm a mesma estrutura de corpo.

Das operações de adição e multiplicação associadas aos axiomas A4 e M4, podemos definir em $\mathbb{R}$ mais duas operações (como já definido em $\mathbb{Q}$), a subtração e a divisão: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, a diferença $x - y = x + (-y)$ soma de x com o oposto de y; o quociente para $y \neq 0$, $x \div y = x.y^{-1}$ é o produto de x pelo inverso de y.

Assim como em $\mathbb{Q}$, estas operações não são comutativas nem associativas e não têm elemento neutro.

Propriedades

Decorrem dos axiomas as seguintes propriedades em $\mathbb{R}$:

P1) O zero é único.

Demonstração. A estratégia para provar esta unicidade é supor que existam dois zeros e provar que são iguais. Suponhamos então que existam dois elementos em $\mathbb{R}$ satisfazendo A3 (fazendo o papel de zero): 0 e 0_1. Pela existência do oposto teríamos então: $1 + (-1) = 0$ e $1 + (-1) = 0_1$. Logo, $0 = 0_1$ e o zero é único.

■

P2) O oposto de um elemento de $\mathbb{R}$ é único.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos que x tenha dois opostos: y e z. Então teremos $x + y = 0$ e $x + z = 0$, o que significa $x + y = x + z$. Somamos y (o oposto de x) em ambos os lados da igualdade e teremos:

$$y + (x + y) = y + (x + z)$$

$$(y + x) + y = (y + x) + z \qquad \text{(Associativa, A1)}$$

$$0 + y = 0 + z \qquad \text{(Existência do oposto, A4 e comutativa, A2)}$$

$$y = z \qquad \text{(Existência do elemento neutro)}$$

Poderíamos também somar z, o "outro" oposto de x e chegaríamos à mesma conclusão).

■

P3) Vale a lei do cancelamento para a adição:

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Análoga à demonstração para os números inteiros.

P4) Vale a lei do cancelamento para a multiplicação:

$$xz = yz \text{ e } z \neq 0 \Rightarrow x = y, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Análoga à demonstração para os números racionais.

P5) O elemento 1 é único.

Demonstração. Análoga à demonstração de P1. Faça como exercício.

P6) O inverso de cada elemento não-nulo em $\mathbb{R}$ é único.

Demonstração. Análoga à demonstração de P2. Faça como exercício.

P7) $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Demonstração. Como $0 = 0 + 0$, podemos escrever:

$x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$

$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$ (Distributiva)

$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$ (Existência do elemento neutro)

$x \cdot 0 = 0$ (Lei do cancelamento para adição, P3)

■

P8) $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Demonstração. Análoga à demonstração para os números racionais; vamos fazê-la novamente:

Hipótese. $x \cdot y = 0$

Tese. $x = 0$ ou $y = 0$

Como temos que provar uma afirmação com "ou" (no sentido de alternativa), vamos supor que uma das alternativas não ocorra, ou seja, vamos supor $x \neq 0$. Devemos mostrar então que para y só resta a opção de ser 0. De fato: por hipótese temos $x.y = 0$ e pela propriedade P7 temos que $0 = x.0$. Podemos então escrever $x.y = x.0$.

Como $x \neq 0$, pela Lei do cancelamento para a multiplicação (P4), temos que $y = 0$.

■

P9) $-(-x) = x$ e $(x^{-1})^{-1} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Análoga à demonstração para os números racionais.

P10) $-(x+y) = (-x)+(-y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Análoga à demonstração para os números inteiros.

P11) $(-x).y = x.(-y) = -(x.y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Análoga à demonstração para os números inteiros.

Observação 6. Estas propriedades são utilizadas para a resolução de equações em $\mathbb{R}$. Vejamos um exemplo, resolvendo a equação $x^2 - 3x = 2x$ e explicitando a propriedade ou axioma utilizado em cada passo:

$x^2 - 3x = 2x$

$x^2 - 3x + (-2x) = 2x + (-2x)$ (existência do oposto (A4): o oposto de $2x$ é $-2x$)

$x^2 + (-3x) + (-2x) = 0$ (def. subtração e A4)

$x^2 + (-3)x + (-2)x = 0$ (P11, oposto do produto)

$x^2 + \left[(-3) + (-2)\right]x = 0$ (distributiva)

$x^2 + (-5)x = 0$ (P10, oposto da soma)

$x\left[x + (-5)\right] = 0$ (distributiva)

$x = 0$ ou $x + (-5) = 0$ (P8: se um produto é nulo, um dos fatores é nulo)

$x = 0$ ou $x + (-5) + 5 = 0 + 5$ (adicionamos 5 aos dois membros da igualdade)

$x = 0$ ou $x + 0 = 5$ (A4, A3 e distributiva)

$x = 0$ ou $x = 5$ (A3)

Como visto, todos os procedimentos de resolução se originam nos axiomas e/ou propriedades dos números reais. Lembre que na disciplina de Fundamentos I este comentário já foi feito para o universo de números inteiros e racionais.

2.3 Operações com números irracionais

Esta palavra é recorrente no vocabulário matemático e indica que uma possibilidade exclui a outra, isto é, se satisfaz a primeira sentença não pode satisfazer a segunda e vice-versa.

As propriedades que acabamos de estudar referem-se ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais; este conjunto, como já sabemos, compõe-se de números racionais e irracionais. Lembre-se que um número irracional é aquele que não é racional, ou seja: dado um número real, ele só tem duas possibilidades: é racional ou irracional e este "ou" é exclusivo.

Você já conhece o conjunto dos números racionais e sabe que quando operamos números racionais (com as operações adição, multiplicação, subtração, divisão) o resultado é ainda um número racional (as operações são fechadas em $\mathbb{Q}$). De modo geral, isto não acontece com os números irracionais. Adição e multiplicação de dois números irracionais pode ser um número racional ou um número irracional. Vejamos alguns exemplos:

$$\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=0\in\mathbb{Q},\ 1+\sqrt{30}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

$$\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7\in\mathbb{Q},\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

No entanto, temos alguns resultados que, em parte, "substituem" a propriedade de fechamento.

Proposição 1.

a) A soma de um número racional e um número irracional é um número irracional.

b) O produto de um número racional não-nulo por um número irracional é um número irracional.

c) O oposto de um número irracional é um número irracional.

Demonstração.

a) Sejam $r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; suponhamos que a soma $r + \alpha$ seja um número racional b.

$$r + \alpha = b \Rightarrow \alpha = b + (-r) \Rightarrow \alpha = b - r$$

Como a diferença entre dois números racionais é um número racional, da última igualdade concluímos que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Isto contradiz nossa hipótese de que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Essa contradição surgiu da suposição de que $r + \alpha \in \mathbb{Q}$. Logo, $r + \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

b) Faça como exercício (utilizando o mesmo tipo de argumento usado em a).

c) Faça como exercício.

■

Observação 7. Os resultados enunciados na Prop. 1 nos permitem "produzir" números irracionais. Escolha um número irracional, $\sqrt{5}$, por exemplo; para cada número racional $b \neq 0$, teremos os irracionais $b + \sqrt{5}$ e $b \cdot \sqrt{5}$. Isto significa que, para cada número irracional escolhido, podemos construir uma infinidade de outros irracionais.

Exercícios resolvidos

1) Prove que para todo número inteiro primo positivo p, tem se que $\sqrt{p}$ é um número irracional.

Resolução. Como um número real é racional ou irracional e este "ou" é exclusivo, vamos supor que $\sqrt{p}$ seja racional; então $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos e $b \neq 0$. Podemos também considerar que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, ou seja, $mdc(a,b) = 1$ (lembre que todo número racional pode ser expresso em sua forma irredutível). Na igualdade anterior, elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $p = \frac{a^2}{b^2}$ e, multiplicando por b^2, teremos $p.b^2 = a^2$ (I).

Note que esta última igualdade é uma igualdade de números inteiros e dela podemos concluir que p é um divisor de a^2. Como p é um número primo e divisor do produto $a.a$, um teorema de divisibilidade

Teorema: sejam a, b e p números inteiros; se $p \mid (a \cdot b)$ e p é primo, então $p \mid a$ ou $p \mid b$. Para mais detalhes, veja seu material de Fundamentos I.

nos garante que p é um divisor de a, ou seja, $a = p \cdot x$, para $x \in \mathbb{Z}$. A igualdade (I) pode então ser escrita como:

$$p.b^2 = (p.x)^2$$

$$p.b^2 = p^2.x^2 \qquad \text{(propriedade das potências em } \mathbb{Z}\text{)}$$

$$b^2 = p.x^2 \qquad \text{(Lei do cancelamento para multiplicação em } \mathbb{Z}\text{)}$$

A última igualdade nos mostra que p é um divisor do produto $b.b$ e, pelo mesmo argumento anterior, concluímos que p é um divisor de b. Logo, teremos $b = p.y$, para $y \in \mathbb{Z}$. Como também temos $a = p \cdot x$, concluímos que p é um divisor comum de a e b, e $p \neq 1$ (pois p é primo). Isto contraria o fato que $mdc(a,b) = 1$ e esta contradição foi "produzida" pela nossa suposição inicial de que $\sqrt{p}$ era um número racional. Desta forma, concluímos que $\sqrt{p}$ é um número irracional.

2) Sejam w e v números irracionais. Prove que, se $w+v$ é racional, então $w-v$ é irracional.

Resolução. Suponhamos que $w-v$ fosse racional:
$w-v = x \in \mathbb{Q}$. Como por hipótese $w+v$ é racional, temos que $(w+v)+(w-v) = 2w \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição, já que $2 \in \mathbb{Q}$, $w \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ e, pela Proposição 1, temos $2w \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Logo, $w-v$ é irracional.

Observação 8. Você viu que a maneira mais eficiente de provar que um número é irracional é supô-lo racional e chegar a uma contradição. Isso pode ser feito, pois um número real é racional ou irracional, com "ou" exclusivo, isto é:

$$\mathbb{R} \cap (\mathbb{R}-\mathbb{Q}) = \phi \text{ e } \mathbb{R} \cup (\mathbb{R}-\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

Observação 9. Voltaremos a falar em números irracionais quando estudarmos as funções polinomiais e as funções trigonométricas.

Exercícios propostos

4) Determine a soma, a diferença e o produto dos números $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, com a e b números reais positivos.

5) Se x é um número irracional, mostre que o oposto $-x$ e o inverso x^{-1} são também números irracionais.

2.4 Relação de ordem em $\mathbb{R}$

No início deste capítulo mostramos um método de como os números irracionais podem ser aproximados por racionais. No desenvolvimento do método, usamos a idéia de colocar os números em uma reta, ou seja, usamos o "modelo" da reta para expressar o conjunto $\mathbb{R}$. Isto significa que a cada número real associamos um único ponto da reta e a cada ponto da reta associamos um único número real. Este modelo da reta para o conjunto $\mathbb{R}$ é largamente utilizado em todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Mas os números reais não estão colocados aleatoriamente sobre a reta: é preciso definir um ponto que será associado ao zero e uma unidade, que será o 1, como já sabemos. A partir disso os números reais podem ser associados aos pontos, seguindo uma certa ordem. Isto significa que, dados quaisquer dois números reais, sabemos "qual vem antes", ou, em linguagem mais adequada, "qual é o menor". Já sabemos como localizar os números racionais na reta (veja em Fundamentos I); os pontos que "sobram" após a identificação dos racionais serão "preenchidos" pelos irracionais. Assim, os números reais estão dispostos na reta da esquerda para a direita, do menor para o maior, como acontecia para os outros conjuntos numéricos. Esta "ordem" é que vamos estabelecer formalmente agora. Isto será feito com um cuidado especial: queremos que esta ordem permaneça a mesma que estabelecemos para os números racionais. Para tanto, vamos tomar como axioma a existência de um determinado subconjunto de $\mathbb{R}$ (o conjunto dos números positivos) que goza de determinadas propriedades em relação às operações; a partir deste axioma, definiremos uma relação de ordem em $\mathbb{R}$: a conhecida relação "$\leq$" (menor do que ou igual a).

Axioma de Ordem. No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais existe um subconjunto $\mathbb{R}_+$, denominado "conjunto de números positivos", que satisfaz:

O1) Se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre:

i) $a = 0$;

ii) $a \in \mathbb{R}_+$, ou seja, a é positivo;

iii) $-a \in \mathbb{R}_+$, ou seja, o oposto de a é positivo.

O2) A soma e o produto de dois números positivos é um número positivo.

Definição 1. Um número real a é negativo se e somente se $-a$ é positivo.

Definição 2. Para $a, b \in \mathbb{R}$, definimos:

a) a é estritamente menor do que b, se e somente se $b-a$ é positivo.

b) a é estritamente maior do que b, se e somente se $a-b$ é positivo.

c) a é menor do que ou igual a b, se e somente se a é estritamente menor do que b ou a é igual a b.

d) a é maior do que ou igual a b, se e somente se a é estritamente maior do que b ou a é igual a b.

Simbolicamente, escrevemos:

- $a < b$, se e somente se $b-a \in \mathbb{R}_+$
- $a > b$, se e somente se $a-b \in \mathbb{R}_+$
- $a \leq b$, se e somente se $a < b$ ou $a = b$
- $a \geq b$, se e somente se $a > b$ ou $a = b$

Observação 10. A **definição 1** estabelece o que é um número negativo: é aquele cujo oposto é positivo. O axioma de ordem garante que, dado um número real a, somente uma das três afirmações ocorre: $a = 0$; $a \in \mathbb{R}_+$; $-a \in \mathbb{R}_+$. Concluímos então que, dado um número real a, somente uma das três afirmações ocorre: ele é positivo ($a \in \mathbb{R}_+$), ele é negativo ($-a \in \mathbb{R}_+$), ou ele é zero (esta conclusão já era verdadeira para os números racionais).

Observação 11. Os itens (a) e (c) da **definição 2** estabelecem as conhecidas relações "$\leq$" e "$<$". Os itens (b) e (d) poderiam ter sido omitidos, uma vez que são equivalentes aos itens (a) e (c), respectivamente. De modo geral, usaremos as notações correspondentes aos itens (a) e (c). Usando uma outra notação, podemos escrever os itens (a) e (c) como:

- $a < b$ se e somente se $b - a \in \mathbb{R}_+$;
- $a \leq b$ se e somente se $b - a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Observação 12. Como a e b são números reais quaisquer, fazendo $a = 0$ no item (a) da **definição 2**, temos que $0 < b$, se e somente se $b - 0 = b$ é positivo. Analogamente, fazendo $b = 0$, temos que $a < 0$, se e somente se $0 - a = -a$ é positivo, ou seja, a é negativo.

Assim, um número real x é positivo quando $0 < x$ (ou $x > 0$) e um número real y é negativo quando $y < 0$ (ou $0 > y$).

Observação 13. Dados dois números reais a e b, como $b - a$ é também um número real, o axioma de ordem nos garante que exatamente uma das afirmações ocorre:

- $b - a$ é positivo, ou seja, $a < b$;
- $b - a$ é negativo, ou seja, $-(b - a) = a - b$ é positivo e assim $b < a$;
- $b - a = 0$, ou seja, $a = b$.

Observação 14. O axioma de ordem O2 nos garante que a soma e o produto de dois números positivos é positivo, ou seja, se $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$, então $x + y \in \mathbb{R}_+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}_+$. O que ocorre quando x e y pertencem a $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$? Como $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, basta considerar a possibilidade de um dos dois números ser zero (ou ambos). Suponhamos $x = 0$ e $y \in \mathbb{R}_+$; então $x + y = 0 + y = y \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, ou seja, $x + y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Em relação ao produto, se um dos números é zero, o produto será zero e teremos: $xy = 0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Conclusão: como conseqüência do axioma de ordem O2, temos: se $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, então $x + y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $xy \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (lembramos novamente o que foi comentado em Fundamentos I: se $x < y$, então $x \leq y$. Isto decorre da seguinte regra lógica: se A e B são afirmações, então a afirmação $A \Rightarrow (A \text{ ou } B)$ é verdadeira).

Proposição 2. A relação $\leq$ satisfaz as seguintes condições:

- $a \leq a$, para todo número real a.

- se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$, para quaisquer números reais a e b.
- se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$, para quaisquer números reais a, b e c.

Demonstração.

i) Devemos mostrar que $a - a$ é positivo ou $a - a = 0$. Como esta última afirmação sempre ocorre, podemos concluir que $a \leq a$.

ii) **Hip.** $a \leq b$ e $b \leq a$

Tese. $a = b$

Dados os números reais a e b, pela **Obs. 13,** exatamente uma das três situações ocorre:

$$a < b,\ b < a \text{ ou } a = b.$$

Para provarmos que $a = b$, devemos mostrar que as outras opções não ocorrem. Vamos supor que ocorra $a < b$: se $a < b$, então $a \neq b$ e $b - a$ é positivo; como por hipótese $a - b$ é positivo ou nulo e estamos supondo $a \neq b$, teremos $a - b$ e $b - a = -(a - b)$ ambos positivos, o que não pode ocorrer pois, pelo axioma de ordem 01, um número real é zero, ou é positivo ou seu oposto é positivo e este ou é **exclusivo**.

Analogamente, não pode ocorrer $b < a$. Assim, só é possível que ocorra $a = b$.

iii) **Hip.** $a < b$ e $b < c$, ou seja, $b - a$ é positivo ou nulo e $c - b$ é positivo ou nulo.

Tese. $a < c$ (ou $c - a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$)

Por hipótese, temos que $b - a$ e $c - b$ pertencem ao conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Pela Obs.12 temos que:

$$(b - a) + (c - b) = b + (-a) + c + (-b) =$$

$$= [b + (-b)] + c + (-a) = 0 + (c - a) = c - a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \text{ e } a \leq c.$$

■

Observação 15. Veremos no capítulo sobre Relações que as três condições da Proposição 2 caracterizam uma relação de ordem em um conjunto. Assim, a Proposição 2 prova que a relação $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{R}$; a primeira condição é a propriedade reflexiva da relação, a segunda é a anti-simétrica e a terceira é a transitiva. Além disso, como dois números reais sempre são comparáveis pela relação $\leq$, dizemos que esta ordem é total. A estrutura de corpo e a ordem total fazem de $\mathbb{R}$ um corpo totalmente ordenado.

2.4.1 Propriedades da relação de ordem

As propriedades a seguir decorrem dos Axiomas de ordem, das **definições 1** e **2** e das *proposições 1* e *2*. Algumas demonstrações serão deixadas como exercício. A compreensão destas propriedades será essencial no estudo das inequações.

Propriedades

PO1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$.

Demonstração. Já feita na **Observação 13.**

PO2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$

Esta propriedade é a propriedade transitiva para a relação $<$; a demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2 (iii).

PO3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $0 \leq z$, então $xz \leq yz$.

Esta é a já conhecida propriedade "se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade (do tipo $\leq$) por um número maior do que ou igual a zero, a desigualdade se mantém".

Demonstração.

Hip. $x \leq y$ e $0 \leq z$

Tese. $xz \leq yz$

Devemos provar que $xz \leq yz$, ou seja, devemos provar que $yz - xz \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Por hipótese, temos que $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $z \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. A Observação 14 (conseqüência do axioma de ordem O2) nos garante então que $(y - x).z = yz - xz \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, ou seja, $xz \leq yz$.

■

PO4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \le y$ e $z < 0$, então $yz \le xz$

Esta também é uma propriedade conhecida como uma "regra": se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo, inverte-se o sinal da desigualdade. Cabe aqui um comentário sobre a expressão "inverte-se o sinal da desigualdade", um emprego do verbo "inverter" em seu significado usual e não matemático. Em matemática estão definidos somente o inverso de números e funções, não há uma definição de "inverso de sinal".

Demonstração.

Hip. $x \le y$ e $z < 0$

Tese. $yz \le xz$

Por hipótese, temos que $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e, como $z < 0$, temos que $-z \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Então

$(-z)(y-x) \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (Obs. 14)

$(-z)(y-x) = (-z)[y+(-x)]$ (definição de subtração)

$(-z)(y-x) = (-z).y + (-z)(-x)$ (distributiva D)

$(-z)(y-x) = zx + [-(zy)]$ (P11 e A2)

$(-z)(y-x) = zx - zy$ (definição de subtração)

$(-z)(y-x) = xz - yz \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (lembre de M2!), ou seja, $yz \le xz$).

■

PO5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \le y$, se e somente se $x + z \le y + z$.

Demonstração. Este resultado é conhecido como a "compatibilidade da relação de ordem com a operação adição" e já é verdadeiro para o conjunto $\mathbb{Q}$. Vamos fazer a demonstração usando equivalências, observando que:

$$y - x = (y-x) + z + (-z) = y + (-x) + z + (-z) =$$

$$= (y+z) + [-(x+z)] = (y+z) - (x+z).$$

Assim, $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, se e somente se $(y+z)-(x+z) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, ou seja, $x \le y$, se e somente se $x + z \le y + z$.

■

Tarefa

Identifique a propriedade utilizada em cada uma das quatro igualdades anteriores.

PO6) $\forall x, y, a, b$, se $x \leq y$ e $a \leq b$, então $x + a \leq y + b$.

O resultado nos diz que, dadas duas desigualdades, se somarmos respectivamente os seus membros, a desigualdade se mantém.

Demonstração.

Hip. $x \leq y$ e $a \leq b$

Tese. $x + a \leq y + b$

Por hipótese, temos que $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ e $b - a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Logo,

$$(y - x) + (b - a) = y + (-x) + b + (-a) =$$

$$= (y + b) - (x + a) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \text{ e assim } x + a \leq y + b.$$

■

PO7) $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$, se $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq a \leq b$, então $ax \leq by$.

Demonstração. Deixamos a demonstração como exercício.

PO8) $x \leq y$, se e somente se $-y \leq -x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$x \leq y \Leftrightarrow x + (-x) \leq y + (-x) \Leftrightarrow 0 \leq y + (-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-y) + 0 \leq (-y) + y + (-x) \Leftrightarrow -y \leq -x.$$

■

PO9) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

a) $0 < x$, se e somente se $0 < x^{-1}$

b) $x < 0$, se e somente se $x^{-1} < 0$

c) $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < x^{-1}$

d) $1 < x \Rightarrow 0 < x^{-1} < 1$

e) $0 < x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$

f) $x < y < 0 \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$

Demonstração. Estes resultados são importantes e serão usados em diversas circunstâncias no futuro. A demonstração foi feita em Fundamentos I para os números racionais. Vamos relembrar alguns comentários sobre cada um dos itens, que são pertinentes também para os números reais, e provar novamente o item (e):

(a) e (b) As afirmações significam que um número real e seu inverso ou são ambos positivos ou ambos negativos. Observe a desigualdade estrita: o zero não tem inverso.

(c) e (d) Também bastante conhecidas, estas propriedades estabelecem que, se um número positivo é **menor** do que 1, seu inverso será **maior** do que 1 e se um número positivo é **maior** do que 1, seu inverso será **menor** do que 1. Note que se x e y são números reais e $xy=1$, x e y não podem ser ambos maiores do que 1 nem ambos menores do que 1.

(e) e (f) Estes resultados são mais conhecidos como uma "regra" na forma : se $x<y$ então $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$. Observe que nem sempre isto vale, pois temos $-2<2$ e $\frac{1}{-2}<\frac{1}{2}$.

Faremos novamente a demonstração de e) e deixamos a demonstração de f) como exercício:

Hip. $0<x<y$

Tese. $y^{-1}<x^{-1}$

Por hipótese, x e y são positivos, o que significa que seus inversos são também positivos (parte a). Também por hipótese, temos $x<y$. Então:

$x<y$

$x.x^{-1}<y.x^{-1}$ (PO3, multiplicando ambos os membros por x^{-1})

$y^{-1}.x.x^{-1}<y^{-1}.y.x^{-1}$ (PO3, multiplicando ambos os membros por y^{-1})

$y^{-1}.1<1.x^{-1}$ (M4, existência do inverso)

$y^{-1}<x^{-1}$ (M3, existência do elemento neutro da multiplicação).

■

PO10) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x \leq 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow xy \leq 0$$

$$x \leq 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow 0 \leq xy$$

Demonstração. Estes resultados são as conhecidas "regras de sinal" para o produto e já foram demonstrados em Fundamentos I. Note que não é simplesmente uma "regra", mas um fato que decorre dos axiomas, definições e propriedades já estudadas. Demonstre como exercício.

PO11) Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_n)^2 \geq 0$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_n)^2 = 0,$$

se e somente se $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$

Demonstração. Deixamos como exercício; os dois resultados serão úteis na resolução de inequações. Para demonstrar use o princípio de Indução estudado em Fundamentos I.

Observação 16. O conjunto de axiomas e propriedades dos números reais que acabamos de ver são a base para nossos estudos futuros. À primeira vista pode parecer que estamos "complicando" o que é muito simples. É nosso objetivo esclarecer a origem de tantas regras que nos apresentaram no ensino básico: regra de sinais para multiplicar, regra para inverter frações, regras para "multiplicar" desigualdades, etc. A origem de todas estas "regras" está nos axiomas e definições que acabamos de estudar: as regras são na verdade teoremas que podemos demonstrar utilizando os axiomas e as definições. Elas não foram "inventadas", mas deduzidas a partir de um conjunto de informações.

Exercícios propostos

6) Demonstre o que foi deixado como exercício.

7) Dado $a \in \mathbb{R}$, prove que:

a) Se $0 < a$, então $0 < a^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Se $a < 0$, então $0 < a^{2n}$ e $a^{2n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

8) Se $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, mostre que $a^3 < b^3$.

9) Se $a,b \in \mathbb{R}$, prove que: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Quando ocorre a igualdade?

2.4.2 Intervalos em $\mathbb{R}$

Alguns subconjuntos do conjunto de números reais possuem uma notação especial: os intervalos. Listamos a seguir estes subconjuntos especiais; estaremos considerando a e b números reais diferentes com $a < b$.

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$: intervalo aberto de extremos a e b .
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$: intervalo fechado de extremos a e b .
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$: intervalo de extremos a e b (nem aberto, nem fechado).
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$: intervalo de extremos a e b (nem aberto, nem fechado).
- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$: intervalo aberto, ilimitado superiormente.
- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$: intervalo ilimitado superiormente (nem aberto, nem fechado).
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$: intervalo aberto, ilimitado inferiormente.
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$: intervalo ilimitado inferiormente (nem aberto, nem fechado).

Note que um intervalo é chamado "aberto" quando não contém seus extremos e é chamado "fechado" quando contém seus extremos. Também podemos usar as notações $(a,b) =]a,b[$, $(a,b] =]a,b]$, $[a,b) = [a,b[$. É bom ressaltar que os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não representam números. Ao escrevermos $x \in [a,\infty)$, queremos expressar que x é um número real maior do que a . Da mesma forma, ao escrevermos $(-\infty,b]$, declaramos que x é um número real menor do que b .

2.5 Módulo ou valor absoluto de um número real

A idéia do módulo ou valor absoluto de um número real é a mesma que já foi estudada em Fundamentos I: utilizando o modelo da reta, o módulo de um número real é a distância desse número (do ponto associado a este número) até a origem (o ponto associado ao zero).

Definição 3. Seja $a \in \mathbb{R}$; indicamos por $|a|$ o módulo (ou valor absoluto) de a, definido por:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Exemplos: $|5| = 5$; $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

Observação 16. Vamos destacar alguns detalhes da definição:

1º) $|a|$ está definido para todo número real, pois, pelo axioma de ordem, $a > 0$, $a < 0$ ou $a = 0$.

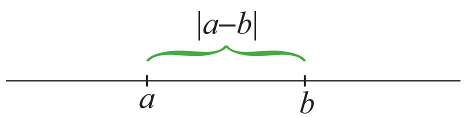
2º) $|a| \geq 0$ para todo número real a, uma vez que o módulo é o próprio número se ele é positivo ou nulo, e seu oposto se ele é negativo. Lembre-se que se $a < 0$, então $-a > 0$.

3º) Vamos lembrar novamente que $|a| = \sqrt{a^2}$. A raiz quadrada de um número positivo é sempre um número positivo; por exemplo, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ são números positivos e $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{4}$ são números negativos. É comum uma certa confusão em relação à raiz quadrada de um número originada da resolução de equações; por exemplo, se $x^2 = 4$, então os valores de x que satisfazem a igualdade são 2 ou -2. Ao resolver esta equação, costuma-se escrever:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

O sinal $\pm$ é colocado antes do radical justamente porque tanto $x = 2$ como $x = -2$ são tais que $x^2 = 4$ e resolver uma equação significa encontrar todos os valores de x que satisfazem a igualdade. Note que $\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ e $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$.

4º) Considerando os números a e b sobre a reta, o módulo da diferença $|a-b|$ significa a distância (sempre positiva) entre os pontos a e b.



Essa idéia será de extrema importância na disciplina de Cálculo I, no estudo do conceito de limite.

Propriedades do módulo

As propriedades que veremos a seguir desempenham um papel muito importante nos próximos capítulos, no estudo das inequações. Também serão bastante úteis em disciplinas posteriores. Para prová-las, usaremos basicamente a definição; para $x \in \mathbb{R}$ consideramos sempre as duas possibilidades: $x \geq 0$ e $x < 0$.

1) $|x| = 0$, se e somente se $x = 0$.

Demonstração. Se $|x| = 0$ e por definição $|x| = x$ ou $|x| = -x$, teremos $x = 0$ ou $-x = 0$, o que resulta $x = 0$. Reciprocamente, se $x = 0$, então por definição $|x| = 0$.

■

2) Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $|x| = |-x|$.

Demonstração. Consideremos os dois casos:

i) se $x \geq 0$, por definição temos que $|x| = x$. Como $-x \leq 0$, também por definição temos que

$$|-x| = -(-x) = x. \text{ Logo, } |x| = |-x|.$$

ii) se $x < 0$, então $-x > 0$ e teremos por definição:

$$|x| = -x \text{ e } |-x| = -x. \text{ Assim, } |x| = |-x|.$$

De (i) e (ii), $|x| = |-x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

Observação 17. Esta propriedade nos diz que um número e seu oposto, quando considerados como pontos na reta, são equidistantes da origem. Este fato já acontecia com os números inteiros. Também nos diz que a distância entre dois números reais a e b, quando considerados como pontos na reta, pode ser expressa como $|a-b|$ ou como $|b-a|$, uma vez que $b-a=-(a-b)$.

3) $-|x| \le x \le |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

i) para $x \ge 0$, temos $|x| = x$ que satisfaz $x \le |x|$. Como $|x| \ge 0$, $-|x| \le 0$ e aplicando a propriedade transitiva (PO2) a $-|x| \le 0$ e $0 \le x$, teremos $-|x| \le x$. Assim, $-|x| \le x \le |x|$.

ii) para $x < 0$, temos $|x| = -x$. Assim, $-|x| = x$ que satisfaz $-|x| \le x$. Como $x < 0$ e $|x| \ge 0$, segue que $x < |x|$, que satisfaz $x \le |x|$. Então, $-|x| \le x \le |x|$.

De i) e ii) segue que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-|x| \le x \le |x|$.

■

4) Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x| \cdot |y|$

Demonstração. Deixamos como exercício.

5) Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \le |x| + |y|$

Demonstração. Também conhecida como "desigualdade triangular", esta propriedade será útil em diversas circunstâncias. Vamos prová-la:

i) para $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y \ge 0$: $|x+y| = x + y$

Pela propriedade 3, temos $x \le |x|$ e $y \le |y|$; somando membro a membro (PO6), teremos

$$|x+y| = x + y \le |x| + |y|$$

ii) para $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y < 0$: $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y)$

Pela propriedade 3 temos $-|x| \le x$ e $-|y| \le y$, ou seja:

$$-x \le |x| \text{ e } -y \le |y|$$

Assim, $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \le |x| + |y|$.

■

6) Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| - |y| \le |x - y| \le |x| + |y|$

Demonstração. Deixamos como exercício.

7) Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ um número fixo e $|x| < a$. Então $-a < x < a$.

Demonstração.

Hip. $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $|x| < a$.

Tese. $-a < x < a$

i) para $x \ge 0$, temos $|x| = x < a$ (por hipótese). Como $a > 0$ (também por hipótese), temos $-a < 0 \le x < a$. Logo, $-a < x < a$.

ii) para $x < 0$, temos $|x| = -x < a$. Então $-a < x$ e teremos $-a < x < 0 \le a$. Logo, $-a < x < a$.

De i) e ii) tem-se $-a < x < a$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

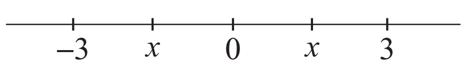
■

Observação 18. A recíproca da propriedade 7 também é verdadeira: "Se $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $-a < x < a$, então $|x| < a$". Faça a demonstração como exercício.

Tarefa

Mostre que a propriedade 7 continua verdadeira, se substituirmos $<$ por $\le$.

Observação 19. Vamos exemplificar a propriedade 7; consideremos $a = 3$ e $|x| < 3$. Isto significa que a distância de x até zero é menor do que 3. Vamos observar na reta:



Vemos que para qualquer ponto (número real) x entre -3 e 3 (excluindo o 3 e o -3), a distância de x até zero é menor do que 3. E se a distância de x até zero é menor do que 3, então x está entre -3 e 3. Logo, $|x| < 3$, se e somente se $-3 < x < 3$, ou, em notação de intervalos, $x \in (-3, 3)$.

8) Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ um número fixo e $|x| > a$. Então $x > a$ ou $x < -a$.

Demonstração.

Hip. $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $|x| > a$

Tese. $x > a$ ou $x < -a$

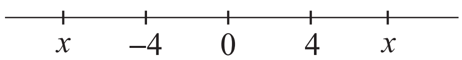
i) para $x \geq 0$: $|x| = x > a$. Por hipótese $|x| > a$, então $x > a$ (I).

ii) para $x < 0$: $|x| = -x > a$. Como $|x| > a$, então $-x > a$, ou seja, $x < -a$ (II).

Lembre-se que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x \geq 0$ ou $x < 0$; então (I) ocorre ou (II) ocorre. Isto significa que $x > a$ ou $x < -a$.

■

Observação 20. Vamos observar a propriedade 8 na reta, fazendo $a = 4$; $|x| > 4$ significa que a distância de x até zero é maior do que 4.



Assim, x deve ser um número localizado à esquerda de -4 ou à direita de 4. Em notação de intervalos, $x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

As propriedades 7 e 8 são essenciais na resolução de inequações modulares.

Exercícios propostos

10) Faça as demonstrações deixadas como exercício.

11) Dados os subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A = (-1, 5]$, $B = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{5}\right]$ e $C = (3, \infty)$, determinar:

a) $A \cup B$

b) $B \cup C$

c) $A \cap B$

d) $B \cap C$

12) Usando valor absoluto, escreva expressões para os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) o conjunto dos pontos cuja distância a 1 é menor do que ou igual a 4.

b) o conjunto dos pontos cuja distância a -5 é menordoque 2.

c) o conjunto dos pontos cuja distância a 6 é maior do que 3.

13) Descreva os conjuntos do exercício 11 usando intervalos.

14) Descreva geometricamente as expressões a seguir, considerando $x \in \mathbb{R}$:

a) $|x-1| \leq 9$

b) $|x| > -5$

c) $|x+4| > \frac{1}{2}$

15) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que $2|ab| \leq a^2 + b^2$.

16) Prove que: para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $\forall n > 0$ vale:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

(sugestão: use indução)

2.6 Supremo e ínfimo

Uma das características do conjunto dos números reais é satisfazer um resultado similar ao Princípio da Boa Ordem em $\mathbb{N}$ e ao Princípio do Menor Inteiro em $\mathbb{Z}$, vistos em Fundamentos I. Vamos enunciar novamente:

Princípio da Boa Ordem (ou da boa ordenação): Para todo conjunto $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$, existe $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$. Em outras palavras, isto significa que todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.

Exemplo. Seja $B \subset \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x > 6\}$.

Vemos facilmente que $B = \{7,8,9,...\}$ e o menor elemento de B é 7 (Princípio da Boa Ordem em $\mathbb{N}$). (Lembre que o próprio conjunto $\mathbb{N}$ possui um menor elemento: o zero).

Princípio do Menor Inteiro: Para todo conjunto B, $B \subset \mathbb{Z}$, $B \neq \varnothing$ e B limitado inferiormente, existe $m \in B$ tal que $m \leq x$ para todo $x \in B$. Em outras palavras, isto significa que todo subconjunto não vazio e **limitado inferiormente** de números inteiros possui um menor elemento.

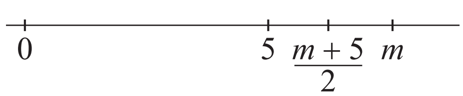
Como o conjunto $\mathbb{Z}$ não possui um "menor elemento", foi preciso acrescentar uma hipótese a mais ao Princípio da Boa Ordem para obter um resultado similar em $\mathbb{Z}$: a hipótese do conjunto B ser limitado inferiormente. Em analogia, podemos enunciar um princípio também para subconjuntos de $\mathbb{Z}$ limitados superiormente:

"Para todo conjunto B, $B \subset \mathbb{Z}$, $B \neq \varnothing$ e B limitado superiormente, existe $s \in B$ tal que $x \leq s$, para todo $x \in B$". Neste caso isto significa que todo subconjunto não vazio e limitado **superiormente** de números inteiros possui um maior elemento.

Estes princípios **não** se mantêm verdadeiros quando ampliamos o conjunto $\mathbb{Z}$ para o conjunto $\mathbb{Q}$. Vejamos:

Exemplo: $A \subset \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} / x > 5\}$. A é limitado inferiormente, isto é, todos os elementos de A são maiores do que 5 (5 é um dos limites inferiores, existem outros!), mas não conseguimos precisar qual **elemento de** A é menor do que todos os outros. Isto ocorre pelo fato de existir sempre um racional entre dois racionais: se afirmarmos que existe um elemento $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$, então $m > 5$ e entre este m e o número racional 5 existe uma infinidade de números racionais que são elementos de A. Por exemplo, o número $\frac{m+5}{2} \in \mathbb{Q}$ e, como $\frac{m+5}{2} > 5$, $\frac{m+5}{2} \in A$ e $\frac{m+5}{2} < m$ (prove isso!).

Dessa forma m não poderá ser o menor elemento de A. Veja na reta:



No conjunto $\mathbb{R}$ podemos também enunciar princípios análogos ao Princípio da Boa Ordem e ao Princípio do Menor Inteiro. Para tanto, precisamos definir os conceitos de supremo e ínfimo de um subconjunto de números reais. Vamos relembrar também as definições de conjunto limitado inferiormente e conjunto limitado superiormente.

Definição 4. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que A é limitado superiormente se e somente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$, para todo $x \in A$. Cada número real M nestas condições é chamado um limite superior de A, ou uma cota superior de A.

Observação 21. Note que o limite superior não precisa pertencer ao conjunto. Note também que se um número real M é limite superior de um conjunto, então todos os números reais maiores do que M são também limites superiores do mesmo conjunto. Para que um conjunto seja limitado superiormente, é preciso existir pelo menos um limite superior.

Definição 5. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que A é limitado inferiormente se e somente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$. Cada número real m nestas condições é chamado um limite inferior de A, ou uma cota inferior de A.

Observação 22. Analogamente ao que foi dito na Obs. 21, o limite inferior não precisa pertencer ao conjunto; também, se um número real m é limite inferior de um conjunto, então todos os números reais menores do que m são também limites inferiores do mesmo conjunto. Para que um conjunto seja limitado inferiormente, é preciso existir **pelo menos um limite inferior**.

Definição 6. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que A é limitado quando A é limitado superiormente e também é limitado inferiormente. Neste caso existem M e m em $\mathbb{R}$ tais que $m \leq x \leq M$, para todo $x \in A$.

Observação 23. Um conjunto será limitado quando existirem um limite inferior e um limite superior, ou seja, m e M reais tais que $m \leq x \leq M$, para todo $x \in A$. Isso significa que o conjunto A está contido no intervalo $[m, M]$.

Exemplos:

1) $A = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \leq 5\} \subset \mathbb{R}$; A é limitado superiormente e um de seus limites superiores é 7, uma vez que $x - 2 \leq 5$ é equivalente a $x - 2 + 2 \leq 5 + 2$ que por sua vez é equivalente a $x \leq 7$ (lembre das propriedades da relação $\leq$). Assim, os valores de x tais que $x - 2 \leq 5$ correspondem aos valores de x menores do que ou iguais a 7. Todos os elementos de A são menores do que ou iguais a 7, o que caracteriza 7 como um limite superior. Observe que os números reais maiores do que ou iguais a 7 são também limites superiores de A, já que satisfazem a definição. O conjunto A não é limitado inferiormente; logo, não é um conjunto limitado.

2) $I = (\sqrt{3}, +\infty)$; o intervalo I é limitado inferiormente pois 0 é um limite inferior de I. O intervalo I não é limitado, pois não é limitado superiormente.

3) $J = (-1, 4]$ é um conjunto limitado pois possui limite inferior -3, por exemplo, e superior $\dfrac{13}{3}$, por exemplo. Os extremos -1 e 4 são também limites inferior e superior, respectivamente. Um intervalo que contém J é $[-3, 5]$; também $J \subset [-1, 4]$ (lembre da inclusão de conjuntos, capítulo 1).

Você já deve ter percebido que às vezes o limite superior (ou inferior) de um conjunto pertence ao conjunto. Nestes casos especiais eles têm um nome próprio:

Definição 7. Quando um limite superior de A pertence ao conjunto A, ele é chamado máximo de A. Quando um limite inferior de A pertence ao conjunto A, ele é chamado mínimo de A.

Exemplos:

4) Para $K = [0, 3]$, o limite inferior 0 e o limite superior 3 pertencem ao conjunto K; 0 é o mínimo e 3 é o máximo do conjunto $[0, 3]$.

5) Para $L = [-7, 2)$, o limite inferior -7 pertence a L, mas 2 não pertence a L. Assim, -7 é mínimo do conjunto L; o limite superior 2 não pode ser chamado de máximo, uma vez que não pertence a L. No entanto, ele é um limite superior especial:

não há nenhum outro limite superior menor do que 2, ou seja, 2 é o **menor limite superior** do conjunto L. Esta situação (e uma situação análoga para limite inferior) está explicitada nas duas próximas definições.

Definição 8. (supremo) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Um número real S chama-se supremo de A se e somente se:

1) S é limite superior de A.

2) S é o menor limite superior de A, ou seja: se S' é limite superior de A, então $S \leq S'$.

Notação: $S = \sup A$

Definição 9. (ínfimo) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Um número real s chama-se ínfimo de A se e somente se:

1) s é limite inferior de A.

2) s é o maior limite inferior de A, ou seja: se s' é limite inferior de A então $s' \leq s$.

Notação: $s = \inf A$

Exemplos:

6) $A = (-1, 6)$; -1 é o maior dos limites inferiores, ou seja, é o ínfimo de A. 6 é o menor dos limites superiores, logo, é o supremo de A. -1 e 6 não podem ser chamados de mínimo e máximo, respectivamente, pois não pertencem ao conjunto.

7) $A = [0, \sqrt{5})$; o supremo de A é $\sqrt{5}$ e o ínfimo de A é 0. Neste caso, o ínfimo é também mínimo.

8) De modo geral, para os intervalos da forma (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, temos que o supremo é b e o ínfimo é a. A demonstração deste fato será feita mais adiante.

9) $A = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$; $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$. Note que o supremo é também máximo. Mais adiante daremos outros detalhes sobre o ínfimo deste conjunto, que será uma conseqüência da proposição 3.

Exercícios propostos

1) Para cada um dos conjuntos que se seguem, verifique:

   i) se o conjunto é limitado superiormente; se for, dê duas cotas superiores.

   ii) se o conjunto é limitado inferiormente; se for, dê duas cotas inferiores.

   iii) se existe supremo e/ou ínfimo do conjunto; caso existam, determine-os.

A $= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 6 < 0\}$

B $= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 < 0\}$

C $= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 1 > 0\}$

D $= \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x-2)(x-3) \geq 0\}$

E $= \left\{\dfrac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$

F $= \{x \in \mathbb{R} / |x-3| < 1\}$

G $= \{\cos x / 0 \leq x \leq B\}$

H $= \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{x-1}{x+3} < 0\right\}$

I $= [-2, 3) - (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

J $= \{57\}$

K $= \{q \in \mathbb{Q} / q^4 < 9\}$

L $= \{x^2 / x \in \mathbb{Z}$ e x é divisível por $29\}$

M $= \left\{221 - \dfrac{6833}{2^n} / n \in \mathbb{N}\right\}$

N $= \left\{n + \dfrac{(-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$

Resultados sobre supremo e ínfimo

Os resultados que serão estudados agora serão úteis nas próximas disciplinas de Cálculo e na disciplina de Análise. Não esqueça que nosso objetivo aqui é estudar o conjunto dos números reais, e isto significa estudar o "comportamento" do conjunto $\mathbb{R}$ em todas as suas peculiaridades. As idéias de supremo e ínfimo são características de subconjuntos de $\mathbb{R}$ (apesar de poderem ser definidas também para conjuntos nos quais se define uma relação de ordem). A proposição 3 caracteriza supremo e ínfimo e muitas vezes será utilizada no lugar da definição (omitiremos algumas demonstrações, dando preferência para as aplicações dos resultados).

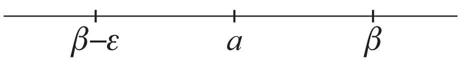
Proposição 3.

Note que toda proposição matemática que utiliza o termo se e somente se significa que ambas as afirmações que estão ligadas por esta expressão são equivalentes, ou seja, "uma implica a outra" e a "outra implica a uma". Para demonstrar este tipo de proposição são sempre necessários dois passos, provando sempre as duas implicações. Isto já foi discutido em Geometria I, Fundamentos I e Problemas – Sistematização e Representação.

a) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Um número real β é o supremo de A se e somente se:

i) β é limite superior de A.

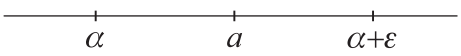
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a$.



b) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Um número real α é o ínfimo de A se e somente se:

i) α é limite inferior de A.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < \alpha + \varepsilon$.



Demonstração.

a) ($\Rightarrow$) **Hip.** $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\sup A = \beta$.

Tese.

i) β é limite superior de A

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a$.

Por hipótese $\sup A = \beta$, o que significa por definição que β é um limite superior de A.

Para provar ii), vamos negar a afirmação e verificar se esta negação da tese ii) nos leva a uma contradição.

Negação de ii): "Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $a \in A$ tem-se $\beta - \varepsilon \geq a$".

Ora, se $a \leq \beta - \varepsilon$ para todo $a \in A$, isto significa que $\beta - \varepsilon$ é um limite superior de A. Mas $\beta - \varepsilon < \beta$, o que contradiz a hipótese de β ser o supremo de A, ou seja, ser o menor dos limites superiores de A. Assim, a negação da tese (ii) nos leva a uma contradição, o que significa que a negação da afirmação (ii) é falsa, sob as hipóteses estabelecidas. Se a negação da afirmação é falsa sob estas hipóteses, então a afirmação é verdadeira: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\alpha \in$ A tal que $\beta - \varepsilon < a$.

($\Leftarrow$) **Hip.** $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ e

i) β é limite superior de A e

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a$.

Tese. $\sup A = \beta$.

Devemos provar que β é um limite superior de A e que é o menor deles.

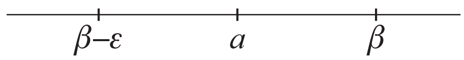
A afirmação i) da hipótese nos garante que β é um limite superior de A; resta provar que é o menor deles. Seja M um limite superior de A e mostremos que $\beta \leq M$.

De fato: para os números M e β temos duas opções: $\beta \leq M$ ou $M < \beta$. Suponhamos que ocorra $M < \beta$ (vamos verificar se isto nos leva a uma contradição). Então $\beta - M > 0$ e, pela afirmação ii) da hipótese, para o número $\varepsilon = \beta - M > 0$, existe $a \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a$. Substituindo ε temos que $\beta - (\beta - M) <$, ou seja, $M < a$. Isto é uma contradição, uma vez que M é limite superior de A (e nenhum elemento de A pode ser maior do que M!). Logo, não ocorre $M < \beta$, o que significa que $\beta \leq M$ e assim β é o menor dos limites superiores de A. Por definição, $\sup A = \beta$.

b) Siga os passos da demonstração de **a)** e faça como exercício.

■

Observação 24. Como podemos visualizar a afirmação "Se β é o supremo de A, para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a$" ? Observe uma interpretação deste fato na reta:



Por menor que seja ε, quando "recuamos" um espaço de comprimento ε à esquerda de β, vamos encontrar pelo menos um elemento de A entre $\beta - \varepsilon$ e β; este elemento de A **depende do ε considerado**. Vamos fazer um exemplo para ilustrar a situação:

Se $A = (0,2)$, então $\sup A = 2$. Para $\varepsilon = 10^{-6}$, $a = 1{,}9999998$ é tal que

$$2 - \varepsilon = 2 - 10^{-6} = 1{,}999999 < 1{,}9999998 \leq 2.$$

Podemos agora enunciar em $\mathbb{R}$ o resultado similar ao Princípio da Boa Ordem em $\mathbb{N}$ e ao Princípio do Menor Inteiro em $\mathbb{Z}$, anunciado no início de nosso estudo de supremo e ínfimo:

Teorema do Supremo: Para todo subconjunto A de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, e A limitado superiormente, existe o supremo de A em $\mathbb{R}$.

Analogamente, podemos enunciar o **Teorema do Ínfimo:** Para todo subconjunto A de $\mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, e A limitado inferiormente, existe o ínfimo de A em $\mathbb{R}$.

Observação 25. A demonstração destes Teoremas depende da construção formal do conjunto $\mathbb{R}$, que não fizemos aqui. Vamos aceitá-los como verdadeiros, sem demonstração. No entanto, é fácil verificar que os dois teoremas são afirmações equivalentes (consulte a bibliografia).

Vejamos agora um exemplo de aplicação do Teorema do Supremo. O resultado a seguir parece óbvio; no entanto, não devemos acreditar nas aparências! Acompanhe com atenção a demonstração: muitas vezes para provarmos que um fato não ocorre, supomos que ele ocorre e chegamos a uma contradição. Esta é a idéia da demonstração da Proposição 4.

Proposição 4. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, não é limitado superiormente.

Demonstração. Para um subconjunto de $\mathbb{R}$ só temos duas opções: ou ele é limitado superiormente ou não é. Suponhamos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ seja limitado superiormente; pelo Teorema do Supremo, existe $S = \sup \mathbb{N}$. Então, pela Proposição 3,

i) $n \leq S$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S - \varepsilon < m$.

Como (ii) vale para todo ε, vale também para $\varepsilon = 1$ e para ele existe um $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $S - 1 < m_1$. Então $S < m_1 + 1$ e como $m_1 + 1$ é um número natural, isto contradiz o fato de S ser o supremo de $\mathbb{N}$ (pois encontramos um elemento do conjunto $\mathbb{N}$ que é maior do que o supremo). Esta contradição veio da nossa suposição de $\mathbb{N}$ ser limitado superiormente. Concluímos então que este fato não pode ocorrer, ou seja, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

■

Observação 26. A Proposição 4 tem algumas conseqüências que serão úteis em várias circunstâncias, ao longo de todo o curso, principalmente em disciplinas de Cálculo e Análise. Algumas destas conseqüências serão demonstradas, outras não. Para aquelas que não serão demonstradas faremos um exemplo de aplicação. Acompanhe com atenção a linha de raciocínio das demonstrações das próximas proposições: são estratégias que você usará mais de uma vez durante o curso (lembre-se que este nosso capítulo estuda a estrutura do conjunto dos números reais, conjunto que está presente em todas as disciplinas do curso).

Proposição 5. Para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe um número natural $n > 0$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Observação 27. O resultado nos diz que dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um número natural n tal que o número real $\frac{1}{n}$ é menor do que ε. Quando ε for um número "grande", encontramos facilmente o número procurado. Por exemplo, para $\varepsilon = 10$, basta tomar $n = 1$ e teremos $\frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1 < 10$. De modo geral, para $\varepsilon \geq 1$, é suficiente tomar $n = 2$ para termos

$\frac{1}{n} < \varepsilon$. Por outro lado, se $\varepsilon < 1$ (número "muito pequeno"), devemos estar mais atentos para a relação entre ε e n. Vamos fazer $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$. Qual seria o número n neste caso? Queremos $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000000}$. É suficiente tomar n **maior** estritamente do que 1000000 para que a desigualdade ocorra. De fato, para $n = 1000001$ já temos $\frac{1}{n} = \frac{1}{1000001} < \frac{1}{1000000}$. Qualquer outro valor de n maior do que 1000001 também iria satisfazer a desigualdade.

Lembre que quanto maior o denominador n, menor é a fração $\frac{1}{n}$.

Note que o resultado diz "existe n", o que significa que existe **pelo menos um valor de** n; nada impede que existam mais valores satisfazendo a desigualdade.

Observação 28. Não esqueça que um exemplo não substitui uma demonstração! Um **exemplo** é útil para que possamos entender melhor o resultado: é uma experiência, não uma prova.

Exemplo de aplicação do resultado

Podemos agora voltar ao nosso exemplo 9; vamos provar que para $A = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$, tem-se $\inf A = 0$. Pela Proposição 3, como $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \varnothing$, basta provar que:

i) 0 é limite inferior de A.

ii) Para todo $\gamma > 0$, existe $a \in A$ tal que $a < 0 + \gamma$

De fato: (i) ocorre pois os elementos de A são da forma $\frac{1}{n} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) ocorre pela proposição 5: dado $\gamma > 0$, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{m} < \gamma$. Este elemento $\frac{1}{m}$ pertence a A e satisfaz $\frac{1}{m} < 0 + \gamma$.

Logo, $\inf A = 0$.

Proposição 6. Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $a = 0$.

Demonstração

Hip. $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$

Tese. $a = 0$

Como por hipótese $a \geq 0$ (que significa $a > 0$ ou $a = 0$), e queremos provar que $a = 0$, vamos mostrar que não pode ocorrer $a > 0$. Para tanto, vamos verificar o que acontece se $a > 0$. Ora, se $a > 0$ também $\frac{a}{2} > 0$. Por hipótese $0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$; para $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ em particular , teremos $0 \leq a < \frac{a}{2}$. A segunda desigualdade informa que $a < \frac{a}{2}$. Mas isto significa que $a - \frac{a}{2} > 0$ e conseqüentemente $\frac{a}{2} < 0$. Se $\frac{a}{2} < 0$, concluímos que $a < 0$. Isto é uma contradição, uma vez que havíamos suposto $a > 0$. Esta suposição levou-nos a uma contradição. Logo, não ocorre $a > 0$, restando a outra opção que é $a = 0$.

■

Observação 29. O resultado nos diz que se um número a está "espremido" entre 0 e ε para todo ε, ou seja, $0 \leq a < \varepsilon$, então a única opção para este número a é ser o zero. (Na demonstração notamos que não existe um número $a > 0$ que seja menor do que **todo** ε: o único número a que satisfaz a condição $0 \leq a < \varepsilon$ **para todo** ε é o zero). As informações fundamentais são: o fato de termos $0 \leq a$, com a opção da igualdade, e o quantificador "para todo" ε.

Corolário. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $|a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $a = b$.

Demonstração

Hip. $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$

Tese. $a = b$

Este resultado é uma conseqüência direta da proposição anterior; lembrando que $0 \leq |a - b|$, temos por hipótese que $0 \leq |a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ (que é a hipótese da proposição 6). Pela Proposição

6, podemos concluir que $|a-b|=0$ e uma propriedade do módulo nos garante que $a-b=0$, ou seja, $a=b$.

■

Proposição 7. Dados $a,b \in \mathbb{R}$, se $a-b<\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0$, então $a \leq b$.

Demonstração

Hip. $a,b \in \mathbb{R}$, $a-b<\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0$

Tese. $a \leq b$

Sabemos que dados dois números reais a e b, só existem três opções:

$$a<b, \ a=b \text{ ou } a>b.$$

Como queremos provar que $a \leq b$, mostremos que não pode ocorrer a opção $a>b$. Usaremos aqui a mesma idéia da demonstração da Proposição 6: suponhamos que ocorra $a>b$.

Então $a-b>0$ e para $\varepsilon=\frac{1}{2}(a-b)>0$ temos por hipótese que $a-b<\frac{1}{2}(a-b)$. Isto significa que $(a-b)-\frac{1}{2}(a-b)<0$, ou seja, $a-b<0$ e conseqüentemente $a<b$. Isto é uma contradição gerada pela nossa suposição de $a>b$. Logo, as opções possíveis para a e b são $a<b$ ou $a=b$, o que significa $a \leq b$, como queríamos provar.

■

Proposição 8. **(Teorema de Arquimedes)** Sejam $x, y \in \mathbb{R}, y>0$. Então existe um número natural não nulo n tal que $ny>x$.

Observação 30. O resultado nos diz que dados dois números reais x e y, com $y>0$, é sempre possível encontrar um número $n \in \mathbb{N}^*$ tal que o produto de n por y seja maior do que x.

Note a hipótese de que $y>0$. Se $x<0$, qualquer valor de n serve, uma vez que um número negativo é sempre menor do que um número positivo. Também, se escolhemos x e y tais que $x<y$, qualquer valor de $n \in \mathbb{N}^*$ servirá.

Assim, nossos exemplos serão para x e y positivos e $x > y$. Faremos exemplos de situações com x e y racionais, x racional e y irracional, x irracional e y racional e, por fim, ambos irracionais.

Exemplo de aplicação do resultado

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vamos encontrar um número natural não nulo n tal que $nx > y$, nos seguintes casos:

1) *x e y são racionais*

Consideremos $y = \dfrac{1}{100} > 0$ e $x = \dfrac{7}{8}$. Devemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $ny > x$, ou seja, $n \cdot \dfrac{1}{100} > \dfrac{7}{8}$ (*). Qual o valor de n? A idéia é representar os números racionais x e y com o mesmo denominador e a partir daí encontrar n. Um denominador comum para x e y pode ser 200 pois $y = \dfrac{2}{200}$ e $x = \dfrac{175}{200}$. Substituindo na desigualdade (*) temos:

$n \cdot \dfrac{2}{200} > \dfrac{175}{200}$, o que nos permite estimar o valor de n através da desigualdade $n \cdot 2 > 175$. Concluímos então que $n > \dfrac{175}{2}$ e podemos escolher $n = 88$. Confirmando nossa escolha:

$$88 \cdot \frac{2}{200} = \frac{176}{200} > \frac{175}{200}.$$

(Note que n não é único!)

2) *x é racional e y irracional*

Consideremos $x = \dfrac{11}{5}$ e $y = \sqrt{2} > 0$. Devemos encontrar n tal que $n \cdot \sqrt{2} > \dfrac{11}{5}$.

Neste caso não temos uma representação fracionária para y; no entanto, temos representações decimais para x e y:

$x = \dfrac{11}{5} = 2{,}5$ e $y = \sqrt{2} = 1{,}41421356237...$

Vemos então que $n = 10$ satisfaz a desigualdade requerida:

$10 \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot 1{,}41421356237... = 14{,}1421356237... > 2{,}5 = \dfrac{11}{5}$

3) *x é irracional e y é racional*

Consideremos $x=\sqrt{3}$ e $y=\dfrac{1}{80}>0$; devemos encontrar n tal que $n\cdot\dfrac{1}{80}>\sqrt{3}$.

Análogo ao caso (2), vamos observar as representações decimais de x e y: $x=1,73205080757...$ e $y=0,0125$. Neste caso vemos que $n=1000$ resolve nosso problema. Vamos conferir:

$$1000\cdot\frac{1}{80}=1000\cdot 0,0125=12,5>\sqrt{3}=1,73205080757...\ .$$

4) *x e y são irracionais*

Consideremos $x=\sqrt{5}$ e $y=\sqrt{17}$; observemos as representações decimais de x e y:

$$x=2,2360679775...\ \text{e}\ \ y=4,12310562562....$$

Devemos encontrar $n\in\mathbb{N}^*$ tal que

$$n\cdot 2,2360679775...>4,12310562562....$$

É fácil ver que $n=10$ resolve nosso problema.

Proposição 9. Dados $a,b\in\mathbb{R}$, se $a<b$ então existe um número racional r tal que $a<r<b$.

Observação 31. Este resultado nos diz que dados quaisquer números reais a e b, com $a<b$, existe sempre um número racional entre eles. Já conhecemos este resultado para o caso de a e b racionais (feito em Fundamentos I): basta tomar a média aritmética entre a e b. Vamos observar um exemplo com a e b irracionais: $a=\sqrt{3}$ e $b=\sqrt{5}$. Neste caso tanto a como b possuem uma representação decimal: $a=1,73205080757...$ e $b=2,2360679775...$ Não é difícil encontrar um número racional entre a e b (temos até mais de um!): $1,8=\dfrac{18}{10}$ é um racional e $\sqrt{3}<\dfrac{18}{10}<\sqrt{5}$. Não esqueça: o que fizemos foi apenas apresentar um exemplo, não uma demonstração!

Observação 32. A demonstração da Proposição 9 será feita na disciplina de Análise; na ocasião você verá que é possível também encontrar um irracional entre quaisquer dois racionais.

Exercícios propostos

18) Encontre $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, para os seguintes valores de ε:

a) $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-21}$

b) $\varepsilon = 0,000039$

c) $\varepsilon = \sqrt{5} \cdot 10^{8}$

19) Use o teorema de Arquimedes (Proposição 7) para determinar $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $nx > y$ nos casos:

a) $x = 3,45678$ e $y = \sqrt{10}$

b) $x = \sqrt{19}$ e $y = \sqrt{20}$.

20) Para cada um dos casos abaixo, encontre um número racional r:

a) $\sqrt{\frac{3}{2}} < r < \sqrt{2}$

b) $\sqrt{10} < r < 3{,}16227$

21) Encontre um número irracional k tal que $1,2 < k < 1,3$.

22) O que você pode dizer a respeito de um conjunto A se $\inf A = \sup A$?

23) Dê exemplo de conjuntos não vazios A e B de números reais de modo que satisfaçam simultaneamente as condições:

(i) $a \le b, \forall a \in A$ e $\forall b \in B$

(ii) $\sup A = \inf B$

(iii) $A \cap B = \varnothing$

24) Sejam A e B conjuntos numéricos não vazios. Prove que se $A \subset B$, então $\inf A \ge \inf B$ e $\sup A \le \sup B$.

25) Sejam A e B dois conjuntos numéricos tais que $a \le b, \forall a \in A$ e $\forall b \in B$. Prove que $\sup A \le \inf B$.

26) Dados dois conjuntos numéricos limitados A e B, definimos o conjunto:

a) $A + B = \{a + b \,/\, a \in A \text{ e } b \in B\}$

b) Prove que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

27) Seja B um conjunto não vazio. Definimos o conjunto $-B = \{-b \,/\, b \in B\}$. Mostre que $\sup B = -\inf(-B)$.

28) Dado um conjunto limitado A e um número real α, definimos o conjunto: $\alpha A = \{\alpha x \,/\, x \in A\}$.

Mostre que:

a) se $\alpha \geq 0$, então $\sup(\alpha A) = \alpha \cdot \sup A$ e $\inf(\alpha A) = \alpha \cdot \inf A$.

b) se $\alpha < 0$, então $\sup(\alpha A) = \alpha \cdot \inf A$.

2.7 Equações e inequações

A resolução de equações e inequações em $\mathbb{R}$ decorre das propriedades das operações, das propriedades da relação de ordem e das propriedades do módulo. Começaremos com a resolução de algumas equações, especificando as propriedades utilizadas. Passaremos depois para a resolução das inequações. Sugerimos que você leia as próximas páginas munido de papel e lápis, pois nosso trabalho será bastante prático; muito do que vamos trabalhar agora você já conhece do ponto de vista operacional. No entanto, isto não basta. Além de conhecer os procedimentos de resolução é preciso saber o que os justifica. Por que ao mudar um número de membro ele muda de sinal? Por que passar dividindo? Estas "regras" tão conhecidas estão ancoradas nas propriedades do conjunto dos números reais, suas operações e sua ordem. Não são simples "arranjos" para achar o valor de x, como dizem nossos alunos. Não há nelas nenhuma mágica.

Neste primeiro estudo trataremos de equações e inequações que envolvem expressões polinomiais. Seguiremos o "caminho escolar" destes assuntos: equações do primeiro grau (sexta série), do segundo grau, equações racionais, equações com módulo, inequações do primeiro grau, inequações do segundo grau. Neste momento não vamos abordar equações e inequações trigonométricas e logarítmicas; elas serão tratadas mais tarde, quando estudarmos as funções elementares.

Para usar uma terminologia absolutamente precisa deveríamos chamar estas equações de equações polinomiais do primeiro ou do segundo grau, mas não é errado utilizar da forma como está. Você observará, que quando se tratar das funções é obrigatório o uso do termo polinomial para referir-se às funções polinomiais do segundo grau, ou funções quadráticas.

2.7.1 Equações

Alguns livros do ensino fundamental definem uma equação como "uma igualdade entre duas expressões algébricas", sem, contudo, definir o que é uma "expressão algébrica". As tentativas de definir as equações (e também os polinômios) sem o suporte do conceito de função variam de geniais a matematicamente incorretas. Optamos por não definir formalmente, e de modo genérico, o que é uma equação. Vamos resolvê-las. Mas o que é resolver uma equação?

1) **Resolução de equações do tipo $ax+b=0$, com a e b números reais dados, $a \neq 0$.**

   Uma equação deste tipo é chamada uma equação de primeiro grau. Resolvê-la é encontrar todos os valores de x que satisfaçam a igualdade. Sabemos que somente um valor de x satisfaz esta igualdade, isto é, todos os números reais x que multiplicados por a e somados com b resultem zero.

Sabemos mesmo? Você sabe?

Nomenclatura:

i) Geralmente x é chamado a "incógnita", termo derivado do latim que significa desconhecido.

ii) a é chamado o coeficiente de x.

iii) b é chamado o termo independente.

Resolução detalhada: cada passo do procedimento da resolução está na coluna da esquerda; na coluna à direita aparece a justificativa de cada passo.

Procedimento	Justificativa
$ax+b=0$	
$[ax+b]+(-b)=0+(-b)$	Adicionando o mesmo valor aos dois membros, a igualdade se mantém. O valor adicionado é o oposto de b, que sabemos existir por A4.
$ax+[b+(-b)]=-b$	À esquerda da igualdade usamos a propriedade associativa da adição (A1); à direita usamos o fato de 0 ser o elemento neutro da adição (A3).
$ax+0=-b$	À esquerda usamos que a soma de um número com seu oposto é zero (A4).
$ax=-b$	Usamos o fato de 0 ser o elemento neutro da adição (A3).
$\frac{1}{a}ax=\frac{1}{a}.(-b)$	Multiplicando os dois membros de uma igualdade por um mesmo número, a igualdade se mantém; podemos multiplicar ambos os membros por $\frac{1}{a}$ (que é o inverso de a), pois como a é diferente de zero, ele admite inverso (M4).
$x=\frac{(-b)}{a}$	À esquerda da igualdade usamos que o produto de um número pelo seu inverso é 1 (M4), e $1.x=x$ pois 1 é o elemento neutro da multiplicação (M3). À direita usamos a operação de multiplicação de números reais.

Como você pode ver, cada passagem tem sua justificativa.

Pode parecer que estamos complicando o que é fácil! No entanto, ao explicar a resolução para os alunos, é interessante que eles não vejam como uma mágica de "passa pra lá, passa pra cá, muda de sinal"; a operação "passar para" não existe em matemática, nem os sinais "mudam" quando se "movimentam" (a propósito, os sinais e os números não andam como os animais...). A tentativa de "esclarecer" a resolução usando expressões consideradas "simples" pode ser desastrosa, dando margem a uma visão errônea da própria natureza da matemática. Quanto mais o professor conhecer o assunto, mais possibilidades (corretas!) de abordagem ele terá, o que pode resultar num trabalho mais eficiente. Além disso, o professor terá conhecimentos para identificar falhas, enganos e vantagens nas diversas abordagens dos livros didáticos.

2) **Resolução de equações do tipo $ax^2+bx+c=0$, com a,b,c números reais e $a\neq 0$.**

Uma equação da forma $ax^2+bx+c=0$ é chamada uma equação do segundo grau e os números reais a,b e c são os coeficientes da equação.

É claro que você já conhece esta equação, a famosa equação de segundo grau. Note que o coeficiente de x^2 deve ser diferente de zero, pois caso contrário teríamos uma equação de primeiro grau. As soluções desta equação são chamadas raízes da equação e são determinadas utilizando uma fórmula, conhecida, no Brasil, como fórmula de Baskhara (tarefa: pesquise a respeito da história desta fórmula):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mas como esta fórmula foi deduzida? Sua dedução utiliza a idéia de "completar quadrados". Acompanhe a dedução com atenção.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Primeiro multiplicamos a igualdade por $\frac{1}{a}$, uma vez que $a \neq 0$, obtendo $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Lembrando que $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ e observando os dois primeiros termos da igualdade anterior fazemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Então somamos e subtraímos $\frac{b^2}{4a^2}$, obtendo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} = 0$$

Este é um procedimento de cálculo secular e pode ser trabalhado com os estudantes já no Ensino Médio; alguns defendem que até mesmo no Fundamental. O procedimento permite que os estudantes não se tornem tão dependentes da fórmula, além de poderem resolver outros problemas e a própria equação de segundo grau na forma canônica e não somente na forma normal. Procure a Coleção Contando a História da Matemática, da Editora Ática. No volume sobre esse assunto há uma discussão desse método de resolução.

Denotamos b^2-4ac por Δ e, se $\Delta \geq 0$, o membro da esquerda da última igualdade pode ser visto como uma diferença de dois quadrados (Lembre-se do produto notável $p^2-q^2=(p+q).(p-q)$).:

Assim, nestas condições temos:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

Lembrando as propriedades dos números reais, temos:

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \text{ ou } x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \text{ e então}$$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, que são as soluções da equação.

Observação 33. Se $\Delta<0$, não existem soluções reais para a equação. Neste caso as soluções serão *números complexos* dados por $x_1=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $x_2=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

O símbolo i corresponde ao número complexo $\sqrt{-1}$. Você estudará o conjunto dos números complexos com mais detalhes nas disciplinas de Álgebra.

Observação 34. Se $\Delta=0$, teremos duas soluções reais e iguais, $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$.

Observação 35. Pela dedução da fórmula, vimos que podemos calcular as soluções de uma equação do 2º grau sem utilizar a fórmula, somente com a idéia de completar quadrados. É claro que algumas equações podem dar um pouco de trabalho. Vejamos como exemplo a resolução de equação $x^2-5x+6=0$. À direita indicaremos a justificativa do procedimento:

$x^2-4x+4-x+2=0$	$-5x=-4x-x$; $6=4+2$;estamos procurando um quadrado e é "fácil" lembrar que $(x-2)^2=x^2-4x+4$
$(x-2)^2-(x-2)=0$	$(x-2)^2=x^2-4x+4$ e a propriedade associativa
$(x-2).[(x-2)-1]=0$	Propriedade distributiva: colocamos $(x-2)$ em evidência
$(x-2).(x-3)=0$	$(x-2)-1=x-3$
$x-2=0$ ou $x-3=0$	P8: se o produto de dois números é zero, um deles é zero.
$x=2$ ou $x=3$	

As soluções da equação são $x=2$ ou $x=3$.

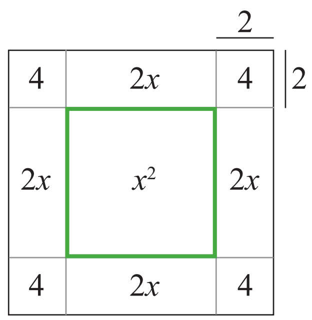
Observação 36. Este processo nos indica que, uma vez encontradas as soluções, é possível expressar a equação na forma $(x-2).(x-3)=0$. Um exercício da próxima lista de exercícios generaliza este fato para as equações de segundo grau.

Observação 37. Os livros didáticos costumam expressar as soluções em forma de conjunto, chamado o conjunto solução da equação. No exemplo anterior o conjunto solução é dado por $S=\{2,3\}$.

Equações de segundo grau: resolução geométrica

Como na equação de segundo grau a incógnita aparece ao quadrado e a área de um quadrado de lado x é $x \cdot x = x^2$, será possível relacionar esta equação a um problema de área? É possível encontrar as soluções de algumas equações de segundo grau construindo quadrados convenientes e utilizando a incógnita x (o valor que estamos procurando) como a medida do lado de um quadrado. Assim, conseguiremos encontrar as soluções se elas forem positivas, já que estamos considerando x uma medida. Como exemplo, vamos encontrar geometricamente (sem usar fórmula!) as soluções positivas de algumas equações:

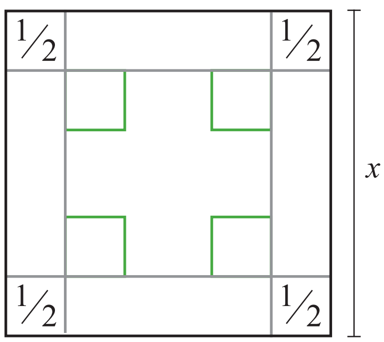
a) $x^2+8x-9=0$



$$x^2 + 8x = 9$$
$$8x = 4.(2x)$$
$$x^2 + 8x + 4.4 = 9 + 16 = 25 = (x + 4)^2$$

25 é a área do quadrado de lado $(x+4)$ e é também a área do quadrado de lado 5. Logo, $x+4=5$, o que nos dá $x=1$, a raiz positiva da equação.

b) $x^2 - 2x - 3 = 0$



$$x^2 - 2x = 3 \quad \text{e} \quad 2x = 4.\left(\frac{1}{2}\right)x.$$

Foram "tirados" do quadrado quatro retângulos de dimensões $\frac{1}{2}$ e x; conseqüentemente, foram tirados duas vezes os quatro quadrados de lado $\frac{1}{2}$. A figura em cruz tem área $x^2 - 2x = 3$.

Para completar o quadrado do meio, acrescentamos os quatro pequenos quadrados de lado $\frac{1}{2}$ e teremos: $x^2 - 2x + 4.\left(\frac{1}{4}\right)$.
De $x^2 - 2x = 3$, temos $(x-1)^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$.

Logo, $x - 1 = 2$, o que nos dá $x = 3$, a raiz positiva da equação.

Observação 38. Você deve ter notado que as duas equações resolvidas geometricamente eram do tipo $ax^2+bx+c=0$, com $a=1$ e o termo independente $c<0$. Pergunta: o processo poderia ser feito também para equações com $c>0$?

2.7.2 Equações racionais

Algumas equações necessitam um certo trabalho antes de serem submetidas aos procedimentos de resolução já vistos. Não são equações de primeiro ou segundo graus, mas sua resolução depende dos procedimentos de resolução de tais equações. São chamadas de equações racionais, por envolverem frações. É importante lembrar que, em se tratando de uma fração, é necessário que seu **denominador seja diferente de zero**; assim, antes de resolver a equação devemos encontrar os valores de x que anulam o denominador e excluí-los.

Você conhece uma demonstração de que 1 = 2? Pesquise e descubra o porque de essa pergunta ser feita aqui.

Exemplos:

1) Resolver a equação $\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-5}$, $x\neq 2$ e $x\neq 5$.

Vamos resolvê-la.

$$\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-5},\quad x\neq 2 \text{ e } x\neq 5$$

Somando o oposto de $\frac{2}{x-5}$, temos:

$$\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-5}=0$$

Reduzindo ao mesmo denominador (frações equivalentes),

$$\frac{1.(x-5)-2.(x-2)}{(x-2).(x-5)}=0$$

A fração será igual a zero quando o numerador for igual a zero. Logo, basta resolver $x-5-2x+4=0$, ou seja, $-x=1$, que resulta $x=-1$. Antes de dar a resposta, devemos verificar se o valor encontrado é diferente de 2 e diferente de 5, valores "proibidos" por tornarem zero o denominador. Como isto acontece, a solução é $x=-1$, isto é, $S=\{-1\}$.

2) Resolver a equação $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x-2}=0$.

Inicialmente devemos verificar os valores de x que anulam os denominadores, para que possamos excluí-los da solução:

(i) $x^2-5x+6=0$ quando $x=2$ ou $x=3$

(ii) $x-2=0$ quando $x=2$

Logo, devemos ter $x\neq 2$ e $x\neq 3$.

Escrevendo $x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)$, decorrente da Observação 30, temos

$$\frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}-\frac{1}{x-2}=0$$

Reduzindo ao mesmo denominador,

$$\frac{1-(x-3)}{(x-2)\cdot(x-3)}=0$$

Novamente, uma fração é igual a zero quando seu numerador é zero:

$$1-(x-3)=0$$

$$1-x+3=0\text{, ou seja, } x=4$$

Como $4\neq 2$ e $4\neq 3$, temos $S=\{4\}$.

Exercícios propostos

29) Resolva as equações:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x+\dfrac{3}{4}=0$.

Resp. $S=\left\{\dfrac{-3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\right\}$

b) $\dfrac{1}{x^2-7x-8}-\dfrac{1}{x-2}=0\cdot$

Resp. $S=\left\{4-\sqrt{22},4+\sqrt{22}\right\}$

30) Mostre que é única a solução da equação $ax+b=0$, com a e b números reais e $a\neq 0$.

31) Se um número real k é solução de ambas as equações $ax+b=0$ e $cx+d=0$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, qual a relação entre os coeficientes a,b,c e d?

32) Considere a equação de segundo grau $ax^2+bx+c=0,\ a \neq 0$. Mostre que a soma das soluções é $\frac{-b}{a}$ e o produto das soluções é $\frac{c}{a}$.

33) Considere a equação $ax^2+bx+c=0$, com a,b e c números inteiros e $a \neq 0$. Mostre que: se o número racional $\frac{u}{v}$ é solução da equação, então $u|c$ e $v|a$.

34) Mostre que todo número racional $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ é solução de uma equação de primeiro grau com coeficientes inteiros.

35) Use o exercício 32 para encontrar uma equação de segundo grau que tenha soluções $u=-8$ e $v=-\frac{1}{2}$. Esta equação é única?

36) Se u e v são soluções da equação $ax^2+bx+c=0$, mostre que $ax^2+bx+c=a(x-u)\cdot(x-v)$.

2.7.3 Inequações

Para resolver inequações, usaremos principalmente as propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$. Faremos inicialmente as inequações de primeiro grau, em seguida as inequações de segundo grau e por fim as inequações envolvendo módulo. Para estas últimas usaremos também as propriedades do módulo. A melhor maneira de aprender a resolver inequações é por meio de exemplos; é claro que não podemos fazer todos os exemplos possíveis! No entanto, selecionamos alguns mais significativos, cujas estratégias são mais gerais. Resolver uma inequação é encontrar todos os valores de x que satisfaçam uma desigualdade; não podemos esquecer que isto é diferente de encontrar valores que satisfaçam uma igualdade.

Aconselhamos que você leia este tópico acompanhado de papel e lápis.

Exemplos:

1) Resolver a inequação $3x-5>2$

Faremos a resolução detalhada, indicando a propriedade usada em cada passo do procedimento; a coluna da esquerda é a resolução e a da direita é a propriedade usada naquele passo.

Procedimento	Justificativa
$3x-5>2$	
$3x>7$	Somamos $+5$ (o oposto de -5) aos dois lados da desigualdade (PO5)
$\frac{1}{3}.3x>\frac{1}{3}.7$	Multiplicamos ambos os lados por $\frac{1}{3}$ (o inverso de 3); a desigualdade não se altera pois o número é positivo. (PO3)
$x>\frac{7}{3}$	Efetuamos a multiplicação

A solução da inequação será então o conjunto de todos os valores de x que são maiores do que $\frac{7}{3}$. Podemos escrever este conjunto de duas maneiras:

i) em forma de intervalo: $S=\left]\frac{7}{3},+\infty\right[$ ou

ii) $S=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x>\frac{7}{3}\right\}$

Sempre que possível, usaremos a forma de intervalos.

2) Resolver a inequação $\sqrt{7}-5x\geq 8$

Especifique ao lado as propriedades utilizadas:

$$\sqrt{7}-5x\geq 8$$
$$-5x\geq 8-\sqrt{7}$$
$$5x\leq\sqrt{7}-8$$
$$x\leq\frac{\sqrt{7}-8}{5};$$
$$S=\left]-\infty,\frac{\sqrt{7}-8}{5}\right]$$

3) Resolver a inequação $2x+3 \leq 5x+1$

Especifique ao lado as propriedades utilizadas:

$$2x+3 \leq 5x+1$$
$$2x-5x \leq 1+(-3)$$
$$-3x \leq -2 \qquad \cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$x \geq \frac{2}{3}$$
$$S=\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$$

Observação 39. Como você deve ter percebido, nos dois exemplos foram utilizadas as propriedades **PO3** e **PO5**; no exemplo 3 também foi utilizada a **PO4**. Veja outra maneira de resolver, utilizando a adição e a lei do cancelamento:

$$2x+3 \leq 5x+1$$
$$2x+2+1 \leq 2x+3x+1$$
$$2 \leq 3x$$
$$\frac{2}{3} \leq x$$
$$S=\left[\frac{2}{3},+\infty\right]$$

Exemplos:

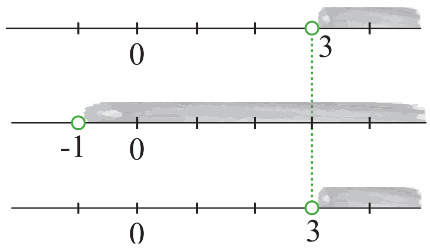
4) Resolver a inequação $(x-3)\cdot(x+1)>0$

Podemos observar aqui que os valores procurados (os valores de x) devem ser tais que o produto $(x-3)\cdot(x+1)$ resulte maior do que zero, ou seja, positivo. Quando um produto de dois números reais é positivo? Uma propriedade nos diz que um produto de dois números reais é positivo quando os números são ambos positivos ou ambos negativos. Vamos analisar as duas possibilidades:

i) $(x-3)>0$ e $(x+1)>0$, isto é, $x>3$ e $x>-1$.

Analisando as duas desigualdades acima, vemos que $x>3$ e $x>-1$, simultaneamente (note o conectivo *e*); isto significa que devemos

fazer a intersecção dos dois conjuntos, $A_1 =]3, +\infty[$ e $A_2 = (-1, +\infty)$.
Veja na reta:



$x > 3;\ A_1 =]3, +\infty[$

$x > -1;\ A_2 =]-1, +\infty[$

$x > 3;\ A = A_1 \cap A_2 =]3, +\infty[\cap]-1, +\infty[=]3, +\infty[$

Figura 2.1

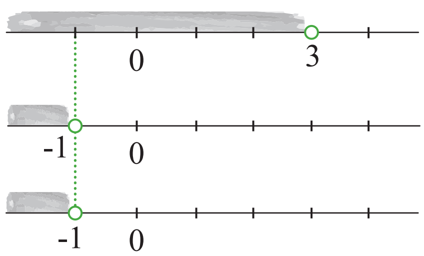
Esta primeira possibilidade nos deu um primeiro conjunto,

$$A =]3, +\infty[.$$

Vamos analisar agora a outra possibilidade:

ii) $x - 3 < 0$ e $x + 1 < 0$, isto é, $x < 3$ e $x < -1$.

Analogamente ao que foi feito na possibilidade (i), fazemos:



$x < 3;\ B_1 =]-\infty, 3[$

$x < -1;\ B_2 =]-\infty, -1[$

$x < -1;\ B = B_1 \cap B_2 =]-\infty, 3[\cap]-\infty, -1[=]-\infty, -1[$

Figura 2.2

A segunda possibilidade nos deu o conjunto:

$$B =]-\infty, -1[.$$

Assim, os valores de x que satisfazem a desigualdade dada devem satisfazer (i) ou (ii), ou seja, serão os elementos de A, ou os elementos de B; isto significa que, para expressar o conjunto de todos os possíveis valores de x que satisfazem a desigualdade (isto é, o conjunto solução), devemos fazer a união destes dois conjuntos: $S = A \cup B$. Assim, a solução da inequação é: $S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$.

Generalização: O exemplo 4 nos sugere uma generalização para resolução de inequações do tipo $(x-u)(x-v)>0$, com $u \neq v$: sabemos que no membro da esquerda os números u e v são raízes de uma equação de segundo grau e estão diretamente ligados à solução da inequação. No exemplo 4: para $u=-1$, $v=3$ e $v>u$, temos que a solução da inequação é $S=]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$, isto é, os valores à esquerda de -1 ($x<-1$) ou à direita de 3 ($x>3$). Podemos então generalizar: a solução de $(x-u)(x-v)>0$ para $v>u$ é o conjunto $S=]-\infty,u[\cup]v,+\infty[$. No caso de $(x-u)(x-v)\geq 0$, os intervalos serão fechados em u e v: $S=]-\infty,u]\cup[v,+\infty[$.

Pergunta: qual é esta equação?

5) Resolver a inequação $2x^2+3x+3\leq 3$

A idéia aqui é aproveitarmos a estratégia do exemplo anterior, para melhorar um pouco uma inequação envolvendo x^2:

$$2x^2+3x+3\leq 3+(-3)$$
$$2x^2+3x+3+(-3)\leq 3+(-3)$$
$$2x^2+3x\leq 0$$

Escrevendo o membro da esquerda como produto (propriedade distributiva), temos $x(2x+3)\leq 0$.

Voltamos assim às considerações do exemplo anterior: quando um produto de números reais é menor do que ou igual a zero, ou seja, quando ele é negativo ou nulo? Quando tivermos um fator positivo (ou nulo) e outro negativo (ou nulo). Vamos estudar os dois possíveis casos:

i) $x\geq 0$ e $2x+3\leq 0$, ou seja, $x\geq 0$ e $x\leq -\dfrac{3}{2}$.

Vejamos agora, com o auxílio da reta, quais valores de x satisfazem simultaneamente estas condições:

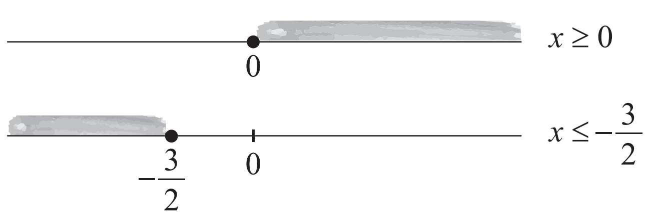


Figura 2.3

Como você pode observar, não há valores reais satisfazendo ambas as condições. Logo, para este primeiro caso, o conjunto-solução será o conjunto vazio: $S_1 = \varnothing$.

ii) $x \le 0$ e $2x + 3 \ge 0$, ou seja, $x \le 0$ e $x \ge -\frac{3}{2}$.

Observando na reta:

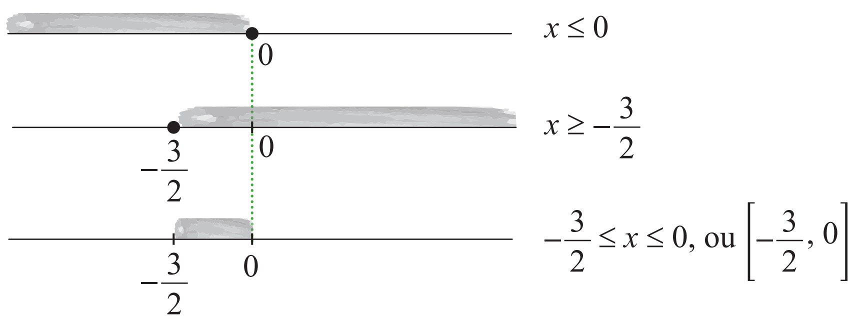


Figura 2.4

O conjunto-solução da inequação será então a união dos conjuntos obtidos em cada caso. Como no primeiro caso o conjunto é vazio, a solução será $S = \left[-\frac{3}{2}, 0\right]$.

Generalização: O exemplo 5 nos permite generalizar a resolução de inequações do tipo $(x-u)(x-v) < 0$, para $u \ne v$. Para as raízes $u = -\frac{3}{2}$ e $v = 0$, a solução da inequação $(x-0)(2x+3) \le 0$ é o conjunto $S = \left[-\frac{3}{2}, 0\right]$, isto é, os valores de x que estão "entre" u e v, com $u < v$. Assim, a solução da inequação do tipo $(x-u)(x-v) < 0$ para $u < v$ será o conjunto $S =]u, v[$. No caso de $(x-u)(x-v) \le 0$, a solução será o intervalo $S = [u, v]$.

Observação 40. As generalizações dos exemplos 4 e 5 nos serão úteis para resolver outros tipos de inequações e para o estudo da função quadrática. Lembre-se que não há como "padronizar" soluções de todas as possíveis inequações; teremos que utilizar as propriedades para sermos capazes de resolver qualquer tipo de inequação, mesmo que não tenha sido resolvido antes! Inequações do tipo

$$ax^2 + bx + c \ge 0,\ ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c \le 0,\ ax^2 + bx + c < 0,$$

podem ser "transformadas" fatorando o trinômio

$$ax^2+bx+c=a(x-u)\cdot(x-v),$$

com u e v raízes da equação $ax^2+bx+c=0$. As possíveis soluções são:

Inequação	Solução
$(x-u)(x-v)\geq 0,\ u<v$	$S=]-\infty,u]\cup[v,+\infty[$
$(x-u)(x-v)>0,\ u<v$	$S=]-\infty,u[\cup]v,+\infty[$
$(x-u)(x-v)\leq 0,\ u<v$	$S=[u,v]$
$(x-u)(x-v)<0,\ u<v$	$S=]u,v[$

Pergunta: Em nosso resumo, por que não aparece o número a, da fatoração $ax^2+bx+c=a(x-u)\cdot(x-v)$?

Exemplos:

6) Resolver a inequação $\dfrac{7-2x}{4x+1}<2$

Somos tentados a multiplicar a expressão "em cruz", a fim de obter uma inequação já conhecida. No entanto, "multiplicar em cruz" significa formalmente multiplicar ambos os membros da desigualdade por $4x+1$, mas devemos lembrar as propriedades da relação de ordem (**PO3** e **PO4**): quando multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um número **positivo**, a desigualdade se mantém. Mas se o número é **negativo**, a desigualdade se altera. Como não sabemos se $4x+1$ é positivo ou negativo (depende do valor de x), não podemos multiplicar os membros da desigualdade e conservá-la. Nosso procedimento será outro. Veja:

$$\frac{7-2x}{4x+1}<2$$ somando (-2) aos dois membros, obtemos

$$\frac{7-2x}{4x+1}+(-2)<2+(-2)$$

$$\frac{7-2x}{4x+1}-2<0$$

Reduzindo ao mesmo denominador:

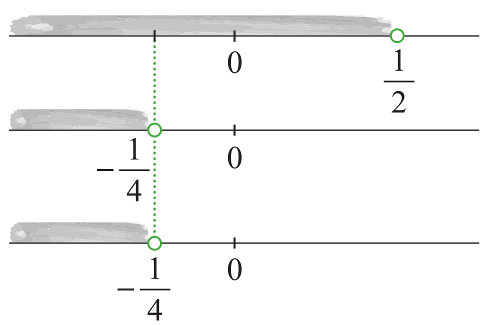
$$\frac{(7-2x)-2(4x+1)}{4x+1}<0$$

$$\frac{-10x+5}{4x+1}<0$$

Quando um quociente é menor do que zero, ou seja, é negativo? Quando numerador e denominador têm sinais opostos. Estudemos os dois casos:

i) $-10x+5>0$ e $4x+1<0$, isto é, $x<\frac{1}{2}$ e $x<-\frac{1}{4}$

Na reta:



$$x<\frac{1}{2};\ A_1=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$$

$$x<-\frac{1}{4};\ A_2=\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[$$

$$x<-\frac{1}{4};\ A=A_1\cap A_2=\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right.$$

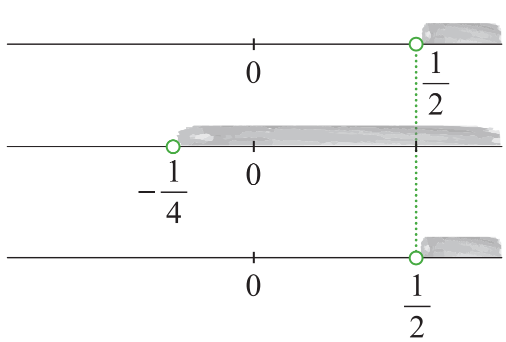
Figura 2.5

Logo, o estudo do primeiro caso nos forneceu o conjunto:

$$A=\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[.$$

ii) $-10x+5<0$ e $4x+1>0$, isto é, $x>\frac{1}{2}$ e $x>-\frac{1}{4}$.

Na reta:



$$x>\frac{1}{2};\ B_1=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$$

$$x>-\frac{1}{4};\ B_2=\left]-\frac{1}{4},+\infty\right[$$

$$x>\frac{1}{2};\ B=B_1\cap B_2=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$$

Figura 2.6

Logo, o estudo do segundo caso nos forneceu o conjunto:

$$B = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Como pode ocorrer (i) ou (ii), os valores de x do conjunto A ou os do conjunto B satisfazem a desigualdade. Isto nos sugere que o conjunto-solução da inequação é a união dos conjuntos A e B:

$$S = A \cup B \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

7) Resolver a inequação $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$

Inicialmente devemos ter $x \neq -1$ e $x \neq 2$. Continue resistindo à tentação de "multiplicar em cruz": este procedimento não funciona com inequações! Observe a resolução:

$\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$ somando $\left[-\left(\dfrac{3}{x-2}\right)\right]$ nos dois membros, obtemos

$\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x-2} \geq 0$

Reduzindo ao mesmo denominador:

$$\frac{(x-2)-3(x+1)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{x-2-3x-3}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{-2x-5}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

Quando um quociente de números reais é maior do que ou igual à zero? Quando numerador e denominador são ambos positivos ou são ambos negativos. Além disso, o numerador pode ser nulo (o denominador não pode!). Note também que não é conveniente realizar as operações do denominador. Vamos analisar os dois casos, como no exemplo 4:

i) $-2x-5\geq 0$ e $(x+1)\cdot(x-2)>0$

A solução da primeira inequação é $x\leq -\dfrac{5}{2}$, ou $B=\left]-\infty,-\dfrac{5}{2}\right]$; pela Obs. 40, a solução da inequação $(x+1)\cdot(x-2)>0$ é o conjunto

$$A=]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[\,.$$

Assim, os valores de x que satisfazem simultaneamente as duas inequações estão na intersecção dos conjuntos A e B. Veja na reta:

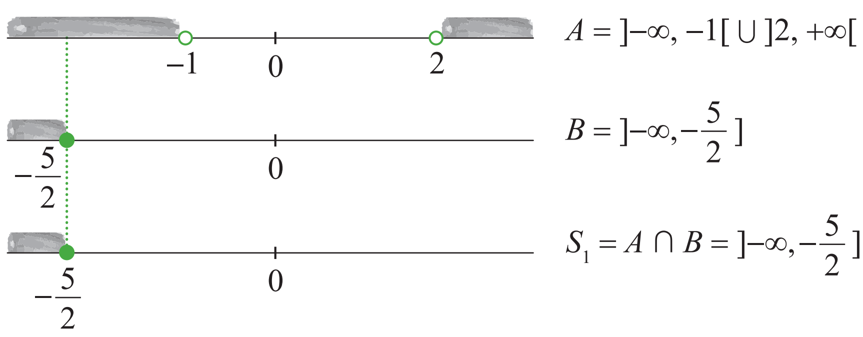


Figura 2.7

Vamos analisar o segundo caso.

ii) $-2x-5\leq 0$ e $(x+1)\cdot(x-2)>0$

Análogo ao que foi feito para (i), a solução da primeira inequação é

$x\geq -\dfrac{5}{2}$, ou $B=\left[-\dfrac{5}{2},+\infty\right[$.

Pela Obs. 40 a solução da inequação $(x+1)(x-2)<0$ é $A=]-1,2[$.

Analisando o conjunto dos valores de x que satisfazem simultaneamente as condições, temos:

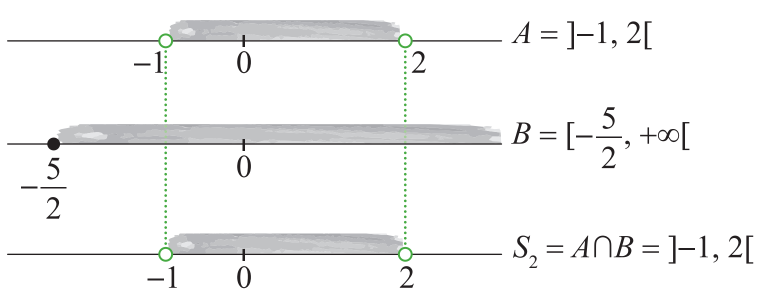


Figura 2.8

O caso (i) nos forneceu o conjunto $S_1 = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ e o caso (ii) nos forneceu o conjunto $S_2 =]-1, 2[$. Então concluímos que o conjunto-solução da inequação será $S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]-1, 2\right[$. Observe que os valores "proibidos" $x = -1$ e $x = 2$ não pertencem ao conjunto solução.

8) Resolver a inequação: $|x+2| < 4$

Temos agora uma inequação que envolve módulo. De acordo com a idéia geométrica do módulo, procuramos os pontos x cuja distância até -2 é menor do que 4, ou seja, os valores de x que satisfazem simultaneamente as inequações $x+2<4$ e $x+2>-4$. A PM6 nos informa que: "Se $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $|x| < a$, então $-a < x < a$". Como $x+2 \in \mathbb{R}$ e $4 \in \mathbb{R}_+$, podemos concluir que $-4 < x+2 < 4$. Temos aqui duas escolhas: podemos resolver diretamente, usando as propriedades da relação de ordem, ou podemos resolver as duas inequações separadamente e fazer a intersecção das soluções parciais.

Primeiro modo:

$-4 < x+2 < 4$ somando (-2) em todos os membros, temos

$$(-4)+(-2) < x+2+(-2) < 4+(-2)$$

$$-6 < x < 2$$

Logo, a solução é $S =]-6, 2[$.

Segundo modo:

Separando em duas inequações:

a) $-4 < x+2$, de onde obtemos $x > -6$, ou $S_1 =]-6, +\infty[$ e

b) $x+2 < 4$, de onde obtemos $x < 2$, ou $S_2 =]-6, 2[$.

A solução será a intersecção $S = S_1 \cap S_2 =]-6, 2[$.

9) Resolver a inequação $|3x+1| > 1$

Também neste caso temos uma propriedade que nos auxilia, a **PM7**:

"Se $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ e $|x| > a$, então $x > a$ ou $x < -a$".

Como $(3x+1)\in\mathbb{R}$, $1\in\mathbb{R}_+$ e $|3x+1|>1$, concluímos que $3x+1>1$ ou $3x+1<-1$. São estes os dois casos que vamos analisar:

a) $3x+1>1$ tem como solução $B=]0,+\infty[$.

b) $3x+1<-1$ tem solução $A=\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[$.

A solução é a união das soluções parciais, porque neste caso estamos procurando os valores de x que satisfazem pelo menos uma das duas inequações: $3x+1>1$ ou $3x+1<-1$. Portanto a solução da inequação é: $S=A\cup B=\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

Observação 41. Nos exemplos 8 e 9 aprendemos como resolver inequações do tipo $|E|>K$ e $|E|<K$, quando E é uma expressão do tipo $ax+b$ e K é um número real positivo. No caso da expressão quadrática ax^2+bx+c, o procedimento é análogo:

1º) para $|ax^2+bx+c|<k$, utilizamos a PM6 e fazemos $-k<ax^2+bx+c<k$. Neste caso temos que resolver as duas inequações, $-k<ax^2+bx+c$ e $ax^2+bx+c<k$; não podemos resolver diretamente. Para cada inequação, aplicamos o resumo da Obs. 40 e sua solução será a intersecção das soluções parciais.

2º) para $|ax^2+bx+c|>k$ utilizamos a PM7 e fazemos $ax^2+bx+c>k$ ou $ax^2+bx+c<-k$.

Também utilizamos a Obs. 40 e a solução da inequação será a união das soluções parciais.

Exemplo:

10) Resolver a inequação $|x^2+x-2|<\frac{1}{2}$

Pela Obs. 41 fazemos $-\frac{1}{2}<x^2+x-2<\frac{1}{2}$, e resolvemos as duas inequações.

i) $-\frac{1}{2}<x^2+x-2$ ou $x^2+x-2>-\frac{1}{2}$

$$x^2+x-2+\frac{1}{2}>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x^2+2x-4+1}{2}>0$$

Como $2>0$, temos $2x^2+2x-3>0$ (veja exemplo 7).

As raízes da equação $2x^2+2x-3=0$ são

$$u=\frac{-1-\sqrt{7}}{2} \quad \text{e} \quad v=\frac{-1+\sqrt{7}}{2};$$

pela Obs. 40, a solução parcial é

$$S_1=\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{-1+\sqrt{7}}{2},+\infty\right[.$$

ii) $x^2+x-2<\dfrac{1}{2}$

$$x^2+x-2-\frac{1}{2}<0$$

$$2x^2+2x-5<0 \qquad \text{(veja exemplo 6)}$$

As raízes da equação $2x^2+2x-5=0$ são

$$u=\frac{-1-\sqrt{11}}{2} \quad \text{e} \quad v=\frac{-1+\sqrt{11}}{2};$$

a solução parcial é

$$S_1=\left]\frac{-1-\sqrt{11}}{2},\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right[.$$

A solução da inequação será a intersecção das soluções parciais; para melhor visualização na reta chamaremos

$$a_1=\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\ a_2=\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\ b_1=\frac{-1-\sqrt{11}}{2},\ b_2=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$$

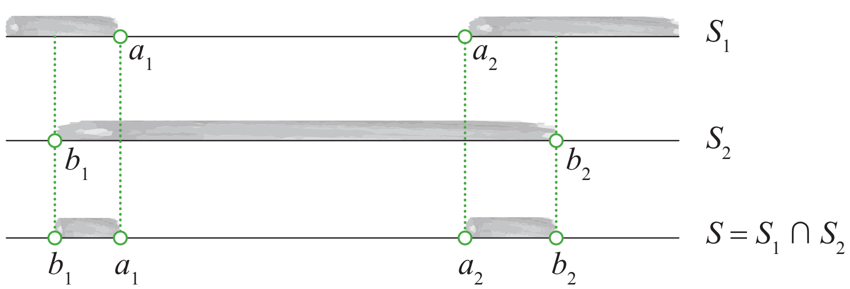


Figura 2.9

$$S=S_1\cap S_2=\left]\frac{-1-\sqrt{11}}{2},\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right[.$$

Tarefa

Resolva como exercício: $\left|x^2+2x-8\right|>\dfrac{1}{3}$.

Resposta:

$$S=\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{28}}{3}\right[\cup\left]\frac{-1-\sqrt{22}}{3},\frac{-1+\sqrt{22}}{3}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{28}}{3},+\infty\right[$$

Exemplos:

11) Resolver a inequação $|x+4|\le|2x-6|$

Para resolver esta inequação, utilizamos inicialmente a definição de módulo:

Seja $a\in\mathbb{R}$; indicamos por $|a|$ o módulo (ou valor absoluto) de a, definido por:

$$|a|=\begin{cases} a \text{ se } a\ge 0\\ -a \text{ se } a>0\end{cases}$$

Como $x+4$ e $2x-6$ são números reais, podemos escrever:

$$|x+4|=\begin{cases} x+4 \text{ se } x+4\ge 0\\ -(x+4) \text{ se } x+4<0\end{cases}$$

$$|2x-6|=\begin{cases} 2x-6 \text{ se } 2x-6\ge 0\\ -(2x-6) \text{ se } 2x-6<0\end{cases}$$

Ou ainda:

$$|x+4|=\begin{cases} x+4 \text{ se } x\ge -4\\ -x-4 \text{ se } x<-4\end{cases}$$

$$|2x-6|=\begin{cases} 2x-6 \text{ se } x\ge 3\\ -2x+6 \text{ se } x<3\end{cases}$$

Observe que temos dois valores que são decisivos em nossa análise: $x=-4$ e $x=3$; vamos chamar estes valores de "marcadores". À medida que x percorre a reta e passa pelos marcadores, obtemos as soluções parciais de nossa inequação. Para ilustrar este fato, vamos colocá-lo em um quadro; a reta superior representa a reta e cada coluna, a partir da segunda, representa um intervalo entre os marcadores:

x	$x < -4$ -4	$-4 \le x < 3$ 3	$3 \le x$
$\|2x-6\|$	$-2x+6$	$-2x+6$	$2x-6$
$\|x+4\|$	$-x-4$	$x+4$	$x+4$
$\|x-4\| \le \|2x-6\|$ (resolução)	$-x-4 \le -2x+6$ $x \le 10$	$x+4 \le -2x+6$ $x \le \frac{2}{3}$	$x+4 \le 2x-6$ $x \ge 10$
Solução parcial	$x < -4$ e $x \le 10$	$-4 \le x < 3$ e $x \le \frac{2}{3}$	$x \ge 3$ e $x \ge 10$
Conjunto	$]-\infty, -4[$	$[-4, \frac{2}{3}]$	$[10, +\infty[$

Nas duas primeiras linhas temos a situação de $|2x-6|$ e $|x+4|$ em relação aos marcadores.

Na 2ª coluna, quando $x < -4$, temos

$$|2x-6| = -2x+6 \text{ e } |x+4| = -x-4,$$

resultando na inequação $-x-4 \le -2x+6$, cuja solução é $]-\infty, -4[$, dentro do intervalo considerado.

Na 3ª coluna, para $-4 \le x < 3$, temos

$|2x-6| = -2x+6$ e $|x+4| = x+4$;

a inequação é $x+4 \le -2x+6$ e sua solução é $\left[-4, \frac{2}{3}\right]$ no intervalo considerado.

Na 4ª coluna, para $x \ge 3$, $|2x-6| = 2x-6$ e $|x+4| = x+4$; a inequação é $x+4 \le 2x-6$ e sua solução é $[10, +\infty[$, no intervalo considerado.

A solução da inequação será a união dos conjuntos obtidos como soluções parciais, pois para todo número real x tem-se $x < -4$, $-4 \le x < 3$ ou $x \ge 3$:

$$S =]-\infty, -4[\cup \left[-4, \frac{2}{3}\right] \cup [10, +\infty[= \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [10, +\infty[.$$

12) Resolver a inequação $5<|x-2|<10$

Para resolver, podemos separar em duas inequações: $5<|x-2|$ e $|x-2|<10$. Note que estamos procurando valores de x que satisfaçam a ambas, ao mesmo tempo. Geometricamente, buscamos os pontos x cuja distância a 2 está entre 5 e 10. Vamos resolvê-las:

i) $5<|x-2|$

Como no exemplo 9, fazemos $x-2>5$ *ou* $x-2<-5$.

- De $x-2>5$, temos $x>7$ e o conjunto-solução é $B=]7,+\infty[$.
- De $x-2<-5$, temos $x<-3$ e o conjunto-solução é $A=]-\infty,-3[$.

A solução de $5<|x-2|$é, portanto,$S_1=A\cup B=]-\infty,-3[\cup]7,+\infty[$.

ii) $|x-2|<10$

Como no exemplo 8, podemos fazer $-10<x-2<10$. Somando 2 a ambos os termos, obtemos $-8<x<12$. A solução é $S_2=]-8,12[$.

Como os valores de x devem satisfazer (i) e (ii) simultaneamente, devemos fazer a intersecção das soluções parciais. A solução é:

$$S=S_1\cup S_2=\left(]-\infty,-3[\cup]7,+\infty[\right)\cap]-8,12[=]-8,-3[\cup]7,12[.$$

Exercícios propostos

Resolver as inequações:

37) $\dfrac{6x-4}{5}<\dfrac{4x-1}{3}$

Resp. $S=\left]-\dfrac{7}{2},+\infty\right[$

38) $2x-5\leq x-1\leq 3x+2$

Resp. $S=\left[-\dfrac{3}{2},4\right]$

39) $(5x-2)\cdot(2x-8)>0$

Resp. $S=\left]-\infty,\dfrac{2}{5}\right[\cup]4,+\infty[$

40) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \leq 0$

Resp. $S = \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{3}\right]$

41) $\dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{5}{2x-1}$

Resp. $S = [-7,-1[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

42) $|6-2x| < 1000$

Resp. $S =]-497, 503[$

43) $|9-2x| \geq |4x|$

Resp. $S = \left[-\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

44) $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$

Resp. $S = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{11}{7}\right] \cup [3, +\infty[$

45) $|2x-3| + |x+4| \leq |3x|$

Resp. $S = \left]-\infty, -\dfrac{7}{2}\right]$

46) $|x^2 + 3x + 3| \leq 5$

Resp. $S = \left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$

47) $|x| + 3x - 2 \leq |2x+1|$

Resp. $S = \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

2.7.4 Equações irracionais

Equações irracionais são aquelas que envolvem radicais. O procedimento de resolução pode variar, mas, de modo geral, nos interessa chegar a uma equação conhecida, de primeiro ou segundo grau. Também devemos observar as limitações do radicando quando o índice é par, uma vez que $\sqrt[2n]{a}$ é um número real se e somente se $a \geq 0$. Esta condição nos leva às inequações. Faremos alguns exemplos e discutiremos certos detalhes interessantes de inequações deste tipo.

Exemplos:

1) Resolver a equação $x-1=\sqrt{x+11}$

Observe que, para resolver a equação, o primeiro passo é "elevar os dois membros ao quadrado", a fim de eliminarmos o radical. No entanto, este procedimento de "elevar ao quadrado" não nos dá uma equação equivalente à original. Até agora, todos os nossos procedimentos de resolução resultaram em equações equivalentes, ou seja, se fizéssemos o processo inverso, chegaríamos à equação original (confira na resolução de primeiro grau). Note que: se $a=b$, então $a^2=b^2$, mas a recíproca deste fato não é verdadeira. Basta observar que $(-2)^2=4=2^2$, mas $-2 \neq 2$. Por este motivo, ao elevarmos ao quadrado os dois membros, "perdemos" a equação original; este fato pode nos levar a soluções "fantasmas", ou seja, valores que não são soluções da equação original. Para evitar isto, basta observar um detalhe: na equação aparece a raiz quadrada *positiva* de um número (veja Obs. 15). Então, para valer a igualdade, o número à esquerda tem que ser positivo (é claro que podemos incluir o zero). Assim, além da condição $a \geq 0$ para $\sqrt{a}$, devemos acrescentar mais uma condição (ou restrição) à equação. Vamos agora resolvê-la:

Condições: $x+1 \geq 11$ e $x-1 \geq 0$, isto é, $x \geq -11$ e $x \geq 1$

$x-1=\sqrt{x+11}$

$(x-1)^2=(\sqrt{x+11})^2$

$x^2-2x+1=x+11$

$x^2-2x-x+1-11=0$

$x^2-3x-10=0$; as soluções são $x=5$ e $x=-2$.

$x=5$ e $x=-2$ satisfazem a condição $x \geq -11$, mas $x=-2$ não satisfaz a segunda condição $x \geq 1$. Assim, $x=-2$ não é solução e a equação tem uma única solução $x=5$; o conjunto solução é $S=\{5\}$.

2) Resolver a equação $\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{1-x}, x \neq 0$

As condições iniciais são $1-\frac{1}{x} \geq 0$ e $1-x \geq 0$. Resolvendo as inequações $1-\frac{1}{x} \geq 0$ e $1-x \geq 0$, teremos a solução $K=]-\infty,1]$, o que significa que os valores encontrados devem pertencer ao conjunto K (Faça os detalhes desta resolução).

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$1-\frac{1}{x}=1-x$$
$$-\frac{1}{x}=-x$$
$$\frac{1}{x}=x$$

$x^2=1$; logo, as soluções possíveis são $x=1$ ou $x=-1$.

Como as soluções são $x=1$ e $x=-1$ e ambas satisfazem as condições iniciais, ou seja, pertencem ao conjunto $K=]-\infty,1]$, o conjunto solução da equação é $S=\{-1,1\}$.

3) Resolver a equação $\sqrt{5+\sqrt{1+5x}}=3$.

As condições iniciais são $1+5x \geq 0$ e $5+\sqrt{1+5x} \geq 0$. Resolvendo a inequação $1+5x \geq 0$, encontramos o conjunto $\left]-\frac{1}{5},+\infty\right[$. Para valores de x neste conjunto a expressão $5+\sqrt{1+5x}$ é sempre positiva. Portanto os valores encontrados devem pertencer ao conjunto $K=\left]-\frac{1}{5},+\infty\right[$.

Elevando ambos os membros da equação dada ao quadrado:

$$5+\sqrt{1+5x}=9 \qquad +(-5)$$
$$\sqrt{1+5x}=4$$

Observe que nos dois membros os números são positivos e $1+5x \geq 0$ já foi considerado. Devemos estar sempre atentos!

Elevando novamente ao quadrado:

$1+5x=16$

$5x = 15$; logo, a solução possível é $x = 3$.

Como $3 \in K$, $x=3$ é solução e $S=\{3\}$.

Exercícios propostos

Resolva as equações:

48) $2\sqrt{5x-1}=3\sqrt{3x-2}$

49) $\sqrt{5x-6}=2+\sqrt{5x-3}$

50) $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}$, a e b números reais.

Capítulo 3

Relações

Capítulo 3
Relações

O objetivo deste capítulo é estudar o conceito de relação e suas propriedades. Faremos o estudo das relações de equivalência, das relações de ordem e das relações no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Introdução

Neste capítulo você vai estudar relações de modo geral e os tipos especiais de relações. Este assunto, assim como Conjuntos no Capítulo 1, será importante no desenvolvimento de conceitos matemáticos como funções e estruturas algébricas. No geral, utilizamos as relações para estudar objetos que podem ser números, conjuntos, funções etc. Vamos estudar dois tipos de relações: as relações de equivalência e as relações de ordem. Um terceiro tipo de relação será trabalhado no capítulo seguinte: as funções. Em particular, as relações de equivalência, classes de equivalência e conjuntos quociente são generalizações de situações que estamos habituados a utilizar desde os primeiros anos da educação básica. Também a relação de ordem generaliza a idéia de "$\leq$" nos conjuntos numéricos para conjuntos quaisquer. O estudo das relações no plano prepara o caminho para o estudo do próximo capítulo. Não se assuste se este for um capítulo muito "algébrico": os conceitos estudados aqui serão ferramentas úteis em diversas disciplinas do curso.

O conceito de relação

Utilizamos muito a idéia de relação no cotidiano:...é menor do que..., ...é paralela a..., ...é divisor de..., ...é irmão de... etc. Podemos começar estabelecendo que uma relação é uma associação entre dois objetos (como já dissemos, podem ser números, conjuntos, matrizes, etc.). Esta associação pode estar definida por uma lei (regra) ou não. Quando a associação é estabelecida por uma lei é fácil verificar se dois objetos estão ou não estão relacionados. Por exemplo, “menor do que” (denotado $<$) é uma relação definida no conjunto dos números naturais: 2 está relacionado com 5 pois $2<5$, mas 3 não está relacionado com 1 pois 3 não é menor do que 1. Outros pares que estão relacionados pela relação “$<$” são 7 e 24, 34 e 109, 12345 e 23456, etc. Os dois objetos envolvidos numa relação são elementos de dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. No exemplo da relação “$<$” vimos que 3 não está relacionado com 1, mas é claro que 1 está relacionado com 3 pois $1<3$. Assim, é importante estabelecer uma ordem no par de objetos (ou no par de conjuntos) que estamos associando. Lembre-se que definimos pares ordenados no final do Capítulo 1. Note também que dois números num par ordenado já satisfazem uma condição (um é o primeiro e outro, o segundo). Antes de definirmos formalmente uma relação, vamos dar alguns exemplos:

1) Relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$: dados dois números naturais a e b, dizemos que a está relacionado com b quando a é divisor de b. Exemplos de pares relacionados: 2 e 46, 7 e 49, 13 e 65, etc.. (para relembrar a divisibilidade, veja seu material de Fundamentos I).

2) Relação de inclusão em $P(\mathbb{N})$: dados dois subconjuntos A e B de $\mathbb{N}$, dizemos que A está relacionado com B quando $A \subset B$. Exemplos de conjuntos relacionados: $\{1\}$ e $\{1,2,3\}$, $\{2,4,6\}$ e $\{x \in \mathbb{N} / x \text{ é par}\}$, etc.

3) Dados os conjuntos $A=\{0,1,3\}$ e $B=\{2,5\}$, associamos 0 a 2, 3 a 5 e 0 a 5. Isto significa que a relação é dada pelos pares $(0,2),(3,5)$ e $(0,5)$. Note que neste caso a relação foi estabelecida sem uma lei ou regra.

Definição. Sejam A e B conjuntos. Uma relação R de A em B é um subconjunto de $A \times B$, ou seja, $R \subset A \times B$.

Observação 1. Quando A é igual a B, dizemos que R é uma *relação em* A (ou em B), ou seja, R é um subconjunto de $A \times A$ (ou $B \times B$).

Observação 2. Pela definição, uma relação é uma certa “lista” de pares ordenados, não ficando explícito o motivo (lei) de sua escolha. Por exemplo:

$$R_1 = \{(1,4),(21,87),(55,12)\} \text{ e } R_2 = \{(0,1),(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$$

são relações em $\mathbb{N}$, pois são subconjuntos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. No entanto, você seria capaz de explicar a "lei" segundo a qual os pares estão relacionados, para cada uma das relações? No caso de R_1, não há lei explícita; só podemos afirmar que 1 está relacionado com 4, 21 está relacionado com 87 e 55 está relacionado com 12. No caso de R_2, podemos dizer que R_2 é o conjunto

$$R_2 = \{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, x \text{ e } y \text{ são algarismos tais que } y = 2x+1\},$$

ou seja, R_2 é o conjunto de pares (x,y) que satisfazem a condição "x e y são algarismos tais que $y = 2x+1$".

Observação 3. Note que uma relação envolve dois conjuntos (que podem ser iguais ou não) e certa maneira de relacioná-los (que pode ser uma lei ou não). Quando uma relação é estabelecida por meio de uma lei, ou seja, por meio de uma *sentença aberta* (como $a\,|\,b$, $a = 2b+1$, $r\,//\,s$, etc.), a relação é o seu conjunto verdade. Por abuso de linguagem chamamos de *relação* a *sentença aberta* usada para defini-la. Por exemplo, a relação de divisibilidade do exemplo 1: a sentença aberta $a\,|\,b$ estabelece a relação em $\mathbb{N}$; a relação de fato é o conjunto de pares ordenados $R = \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, a\,|\,b\}$, mas, por abuso de linguagem, dizemos "a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$".

Notação. Sejam A e B conjuntos e R uma relação de A em B. Pela definição, um elemento de R é da forma (a,b) com $a\in\mathrm{A}$ e $b\in\mathrm{B}$. Usamos a notação $a\mathrm{R}b$ para indicar que $(a,b)\in R$ (ou seja, para indicar que a está relacionado com b).

Observação 4. Usaremos as duas notações: $a\mathrm{R}b$ e $(a,b)\in R$. Não se assuste se você encontrar as duas notações em um mesmo enunciado: a intenção é que você se habitue às duas.

Exemplos:

1) $\mathrm{R}\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathrm{R} = \{(a,b)/\, a \text{ é múltiplo de } b\}$; elementos relacionados: $23R1$, $18R3$, $18R9$, entre outros. Neste caso o conjunto R possui uma infinidade de elementos.

2) $A = \{2,3,4,19\}$, $B = \{1,3,5,12\}$, $R\subset A\times B$, $R = \{(x,y)/\, x < y\}$; os elementos relacionados são: $2R3$, $2R5$, $2R12$, $3R5$, $3R12$,

$4R5$, $4R12$. R é o conjunto finito expresso por:

$$R = \{(2,3),(2,5),(2,12),(3,5),(3,12),(4,5),(4,12)\}.$$

3.1 Domínio, contradomínio e imagem de uma relação

Definição. Dada uma relação R de A em B, chama-se domínio de R ao conjunto dos x que pertencem a A, tais que exista y pertencente a B e $(x,y) \in R$. É o conjunto dos primeiros elementos dos pares que pertencem a R. Dá-se o nome de contradomínio de R ao conjunto B.

Chama-se *imagem* da relação R de A em B ao conjunto dos y que pertencem a B tais que existe x pertencente a A e $(x,y) \in R$. É o conjunto dos segundos elementos dos pares que pertencem a R.

Notação. Denota-se o domínio de R por $D(R)$, o contradomínio de R por $C(R)$ e a imagem de R por $I(R)$.

Observação 5. $D(R)$ é subconjunto de A e $I(R)$ é subconjunto de B.

Exemplos:

3) No exemplo 4, tem-se $D(R) = \{2,3,4\}$, $C(R) = B = \{1,3,5,12\}$ e $I(R) = \{3,5,12\}$.

4) Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,5,6\}$ e a relação R definida pela sentença "$mdc(x,y) = 2$". Então $R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,6)\}$ e $D(R) = \{2,4\}$, $C(R) = \{2,3,4,5,6\} = B$ e $I(R) = \{2,4,6\}$.

3.2 Relação inversa

Definição. Dada uma relação R de A em B, chama-se relação inversa de R e denota-se R^{-1} ao conjunto dos pares $(y,x) \in B \times A$ tais que $(x,y) \in R$.

Simbolicamente, $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \ / \ (x,y) \in R\}$.

Exemplo:

5) Considere os conjuntos $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,2\}$, e a relação R de A em B definida por "$x \geq y$", isto é,

$$R=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}.$$

A relação inversa de R é um subconjunto de $B \times A$ dado por $R^{-1}=\{(1,1),(1,2),(2,2)(1,3),(2,3)\}$. Note que R é um subconjunto de $A \times B$ e R^{-1} é subconjunto de $B \times A$.

Exercícios propostos

1) Explicite a relação R de A em B, nos casos:

a) $A=\{1,2,3,-5\}$; $B=\{-1,-3,5,7,9\}$, $R=\{(a,b)/\, a=-b\}$

b) $A=\{x \in \mathbb{N} /\, x \text{ é divisor de } 80\}$; $B=\{x \in \mathbb{Z} /\, x \text{ é divisor de } 56\}$,

$R=\{(a,b) \in A \times B /\, b \text{ é divisor de } a\}$

2) Se $A=\{a,b,c\}$ e $B=\{0,1\}$, quantas relações de A em B podemos construir? Generalizar para A com n elementos e B com m elementos.

3.3 Propriedades das relações

As relações mais significativas em matemática são relações em um conjunto A que satisfazem determinadas propriedades. Faremos um estudo dessas propriedades para em seguida estabelecer os tipos especiais de relações. Em todas as propriedades que estudaremos a seguir estaremos considerando A um conjunto e R uma relação em A, ou seja, $R \subset A \times A$.

Propriedade Reflexiva: Dizemos que uma relação R em A é reflexiva quando aRa para todo $a \in A$.

Exemplos:

6) A relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é reflexiva pois *todo* número natural é divisor dele próprio, ou seja, aRa para *todo* número natural a.

7) Seja U um conjunto e considere a relação definida em $P(U)$ (conjunto das partes de U) por $X\mathrm{R}Y$ quando $X \subset Y$. Esta é uma relação reflexiva, pois sabemos que todo conjunto é subconjunto de si próprio, ou seja, $X \subset X$ para todo $X \in \mathrm{P(U)}$.

Propriedade simétrica: Dizemos que uma relação R em A é simétrica quando, para quaisquer a e b em A, se aRb então bRa.

Exemplo:

8) A relação de igualdade "$=$" no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é uma relação simétrica, pois para quaisquer a e b reais, se $a = b$, então $b = a$. Note que não estamos afirmando que $a = b$ **para quaisquer** $\boldsymbol{a}$ **e** $\boldsymbol{b}$ **reais!** O que afirmamos é: dados dois números reais quaisquer, **se ocorre** $a = b$, então **também ocorre** $b = a$.

Propriedade transitiva: Dizemos que uma relação R em A é transitiva quando, para quaisquer a,b e c em A, se aRb e bRc, então aRc. Em outras palavras, a relação é transitiva quando, se a está relacionado com b e também b está relacionado com c, então a está relacionado com c.

Exemplos:

9) A relação "$<$" em $\mathbb{Z}$ é transitiva pois: para quaisquer a,b e c inteiros, se $a < b$ e $b < c$, podemos afirmar que $a < c$. Note que aqui também não estamos afirmando que sempre ocorre $a < b < c$; estamos afirmando que, ***sempre que*** *isso ocorre*, também acontece $a < c$. Em outras palavras, se os pares (a,b) e (b,c) estão na relação, para que a relação seja transitiva deve também conter o par (a,c).

10) A relação do exemplo 10 também é uma relação transitiva, pois se $A \subset B$ e $B \subset C$ tem-se $A \subset C$.

11) Voltemos à relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$, $R = \{(a,b) / a \text{ é divisor de } b\}$. Já vimos que a relação R é reflexiva, pois todos os pares da forma (a,a) pertencem à relação, uma vez que todo número natural é divisor de si mesmo. A relação não é simétrica, pois, por exemplo, $(2,6)$ está na relação (2 é divisor de 6) e o par $(6,2)$ não pertence à relação (pois 6 não é divisor de 2). Observe aqui a importância do

Para refletir: considerando o zero como número natural, este fato também é válido para ele?

quantificador: a existência de um único par para o qual a propriedade falha é suficiente para que a relação não tenha a propriedade. Observemos também que a relação R é transitiva, pois sempre que a é divisor de b e também b é divisor de c, podemos concluir que a é divisor de c. De fato: se a é divisor de b, existe um $x \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot x$. Como também b é divisor de c, existe um $y \in \mathbb{N}$ tal que $c = b \cdot y$. Substituindo $b = a \cdot x$ na última igualdade, temos $c = by = (ax)y = a(xy)$, o que significa que a é divisor de c. Assim, a relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é reflexiva, não é simétrica e é transitiva.

12) A relação "$<$" em $\mathbb{R}$ não é reflexiva, pois os pares (a,a) não pertencem à relação, uma vez que um número não é menor do que ele mesmo. Também não é simétrica, pois se $a < b$, não pode ocorrer também $b < a$. No entanto, a relação é transitiva, como visto no exemplo acima, para $\mathbb{Z}$.

13) Considere a relação $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2),(1,3),(1,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$. Apesar de não termos explícita a "lei" que define a relação, conhecemos todos os seus pares e podemos decidir se R goza das propriedades. Podemos notar que R é reflexiva, pois *todos* os pares da forma (a,a) estão na relação: $(1,1),(2,2),(3,3)$. Notamos também que R não é simétrica, pois $(1,3) \in R$ e $(3,1) \notin R$. Para verificarmos se R é transitiva, devemos inicialmente listar todos os possíveis pares "encadeados" aRb e bRc, e verificar se ocorre aRc. Observemos o seguinte:

$(1,1) \in R$ e $(1,3) \in R$, também $(1,3) \in R$;

$(1,1) \in R$ e $(1,2) \in R$, também $(1,2) \in R$;

$(1,2) \in R$ e $(2,2) \in R$, também $(1,2) \in R$;

$(1,2) \in R$ e $(2,3) \in R$, também $(1,3) \in R$;

$(1,3) \in R$ e $(3,3) \in R$, também $(1,3) \in R$;

$(1,3) \in R$ e $(3,2) \in R$, também $(1,2) \in R$;

$(2,2) \in R$ e $(2,3) \in R$, também $(2,3) \in R$;

$(2,3) \in R$ e $(3,3) \in R$, também $(3,3) \in R$;

$(2,3) \in R$ e $(3,2) \in R$, também $(2,2) \in R$;

$(3,3) \in R$ e $(3,2) \in R$, também $(3,2) \in R$.

Com isto concluímos que, sempre que ocorrer aRb e bRc, também ocorre aRc. Logo, a relação é transitiva.

14) $A=\{x,y,z,t\}, R=\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x),(t,z),(z,x)\}$
Observe que aqui os nossos objetos são x,y,z e t e a nossa relação R explicita como eles estão relacionados. A relação não é reflexiva, pois o par (t,t) não pertence à relação. Também não é simétrica, pois (t,z) pertence à relação e (z,t) não pertence. Podemos observar que ela não é transitiva, pois, para os "pares encadeados" $(t,z)\in R$ e $(z,x)\in R$, o par $(t,x)\notin R$.

15) $A=\{4,6\}, R=\{(4,4),(6,6)\}$. É claro que a relação R é reflexiva. Ela é também simétrica? Já vimos que uma relação ***não*** será simétrica se existir $(a,b)\in R$ e $(b,a)\notin R$. Como vemos, isto não ocorre com esta relação: para todos os pares (a,b) da relação, tem-se (b,a) também na relação. O "simétrico" de $(4,4)$ é o próprio $(4,4)$ e o mesmo acontece para o $(6,6)$. Logo, esta relação é simétrica. Será ela transitiva? Para verificar isto, deveríamos listar os "pares encadeados" aRb e bRc, e verificar se ocorre aRc. Mas onde estão os pares encadeados? Para que a relação *não fosse* transitiva, deveríamos encontrar na relação pares (a,b) e (b,c) de modo que (a,c) *não estivesse* na relação. Como podemos ver, não é possível encontrar pares para os quais a propriedade falha. Logo, a relação é transitiva.

Estas propriedades são válidas porque não é possível provar que elas não são válidas. Neste caso dizemos que as propriedades valem por vacuidade. É o mesmo caso do conjunto vazio ser subconjunto de todos os conjuntos.

Observação 7. Considere a relação $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(2,2)\}$. Pergunta: R é reflexiva? Para esta pergunta não há resposta definitiva. Se considerarmos R uma relação no conjunto $A=\{1,2,3\}$, a resposta é *sim*. No entanto, se considerarmos R uma relação em $\mathbb{N}$, a resposta é *não*. Só podemos definir se uma relação R é reflexiva se conhecemos o domínio da relação R.

Exercícios propostos

3) Dê exemplo de uma relação no conjunto dos números naturais que seja reflexiva e transitiva, mas não seja simétrica.

4) Dê exemplo de uma relação no conjunto $A=\{3,6,9,12\}$ que seja simétrica, mas não seja reflexiva nem transitiva.

5) Determine todas as possíveis relações no conjunto $A=\{a,b\}$ $(a\neq b)$; identifique as relações que gozam da pro-

priedade simétrica. Generalize determinando quantas relações são possíveis num conjunto A com n elementos.

6) Considere a seguinte relação em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}:(a,b)R(c,d)$ quando $a+d=b+c$. Mostre que esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva. Observe que o conjunto sobre o qual a relação está definida é $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, ou seja, a relação é um subconjunto de $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ e o par ordenado (a,b) está relacionado com o par ordenado (c,d) quando ocorre $a+d=b+c$. Por exemplo: $(2,6)R(1,5)$, pois $2+5=6+1$.

3.4 Relações de equivalência

Algumas relações gozam das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva simultaneamente, o que as torna particularmente interessantes. Relações deste tipo são utilizadas para construir os conjuntos $\mathbb{Z}$ (exercício 6) e $\mathbb{Q}$, e para construir os conjuntos $\mathbb{Z}_n$, que serão estudados nas disciplinas de Álgebra.

Definição. Uma relação R em um conjunto A é chamada uma *relação de equivalência* se e somente se goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Notação. Uma relação de equivalência pode ser denotada pelo símbolo $\sim$; assim, escrevemos $a\sim b$ ao invés de aRb. Optamos por usar a notação usual aRb, mas você pode encontrar a notação $a\sim b$ em livros da bibliografia.

Exemplos:

16) A relação de igualdade no conjunto dos números reais é uma relação de equivalência, pois é reflexiva ($a=a$ para todo a real), é simétrica (se $a=b$ então $b=a$) e é transitiva (se $a=b$ e $b=c$ então $a=c$).

17) Considere $A=\{1,2,3\}$ e a relação $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. R é uma relação de equivalência, pois goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

18) Ainda no conjunto $A=\{1,2,3\}$, a relação $S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$, não é uma relação de equivalência, pois não é simétrica: $(1,2)\in S$ mas $(2,1)\notin S$.

19) A relação K de paralelismo de retas no plano é uma relação de equivalência. Denotemos por K a relação definida no conjunto das retas do plano: para r e s retas do plano, rKs quando $r//s$. K é reflexiva, pois toda reta é paralela a si própria; é simétrica, pois se r é paralela à s, então s é paralela à r; e é transitiva, pois se r é paralela à s e s é paralela à t, então r é paralela à t.

20) Consideremos o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e R a relação em $\mathbb{Z}$ definida por aRb quando 2 é divisor de $a-b$. Esta é a relação de "congruência módulo 2" já estudada em Fundamentos I. Antes de provarmos que R é uma relação de equivalência, lembremos que para provar que a está relacionado com b, devemos mostrar que 2 é um divisor da diferença $a-b$, ou seja, devemos mostrar que $a-b$ é igual a 2 multiplicado por um número inteiro. Vamos mostrar agora que R é reflexiva, simétrica e transitiva. Esta prova já foi feita em Fundamentos I, mas vamos relembrá-la:

i) R é reflexiva, pois para todo inteiro a temos $a-a=0$ e 2 é divisor de 0 (lembre: $0=2\cdot 0$). Assim, todo inteiro a está relacionado com ele próprio.

ii) R é simétrica pois: se aRb, então 2 é divisor de $a-b$, ou seja, existe um $x\in\mathbb{Z}$ tal que $a\text{-}b=2x$. Como $-(a-b)=-2x$ e $b-a=2(-x)$, isto significa que 2 é divisor da diferença $b-a$, ou seja, bRa.

iii) R é transitiva pois: se aRb e bRc, existem x e y inteiros tais que $a\text{-}b=2x$ e $b\text{-}c=2y$. Adicionando membro a membro as igualdades, temos $(a-b)+(b-x)=2x+2y$ e assim $a-b+b-c=2(x+y)$, ou seja, $a-c=2(x+y)$. Logo, 2 é divisor da diferença $a-c$ e temos aRc.

Exercícios propostos

7) Verifique se são relações de equivalência:

a) Seja A o conjunto de todos os triângulos do plano e R a relação em A definida por xRy quando x é semelhante a y (lembre-se da semelhança de triângulos da Geometria).

b) $A=\{1,2\}$ e $R=\{(1,1),(2,2)\}$

3.5 Classes de equivalência e conjunto quociente

Vamos fazer dois exemplos antes da definição formal:

21) Considere o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e a relação de equivalência (por quê?) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$. Pergunta-se: quais elementos do conjunto A estão relacionados com 1? Observando a relação R, vemos que ela contém os pares $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$ e estes são todos os pares nos quais aparece o elemento 1; isto significa que 1 está relacionado com ele mesmo (é uma relação de equivalência, portanto reflexiva) e com 2. Assim, o conjunto dos elementos que estão relacionados com 1 é $\{1,2\}$ (este conjunto está contido em A). Analogamente, o conjunto dos elementos de A que estão relacionados com 2 é $\{1,2\}$ e o conjunto dos elementos de A que estão relacionados com 3 é $\{3\}$. Observe que 1 e 2 possuem o mesmo conjunto de elementos relacionados! Conseguimos então construir dois conjuntos, $\{1,2\}$ e $\{3\}$, disjuntos, e cuja união é o conjunto A. Estes conjuntos são chamados de "classes de equivalência segundo R"; o conjunto $\{1,2\}$ é a classe de equivalência de 1 (e também de 2) e $\{3\}$ é a classe de equivalência de 3. Ao conjunto formado por todas as possíveis classes de equivalência, ou seja, ao conjunto $\{\{1,2\}\{3\}\}$, damos o nome de "conjunto quociente de A por R".

22) Considere a relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ dada por aRb quando 3 é divisor de $a-b$ (relação de congruência módulo 3). Vamos descobrir a classe de equivalência de alguns elementos. Quais os números inteiros que estão relacionados com 0? Em outras palavras: quais os inteiros a tais que 3 é divisor de $a-0$? Como $a-0=a$, o conjunto dos elementos relacionados com o 0 (a classe de equivalência do 0) será formado por todos os números inteiros múltiplos de 3; denotamos a classe de equivalência do 0 por $[0]$: $[0] = \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\} = \{a \in \mathbb{Z} \,/\, a \text{ é múltiplo de } 3\}$.

Qual seria a classe de equivalência do 1? Devemos procurar quais inteiros a satisfazem a relação "3 é divisor de $a-1$"; teremos então os inteiros a tais que 3 é divisor de $a-1$, ou seja, $a-1=3x$ para algum x inteiro. Então $a=3x+1$ e teremos que os inteiros a são aqueles que na divisão por 3 têm resto 1. Assim, a classe de equivalência do 1 é o conjunto $[1]=\{\ldots-5,-2,1,4,7,\ldots\}$. Analogamente, a classe de equivalência do 2 é o conjunto $[2]=\{\ldots-7,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$. Ao procurarmos as classes de equivalência de outros inteiros, veremos que encontraremos um destes três conjuntos: $[0],[1]$ ou $[2]$. Por exemplo: qual a classe de equivalência de -8? Devemos procurar os inteiros a tais que 3 é divisor de $a-(-8)$, ou seja, 3 é divisor de $a+8$; são eles: $\{\ldots-8,-5,-2,1,4,7,\ldots\}=[-8]=[1]$. Observando também o exemplo 22, vemos que se um elemento está numa classe de equivalência de algum outro elemento, a classe de equivalência dele é a mesma classe deste outro. Assim, o conjunto quociente formado por todas as classes de equivalência segundo a relação R será $\{[0],[1],[2]\}$. Neste caso particular, a notação para este conjunto quociente será $\mathbb{Z}_3=\{[0],[1],[2]\}$. Os três conjuntos que são elementos do conjunto quociente, $[0],[1],[2]$, são disjuntos dois a dois e sua união é $\mathbb{Z}$. Isto significa que todo número inteiro pertence a um e somente um dos conjuntos $[0],[1]$ ou $[2]$. Como saber a qual destes conjuntos pertence um número inteiro? Basta sabermos qual o resto da divisão euclidiana deste inteiro por 3. Por exemplo: qual a classe de equivalência de – 50? Pelo algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$ (de novo, lembre-se de Fundamentos I), existem $q=(-17)$ e $r=1$ tal que $-50=3\cdot(-17)+1$, ou seja, $(-50)-1=3\cdot(-17)$, o que significa que a diferença $(-50)-1$ é um múltiplo de 3. Logo, (-50) está relacionado com $r=1$ (seu resto na divisão por 3) e pertence ao conjunto $[1]$.

Definição. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A e $a\in A$. A classe de equivalência de a segundo R é o conjunto $[a]=\{x\in A \,/\, aRx\}$ de todos os elementos de A que estão relacionados com a. O conjunto das classes de equivalência determinadas sobre A pela relação de equivalência R é chamado conjunto quociente de A por R e denotado A/R.

Observação 8. O conjunto quociente pode ser explicitado como $A/R=\{[a]\,/\,a\in A\}$, no qual $[a]$ é a classe de equivalência de a, quando $a\in A$.

Propriedades das classes de equivalência

As classes de equivalência determinadas por uma relação de equivalência R num conjunto A são subconjuntos de A que gozam de certas propriedades, algumas já comentadas nos exemplos 22 e 23. No que segue, estaremos considerando R uma relação de equivalência num conjunto A e $[a]$ a classe de equivalência do elemento a.

P1) *Para todo* $a \in A$ tem-se $a \in [a]$

Em outras palavras, todo elemento de A pertence à sua classe de equivalência. Isto acontece pois a relação é reflexiva: aRa para todo $a \in A$ (um elemento a está sempre relacionado consigo mesmo; logo, faz parte do conjunto dos elementos relacionados a si). Uma conseqüência desta propriedade é que toda classe de equivalência é um conjunto não-vazio.

P2) aRb se e somente se $[a]=[b]$.

Esta propriedade corresponde ao que foi comentado no exemplo 23: se um elemento pertence à classe de equivalência de outro elemento, a classe de equivalência dele é a mesma classe de equivalência do outro. Vamos provar este fato: como é uma afirmação do tipo "se e somente se", faremos a prova em duas partes:

$(\Rightarrow)$ **Hipótese:** aRb

Tese: $[a]=[b]$

Devemos mostrar uma igualdade de conjuntos (veja o capítulo 1: $X=Y$ se e somente se $X \subset Y$ e $Y \subset X$), ou seja, que todo elemento de $[a]$ pertence a $[b]$ e que todo elemento de $[b]$ pertence a $[a]$. Seja $x \in [a]$. Como $[a]$ é o conjunto dos elementos que estão relacionados com a, podemos afirmar que xRa (como R é simétrica, poderíamos também escrever aRx). Por hipótese, temos aRb e como R é transitiva, de xRa e aRb, temos xRb, ou seja, x está relacionado com b. Logo, $x \in [b]$ e $[a] \subset [b]$ (I). Analogamente, se $y \in [b]$ então y está relacionado com b, ou seja yRb. Por hipótese, temos aRb, e como R é simétrica, temos bRa. Pela propriedade transitiva, se yRb e bRa, então yRa, ou seja, $y \in [a]$ e $[b] \subset [a]$ (II). De (I) e (II), temos que $[a]=[b]$.

$(\Leftarrow)$ **Hipótese:** $[a]=[b]$.

Tese: aRb

Pela P1), sabemos que $a \in [a]$; como por hipótese $[a]=[b]$, temos que $a \in [b]$. Isto significa que aRb, como queríamos demonstrar.

∎

P3) *Se* $x \in [a]$ *e* $y \in [a]$, *então* x *está relacionado com* y (e ambos estão relacionados com a).

Esta propriedade é uma conseqüência da P2); sua prova será deixada como exercício (lembre-se de separar hipótese e tese.

Hipótese: $x \in [a]$ *e* $y \in [a]$.

Tese: xRy. Use o fato de R ser uma relação de equivalência).

P4) *Se* $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ *então* $[a] = [b]$.

Esta propriedade nos diz que se duas classes de equivalência têm elemento comum, então elas são o mesmo conjunto. Assim, só pode ocorrer uma de duas situações: ou duas classes de equivalência são iguais, ou são disjuntas. Veja novamente os exemplos 22 e 23. Também esta propriedade é uma conseqüência da P2); vamos prová-la:

Hipótese: $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ (existe pelo menos um elemento pertencente às duas classes)

Tese: $[a] = [b]$

Pela P2), para provar que $[a] = [b]$, basta mostrarmos que aRb

Por hipótese, existe um elemento $x \in [a] \cap [b]$, ou seja, $x \in [a]$ e $x \in [b]$. Então xRa e xRb. Como R é simétrica, temos aRx e xRb. Pela propriedade transitiva da relação R, temos aRb e podemos concluir que $[a] = [b]$.

Em outras palavras, duas classes de equivalência diferentes não têm elementos em comum.

■

P5) A união de todas as classes de equivalência (determinadas pela relação R em A) é o conjunto A, ou seja, $\bigcup_{a \in A} [a] = A$.

Nesta propriedade está presente a seguinte idéia de "partição de um conjunto": *Dado um conjunto qualquer* S *(*S *não-vazio), uma partição de* S *é um conjunto de subconjuntos não-vazios de* S*, dois a dois disjuntos, cuja união é* S. Vimos no exemplo 22: a relação de equivalência $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ em $A = \{1,2,3\}$ determina duas classes de equivalência: $\{1,2\}$ e $\{3\}$. Estas classes são disjuntas, pois $\{1,2\} \cap \{3\} = \varnothing$ e sua união é

$\{1,2\} \cup \{3\} = \{1,2,3\} = A$. Estas classes constituem uma partição de A. Também no exemplo 23, as classes $[0],[1]$ e $[2]$ são disjuntas duas a duas (isto significa $[0]\cap[1]=\varnothing$, $[0]\cap[2]=\varnothing$ e $[1]\cap[2]=\varnothing$) e sua união resulta no conjunto $\mathbb{Z}$. Note que o conjunto quociente é aquele cujos elementos são as classes de equivalência, isto é, seus elementos são os conjuntos que constituem a partição de A; podemos dizer então que o *conjunto quociente é uma partição de* A, ou seja, podemos dizer que toda relação de equivalência num conjunto A determina uma partição de A. A recíproca desta afirmação também é verdadeira: dada uma partição do conjunto A, podemos associar a ela uma relação de equivalência; os conjuntos da partição serão as classes de equivalência desta relação. Vejamos um exemplo deste fato (a prova poderá ser encontrada na bibliografia):

Exemplo:

23) Consideremos o conjunto $A=\{1,2,3,4\}$ e a partição de A dada por $P=\{\{1,3\},\{2,4\}\}$. Qual a relação de equivalência que está associada a esta partição? Os conjuntos da partição $\{1,3\}$ e $\{2,4\}$ devem ser as classes de equivalência da relação procurada. Então 1 e 3 devem estar relacionados, assim como 2 e 4. Também sabemos que cada elemento deve estar relacionado consigo mesmo. Assim, $[1]=[3]=\{1,3\}$ e $[2]=[4]=\{2,4\}$ e estamos agora em condições de escrever a relação de equivalência $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$. Não esqueça que R deve satisfazer também a propriedade simétrica, por isso aparecem os pares $(1,3)$ e $(3,1),(2,4)$ e $(4,2)$. Além disso, R deve ser transitiva (prove isso!).

Exercícios propostos

8) Explicite o conjunto quociente determinado pela relação de equivalência em $A=\{a,b,c,d\}$ dada por $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$.

9) Determine a relação de equivalência R em $A=\{1,2,3,4,5\}$ que determina o seguinte conjunto quociente (partição de A): $A/R=\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$.

10) Seja R a relação definida por xRy, se e somente se x nasceu no mesmo estado ou território do Brasil que y, e considere A o conjunto de todas as pessoas nascidas no Brasil.

a) Mostre que esta é uma relação de equivalência em A.

b) Quantas classes de equivalência são determinadas pela relação R?

c) Qual é a classe de equivalência determinada por você?

10) Encontre as classes de equivalência e o conjunto quociente $\mathbb{Z}_5$ determinados pela relação de congruência módulo 5 em $\mathbb{Z}$ e responda:

a) Em qual classe de equivalência está a soma de dois inteiros da classe $[2]$?

b) Em qual classe de equivalência está a soma de dois inteiros, um da classe $[2]$ e outro da classe $[1]$?

c) Em qual classe de equivalência está a soma de dois inteiros da classe $[4]$?

Observando as respostas anteriores, complete a seguinte tabela de "soma" de classes em $\mathbb{Z}_5$:

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]					
[1]					[0]
[2]			[4]		
[3]				[1]	
[4]	[4]				

12) Construa o conjunto $\mathbb{Z}_6$ e faça uma tabela de soma de classes como no exercício anterior.

13) Usando a mesma idéia de soma no conjunto quociente $\mathbb{Z}_5$, como você construiria uma tabela de multiplicação de classes? Faça também uma tabela de multiplicação para $\mathbb{Z}_6$.

3.6 Relação de ordem

Em Fundamentos I foi estudado a relação "$\leq$" em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e no capítulo anterior foi estudada a extensão desta relação "$\leq$" ao conjunto $\mathbb{R}$. Os pares ordenados (a,b) em que a e b são números reais e satisfazem $a \leq b$ constituem a relação denominada relação de ordem em $\mathbb{R}$ (estamos habituados a dizer "menor ou igual a" para "$\leq$", mas o correto seria dizermos "menor do que ou igual a"). Dado um conjunto A (não-vazio), podemos definir uma relação em A com as mesmas características da relação "$\leq$" em $\mathbb{R}$; isto nos permite estabelecer uma "ordem" no conjunto A, como estamos habituados a fazer em $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, mesmo que os elementos de A não sejam números. Para caracterizar as relações de ordem, precisamos estabelecer uma propriedade que ainda não conhecemos: a propriedade anti-simétrica.

Definição. Seja A um conjunto não-vazio e R uma relação em A. Dizemos R é uma relação anti-simétrica quando para quaisquer x e y em A, se xRy e yRx, então $x = y$.

Exemplos:

24) "$\leq$" é uma relação anti-simétrica em $\mathbb{Z}$ (e também em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$), pois se $a \leq b$ e $b \leq a$, teremos $a = b$.

25) A relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é anti-simétrica. Podemos supor sem perda de generalidade que a e b são não-nulos (por quê?); então:

    i) Se $a \mid b$, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $b = ax$

    ii) Se $b \mid a$, existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $a = by$

    De (i) e (ii), temos que $a = by = (ax)y = a(xy)$. Como a é não-nulo, teremos $xy = 1$ (lembre da lei do cancelamento para a multiplicação em $\mathbb{N}$). Ora, se o produto de dois números naturais é 1, devemos ter $x = y = 1$. Isso prova que $a = b$.

Observação 9. Note que a relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$ não é anti-simétrica, pois se $xy = 1$ em $\mathbb{Z}$ podemos ter $x = y = 1$ ou $x = y = -1$, o que resultará $a = b$ *ou* $a = -b$.

26) Considere A um conjunto não-vazio. A relação de inclusão em $P(A)$ é anti-simétrica, pois para X e Y em $P(A)$, se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, teremos $X = Y$ (veja as propriedades da inclusão no capítulo 1).

27) Considere $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(1,3),(4,2),(4,4),(2,4)\}$; R não é anti-simétrica, pois temos $4R2$ e $2R4$, mas $2 \neq 4$.

Observação 10. Ao contrário do que pode parecer, "anti-simétrica" não é a negação de "simétrica". Podemos ter relações que não são nem simétrica, nem anti-simétrica, como no exemplo anterior.

Pergunta: uma relação pode ser simultaneamente simétrica e anti-simétrica?

Observação 11. Outra maneira de expressarmos a definição de relação anti-simétrica é a seguinte: "Uma relação R num conjunto A é anti-simétrica quando para a e b em A, se $a \neq b$, então não ocorre simultaneamente aRb e bRa".

Definição. Seja A um conjunto não-vazio. Uma relação R em A é uma relação de ordem, se e somente se goza das propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Exemplos:

28) "$\leq$" é uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ (já provado no capítulo anterior):

i) reflexiva: $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

ii) anti-simétrica: se $x \leq y$ e $y \leq x$, temos $x = y$

iii) transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq z$, temos $x \leq z$.

29) A relação de divisibilidade em $\mathbb{N}$ é uma relação de ordem:

i) reflexiva: $a \mid a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, pois $a = a.1$

ii) anti-simétrica: se $a \mid b$ e $b \mid a$, já vimos que $a = b$

iii) transitiva: se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$

30) A relação de inclusão do exemplo 27 é uma relação de ordem, pois além de ser anti-simétrica é também reflexiva e transitiva.

Ordem total e ordem parcial

Lembremos a primeira propriedade PO1 da relação de ordem "$\leq$" em $\mathbb{R}$: dados dois números reais x e y, ou $x \leq y$ ou $y \leq x$. Isto significa que todos os elementos de $\mathbb{R}$ estão relacionados pela relação de ordem $\leq$. Já para a relação de ordem "divisibilidade em $\mathbb{N}$" isto não ocorre: 2 e 3 são números naturais e não estão relacionados, pois 2 não é divisor de 3, nem 3 é divisor de 2. Estas duas situações estão explícitas na definição a seguir:

Definição. Se R é uma relação de ordem em um conjunto não-vazio E, dizemos que E é um conjunto ordenado ou parcialmente ordenado pela relação R. Além disso, se para quaisquer a e b em E tem-se aRb ou bRa, a relação R é uma relação de ordem total sobre E e dizemos que E é totalmente ordenado pela relação R.

Observação 12. Se R é uma relação de ordem total, o "ou" de aRb *ou* bRa é exclusivo, pois pela propriedade anti-simétrica, aRb e bRa implica $a = b$. Note que uma relação de ordem total em um conjunto nos permite estabelecer uma organização dos elementos do conjunto no seguinte sentido: dados a e b quaisquer, com $a \neq b$, temos aRb ou bRa; se ocorre aRb (e então não ocorre bRa) e se c é um terceiro elemento distinto de a e distinto de b, então deve ocorrer aRc ou cRa e bRc ou cRb.

Exemplos:

31) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são totalmente ordenados pela relação "$\leq$".

32) $\mathbb{N}$ não é totalmente ordenado pela relação de divisibilidade.

33) Seja $E = \{2, 4, 8, ..., 2^n, ...\}$ o conjunto da potências naturais de 2 e R a relação em E "*x é um múltiplo de y*". Esta é uma relação de ordem em E (prove!) e é uma ordem total. De fato, dados dois elementos quaisquer de E, $x = 2^s$ e $y = 2^t$, para s e t naturais, teremos: se $s \leq t$, então y é múltiplo de x; se $t \leq s$ então x é múltiplo de y.

34) Considere um conjunto não-vazio A; a relação de inclusão definida em $P(A)$ é uma relação de ordem (prove!) mas não é uma ordem total. De fato, se X e Y são subconjuntos disjuntos de A, eles não são comparáveis pela relação de inclusão.

Exercícios propostos

14) Verifique se as relações a seguir são relações de ordem:

a) Em $\mathbb{N}^*$, a relação $aRb \Leftrightarrow mdc(a,b) = a$

b) Em $\mathbb{R}$, a relação $aRb \Leftrightarrow a < b$

c) Em $\mathbb{R}$, a relação $aRb \Leftrightarrow b = a + 1$

d) Em $\mathbb{Z}_4$, a relação $[a]R[b] \Leftrightarrow a \leq b$

15) Das relações de ordem do exercício anterior, determine quais são de ordem total.

3.7 Um exemplo especial: relações no plano

Inicialmente vamos lembrar que uma relação S de A em B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ ($S \subset A \times B$). Quando A e B são subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, podemos representar geometricamente as relações S de A em B no plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Assim, vamos reunir a definição de "relação" e a "representação do produto cartesiano" para representar geometricamente no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relações especiais. O interessante destas relações é que elas podem resultar em regiões do plano cartesiano (diferente dos gráficos de funções), como veremos nos exemplos.

No capítulo 2 estudamos todas as propriedades do conjunto $\mathbb{R}$, inclusive a idéia de sua representação como pontos de uma reta. Para representarmos as relações $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, usaremos os dois eixos coordenados que são duas retas perpendiculares; os elementos x do domínio são marcados na reta horizontal e os elementos y do contradomínio na reta vertical. Os pares (x, y) são marcados utilizando retas paralelas aos eixos coordenados. Veja a figura:

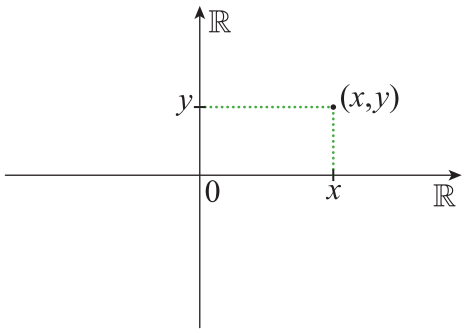


Figura 3.1

O conjunto dos pares (x, y) assim obtidos representará a relação S. Faremos agora uma série de exemplos de representações de relações no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Em cada exemplo identificaremos (ou você será solicitado a determinar) domínio e imagem da relação.

Exemplos:

35) $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, y = x - 2\}$

$D(S) = \mathbb{R}; I(S) = \mathbb{R}$

Geometricamente:

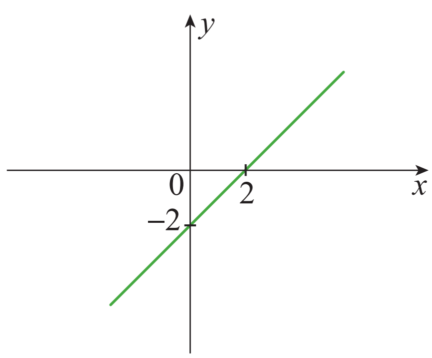


Figura 3.2

36) $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, y < x\}$

$D(S) = \mathbb{R}; I(S) = \mathbb{R}$

Geometricamente:

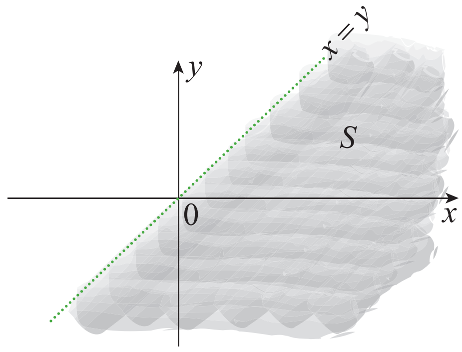


Figura 3.3

37) $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \geq -y\}$

$D(S) = \mathbb{R}; I(S) = \mathbb{R}$

Geometricamente:

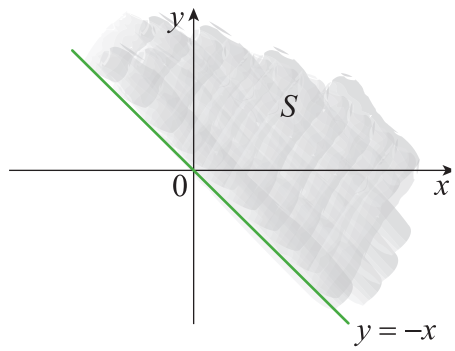


Figura 3.4

38) $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, y \leq x + 1\}$

$D(S) = \mathbb{R}; I(S) = \mathbb{R}$

Geometricamente:

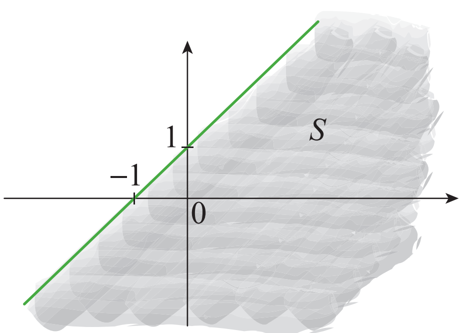


Figura 3.5

39) $S = [0,1] \times [0,1]$

$S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto dos pares ordenados cujas coordenadas percorrem o intervalo [0, 1]:

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in [0,1] \text{ e } y \in [0,1]\}$

$D(S) = [0,1]; I(S) = [0,1]$

Geometricamente:

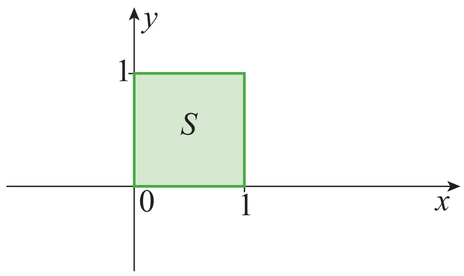


Figura 3.6

40) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x^2 + y^2 = 4\}$

S é o conjunto dos pares ordenados cuja soma dos quadrados das coordenadas é igual a 4. Isto lembra alguma coisa? Parece uma circunferência? Sim, geometricamente S é uma circunferência de centro na origem e raio 2.

$D(S) = [-2, 2]; I(S) = [-2, 2]$

Geometricamente:

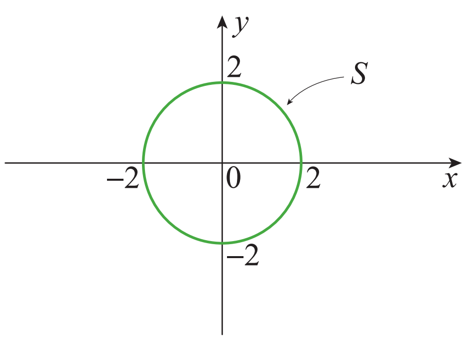


Figura 3.7

41) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x^2 + y^2 \geq 1\}$

S é o conjunto dos pares ordenados exteriores à circunferência $x^2 + y^2 = 1$, incluindo a borda. Como exercício, determine o domínio e a imagem desta relação.

Geometricamente:

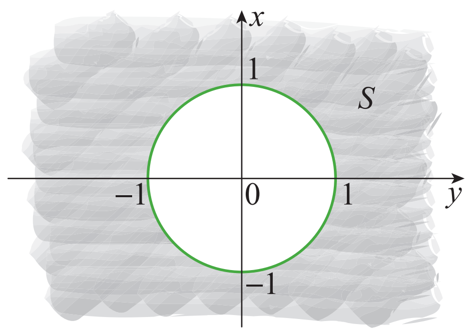


Figura 3.8

42) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, (x-1)^2 + y^2 < 9\}$

S é o conjunto dos pares ordenados interiores à circunferência de centro em $(1, 0)$ e raio 3; os pares ordenados da borda não estão na relação.

$D(S) =]-2, 4[$; para encontrarmos a imagem, devemos observar quais pontos do eixo vertical (eixo y) estão relacionados. Como o raio é 3, notamos que são os pontos do intervalo

$]-3, 3[$.

Geometricamente:

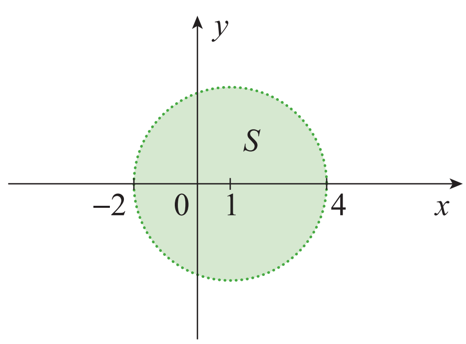


Figura 3.9

43) $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,-1\le x<2 \text{ e } -\dfrac{3}{2}<y<1\right\}.$

$D(S)=[-1,2[;\quad I(S)=\left]-\dfrac{3}{2},1\right[$

Geometricamente:

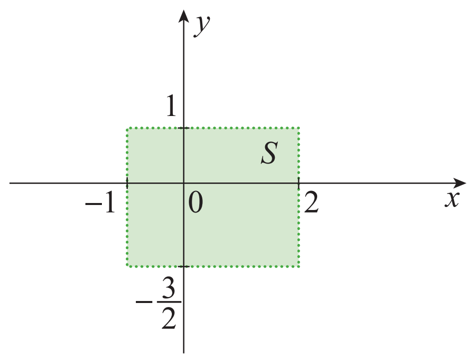


Figura 3.10

44) $S=\left\{(x,y)\in[-1,3]\times[1,4]\,/\,y=x+\dfrac{2}{5}\right\}$

Determine o domínio e a imagem como exercício.

Geometricamente:

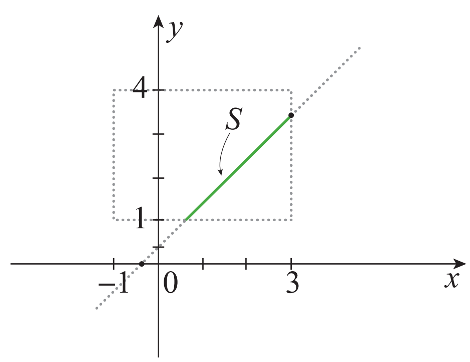


Figura 3.11

Observação 13. Como você pode ver, geometricamente as relações em $\mathbb{R}$ podem ser curvas no plano ou regiões. Você trabalhará com regiões no plano nas disciplinas de Cálculo.

Exercícios propostos

16) Represente geometricamente as seguintes relações no plano cartesiano:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in [1, 2] \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in]-1, 1[\}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x < 1 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

17) Determine domínio e imagem das relações do exercício 16.

Resumo

Neste capítulo você estudou relações, um conceito que nos prepara para o estudo de funções. Os tópicos trabalhados foram:

1) Relações: definição e exemplos.
2) Propriedades das relações: reflexiva, simétrica e transitiva.
3) Relação de Equivalência: aquela que goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.
4) Classes de equivalência e conjunto quociente determinados por uma relação de equivalência.
5) Relação de ordem: aquela que goza das propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
6) Relações em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ou relações no plano cartesiano).

Capítulo 4

Funções

Capítulo 4
Funções

Estudaremos o conceito de função (definição, nomenclatura e gráficos), suas propriedades (função injetora, sobrejetora, bijetora, par e ímpar), composição de funções e o conceito de função inversa.

Introdução

Neste capítulo vamos estudar as funções, um dos conceitos mais importantes da matemática, que estará presente ao longo de todo o curso, nas mais variadas disciplinas. Os conceitos trabalhados nos capítulos 1, 2 e 3 serão amplamente utilizados em nosso estudo das funções. Uma **função** é uma **relação** especial entre dois **conjuntos.** Estudaremos as funções reais, que estabelecem relações no conjunto dos **números reais**.

A idéia de função aparece pela primeira vez com os babilônios, cerca de 2000 a.C. Eles utilizavam tabelas como a descrita abaixo, associando a cada número inteiro maior do que ou igual a zero o seu quadrado.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

René Descartes (1596 – 1650) pode ter sido o primeiro matemático a usar o termo "função" (1637): para ele, função significava uma potência de x, como x^2, x^3, etc. Em 1692, **Gottfried Wilhelm Leibniz** chamava função qualquer quantidade associada a uma curva. **Johann Bernoulli** em 1718 definiu função como sendo qualquer expressão envolvendo uma variável e quaisquer constantes. A notação $f(x)$ foi introduzida por volta de 1750 por **Leonhard Euler**; segundo ele, uma função não precisava ter uma expressão analítica, podendo ser representada por uma curva. Já no início do século XIX, **Joseph Louis Lagrange** restringia o significado de função a uma representação em série de potência. Mais recentemente (final do século XIX), o estudo de conjuntos feito por **George Cantor** e outros matemáticos levou à definição de função como a conhecemos hoje: um conjunto especial de pares ordenados de elementos, não necessariamente números. Todo o Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido por **Isaac Newton** e **Leibniz** no século XVII e aperfeiçoado ao longo dos séculos por vários matemáticos gira em torno de dois conceitos fundamentais: o conceito de função e o conceito de limite. Antes da definição formal, vejamos:

4.1 Exemplos de situações que envolvem a idéia de função

1) Galileu (1564 – 1642) descobriu que o espaço percorrido por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo gasto para percorrê-lo. Mais precisamente, se o corpo é abandonado na posição de repouso, no tempo $t=0$, sendo t medido em segundos, então o espaço percorrido pelo corpo em t segundos é dado por $x=\dfrac{g\cdot t^2}{2}$ em que g é a aceleração da gravidade (g é aproximadamente $9{,}8\,m/s^2$) e x é medido em metros. Desta forma o espaço percorrido x depende do tempo da queda t. Diz-se que x é uma função de t. Além disso, diz-se que t é a variável independente e x é a variável dependente desta função.

2) A área de um círculo de raio r é dada por $A=\pi r^2$. Esta área depende do raio r; em outras palavras, a área A é uma função de r, sendo A a variável dependente e r a variável independente.

3) O volume de um paralelepípedo cujos lados medem $x, y\ e\ z$ é expresso por $V=x\cdot y\cdot z$. Este volume é uma função das dimensões $x, y\ e\ z$, sendo estas as variáveis independentes da função volume, enquanto o volume V é a variável dependente.

4) Um micro empresário supõe que o custo de produção de certo artigo depende:

   1º) do material utilizado para a confecção (m);

2º) da mão-de-obra (mo);

3º) do custo do equipamento utilizado (e);

4º) da administração (a);

5º) da manutenção do equipamento (me).

Neste caso, o custo do produto é uma função destas cinco variáveis: $C = f(m, mo, e, a, me)$.

Mas afinal, o que é uma função?

Retomando o exemplo 1) da queda dos corpos, suponhamos que o tempo necessário para a ocorrência do fenômeno físico descrito, isto é, o tempo de queda do corpo seja 10 segundos. Então, a cada instante t, entre 0 e 10 segundos, corresponde um único valor de x, que é a distância do corpo à posição inicial. Este valor de x é dado por $x = \frac{g \cdot t^2}{2}$. Por exemplo, para $t = 5$ (e $g = 9{,}8\text{m/s}^2$), o valor de x é dado por $x = \frac{(9{,}8).5^2}{2} = \frac{245}{2} = 122{,}5\text{m}$. Assim, temos um tipo especial de relação que é denominado função.

Mais precisamente:

Definição. Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma função de A em B é uma relação f que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

Notação: $f : A \to B$ (lê-se "f de A em B")

$x \mapsto y$ (lê-se "x é levado em y")

Observação 1. Pelo fato do elemento y estar associado a x, escrevemos também "$y = f(x)$". Esta é a notação mais utilizada de função, apesar de não indicar os conjuntos.

Observação 2. Como f é uma relação de A em B, lembremos que o conjunto A é chamado o domínio da função e o conjunto B é o contradomínio. O conjunto dos elementos de B que estão associados a algum elemento de A é a imagem da função f, $x \in A$

é chamado "variável independente" e $y \in B$ é chamado "variável dependente".

Notações:

- O Domínio de f será denotado $D(f)$
- A Imagem de f será denotada $\mathrm{Im}(f)$

Observação 3. A imagem de f é o conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{b \in B \mid b = f(a), \text{para algum } a \in A\}$$

Nos textos didáticos é comum encontrarmos a expressão " $f(a)$ é a imagem de a ". Neste caso, $f(a)$ é a imagem do elemento a e não a imagem da função f, que é um conjunto.

Observação 4. Se o contradomínio de uma função f é o conjunto $\mathbb{R}$, dizemos que f é uma função real. Além disso, se o domínio da função f é também um subconjunto de $\mathbb{R}$, isto é, $D(f) \subset \mathbb{R}$, dizemos que f é uma função real de variável real. Estas funções serão objeto de estudo no próximo capítulo.

Observação 5. Freqüentemente, mas nem sempre, a regra que define y como função de x é dada por uma expressão analítica, como $y = 4x - 3$, $y = \log x$ etc. No entanto, a função pode estar perfeitamente definida sem que tenhamos uma "fórmula" explícita. Atenção para os exemplos, mais adiante.

Observação 6. Para caracterizar uma função não basta somente a lei que a cada elemento do domínio associa um elemento no contradomínio. É preciso, além disso, estar claro quais são estes conjuntos. Quando não se faz referência ao domínio da função, entende-se que é o conjunto de todos os elementos para os quais a expressão que define a função faz sentido.

Observação 7. De modo geral, usaremos letras minúsculas para denotar funções e variáveis. Por exemplo, se escrevermos $k(t)$, estamos nos referindo à função k de variável independente t. A variável dependente também será denotada por letras minúsculas. A respeito destas notações, lembramos que o uso da letra f para denotar a função, x para a variável independente e y para a variável dependente não é obrigatório, apesar de consagrado nos livros didáticos.

Exemplos:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$

f é a função que a cada número real associa seu triplo somado com 5. O domínio da função é o conjunto $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. A imagem da função é o conjunto de valores reais resultantes das operações "o triplo do número mais 5". Assim, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3x + 5 \text{ para } x \in \mathbb{R}\}$.

Veja alguns valores do conjunto imagem:

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$$
$$f(0,0004) = 3 \cdot 0,0004 + 5 = 5,0012$$
$$f(\sqrt{7}) = 3 \cdot \sqrt{7} + 5 = 3\sqrt{7} + 5$$

Pergunta: existe um número real k tal que $f(k) = 51$? Em outras palavras: 51 é a imagem de algum elemento do domínio?

Para responder a pergunta, façamos $f(k) = 51$, ou seja, $3k + 5 = 51$. Resolvendo a equação, vemos que para $k = \dfrac{46}{3}$ temos $f\left(\dfrac{46}{3}\right) = 51$. Observe que para qualquer número real y é sempre possível encontrar um número real x tal que $f(x) = y$.

De fato:

$$3x + 5 = y$$
$$3x = y - 5$$
$$x = \frac{y-5}{3}$$

Para este x, tem-se

$$f(x) = f\left(\frac{y-5}{3}\right) = 3.\left(\frac{y-5}{3}\right) + 5 = y - 5 + 5 = y\ .$$

Isto significa que todo número real é imagem de um elemento do domínio da função. Provamos assim que $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$, ou seja, a imagem é o próprio contradomínio.

2) $h:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, h(n)=n^2+1$

h é a função que a cada número natural associa seu quadrado somado com 1. O domínio de h é o conjunto $\mathbb{N}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. A imagem de h é o conjunto

$$\mathrm{Im}(h)=\{y\in\mathbb{R}\mid y=n^2+1, \text{para } n\in\mathbb{N}\}=\{1,2,5,10,17,26,...\}.$$

Note que neste caso a imagem da função h é um subconjunto próprio do contradomínio.

3) $g(z)=\dfrac{1}{z}$

g é a função que a cada número real associa o seu inverso. Como só existem os inversos de números não-nulos, o domínio de g é o "maior" conjunto no qual é possível obter o inverso de um número, $\mathrm{D}(f)=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$. A imagem de g é o conjunto

$$\mathrm{Im}(g)=\left\{\frac{1}{z}\mid z\in\mathbb{R}^*\right\}.$$

Pergunta: dado um número real y, é possível encontrar um número real não-nulo z tal que $g(z)=y$?

Análogo ao que foi feito no exemplo 1, se y é tal que $\dfrac{1}{z}=y$ para $z\neq 0$, então $y\neq 0$ e $z=\dfrac{1}{y}$ (basta multiplicar ambos os membros da igualdade $\dfrac{1}{z}=y$ por zy^{-1}). Assim, $g(z)=g\left(\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{y}}=y$ e teremos $\mathrm{Im}(g)=\mathbb{R}^*$.

4) $t(s)=\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{1}{s-1}$

Para determinar o domínio de t, devemos observar os valores reais para os quais é possível encontrar $\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{1}{s-1}$. Como não existem números com denominadores zero, devemos excluir os valores que anulam o denominador: $s=-3$ e $s=1$. Assim, $\mathrm{D}(k)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$.

Qual é a imagem da função t ?

5) $k(t)=\dfrac{1}{t^2-2t-12}$

Análogo ao exemplo anterior, para determinar o domínio de k, devemos observar os valores t para os quais é possível encontrar $\dfrac{1}{t^2-2t-15}$. Fazendo $t^2-2t-15=0$, obtemos $t=5$ ou $t=-3$: estes valores anulam o denominador e devem ser excluídos. Assim, $\mathrm{D}(k)=\mathbb{R}-\{-3,5\}$.

6) $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{se } x\le 0 \\ x^2-4x+3 & \text{se } x>0 \end{cases}$

A função f é dada por duas sentenças: para os valores x menores ou iguais a 0, associa-se $x+3$; para valores x maiores do que zero, associa-se x^2-4x+3. O domínio da função é $\mathbb{R}$ e sua imagem é o conjunto:

$$\mathrm{Im}(f)=\{x+3\,|\,x\in\mathbb{R}\text{ e }x\le 0\}\cup\{x^2-4x+3\,|\,x\in\mathbb{R}\text{ e }x>0\}.$$

7) Para $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n)$ é a quantidade de números relativamente primos com n e menores do que n (função de Euler).

Este é um exemplo de função que não está expresso por uma "fórmula". Apesar disso, conhecemos a maneira de associar os elementos de $\mathbb{N}^*$ com elementos de $\mathbb{N}$. Por exemplo: $\varphi(6)=2$, pois são dois os números relativamente primos com 6 e menores do que 6: 1 e 5.

Analogamente, $\varphi(19)=18$, $\varphi(42)=12$ etc. Para a função de Euler temos: $\mathrm{D}(\varphi)=\mathbb{N}^*$ e $\mathrm{Im}(\varphi)=\{\varphi(n)\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$.

Para calcular $\varphi(n)$, usamos a decomposição de n em fatores primos (teorema fundamental da aritmética):

$$n=p_1^{\alpha 1}\cdot p_2^{\alpha 2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha k}\text{, com } p_1<p_2<\ldots<p_k$$

primos distintos e $\alpha_i\in\mathbb{N}$ para todo i. Fazemos

$$\varphi(n)=\varphi(p_1^{\alpha_1})\cdot\varphi(p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot\varphi(p_n^{\alpha_n})=$$
$$=(p_1^{\alpha_{1-1}})\cdot(p_1-1)\cdot(p_2^{\alpha_{2-1}})\cdot(p_2-1)\cdot(p_3^{\alpha_{3-1}})\cdot(p_3-1)\cdot\ldots\cdot(p_1^{\alpha_{1-1}})\cdot(p_1-1)$$

Por exemplo, para $n = 504 = 2^3.3^2.7$, temos que a quantidade de números relativamente primos com 504 e menores do que 504 é:

$$\varphi(504) = \varphi(2^3)\cdot\varphi(3^2)\cdot\varphi(7) = 2^2\cdot(2-1)\cdot(3-1)\cdot(7-1) = 4\cdot 6\cdot 6 = 144$$

8) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

A função h, dada por duas sentenças, associa 1 aos números racionais e 0 aos números irracionais. Seu domínio é $\mathbb{R}$ e sua imagem é $\text{Im}(h) = \{0,1\}$.

Observação 8. Voltaremos a falar do conjunto-imagem de uma função quando estudarmos os gráficos de funções.

4.2 Igualdade de funções

Quando duas funções são iguais? Serão iguais as funções f e g definidas por $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$?

Teorema. *Duas funções f e g são iguais se e somente se*

i) *f e g têm o mesmo domínio e*

ii) *$f(x) = g(x)$ para todo x do domínio de f.*

O teorema responde a nossa pergunta inicial: o domínio da função f é $\mathbb{R}$ e o domínio da função g é $\mathbb{R} - \{-1\}$; logo, as funções não são iguais, pois a condição (i) não é satisfeita. É tentador cancelar $x+1$ na expressão da função g. Mas lembre-se que somente podemos cancelar expressões seguramente não-nulas, ou seja,

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$$

somente ocorre para $x \neq -1$. Lembre-se também que não basta a lei para caracterizar uma função.

Outros exemplos de funções

Nos próximos exemplos alguns conceitos estão expressos em forma de função: as operações, o determinante de uma matriz, as projeções, a distância. Estas funções serão estudadas com mais detalhes em disciplinas posteriores. Observe que na maioria dos exemplos o domínio ou o contradomínio, ou ambos, são produtos cartesianos, o que caracteriza as funções de mais de uma variável.

9) $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a(x, y) = x + y$ (operação adição em $\mathbb{R}$)
$m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, m(x, y) = x + y$ (operação multiplicação em $\mathbb{R}$)

10) Seja M o conjunto das matrizes quadradas 3×3 .

$$k : M \to \mathbb{R}, k(A) = \det(A)$$

11) $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, F(x, y) = (x, 0)$ (projeção na primeira coordenada)

12) $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, G(x) = (0, x)$ (inclusão)

13) $K : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$K((x, y), (u, v)) = (x + u, y + v)$ (adição de vetores)

14) $d : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, d(x, y) = | x - y |$ (distância entre dois pontos na reta)

15) $d : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, d((x, y)(u, v)) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$ (distância entre dois pontos no plano)

16) Seja A um conjunto não-vazio e $P(a)$ o conjunto das partes de A.

17) $h : P(A) \times P(A) \to P(A), h(X, Y) = X \cap Y$ (intersecção de conjuntos).

Exercícios propostos

1) Dada a função $f(x) = \dfrac{4x - 3}{5x + 6}$, determine:

a) o domínio de f

b) $f(2x)$ e $f(-2x)$

c) $f(-1)$

d) $f(2x + 1)$

e) x tal que $f(x) = 9$

f) $f(2x) + 1$

2) Determine o domínio das funções:

a) $t(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{x}$

b) $m(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3} + \dfrac{1}{\sqrt{25 - x^2}} - \sqrt[3]{x-5}$

c) $F(x) = x\sqrt[2]{x^2 - 40} + \dfrac{3x^5 - 2}{2\sqrt{6 - x^2}}$

3) Dê dois exemplos de relações em $\mathbb{R}$ que não são funções.

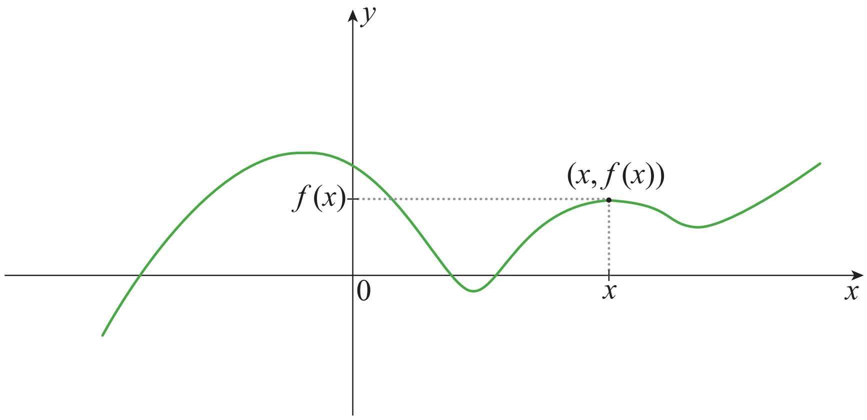
4) Seja $g(t) = \dfrac{1+t}{1-t}$. Determine $g\left(\dfrac{1}{1+t}\right)$ e $g\left(\dfrac{1}{1-t}\right)$.

4.3 Gráfico de uma função

O gráfico é o “retrato” de uma função. Facilita, entre outras coisas, a análise de relatórios ou perspectivas econômicas, cotação de moedas, pesquisas estatísticas etc. O gráfico permite visualizar melhor o comportamento da função, seu crescimento e seus máximos e mínimos.

Nosso estudo aqui se restringe às funções reais de uma variável real, isto é, funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio é $\mathbb{R}$. Como uma função é uma relação especial, podemos aproveitar a idéia dos gráficos de relações já estudados; o gráfico de uma função é, em geral, uma curva ou reunião de partes de curvas, ou de pontos, representados no plano cartesiano. A variável independente é em geral marcada sobre o eixo horizontal (eixo das abscissas) e a variável dependente é marcada sobre o eixo vertical (eixo das ordenadas).

Definição. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas são $(x, f(x))$, com $x \in A$.



Simbolicamente:

$$Gr(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Observação 9. O gráfico é uma representação da função por desenho ou figura geométrica, mediante a associação, um a um, dos pares ordenados de números reais com pontos de um plano, usando um sistema de eixos coordenados (como foi feito para números reais e pontos de uma reta).

Exemplos:

17) Seja $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 5\}$ e $f : A \to \mathbb{N}, f(n) = n - 1$

Como $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, é possível determinar todos os valores $f(n)$ e o gráfico é $Gr(f) = \{(1,0), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4)\}$

x	$y = f(x)$
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

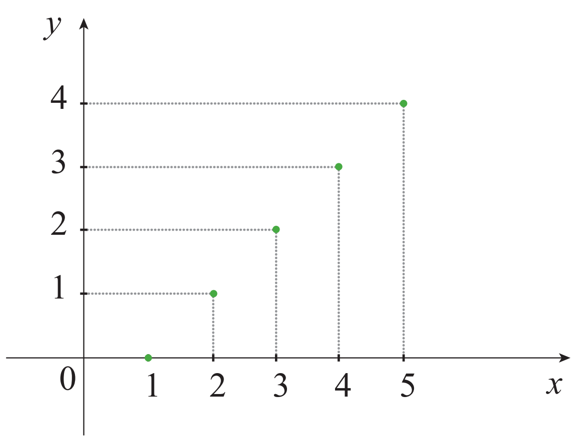


Figura 4.2

5) $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x-3$

Neste caso não é possível fazer uma tabela para todos os valores de x em $[0,3]$. Mostraremos mais adiante que esta função tem um gráfico que é um segmento de reta. Assim, basta conhecer dois de seus pontos.

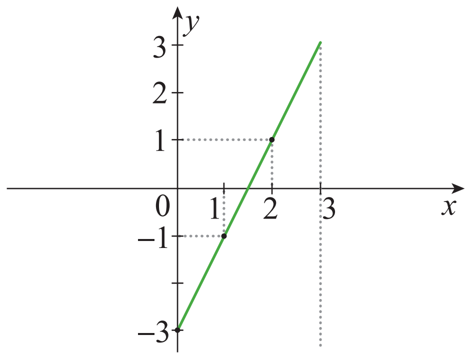


Figura 4.3

Observação 10. De modo geral, para construir o gráfico de uma função com lápis e papel, não basta encontrarmos alguns pontos dando alguns valores para a variável independente. No próximo capítulo estudaremos as funções elementares e faremos o esboço de seus gráficos utilizando as propriedades destas funções.

Observação 11. Um outro processo de construção de gráficos é a utilização de programas computacionais especificamente criados para este fim; se você já teve contato com estes programas na disciplina de Informática, agora pode usá-los livremente. No entanto, a utilização de imagens nada adianta se não soubermos analisar esta imagem. Para isso, também o conhecimento dos gráficos das funções elementares é importante.

4.4 Funções crescentes e funções decrescentes

Como o próprio nome diz, podemos investigar o crescimento ou decrescimento de uma função real num determinado subconjunto de $\mathbb{R}$. Veja o exemplo seguinte:

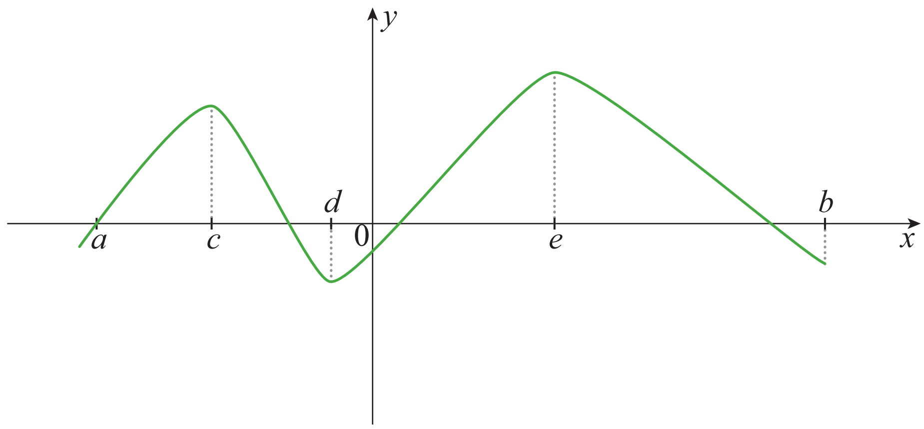


Figura 4.4

A função é crescente nos intervalos $[a,c]$ e $[d,e]$ e decrescente nos intervalos $[c,d]$ e $[e,b]$.

Definição.

i) Dizemos que uma função f é crescente no conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se e somente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$, para todos x_1 e x_2 em A.

ii) Dizemos que f é decrescente no conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se e somente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$, para todos x_1 e x_2 em A.

Simbolicamente:

i) f é crescente em $A \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

ii) f é decrescente em $A \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

Observação 12. Nas funções crescentes num intervalo I, à medida que os valores x aumentam em I, os valores $f(x)$ também aumentam. Nas funções decrescentes num intervalo J, à medida que os valores x aumentam em J, os valores $f(x)$ diminuem.

Exemplos:

19) $f(x) = 3x - 1,\ D(f) = \mathbb{R}$

Note que usamos as propriedades da relação de ordem.

Para x_1 e x_2 reais com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) = 3x - 1 < 3x_2 - 1 = f(x_2)$. Logo, f é crescente em todo seu domínio.

20) $f(x) = -x + 4, \mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$

Para x_1 e x_2 reais com $x_1 < x_2$, temos $-x_1 > -x_2$ e assim

$$f(x) = -x + 4 > x_2 + 4 = f(x_2).$$

Logo, f é decrescente em todo o seu domínio.

21) $h(x) = \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq 0 \\ -x+1 \text{ se } x < 0 \end{cases}, \ \mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$

No intervalo $[0, \infty)$, se $x_1 < x_2$, temos que

$$h(x_1) = x_1 - 1 < x_2 - 1 = h(x_2)$$

e h é crescente. No intervalo $(-\infty, 0)$, se $x_1 < x_2$, temos que $h(x_1) = -x_1 + 1 > -x_2 + 1 = h(x_2)$ e h é decrescente.

Assim, h é crescente no intervalo $[0, \infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$.

22) $g(x) = 7, \mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

g não é uma função crescente, nem decrescente, em qualquer intervalo de seu domínio; de fato, para x_1 e x_2 reais tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) = 7 = f(x_2)$.

4.5 Funções injetoras

Comecemos com um exemplo: considere a função que a cada aluno matriculado na UFSC associa a sua data de nascimento. Certamente há pelo menos dois alunos da UFSC com a mesma data de nascimento, isto é, existem elementos distintos do domínio que possuem a mesma imagem. Isto não acontece se tomarmos a função que a cada aluno da UFSC associa seu número de matrícula: alunos diferentes têm diferentes números de matrícula, ou seja, elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes. Quando acontece esta última situação, dizemos que a função é injetora.

Alguns autores dizem que a função é **injetiva** ou um a um. A propriedade também é chamada de injetividade.

Definição. Seja $f: A \to B$ uma função. Dizemos que f é injetora se e somente se para quaisquer x_1 e x_2 do domínio tais que $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Simbolicamente,

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A, \text{ se } x_1 \neq x_2, \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)\ .$$

Ou, equivalentemente:

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, \text{se} f(x_1) = f(x_2)\ , \text{então } x_1 = x_2$$

Exemplos:

23) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$.

Sejam x_1 e x_2 reais e suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Então,

$$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Assim, f é injetora.

24) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x^2 - 1$.

Sejam x_1 e x_2 reais. Se $h(x_1) = h(x_2)$, então:

$$(x_1)^2 - 1 = (x_2)^2 - 1$$

$$(x_1)^2 = (x_2)^2$$

Observe que não podemos concluir daí que $x_1 = x_2$, uma vez que podemos ter, por exemplo, $(-1)^2 = 1^2$ e $-1 \neq 1$. Assim, a função h não é injetora.

Observação 13. Para mostrar que uma função não é injetora, basta exibir elementos diferentes do domínio que possuem a mesma imagem: $x_1 \neq x_2 \text{e} f(x_1) = f(x_2)$.

Observação 14. É possível, por meio do gráfico, verificar se uma função é injetora ou não. Uma função será injetora se e somente se qualquer paralela ao eixo das abscissas corta o gráfico da função em no máximo um ponto.

4.6 Funções sobrejetoras

Considere a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=2t-9$. Qual a imagem de g?

Seja y um número real qualquer. É possível encontrar um número real t tal que $g(t)=y$?

Se $y=2t-9$, então $t=\dfrac{y+9}{2}$ e $g(t)=y$. Assim, todo número real é imagem de algum elemento do domínio. A imagem da função é o próprio contradomínio $\mathbb{R}$ e a função é chamada sobrejetora.

Alguns autores dizem que a função é **sobrejetiva.** A propriedade também é chamada de sobrejetividade.

Definição. Seja $f:A\to B$ uma função. Dizemos que f é sobrejetora se e somente se a imagem de f for igual ao seu contradomínio, ou seja, $\forall y\in B,\exists x\in A\,|\,f(x)=y$.

Exemplos:

25) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ é sobrejetora.

De fato: seja $y\in\mathbb{R}$. Se $y=\dfrac{1}{2}x+1$, então

$$x=2y-2ef(x)=f(2y-2)=\frac{1}{2}(2y-2)+1=y\ .$$

Logo, f é sobrejetora.

26) $g[0,1]\to[0,1], g(x)-x^2$ é sobrejetora.

De fato: seja $y\in[0,1]$, ou seja, $0\le y\le 1$. Sendo y um número positivo (ou nulo), existe $\sqrt{y}$ e, além disso, $0\le\sqrt{y}\le 1$. Então, se $x=\sqrt{y}$, temos $g(x)=g(\sqrt{y})=(\sqrt{y})^2=|y|=y$. Logo, g é sobrejetora.

27) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=x$ não é sobrejetora.

Existe pelo menos um número real, por exemplo, -5, que não é imagem de nenhum elemento do domínio (o módulo de um número é sempre positivo ou nulo!). A imagem da função é $[0,\infty)$.

Lembre-se que a negação do quantificador "todo" é o quantificador "existe pelo menos um", no sentido de "existe pelo menos um valor x para o qual a definição não se aplica".

Observação 15. Uma função f não é sobrejetora quando existe pelo menos um elemento do contradomínio que não é imagem de nenhum elemento do domínio. Note que uma função do domínio na imagem, $f:\mathrm{D}(f)\to \mathrm{Im}(f)$, é sempre sobrejetora.

Observação 16. Uma função terá a propriedade de ser injetora ou não dependendo de seu domínio, bem como de seu contradomínio. O mesmo acontece para a propriedade de ser sobrejetora.

Por exemplo:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x^2-\sqrt{5}$ **não é injetora** mas

$g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=6x^2-\sqrt{5}$ é injetora.

Por quê?

$h:[0,\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=\sqrt{x}$ não é sobrejetora

$s:[0,\infty)\to[0,\infty), s(x)=\sqrt{x}$ é sobrejetora.

Por quê?

Aqui, novamente vale lembrar a **Observação 6**: não basta somente a regra (a lei) de associação dos elementos. É preciso também estar claro quais são os conjuntos domínio e contradomínio. Dependendo dos conjuntos estabelecidos, a função pode ser injetora ou não, sobrejetora ou não.

4.7 Funções bijetoras

A função $g:[0,1]\to[0,1], g(x)=x^2$ é injetora e sobrejetora, como já foi visto.

Dizemos neste caso que g é uma função bijetora ou que é uma bijeção do intervalo $[0,1]$.

Definição. Uma função $f:A\to B$ é bijetora se e somente se é injetora e sobrejetora.

Exemplos:

28) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=3x-1$ é bijetora.

i) é injetora, pois, dados a e b em $\mathbb{R}$ com $h(a) = h(b)$, tem-se $3a - 1 = 3b - 1$, o que significa $a = b$.

ii) é sobrejetora, pois, dado qualquer número real y, existe $x = \dfrac{y+1}{3}$ tal que $h(x) = y$.

29) $g : [0,1] \to [0,1], g(x) = x^3$ é bijetora.

i) é injetora, pois para a e b em $[0,1]$ tais que $a^3 = b^3$, temos $a = b$ (prove!).

ii) é sobrejetora, pois para qualquer y em $[0,1]$ existe $x = \sqrt[3]{x}$, x no intervalo $[0,1]$ (por que?) tal que $g(x) = y$.

4.8 Composição de funções

Neste tópico estudaremos um procedimento de construir novas funções a partir de funções dadas, procedimento este conhecido como "composição de funções". Começaremos com um exemplo:

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções dadas por $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2 - 3x$. Como f é sobrejetora (prove!), faz sentido aplicar a função g a $f(x)$, uma vez que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$.

Então, $g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 - 3(2x) = 4x^2 - 6x$. Dizemos que a função h, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 4x^2 - 6x$, resulta da composição de g e f (nesta ordem). Escrevemos $h = g \circ f$. Em outras palavras, a função que associa $x \in \mathbb{R}$ a $g(f(x)) \in \mathbb{R}$ é chamada função composta de g com f e denotada por $g \circ f$.

É sempre possível determinar a função composta de duas funções? Tomemos por exemplo $f(x) = 2x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Será possível calcular $g \circ f(-3)$?

Vejamos: $g \circ f(-3) = g(f(-3)) = g(-6) = \sqrt{-6}$, que não é um número real! Isto ocorre porque $f(-3)$ não pertence ao domínio de g, que é $[0, \infty)$. Concluímos que $g \circ f$ existe para aqueles valores de x tais que $f(x) \geq 0$. De modo geral, para que possamos definir a função composta de g com f, é preciso que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{D}(g)$.

Definição. Sejam $f: A \to B$ e $g: E \to F$ funções tais que $\mathrm{Im}(f) \subset E$. A função que associa a cada $x \in A$, $g(f(x)) \in F$, é chamada função composta de g com f e é denotada por $g \circ f$. A função $g \circ f: A \to F$ é definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemplos:

30) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x + 1$

Como f é sobrejetora (prove!), temos que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$. Logo, a função composta de g com f é:

$$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = 2(3x) + 1 = 6x + 1$$

Podemos também determinar a composta de f com g?

Como g é sobrejetora (prove!), temos que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{D}(f)$. Logo, a função composta de f com g é dada por:

$$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ com}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = 3 \cdot (2x+1) = 6x + 3$$

Como você pode observar, $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções diferentes!

31) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ e $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$

Neste caso temos $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = [0, \infty)$. Como $\mathrm{Im}(f)$ não está contida no domínio de g, não é possível definir a composta de g com f, $g \circ f$. No entanto, como $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty) \subset \mathbb{R} = \mathrm{D}(f)$, podemos definir a composta de f com g:

$$f \circ g: [0, \infty) \to \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}.$$

Para podermos definir a composta de g com f (a função $g \circ f$), devemos fazer uma restrição ao domínio da função f para que sua imagem seja um conjunto de números positivos; ao fazer isso, estamos definindo uma nova função

$$h: [0, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = 2x \,, \ \mathrm{Im}(h): [0, \infty) \subset [0, \infty) = \mathrm{D}(g)$$

e, portanto, $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) = \sqrt{2x}$.

32) Considere as funções $f(x) = x^2 + 5$ e $g(x) = \sqrt{x-6}$

Qual deve ser o domínio da função f para que seja possível definir $g \circ f$*?*

Como $g \circ f$ só poderá ser definida quando $\text{Im}(f) \subset \text{D}(g)$, devemos inicialmente determinar $\text{D}(g)$ dado por

$$\text{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 6 \geq\} = [6, \infty).$$

Assim, para que $\text{Im}(f) \subset \text{D}(g)$ devemos ter $f(x) = x^2 + 5 \geq 6$. Resolvendo a inequação, temos que os valores de x que resultam em $f(x) = x^2 + 5 \geq 6$ constituem o conjunto $A = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Tomando o domínio de f como o conjunto $A = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, é possível definir $g \circ f$. Assim, para $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : [6, \infty) \to \mathbb{R}$, temos $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 5) = \sqrt{(x^2 + 5) - 6} = \sqrt{x^2 - 1}$.

Exercícios propostos

5) Sejam $f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$ e $g(x) = x^2 + 2$. Determine, se possível, as funções $g \circ f$ e $f \circ g$.

6) Se $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{|x+5|}$, determine condições para que se possa definir $g \circ f$ e $f \circ g$.

Propriedades da composição de funções

A composição de funções pode ser vista como uma "operação" de funções. Neste sentido, algumas propriedades dessa operação podem ser úteis.

No que segue, f, g e h denotam funções compatíveis para a definição de compostas.

P1) A composição de funções em geral não é comutativa, ou seja, $g \circ f \neq f \circ g$. (Procure um exemplo para o qual a igualdade ocorre)

Esta propriedade nos permite compor mais de duas funções, respeitando as restrições da definição.

P2) A composição de funções é associativa, ou seja,

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g \,.$$

P3) A função identidade ($A \subset \mathbb{R}$ e $\text{Id} : A \to \mathbb{R}, \text{Id}(x) = x$) funciona como um "elemento neutro" da composição, ou seja: para $f : A \to \mathbb{R}$ e $\text{Id} : A \to A, \text{Id} \circ f = f \circ \text{Id} = f$.

De fato, $\text{Id} \circ f$, $f \circ \text{Id}$ e f têm o mesmo domínio A e ainda:

$$[(\text{Id}) \circ f](x) = \text{Id}(f(x)) = f(x), \forall x \in \text{D}(f) \text{ e}$$

$$[f \circ (\text{Id})](x) = f(\text{Id}(x)) = f(x), \forall x \in \text{D}(f)$$

Logo, $\text{Id} \circ f = f \circ \text{Id} = f$.

4.9 Função inversa

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$. Existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \text{Id}(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$? Vejamos:

i) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1) = x$

ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 1 = x$

Da igualdade (ii) obtemos

$$3 \cdot g(x) - 1 = x$$
$$3 \cdot g(x) = x + 1$$
$$g(x) = \frac{x+1}{3}$$

Verificamos que também a igualdade (i) é verdadeira para $g(x)$:

$$g(3x - 1) = \frac{3x - 1 + 1}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{x+1}{3}$ é chamada de função inversa da função f e é denotada por f^{-1}.

Pergunta: para toda função f é possível encontrar f^{-1}?

Observemos a função $f:\mathbb{R}\to[0,\infty), f(x)=x^2$. Procuramos uma função g tal que $(f\circ g)=(x)=x$ e $(g\circ f)=(x)=x$, ou seja:

i) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x$

ii) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=[g(x)]^2=x$

Da igualdade (ii) obtemos $g_1(x)=\sqrt{x}$ ou $g_2(x)=-\sqrt{x}$, duas opções para $g(x)$ (lembre-se que já vimos isto na parte de Equações). O domínio destas funções é $[0,\infty)=\mathrm{Im}(f)$, mas elas devem satisfazer (i). Como $g_1\cdot(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|$ e $g_2\cdot(x^2)=-\sqrt{x^2}=-|x|$, nenhuma das duas opções para g satisfaz a condição exigida. Logo, não é possível encontrar a função inversa de f.

Definição. Seja $f:A\to B$ uma função. Se existe $g:B\to A$ tal que $(f\circ g)(x)=x, \forall x\in B$ e $(g\circ f)(x)=x, \forall x\in A$, então a função g é chamada função inversa de f e é denotada por f^{-1}.

Observação 17. Como uma função é uma relação, podemos olhar para uma função $f:A\to B$ como uma relação de A em B, isto é, $f=\{(x,y)\in A\times B \mid y=f(x)\}=\{(x,f(x)) \mid x\in A\}$.

Como sempre existe a relação inversa de uma relação (veja a unidade "Relações"), a pergunta então é: sob que condições a relação inversa g de B em A é uma função? Em outras palavras, que característica deve ter a função f para que sua inversa exista?

Lembrando: a relação inversa g é dada por $g=\{(y,x)\in B\times A \,/\, (x,y)\in f\}$, ou seja, $(y,x)\in g$ se e somente se $(x,y)\in f$.

Observe no exemplo anterior qual era o "problema" da função f que "impedia" a existência da inversa: o fato de dois elementos diferentes do domínio terem a mesma imagem, uma vez que $x^2=(-x)^2$. Ao tentar calcular a função g, acabamos ficando com duas possibilidades, sendo que nenhuma delas "servia" para a inversa. A função inversa f^{-1} deve "fazer o caminho de volta da f", no sentido de "desfazer o que foi feito por f". Para isso, é necessário que cada elemento da imagem de f se origine de um único elemento do domínio; se isto não acontece, ao "fazer o caminho de volta" a candidata a inversa acaba por encontrar duas imagens para um único elemento de seu domínio (que é a imagem de f), o que a impede de ser uma função. Assim, uma das condições para que exista f^{-1} é que a função f deve ser injetora.

Observemos agora a função $h:(0,1)\to\mathbb{R}, h(x)=2x$. Ao "fazer o caminho de volta", a candidata a inversa deve "partir" de $\mathbb{R}$ e "voltar" ao intervalo $(0,1)$. Mas existem elementos de $\mathbb{R}$ que não são imagem de nenhum elemento de $(0,1)$ pela função h. Logo, esta candidata não será uma função, uma vez que, para ser função, todos os elementos de seu domínio devem ter uma imagem, isto é, a lei deve valer para todos os elementos do domínio.

Note que se considerarmos o conjunto imagem de h, todos os elementos deste conjunto estão associados a algum elemento do domínio. Conclusão: outra condição, além de ser injetora, para que a inversa de uma função f exista é que f seja sobrejetora. O teorema a seguir caracteriza as funções que admitem inversa.

Teorema. *Seja $f:A\to B$ uma função. Se f é bijetora, então existe $f^{-1}:B\to A$. Reciprocamente, se existe f^{-1}, então f é bijetora.*

Demonstração:

$(\to)$ **Hipótese:** f é bijetora

Tese: existe f^{-1}

Mostraremos que a relação inversa de f é uma função. Seja g a relação inversa de f,

$$g=\{(x,y)\in A\times B \mid (x,y)\in f\}$$

i) Seja $y\in B$ qualquer. Como f é sobrejetora, existe $x\in A$ tal que $f(x)=y$, ou seja, $(x,y)\in f$. Logo, $(x,y)\in g$. Assim, todo elemento de B está relacionado com algum elemento de A.

ii) Seja $y\in B$. Suponhamos que este y admita duas imagens x_1 e x_2 em A, isto é, $(y,x_1)\in g$ e $(y,x_2)\in g$. Então $(x_1,y)\in f$ e $(x_2,y)\in f$, ou seja, $f(x_1)=y=f(x_2)$. Como f é injetora, devemos ter $x_1=x_2$ e assim todo elemento y de B está relacionado com um único elemento de A. Logo, g é uma função e g é a inversa f^{-1} de f.

$(\leftarrow)$ **Hipótese:** existe f^{-1}

Tese: f é bijetora

i) provemos que f é injetora:

Sejam x_1 e x_2 em A tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$, ou seja, $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$. Então $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Como f^{-1} é função, devemos ter $x_1 = x_2$. Logo, f é injetora.

ii) provemos que f é sobrejetora:

Seja $y \in B$. Como f^{-1} é função, existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$. Então $(x, y) \in f$, ou seja, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo, f é sobrejetora.

De (i) e (ii) temos que f é bijetora.

■

Observação 18. Quando existe a inversa de uma função f, dizemos que f é **inversível**.

Observação 19. Quando $f : A \to B$ é inversível, para $x \in A$ e $y \in B$, $f(x) = y$ se e somente se $f^{-1}(y) = x$.

Observação 20. $\mathrm{D}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{D}(f)$.

Observação 21. Se uma função $f : A \to B$ é injetora, a função $f_1 : A \to \mathrm{Im}(f)$ será inversível. Em outras palavras, se restringirmos o contradomínio de uma função injetora à sua imagem, ela será inversível.

Exemplo:

33) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ não é inversível, mas

$$h : [0, \infty) \to [0, \infty), h(x) = x^2$$

é inversível e sua inversa é $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Exercícios resolvidos

1) Encontre a inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 - 1$.

Resolução: $y = 2x^3 - 1,\ \ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$y+1=2x^3$$
$$x^3=\frac{y+1}{2}$$
$$x=\sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}=f^{-1}(y)$$

Assim, a função inversa de f é a função:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

Note que podemos usar qualquer letra para identificar a variável independente. Podemos então escrever:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} \text{ ou então}$$

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(t)=\sqrt[3]{\frac{t+1}{2}}.$$

2) Encontre a inversa da função $f:(-\infty,0]\to[5,+\infty)$, $f(x)=3x^2+5$.

Resolução: $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

$$y=3x^2+5$$
$$x^2=\frac{y-5}{3}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{y-5}{3}}$$

Como $x<0$, tomamos $x=-\sqrt{\frac{y-5}{3}}$. A inversa de f será então:

$$f^{-1}:(5,+\infty)\to(-\infty,0], f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x-5}{3}}.$$

Observação 22. Muitas vezes sabemos que a função é inversível, mas não conseguimos a expressão da inversa devido à dificuldade (ou até impossibilidade) de "isolar" a variável independente em função da variável dependente. Por exemplo: usando as idéias do

Cálculo podemos mostrar que $f(x) = x^5 + x + 1 = y$ é inversível. Você consegue "isolar" x em função de y?

Propriedades da função inversa

P1) A inversa de uma função é única.

Demonstre como exercício.

P2) Se f é inversível, então f^{-1} é inversível e $(f^{-1})^{-1} = f$ (ou ainda: a inversa da inversa de uma função é a própria função).

Demonstre como exercício.

P3) Se $f : A \to B$ e $h : B \to C$ são inversíveis, então $h \circ f : A \to C$ é inversível e $(h \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}$.

Demonstração:

Para provarmos esta propriedade, devemos provar inicialmente que a composta de duas funções bijetoras é bijetora.

i) $h \circ f$ é injetora:

Sejam x_1 e x_2 em A tais que $(h \circ f)(x_1) = (h \circ f)(x_2)$. Então $h(f(x_1)) = h(f(x_2))$. Como h é injetora, devemos ter $f(x_1) = f(x_2)$; como também f é injetora, temos $x_1 = x_2$ e $h \circ f$ é injetora.

ii) $h \circ f$ é sobrejetora:

Seja $z \in C$; como h é sobrejetora, existe $y \in B$ tal que $h(y) = z$. Como também f é sobrejetora, temos que existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Assim, existe $x \in A$ tal que $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y) = z$ e $h \circ f$ é sobrejetora. Complete a demonstração como exercício.

■

P4) O gráfico de f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.

Como exemplo, esboce os gráficos de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$ e de sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

Exercícios propostos

7) Verifique a propriedade P3 para as funções
$f:(0,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=\dfrac{2}{5x}$ e $g:(0,\infty)\to(-3,\infty),\ g(x)=4x^2-3$.

8) Um fazendeiro tem $100\,\text{m}$ de cerca para construir um galinheiro retangular. Chamando x o comprimento de um lado do galinheiro, descreva a área em função de x. Use o resultado para achar a maior área possível e os comprimentos dos lados que dão esta área.

9) Suponha agora que o fazendeiro da questão (8) decida construir a cerca, mas aproveitando a parede de um celeiro, de modo que ele terá de cercar apenas 3 lados. Se t é o comprimento de um lado perpendicular à parede do celeiro, ache a área cercada como função de t. Ache também a maior área possível e os comprimentos dos lados que dão esta área.

10) A área de um retângulo pode ser função de seu perímetro?

11) Seja $f(x)=x^2-3x+2$. Encontre o valor de x tal que $f(x)=0,5$.

12) Mostre que a operação "adição de números naturais" é uma função: $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(a,b)=a+b$ (lembre que: $(a,b)=(c,d)$ se e somente se $a=c$ e $b=d$).

13) Determine o domínio das funções:

a) $f(x)=\dfrac{4x-5}{3x-1}$

b) $g(x)=\dfrac{x-8}{x^2-7x+6}$

c) $h(x)=\dfrac{2x+5}{\sqrt{3x+5}}$

14) Classifique as funções seguintes em: (I) injetora, (II) sobrejetora, (III) bijetora, (IV) não injetora e (V) não sobrejetora:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=1-x^2$

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ h(x)=|x-1|$

d) $m:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ m(x)=-3x+2$

e) $n:\mathbb{R}\to\mathbb{Z},\ n(x)=[x]$ (maior inteiro)

f) $p:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ p(x)=\dfrac{1}{x}$

g) $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ q(x)=x^3$

h) $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ r(x)=|x|\cdot(x-1)$

15) Determine o menor valor de b em $B=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq b\}$ de modo que a função f de $\mathbb{R}$ em B definida por $f(x)=x^2-4x+6$ seja sobrejetora.

16) Determine o maior valor de a em $A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\leq a\}$ de modo que a função f de A em $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^2-3x+4$ seja injetora.

17) Os conjuntos A e B têm respectivamente m e n elementos. Considera-se uma função $f:A\to B$. Qual a condição sobre m e n para que f possa ser injetora? E para f ser sobrejetora? E bijetora?

18) Quantas funções injetoras podemos definir de $A=\{a,b\}$ em $B=\{c,d,e,f\}$?

19) Quantas funções sobrejetoras podemos definir de $A=\{a,b,c\}$ em $B=\{d,e\}$?

Resumo

Neste capítulo estudamos:

1) O conceito de função;
2) O gráfico de uma função;
3) Funções crescentes e funções decrescentes;
4) Funções injetoras, funções sobrejetoras e funções bijetoras;
5) Composição de funções;
6) Função inversa.

Capítulo 5

Funções elementares

Capítulo 5

Funções elementares

O objetivo deste capítulo é fazer um estudo das funções elementares, as quais servem de modelo para a descrição de fenômenos e situações reais, preparando o caminho para a compreensão do Cálculo Diferencial e Integral. Nosso estudo terá como base o capítulo anterior: provavelmente você terá que se deslocar para aquele universo várias vezes. Veremos as funções polinomiais, funções racionais e funções trigonométricas. Use seus conhecimentos de pacotes computacionais para visualizar gráficos; no final do capítulo listaremos alguns deles. Lembre-se que deste estudo dependerá seu sucesso nas disciplinas de Cálculo.

5.1 Funções polinomiais

Estudaremos com detalhes as funções polinomiais de grau um (função afim) e dois (função quadrática). Em seguida faremos alguns comentários sobre as funções polinomiais de outros graus.

5.1.1 Função afim

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem constantes reais a e b tais que $f(x)=ax+b$, para todo $x\in\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}$ é o "maior" conjunto de valores para os quais é possível encontrar $f(x)$. Quando o domínio não é especificado, estaremos considerando-o como o conjunto $\mathbb{R}$.

Um exemplo de situação real descrita por uma função afim é o preço a pagar por uma corrida de táxi: o valor da corrida depende da distância percorrida (em km) e dos valores constantes do km rodado e da bandeirada. A distância percorrida em km é multiplicada por uma constante a (o valor do km rodado), e a este produto adiciona-se um valor constante inicial b (que é o valor da bandeirada), resultando no preço a pagar. Assim, a distância percorrida (em km) é a variável independente x e $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$ é o preço a pagar pela corrida.

Exemplos de funções afins:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 7$ $(a = 3 \text{ e } b = 7)$

2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 1$ $(a = -1 \text{ e } b = 1)$

3) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{2}x - 23$ $(a = \frac{1}{2} \text{ e } b = -23)$

4) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k(x) = \sqrt{7}x$ $(a = \sqrt{7} \text{ e } b = 0)$

5) $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s(x) = 59$ $(a = 0 \text{ e } b = 59)$

Casos particulares da função afim

i) $a = 0$

Neste caso, $f(x) = b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e a função chama-se função *constante* (veja o exemplo 5). O gráfico da função constante $f(x) = b$ é o conjunto $G(f) = \{(x, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \, / \, x \in \mathbb{R}\}$, uma reta paralela ao eixo x e que passa pelo ponto $(0, b)$.

Exemplo:

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3$

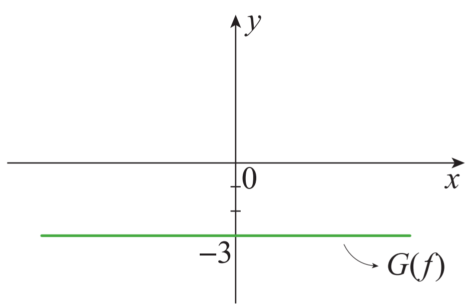


Figura 5.1

Observação 1. Você pode notar que o nome de função *constante* já revela o comportamento da função: independente da variável x, o valor de $f(x)$ é sempre o mesmo.

ii) $a = 1$ e $b = 0$

Neste caso $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, e esta é a função *identidade*, já vista no Capítulo 4. Seu gráfico é o conjunto $G(f) = \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in \mathbb{R}\}$, a reta que é a bissetriz do primeiro e do terceiro quadrantes.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$$

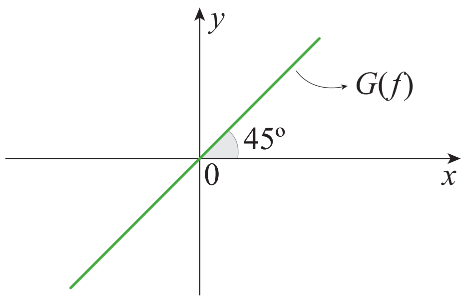


Figura 5.2

iii) $b = 0$ e $a \neq 0$

Neste caso $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, e estas são chamadas funções *lineares*. O gráfico de uma função linear é o conjunto $G(f) = \{(x, ax) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, x \in \mathbb{R}\}$, uma reta que passa pela origem do plano cartesiano, uma vez que $f(0) = 0$.

Exemplos:

7) $f(x) = -\dfrac{x}{5}$

x	$y = f(x)$
0	0
10	-2

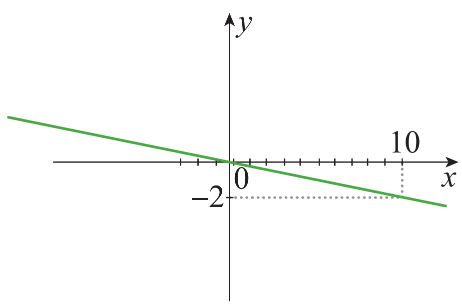
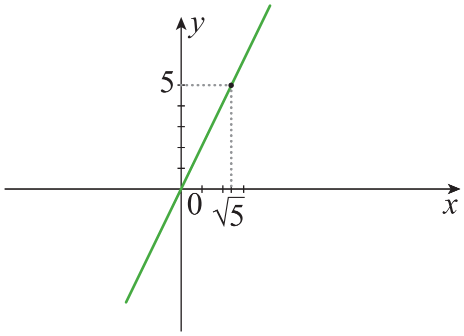


Figura 5.3

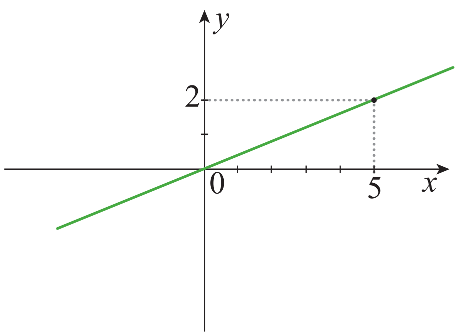
8) $f(x)=\sqrt{5}x$



x	$y=f(x)$
0	0
$\sqrt{5}$	5

Figura 5.4

9) $f(x)=\dfrac{2}{5}x$



x	$y=f(x)$
0	0
5	2

Figura 5.5

Gráfico de uma função afim

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$. Podemos considerar $a\neq 0$, uma vez que já conhecemos o gráfico da função constante.

Proposição. O gráfico $G(f)$ da função $f(x)=ax+b$ é uma reta.

> **Demonstração:** Sejam $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ e $S(x_3,y_3)$ pontos quaisquer do gráfico de f. Nosso objetivo é mostrar que estes três pontos são colineares, isto é, estão alinhados. Lembrando que o gráfico é o conjunto dos pares ordenados $(x,f(x))$, podemos escrever: $y_1=ax_1+b,\ y_2=ax_2+b$ e $y_3=ax_3+b$. Veja a figura:

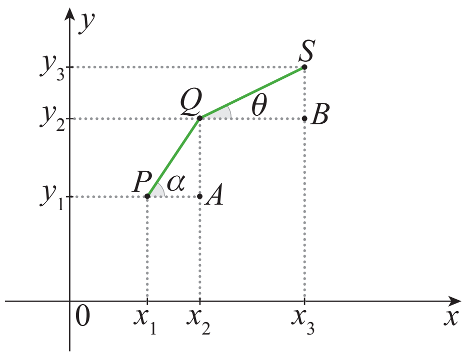


Figura 5.6

Os triângulos PAQ e QBS são triângulos retângulos. As tangentes dos ângulos α e θ são dadas pelas razões $\dfrac{AQ}{AP}$ e $\dfrac{BS}{BQ}$:

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Analogamente, temos que $\dfrac{BS}{BQ} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$. Assim, $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{BS}{BQ}$.

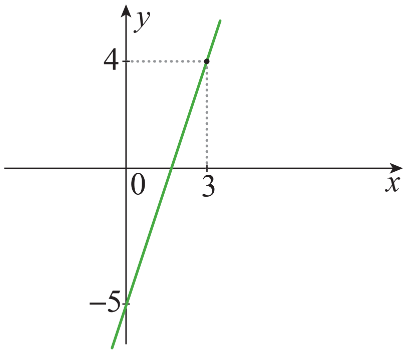
E como os ângulos em A e B são retos, segue que os triângulos PAQ e QBS são semelhantes e assim os ângulos α e θ são iguais. Conclui-se daí que os pontos P, Q e S estão alinhados. Como P, Q e S são pontos quaisquer do gráfico, fica provado que o gráfico da função afim é uma reta.

■

Conseqüência: O gráfico de uma função afim fica completamente determinado por apenas dois pontos (lembre-se que existe uma única reta que passa por dois pontos).

Exemplos:

10) Esboçar o gráfico da função $f(x) = 3x - 5$

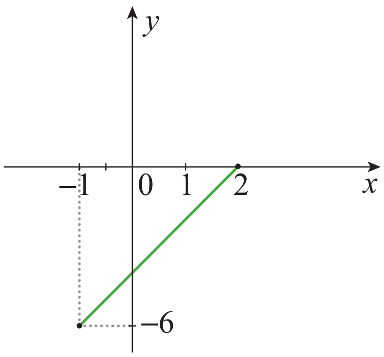


x	$y = f(x)$
0	-5
3	4

Figura 5.7

Observação 2. Uma função afim pode estar definida em um intervalo, isto é, podemos restringir seu domínio a um intervalo. Neste caso, seu gráfico é um segmento de reta. Veja o exemplo 11:

11) $f:[-1,2] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$.



x	$y = f(x)$
-1	-6
2	0

Figura 5.8

Observação 3. Se $f(x) = ax + b$, chamamos o número a de "coeficiente angular da reta" que representa o gráfico da função f, ou "taxa de crescimento da função f". Note que $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, para quaisquer números reais x_2 e x_1. Veja a figura:

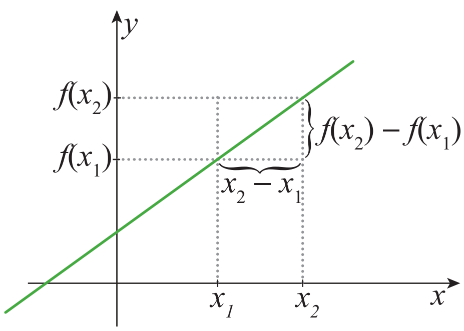
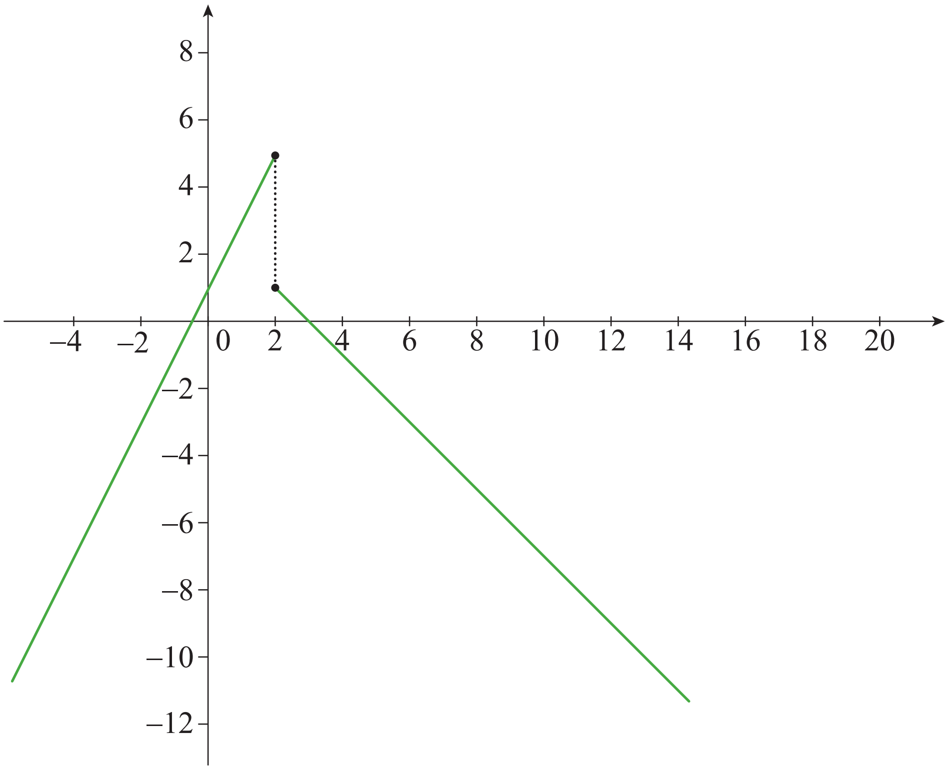


Figura 5.9

Exercício resolvido

1) Fazer o gráfico da função definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ se } x < 2 \\ -x+3 \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$



2) Seja $f(x) = ax + b$. Mostre que:

a) se $a > 0$, f é crescente;

b) se $a < 0$, f é decrescente.

Resolução.

a) Sabemos do Capítulo 4 que:

"Uma função é crescente em um conjunto A de seu domínio se e somente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$, para todos x_1 e x_2 no conjunto A".

Como o domínio de f é $\mathbb{R}$, vamos considerar x_1 e x_2 dois números reais quaisquer, com $x_1 < x_2$. Pela Obs. 3 sabemos que

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

e neste caso podemos escrever $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)$. Por hipótese, temos $a>0$ e também estamos considerando $x_1<x_2$, o que significa $x_2-x_1>0$. Então, $a(x_2-x_1)>0$. Assim, $a(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1)>0$, ou seja, $f(x_1)<f(x_2)$. Logo, f é crescente.

b) Do Capítulo 4 sabemos que:

"Uma função f é decrescente em um conjunto A de seu domínio se e somente se $x_1<x_2$ implica $f(x_1)>f(x_2)$, para todos x_1 e x_2 no conjunto A".

Consideremos então x_1 e x_2 dois números reais quaisquer, com $x_1<x_2$; então $x_2-x_1>0$ e como por hipótese $a<0$, teremos $a(x_2-x_1)>0$. Logo, $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)<0$, o que significa que $f(x_1)>f(x_2)$. Concluímos então que f é decrescente.

Inversa de uma função afim

Com exceção das funções constantes, toda função afim é inversível. Isto acontece porque as funções afins são bijetoras (prove isso como exercício!). Vamos fazer um exemplo de como encontrar a inversa de uma função afim:

Exemplo:

12) Calcular a inversa da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x+1$

Resolução. Estamos procurando uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(g(x))=x$ e $g(f(x))=x$ para todo x real (lembre-se da definição de função inversa, no Capítulo 4). Então fazemos: $f(g(x))=5\cdot g(x)+1=x$

A segunda igualdade nos dá a função procurada:

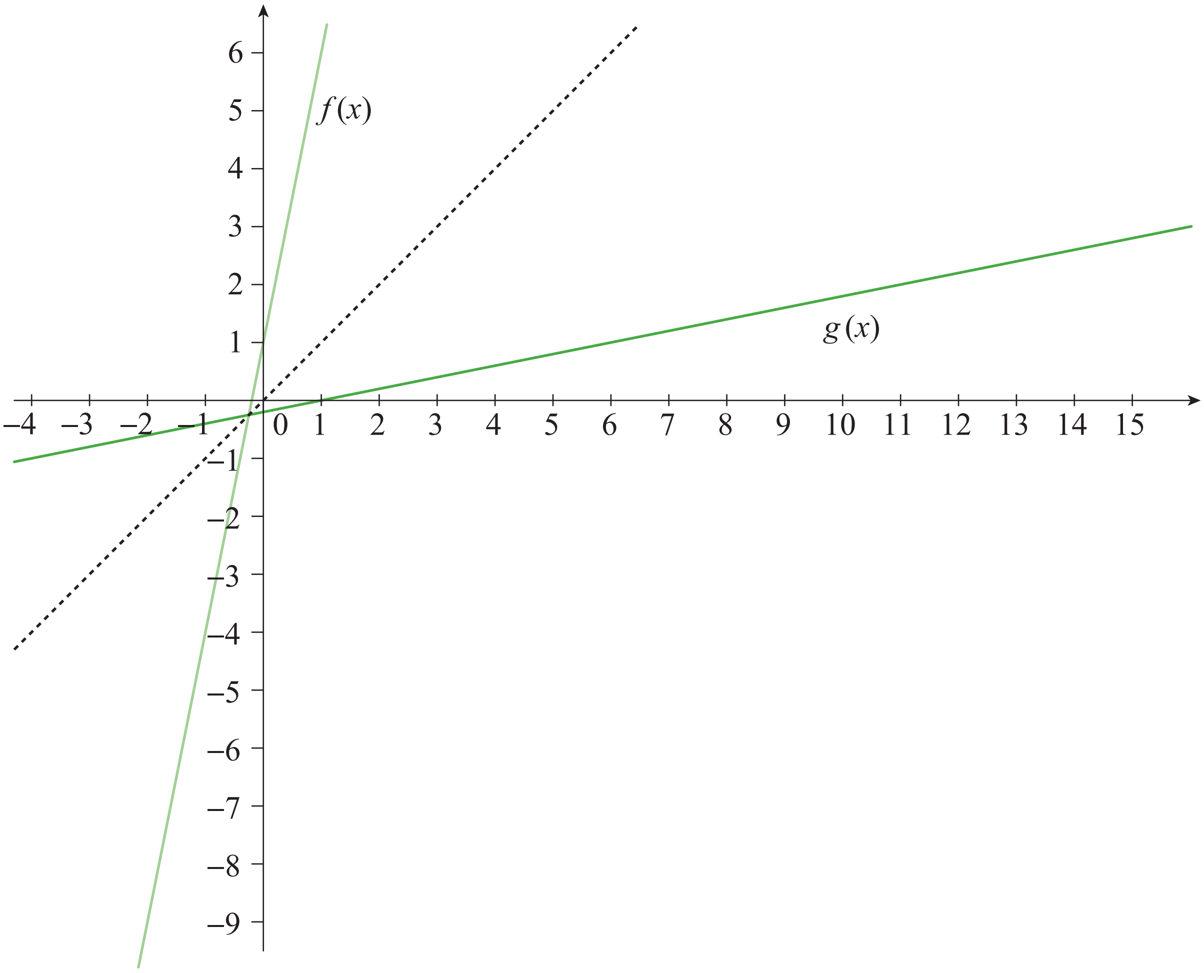
$$g(x)=\frac{x-1}{5}$$

Também se verifica que

$$g\big(f(x)\big)=\frac{f(x)-1}{5}=\frac{5x+1-1}{5}=\frac{5x}{5}=x$$

Assim, g é a função inversa de f e é anotada $f^{-1}: f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{5}$

Vamos fazer os gráficos de f e de f^{-1} no mesmo sistema de eixos.



Exercícios propostos

1) Faça o gráfico das funções:

a) $f(x) = -\dfrac{1}{13}x + \dfrac{3}{5}$

b) $h(x) = \sqrt{2}x$

c) $g(x) = 6$

d) $k:(-1,1) \to \mathbb{R},\ k(x) = -3x + 2$

e) $s(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

2) Defina a função afim cujo gráfico contém os pontos $(1,5)$ e $(-9,10)$.

3) Encontre a inversa das funções:

a) $f(x) = -4x - 1$

b) $g(x) = \dfrac{x-1}{8}$

c) $h(x) = 7x$

4) Para $f(x) = \dfrac{45}{100}x - \dfrac{2}{3}$, calcule x de modo que $f(x) = \dfrac{7}{5}$.

5.1.2 Funções quadráticas

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática (ou função polinomial do segundo grau) se existem constantes reais *a*, *b* e *c*, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplos:

13) $f(x) = 5x^2 - 2x \quad (a = 5,\ b = -2,\ c = 0)$

14) $g(x) = \pi x^2 + 1 \quad (a = \pi,\ b = 0,\ c = 1)$

15) $h(x) = x^2 + 7x - \dfrac{1}{2} \quad \left(a = 1,\ b = 7,\ c = -\dfrac{1}{2}\right)$

Observação 4. Não confunda a *função quadrática* com a *equação do segundo grau*! Muitas vezes vemos também a expressão *função do segundo grau*, que não está correta, uma vez que não há definição do que seja o *grau* de uma função.

Você sabe a diferença?

Observação 5. Resolução de problemas que utilizam uma função quadrática ou uma equação do segundo grau, estão entre os mais antigos da matemática.

Raízes da função quadrática

As raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores x para os quais se tem $f(x) = 0$, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$ (esta é uma *equação do segundo grau*). As raízes da equação $f(x)=0$ também são chamadas de raízes da função quadrática $f(x)$.

Observação 6.

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, temos duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, não existem raízes *reais* para a função $f(x)$. Neste caso as raízes serão *números complexos* dados por

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ ou } x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \text{ com } i = \sqrt{-1}.$$

- Se $\Delta = 0$, temos duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

Gráfico da função quadrática

Aprendemos que o gráfico de uma função quadrática é sempre uma *parábola*. Mas o que é uma parábola?

Definição. Dados um ponto F no plano e uma reta d que não contém F, a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de F e de d. O ponto F é o foco da parábola e d é a reta diretriz.

Observação 7. Uma parábola é então uma curva no plano, que é simétrica, sendo o eixo de simetria a reta que contém o foco F e que é perpendicular à reta diretriz. Veja a figura:

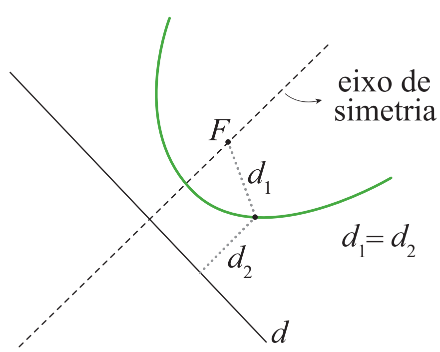
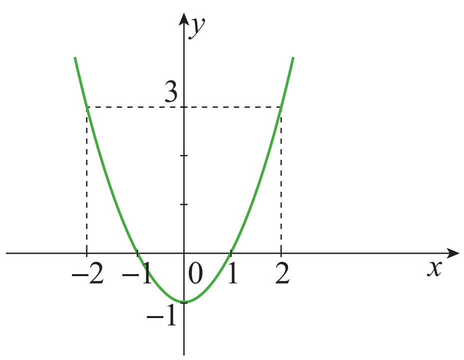


Figura 5.10

A parábola é a curva que serve de modelo para o gráfico da função quadrática. Mas nem toda parábola é o gráfico de uma função deste tipo. As parábolas que serão gráficos de funções quadráticas são aquelas cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Y. Com estas informações, como comentamos no Capítulo 4, alguns pontos, obtidos atribuindo valores à variável independente x, são suficientes para esboçar o gráfico de uma função quadrática. Valores especiais da variável independente x são as raízes e $x=0$. Lembre-se que as raízes são tais que $f(x)=0$. Assim, os pontos $(x,0)$, x real, são pontos de intersecção da curva com o eixo X; dizemos também que a curva "corta" o eixo X nos pontos $(x,0)$. Para $x=0$ temos $f(0)=c$ (pois $f(x)=ax^2+bx+c$), e $(0,c)$ é o ponto de intersecção da curva com o eixo Y (ou o ponto onde a curva "corta" o eixo Y).

Exemplo:

16) Esboçar o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-1$



x	$y=f(x)$
0	-1
1	0
-1	0
2	3
-2	3

Figura 5.11

Concavidade, vértice e imagem da função quadrática

Considere a função $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$. Podemos escrever

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$ Para chegar à expressão entre colchetes, reveja o item (2) da seção 2.7.

A expressão $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior do que ou igual a zero e atinge o seu menor valor, que é zero, quando $x=\dfrac{-b}{2a}$.

A expressão $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ independe de x, ou seja, é uma constante.

Portanto, a expressão entre colchetes atinge o seu menor valor quando $x=\dfrac{-b}{2a}$.

Suponhamos $a>0$. Então $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$ atinge o seu menor valor quando $x=\dfrac{-b}{2a}$.

Isto significa que para $x=\dfrac{-b}{2a}$ o valor $f(x)$ é o *menor possível*, ou ainda, $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ é o ponto do gráfico de f que possui a *menor ordenada*. Podemos então concluir que a parábola neste caso é *côncava para cima*, como mostra a figura:

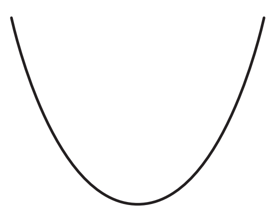


Figura 5.12

Se $a<0$, o sinal de $f(x)$ é contrário ao sinal da expressão $\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$. Então $f(x)$ atinge o seu maior valor quando $x=\dfrac{-b}{2a}$, ou seja, $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ é o ponto do gráfico de f que possui maior ordenada. Neste caso, a parábola é *côncava para baixo*, como mostra a figura:

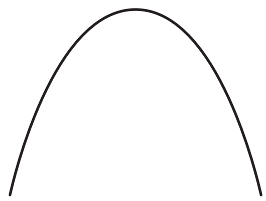


Figura 5.13

O ponto $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ é chamado de *vértice* da parábola. Calculando $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ obtemos o ponto $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$. Assim, o vértice tem coordenadas $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

A reta vertical que passa pelo vértice é o *eixo de simetria* da parábola.

Note que $y_v = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-\Delta}{4a}$ é o **menor** valor assumido pela função, se $a > 0$, e o **maior** valor assumido pela função, se $a < 0$. Isto nos dá a informação sobre o conjunto imagem da função f:

i) Se $a > 0$, $\operatorname{Im} f = [y_v, \infty)$

ii) Se $a < 0$, $\operatorname{Im} f = (-\infty, y_v]$

Observação 8. Ao esboçar o gráfico de uma função quadrática, é importante saber verificar alguns elementos da parábola:

a) Concavidade ("posição" dada pelo coeficiente a de x^2);

b) Pontos onde o gráfico "corta" o eixo X (raízes, determinadas pela solução da equação $f(x) = 0$);

c) Ponto onde o gráfico "corta" o eixo Y (cálculo de $f(0)$, ou termo independente);

d) Vértice (ponto $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$);

e) Eixo de simetria (reta $x = \dfrac{-b}{2a}$).

Exercício resolvido

3) Esboçar o gráfico da função quadrática $f(x) = -2x^2 + 7x + 4$

Resolução. Temos inicialmente $a = -2,\ b = 7$ e $c = 4$.

Seguindo o roteiro acima, observamos que:

a) $a = -2 < 0$: a parábola é côncava para baixo.

b) os pontos onde o gráfico corta o eixo X são os pontos para os quais $f(x) = 0$, ou seja, as raízes da equação $-2x^2 + 7x + 4 = 0$. Vamos calculá-las.

$-2x^2 + 7x + 4 = 0$ é equivalente a $2x^2 - 7x - 4 = 0$

(multiplicamos ambos os membros por -1).

Assim, $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4}$ e temos as raízes $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ e $x_2 = 4$.

Logo, os pontos onde o gráfico "corta" o eixo X são

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ e } (4, 0).$$

c) O ponto onde o gráfico de f corta o eixo Y é o valor de f no ponto 0, ou seja, $f(0) = -2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 4 = 4$. Assim, este ponto é $(0, 4)$.

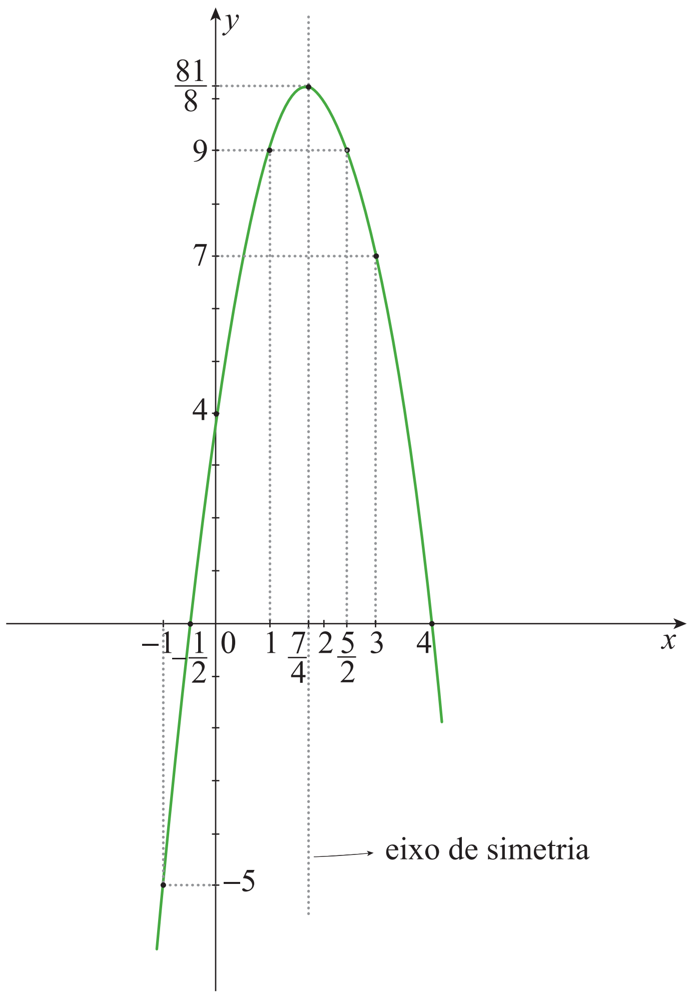
d) O vértice é dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

$$y_v = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(49+32)}{4 \cdot (-2)} = \frac{-81}{-8} = \frac{81}{8}$$

O vértice é o ponto $\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{81}{8}\right)$.

Vamos encontrar mais alguns pontos e fazer o gráfico:



x	$y = f(x)$
-1	-5
1	9
$\frac{5}{2}$	9

Figura 5.14

Observe que a imagem da função f é o intervalo $(-\infty, y_v] = \left(-\infty, \frac{81}{8}\right]$, que é a projeção ortogonal de seu gráfico no eixo das ordenadas.

Aplicação

A função quadrática serve de modelo para resolução de problemas de maximização e de minimização. Faremos dois exemplos de problemas cuja resolução depende da análise e interpretação do gráfico de uma função quadrática.

Problema 1. Entre todos os retângulos de perímetro 12 u.m., quais as dimensões daquele que possui maior área?

Resolução. Chamamos de x e y as dimensões do retângulo e $S = x \cdot y$ a sua área. Vamos escrever S como função de x usando o outro dado do problema, isto é, que o perímetro é 12 u.m. O perímetro é dado por $2x + 2y = 12$. Então $x + y = 6$ e $y = 6 - x$. Substituindo y na expressão da área, obtemos $S(x) = x \cdot (6 - x) = 6x - x^2$. Temos assim uma função quadrática $S(x)$ que expressa a área de um retângulo de perímetro 12 *u.m.* em função de uma de suas dimensões. Estamos procurando o valor máximo desta área, e isto significa que estamos procurando o valor máximo da função quadrática $S(x) = 6x - x^2$, ou $S(x) = -x^2 + 6x$. O gráfico de S é uma parábola *côncava para baixo*, pois $a = -1 < 0$. Assim, o valor máximo da função $S(x)$ é a ordenada do vértice da parábola. Vamos calcular a abscissa do vértice, lembrando que $a = -1$ e $b = 6$:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Este valor x que encontramos é uma das dimensões do retângulo que tem área máxima. Fazendo $y = 6 - x = 6 - 3 = 3$, encontramos a outra dimensão, $y = 3$. Vemos então que o retângulo de perímetro 12 u.m. que possui a maior área é o quadrado de lado 3.

Resposta. O retângulo de perímetro 12 que possui a maior área é o quadrado de lado 3.

Problema 2. De todos os números reais x e y tais que $x + 5y = 10$, determine aqueles para os quais o valor $x^2 + y^2$ seja mínimo.

Resolução. Chamamos de M o valor que queremos minimizar, ou seja, $M = x^2 + y^2$. Vamos escrever M em função de um dos números: se $x + 5y = 10$, temos que $y = \dfrac{10 - x}{5}$ e, portanto,

$$M(x) = x^2 + \left(\frac{10 - x}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} \cdot (26x^2 - 20x + 100)$$

$$= \frac{26}{25}x^2 - \frac{4}{5}x + 4$$

M é uma função quadrática com $a = \dfrac{26}{25}$, $b = -\dfrac{4}{5}$ e $c = 4$.

Como $a > 0$, a parábola que representa o gráfico de M é côncava para cima, indicando que M tem um valor mínimo no vértice. Vamos calcular este vértice:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{4}{5}}{2 \cdot \frac{26}{25}} = \frac{5}{13}.$$

Calculando o valor y, obtemos $y = \frac{10 - x}{5} = \frac{10 - \frac{5}{13}}{5} = \frac{25}{13}$. O valor mínimo de $x^2 + y^2$ será $M = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{25}{13}\right)^2 = \frac{650}{169} = \frac{50}{13}$.

Resposta. Os números procurados são $x = \frac{5}{13}$ e $y = \frac{25}{13}$.

Exercícios resolvidos

4) Faça o gráfico e determine o conjunto imagem da função

$$f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{se } x < -2 \\ x^2 - 6 & \text{se } -2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{2} & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \\ 2x & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Resolução. A função é dada por quatro sentenças:

- $-x+5$ no intervalo $(-\infty, -2)$, que é uma função afim;
- $x^2 - 6$ no intervalo $[-2, 3)$, que é uma função quadrática;
- $\frac{9}{2}$ no intervalo $[3, 4]$, que é uma função constante;
- $2x$ no intervalo $(4, +\infty)$, que é uma função linear.

Fazendo o gráfico correspondente em cada intervalo, teremos:

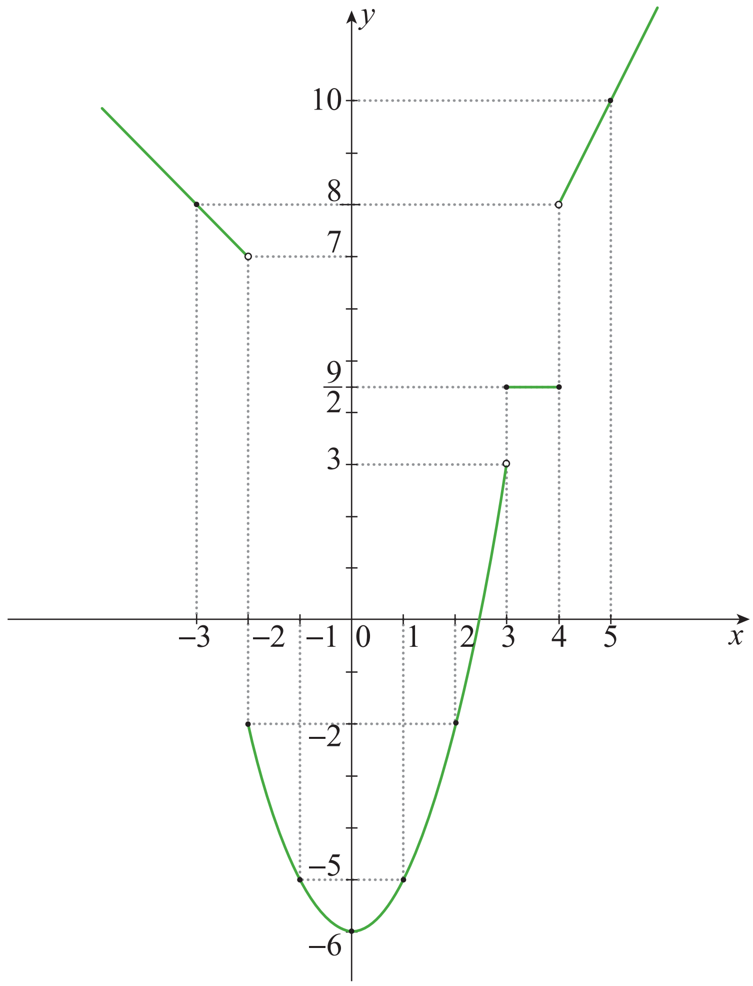


Figura 5.15

A imagem da função é a projeção ortogonal do seu gráfico no eixo das ordenadas. Assim, $\operatorname{Im} f = [-6,3) \cup \left\{ \frac{9}{2} \right\} \cup (7,+\infty)$.

5) Esboce num mesmo sistema cartesiano os gráficos das funções:

$$f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{2}x^2, h(x) = 2x^2.$$

O que você pode observar quando variamos o coeficiente a?

Resolução:

$f(x)=x^2$		$g(x)=\frac{1}{2}x^2$		$h(x)=2x^2$	
x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0
1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	2
- 1	1	- 1	$\frac{1}{2}$	- 1	2
2	4	2	2	2	8

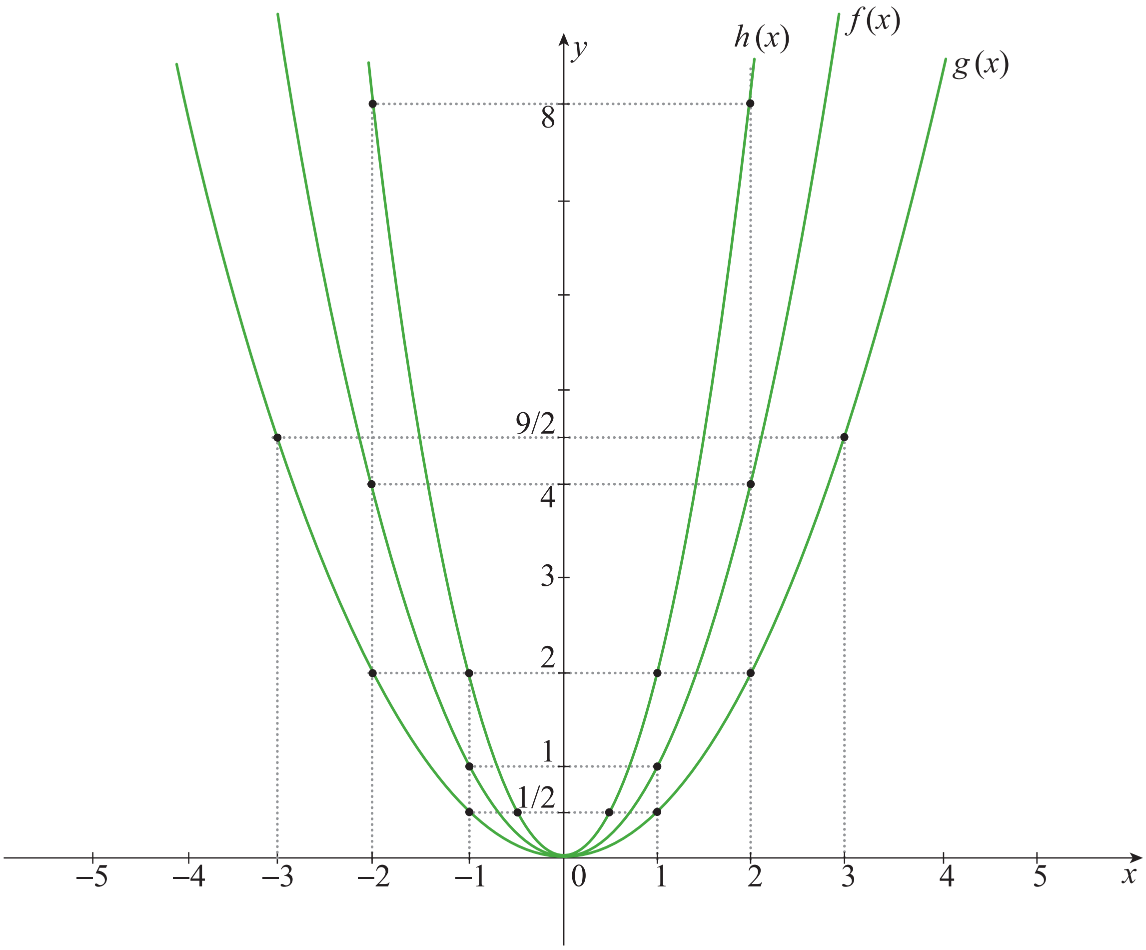


Figura 5.16

Observando o coeficiente $a > 0$, vemos que ele determina a "abertura" da parábola. Quanto menor o valor de a, maior é a "abertura".

6) Determine o maior valor de k em $A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\le k\}$ de modo que a função f de A em $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^2-3x+4$ seja injetora.

Resolução. Vamos lembrar a definição de função injetora do capítulo 4:

Dizemos que f é injetora em A se e somente se

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ \text{se}\ x_1 \neq x_2,\ \text{então}\ f(x_1)\neq f(x_2).$$

Ou, equivalentemente:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ \text{se}\ x_1 = x_2,\ \text{então}\ f(x_1)= f(x_2).$$

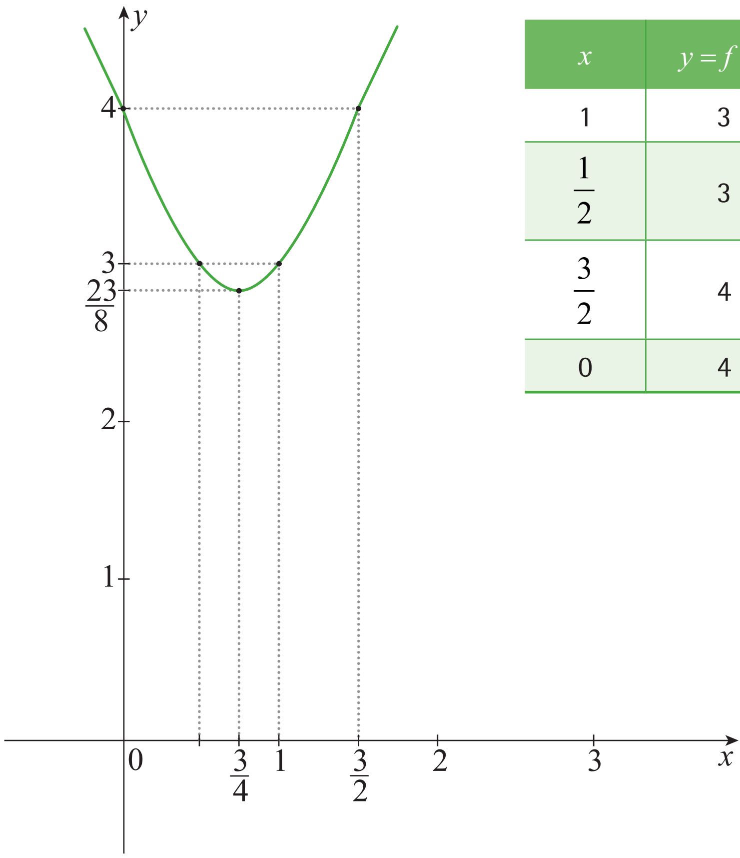
Sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola e que a parábola tem um *eixo de simetria* que passa pelo vértice e é paralelo ao eixo Y. Isto nos sugere que existem valores diferentes no domínio que possuem a mesma imagem. Vamos então fazer o gráfico de f como se $\mathbb{R}$ fosse seu domínio, e analisar que restrição devemos fazer neste domínio para que a função seja injetora. Seguindo o roteiro para construção do gráfico, observamos que:

a) O gráfico da função $f(x)=2x^2-3x+4$ é uma parábola côncava para cima (pois $a=2>0$).

b) Suas raízes não são números reais, pois $\Delta=9-32=-23<0$. Então o gráfico não "corta"(ou não intersecta) o eixo X e a parábola está situada acima do eixo X (por quê?).

c) O gráfico corta o eixo Y no ponto $(0,4)$.

d) O vértice tem coordenadas $x_v=\dfrac{3}{4}$, $y_v=\dfrac{23}{8}$. Conseqüentemente, a imagem da função é $\left[\dfrac{23}{8},+\infty\right)$ e o eixo de simetria passa pelo ponto $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{23}{8}\right)$.



x	$y = f(x)$
1	3
$\frac{1}{2}$	3
$\frac{3}{2}$	4
0	4

Figura 5.17

Analisando o gráfico, para que a função seja injetora, devemos considerar uma das "metades" da parábola (ou uma parte menor), determinadas pelo eixo de simetria. As projeções das "metades" no eixo X são os intervalos $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$. Como o enunciado estabelece que o domínio de f é $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq k\}$, ou seja, $A = (-\infty, k]$, é necessário tomar para valores de x aqueles à esquerda do vértice, ou seja, menores ou iguais do que $x_v = \frac{3}{4}$. Assim, qualquer valor de k menor ou igual a $\frac{3}{4}$ satisfaz a propriedade. O maior deles é $k = \frac{3}{4}$ e f será injetora no intervalo $A = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.

Exercícios propostos

5) Estude as funções dadas abaixo, determinando raízes, vértice, pontos de intersecção com os eixos, eixo de simetria, gráfico e conjunto imagem:

a) $f(x) = -x^2 - x + 6$

b) $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$

c) $f(x) = (3 - x)(x + 1)$

d) $f(x) = -2x^2 - 16x$

e) $f(x) = 4 - x^2$

f) $f(x) = -(3 - x)^2$

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

h) $f(x) = -(4 - 3x^2)$

6) Encontre o valor x de modo que $f(x) = x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{2}$.

7) Determine o valor b em $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\}$ de modo que a função f de $\mathbb{R}$ em B definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetora.

8) A soma de dois números reais é 6. Encontre estes dois números sabendo que seu produto é máximo.

9) Em cada item a seguir, encontre a função quadrática que satisfaz as condições dadas:

a) $f(0) = 5, f(1) = 10, f(-1) = 4$

b) o vértice do gráfico de g é $(1,2)$ e g intercepta o eixo Y em $(0,4)$.

c) o valor máximo de h é 10; o gráfico de h é simétrico em relação à reta $x = -1$ e h intercepta o eixo Y em $(0,8)$.

d) o gráfico de t intercepta o eixo x nos valores $x = 1$ e $x = 3$, e intercepta o eixo Y em $(0,8)$.

10) Um restaurante "a quilo" vende 100 kg de comida por dia, a R$ $12,00$ o quilo. Uma pesquisa revelou que, para cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 gramas cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita?

11) Considere os conjuntos $A=\left\{x\in\mathbb{R}/x\leq\frac{1}{2}\right\}$ e $B=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\}$ e as funções $f:A\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x-1$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ definida por $g(x)=x^2$ e $h:\mathbb{R}_+\to B$ definida por $h(x)=4x-1$. Determine a função inversa de $h\circ(g\circ f)$.

5.1.3. Funções polinomiais de modo geral

Definição. Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem constantes reais a_0, a_1, a_2, ..., a_n tais que

$$f(x)=a_nx^n+a_n-1x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x^1+a_0,$$

com n natural não-nulo.

Exemplos:

17) $f(x)=13x^3-4x^2+\frac{78}{11}$

$a_0=\frac{78}{11}; a_1=0; a_2=-4; a_3=13.$

18) $g(t)=8t^9+4\sqrt{2}t^5-t+1$

$a_0=1;\ a_1=-1;\ a_2=a_3=a_4=0;\ a_5=4\sqrt{2};\ a_6=a_7=a_8=0;\ a_9=8$

19) $h(t)=-3$; $a_0=-3$; as outras constantes são nulas.

Observação 9. A expressão $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$ chama-se *polinômio* e se $a_n\neq 0$, dizemos que é um *polinômio de grau* n. O grau do polinômio (e não da função!) é então o maior valor de n para o qual a_n é diferente de zero. A função:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$$

é uma *função polinomial de grau* n quando $a_n\neq 0$. As funções afim e quadrática são exemplos de funções polinomiais.

Observação 10. Se todas as constantes $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ são nulas, temos o *polinômio nulo*, cujo grau não está definido. Se a constante a_0 é não nula e todas as outras são nulas, temos um *polinômio de grau zero* (exemplo 19).

Igualdade de polinômios

Dois polinômios $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ e $b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0$ são iguais quando $m = n$ e $a_n = b_m,\ a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_2 = b_2,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0$. Assim, dois polinômios são iguais quando têm o mesmo grau e seus termos correspondentes são iguais.

Observação 11. É claro que a igualdade de funções vale para funções polinomiais. Duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$ serão iguais quando $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Isto acontece quando seus coeficientes correspondentes são iguais.

Simbolicamente, para

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0\ ,$$

$$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0$$

$f = g$ se e somente se $m = n$ e

$$a_n = b_m,\ a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_2 = b_2,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0.$$

Raízes de uma função polinomial

Dizemos que s é raiz da função polinomial

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

quando $f(s) = 0$, ou seja, quando

$$a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_2s^2 + a_1s^1 + a_0 = 0.$$

O Teorema Fundamental da Álgebra (que será estudado com detalhes posteriormente, em outra disciplina) nos diz que um polinômio de grau n tem exatamente n raízes complexas. Estas raízes não são necessariamente distintas.

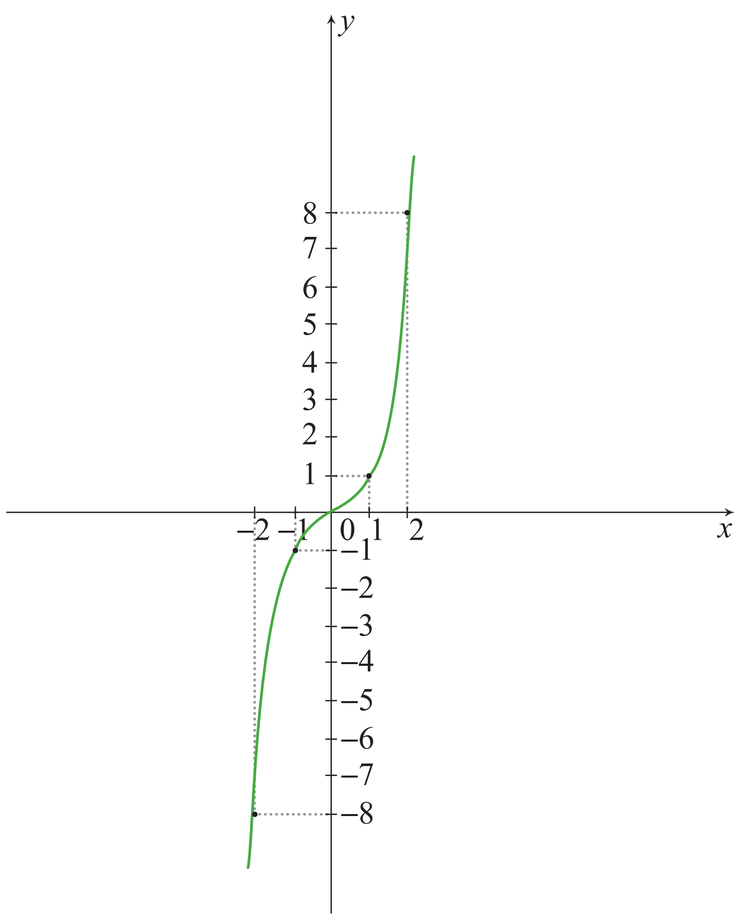
Exemplos:

20) $f(x) = x^3$ possui três raízes iguais, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Diz-se neste caso que zero é uma raiz de *multiplicidade* 3.

21) $g(x) = x^5 - x^3$ possui cinco raízes reais, mas três delas são iguais. De fato, $x^5 - x^3 = 0$ implica $x^3(x^2 - 1) = 0$ e daí obtemos as raízes $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Gráfico das funções polinomiais

Conforme já foi visto, funções polinomiais de grau 0 ou 1 (funções afins) têm como gráfico uma reta e funções polinomiais de grau 2 (funções quadráticas) têm como gráfico uma parábola. Para funções polinomiais de grau maior do que 2 não existe uma tal caracterização do gráfico. O que sabemos é que as raízes determinam pontos onde o gráfico "corta" o eixo X e o "termo independente" (coeficiente a_0) determina o ponto onde o gráfico "corta" o eixo Y. Como ilustração, vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = x^3$:



x	$y = f(x)$
0	0
-1	-1
-2	-8
-3	-27
-10	-1000
1	1
2	8
3	27
10	1000
-1/2	-1/8
1/2	1/8

Figura 5.18

$\text{Im} f = \mathbb{R}$ e f é crescente em seu domínio (prove!).

Observe também que $f(1) = -f(-1), f(2) = -f(-2), f(3) = -f(-3)$, e de modo geral $f(x) = -f(-x)$. Isto caracteriza uma função ímpar, conforme a definição a seguir:

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par quando $f(x) = -f(-x)$ para todo x em seu domínio; a função é uma função ímpar quando $f(x) = -f(-x)$ para todo x em seu domínio.

Exemplos:

22) Como já vimos, $f(x) = x^3$ é uma função ímpar, pois $f(x) = x^3$ e $f(-x) = -x^3$, ou seja, $f(x) = -f(-x)$.

23) $f(x) = x^2 + 1$ é uma função par, pois:

$f(x) = x^2 + 1$ e $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$, ou seja, $f(x) = -f(-x)$.

Observação 12. Funções pares e ímpares têm características importantes em seus gráficos:

i) o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo $Y : (x, y)$ e $(-x, y)$ são pontos do gráfico da função, para todo x do domínio.

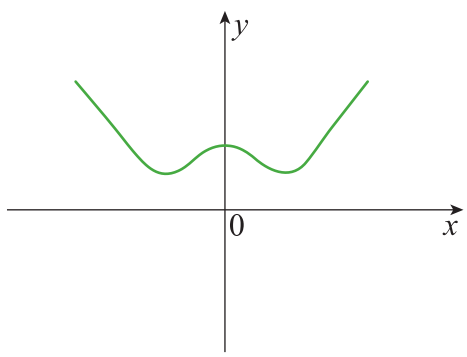


Figura 5.19 - Gráfico de uma função par.

ii) o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação a origem do plano cartesiano: (x, y) e $(-x, -y)$ são pontos do gráfico da função, para todo x do domínio.

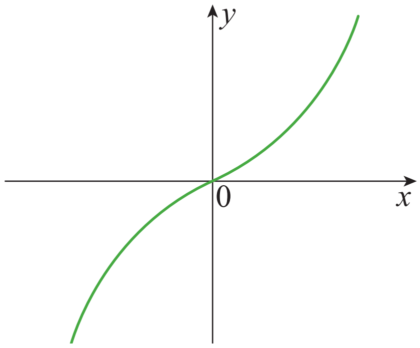


Figura 5.20 - Gráfico de uma função ímpar.

Exercícios propostos

12) Esboce o gráfico das funções $f(x) = x^3 + 1$ e $f(x) = x^3 - 1$. O que você pode observar?

13) O gráfico abaixo é o gráfico de uma função polinomial de grau 3. Determine a função.

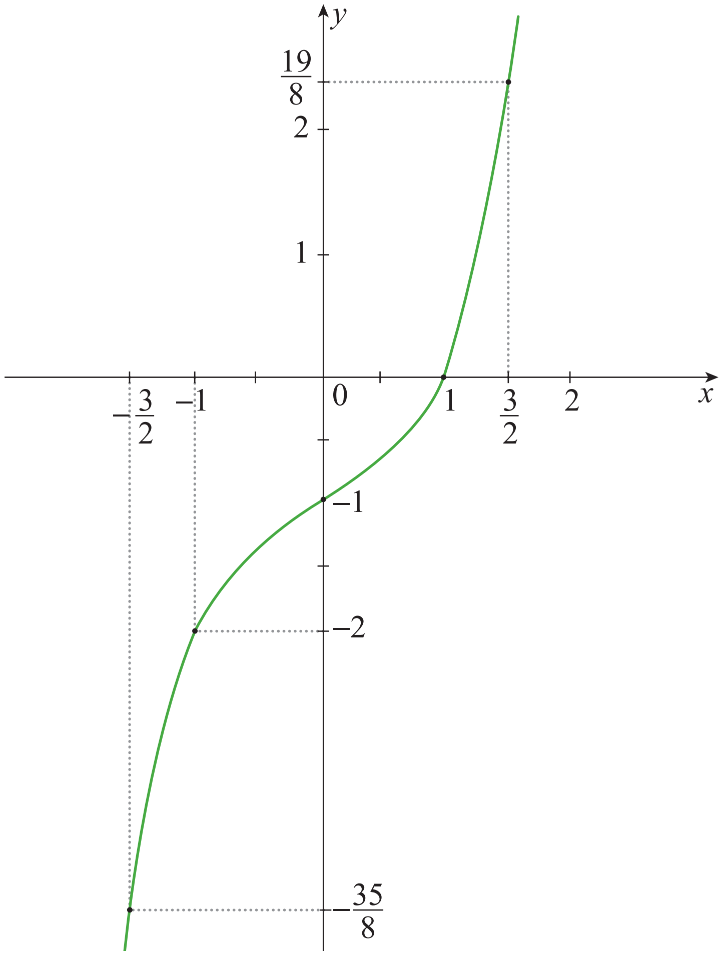


Figura 5.21

5.2 Funções racionais

As funções racionais são as funções da forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sendo P e Q funções polinomiais.

Para f estar definida, o denominador deve ser diferente de zero; o denominador será zero quando $Q(x)=0$, ou seja, nas raízes da função polinomial $Q(x)$. Assim, o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\,/\,Q(x)=0\}$.

Exemplos:

24) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; o domínio de f será $\mathbb{R}$ pois a função polinomial que aparece no denominador não se anula (não tem raízes reais): $D(f)=\mathbb{R}$.

25) $g(x)=\dfrac{1}{x+3}$; $D(g)=\mathbb{R}-\{-3\}$, uma vez que -3 é raiz da função polinomial $Q(x)=x+3$.

26) $h(x)=\dfrac{4x^3-x+1}{x^3-x}$; para determinarmos o domínio de h devemos verificar para quais valores de x a função polinomial $Q(x)=x^3-x$ se anula, ou seja, devemos calcular as raízes de $Q(x)$:

$$x^3-x=0$$
$$x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x^2-1=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1.$$

Então teremos $D(h)=\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$.

27) $K(x)=\dfrac{2}{x^4-x^2+5x-3}$; neste caso não é tão simples determinar o domínio. Não sabemos como calcular, através de uma fórmula, as raízes de uma função polinomial deste tipo. Para determinar o domínio da função K, devemos usar métodos mais elaborados de cálculo de raízes através de aproximações. Você estudará estes métodos após as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Observação 13. Para as funções polinomiais de grau 4 do tipo $h(x) = ax^4 + bx^2 + c$, isto é, com os coeficientes de x^3 e x iguais a zero, podemos calcular as raízes usando uma mudança de variável, isto é, fazendo $x^2 = y$ (conseqüentemente $x^4 = y^2$) e construindo uma nova função $h_1(x) = ay^2 + by + c$. As raízes de h_1 irão determinar as raízes de h.

As equações do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ são chamadas *equações biquadradas*.

Exemplo:

28) Determinar as raízes de $h = x^4 - 5x^2 - 4$

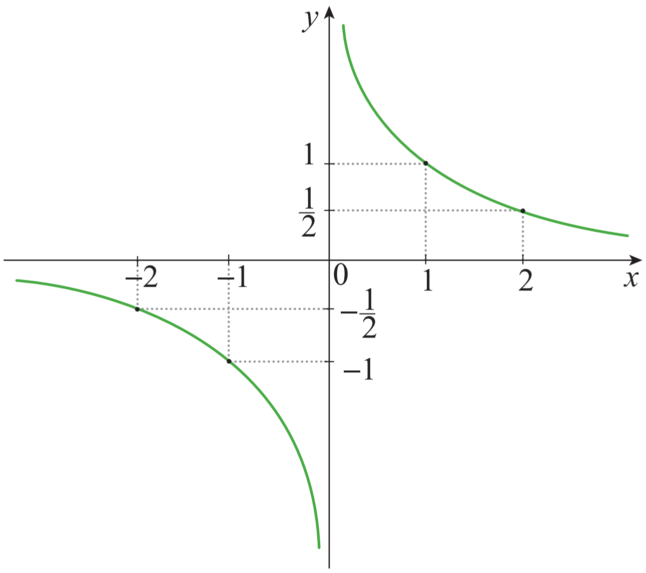
Resolução: Fazendo a mudança de variável, $x^2 = y$, obtemos $h_1(x) = y^2 - 5y + 4$. Para $h_1(y) = 0$, temos $y^2 - 5y + 4 = 0$ (uma equação do segundo grau) e as raízes são $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Como $x^2 = y$, fazemos $x^2 = 1$ e $x^2 = 4$; resolvendo estas equações, temos $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = -2$. Estas são as raízes da função $h(x)$.

Gráfico das funções racionais

Não é possível fazer generalizações sobre o gráfico destas funções. Mas é possível verificar algumas regularidades nos gráficos das funções racionais. Vejamos:

Exemplos:

29) $f(x) = \dfrac{1}{x}; D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$



x	$y = f(x)$
1	1
-1	-1
2	$\frac{1}{2}$
-2	$-\frac{1}{2}$

Figura 5.22

Note que $f(x)=\frac{1}{x}$ é uma função ímpar (prove!). Para $x>0$, à medida que x se aproxima de zero, o valor da função "aumenta" (quanto menor o denominador, maior a fração). Por outro lado, à medida que $x>0$ assume valores cada vez maiores, o valor da função se aproxima de zero.

Tarefa

O que acontece à esquerda do eixo Y ?

Exemplos:

30) $f(x)=\frac{1}{x-2}; D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

x	$y=f(x)$
0	$-\frac{1}{2}$
1	-1
$\frac{3}{2}$	-2
$\frac{5}{2}$	2
10	$\frac{1}{8}$
-10	$-\frac{1}{12}$

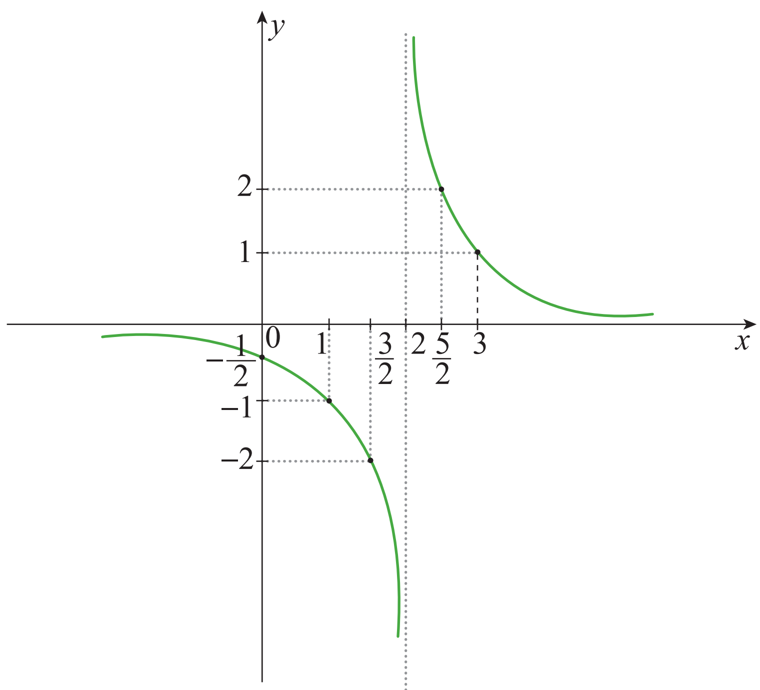
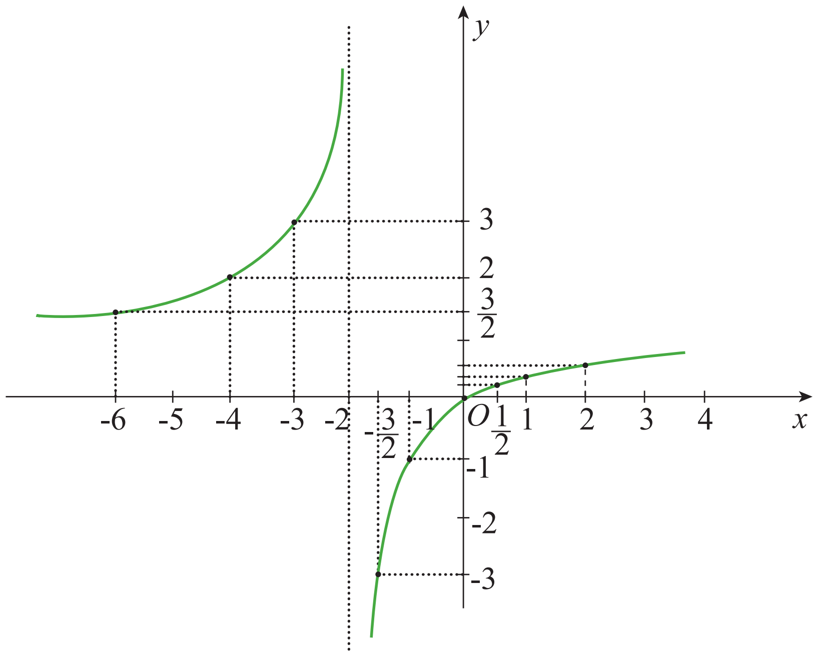


Figura 5.23

Note a semelhança do gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x-2}$ com o gráfico da função do exemplo anterior. O gráfico de $f(x)=\frac{1}{x-2}$ pode ser obtido pelo deslocamento horizontal (de duas unidades) do gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}$.

31) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}; D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

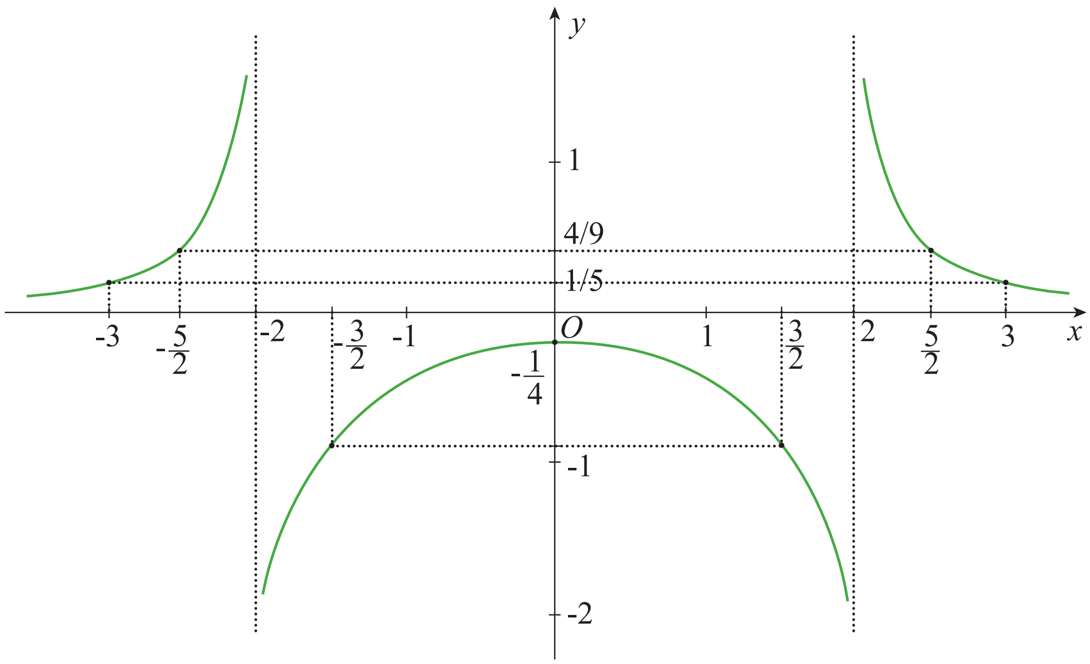


x	$y=f(x)$
0	0
1	1/3
2	1/2
-1	-1
-3	-3
-4	2
-6	3/2
1/2	1/5
-3/2	-3

Figura 5.24

Observe, também neste exemplo, a semelhança com os gráficos dos exemplos anteriores.

32) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}; D(f)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$



x	$y=f(x)$
0	$-\frac{1}{4}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{5}$
3	$\frac{1}{5}$
-3	$\frac{1}{5}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{4}{9}$
$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{9}$

Figura 5.25

Note que este gráfico difere dos anteriores; observe que a função que aparece no denominador é uma função quadrática.

Exercícios propostos

14) Dê o domínio e faça o gráfico das funções racionais:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

b) $g(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

c) $h(x)=1+\dfrac{1}{x-3}$

15) Dê os intervalos de crescimento e decrescimento das funções do exercício anterior.

5.3 Função-módulo

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$ é chamada "função-módulo". Lembrando a definição de módulo, $|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$, temos $f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$.

O gráfico de f será:

x	$y=f(x)$
1	1
-1	1
2	2
-2	2
0	0

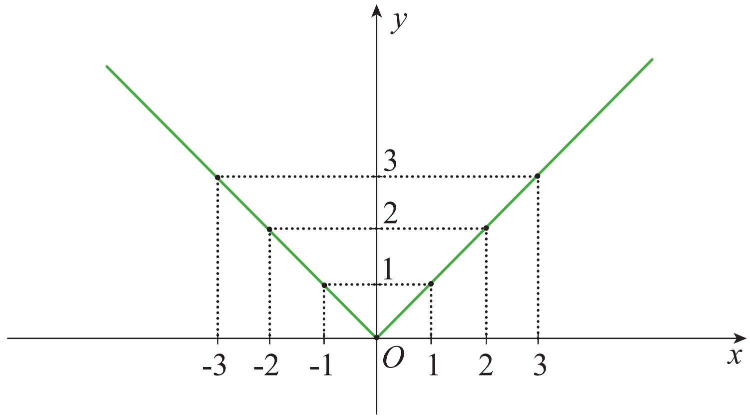


Figura 5.26

Observando o gráfico, vemos que $\operatorname{Im} f=[0,+\infty)$.

Exemplos de função-módulo composta com outras funções:

33) $f(x) = |3x - 6|$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & \text{se } 3x - 6 \geq 0 \\ -(3x - 6) & \text{se } 3x - 6 < 0 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações, temos:

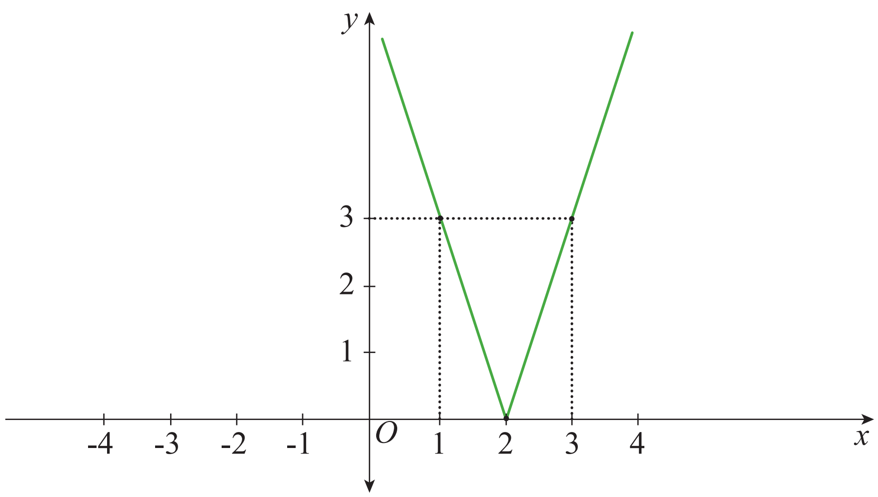
$$3x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$$

$$3x - 6 < 0 \Rightarrow 3x < 0 \Rightarrow x < 2$$

Assim, a função f pode ser escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x + 6 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

O gráfico de f é:



x	$y = f(x)$
2	0
1	3
3	3
4	6
-1	9

Figura 5.27

Observamos pelo gráfico que $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$.

34) $g(x) = |x^2 - 5|$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se } x^2 - 5 \geq 0 \\ -x^2 + 5 & \text{se } x^2 - 5 < 0 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações, temos:

$$x^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{5} \text{ ou } x \leq -\sqrt{5}$$

$$x^2 - 5 < 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

A função g pode ser escrita como

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se } x \geq \sqrt{5} \text{ ou } x \leq -\sqrt{5} \\ -x^2 + 5 & \text{se } -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

O gráfico de g é:

x	$y = f(x)$
$\sqrt{5}$	0
$-\sqrt{5}$	0
3	4
-3	4
-1	4
1	4

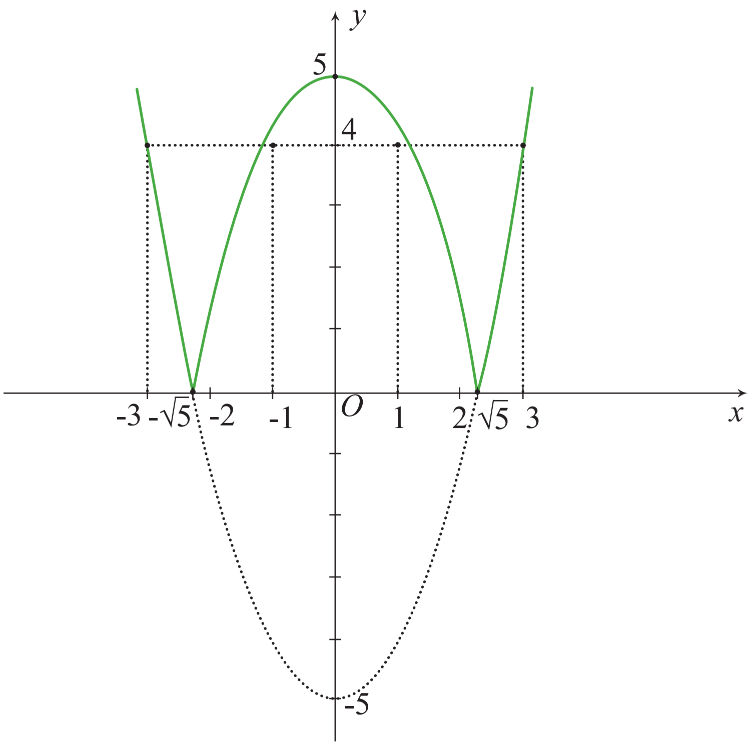


Figura 5.28

Observe a diferença do gráfico de g com o gráfico de $h(x) = x^2 - 5$. No gráfico da função g a parte correspondente aos valores entre as raízes de h foi "rebatida" para a parte positiva do plano (acima do eixo X).

Observação 14. O gráfico de uma função-módulo estará sempre acima do e/ou sobre o eixo X.

Exercícios propostos

16) Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = |4 - 2x|$

b) $g(x) = 1 + x + |x| + |x^2 - 2|$

c) $h(x) = \dfrac{x}{|x|}$

17) Dê o domínio e construa o gráfico da função:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{-x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 2}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.4 Funções trigonométricas

Vamos inicialmente estudar alguns conceitos básicos necessários à compreensão das funções trigonométricas: arco de circunferência, medidas de arcos, ângulo central e arcos côngruos.

Todos estes conceitos foram trabalhados nos cursos de Geometria I e II. É conveniente que você tenha bastante clareza destes para prosseguir neste estudo. Se você tem dúvidas, volte àqueles materiais e aprofunde seus conhecimentos. Aqui será apresentada uma revisão sucinta destes conceitos e sua operacionalização.

Arco de circunferência

Considere uma circunferência qualquer e nela fixe um ponto A.

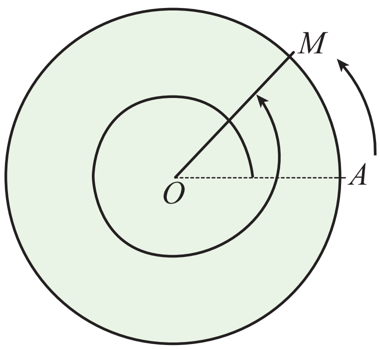


Figura 5.29

Suponha que um ponto móvel desloque-se sobre a circunferência a partir de A, sempre no mesmo sentido, até parar no ponto M.

O caminho percorrido pelo ponto é o *arco* $\overset{\frown}{AM}$. Dizemos que $\overset{\frown}{AM}$ é um “arco de circunferência”.

Pergunta: como medimos este arco? (lembre-se de suas disciplinas de geometria!)

Medidas de arcos

Você já se perguntou por que foi feita a divisão em 360 partes e não em 100, por exemplo? A origem dessa escolha é histórica, pois foi criada inicialmente pelos babilônios e também por povos pré-colombianos das Américas (Incas, Maias...), que utilizavam um sistema de numeração com base sexagesimal. Outra explicação é o estabelecimento de uma relação com o chamado movimento de Translação da Terra em torno do Sol, que alguns povos acreditavam se completar em 360 dias.

São usadas basicamente duas medidas de arcos: o grau, que você já conhece e é usado há milênios, e o radiano, que você também conhece, unidade que vamos usar em nosso estudo das funções trigonométricas.

Grau: uma circunferência é dividida em 360 partes iguais; cada uma dessas partes é um arco que mede 1 grau. Assim, a circunferência toda mede 360 graus e um arco de x graus corresponde a $\frac{x}{360}$ da circunferência (veja a figura 5.30). Denotamos x graus por x^{o}.

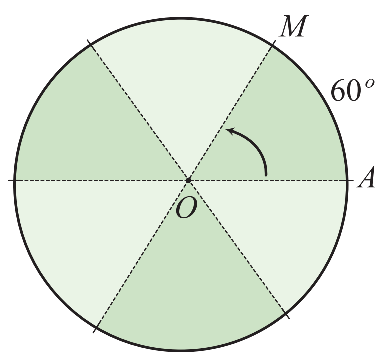


Figura 5.30

Radiano: diz-se que um arco mede um radiano se seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém (pense que você pode "esticar" o arco e colocá-lo sobre uma régua). A notação para radiano é rad e um radiano corresponde a aproximadamente $57,296$ graus.

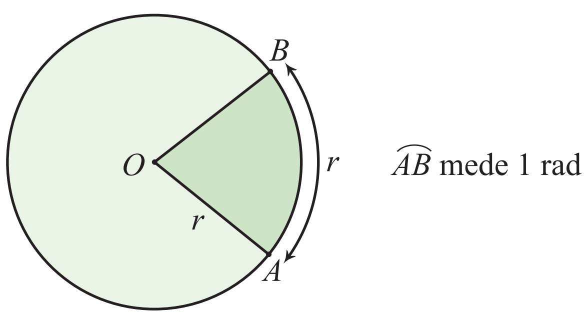
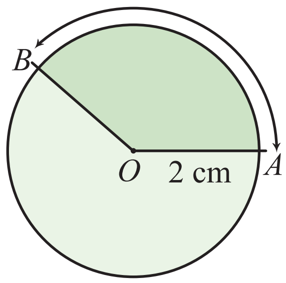


Figura 5.31

Exemplos:



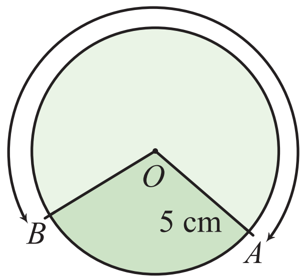
$\widehat{AB}$ mede 2 rad

$|\widehat{AB}| = 4$ cm

Figura 5.32

A circunferência tem raio de 2 cm e $\widehat{AB}$ mede 2 radianos; seu comprimento em centímetros é 4.

Observação 15. A *medida do arco* é em rad, mas seu *comprimento* pode ser medido em qualquer unidade de comprimento, por exemplo, em centímetros!



$\widehat{AB}$ mede 3 rad

$|\widehat{AB}| = 15$ cm

Figura 5.33

Os pontos A e B determinam um arco de 3 rad sobre a circunferência de raio 5 cm; o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é 15 cm.

Relação entre grau e radiano

Sabe-se que o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$ (se "esticarmos" a circunferência de raio r sobre uma régua, obtemos a medida de $2\pi r$ na unidade de comprimento do raio). A medida do arco correspondente à circunferência toda é então 2π rad, uma vez que cada arco de comprimento r mede 1 rad. Mas o arco correspondente à circunferência toda também mede 360°, então 360° correspondem a 2π rad ou 180° correspondem a π rad.

Didaticamente é importante que seus alunos percebam o porquê da correspondência entre o arco de 180° e sua medida em radianos (π rad), senão os estudantes apenas acreditarão e memorizarão esta informação, sem perceber o que significa. Conseqüentemente, terão dificuldade em operar com ela.

Para expressarmos os graus em radianos ou os radianos em graus fazemos uma regra de três.

Exemplos:

37) Expresse 135º em radianos.

$$180^\circ \text{------} \pi \text{ rad}$$
$$135^\circ \text{------} y$$

$$y = \frac{135 \times \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

38) Expresse $\frac{\pi}{6}$ em graus.

$$180^\circ \text{------} \pi \text{ rad}$$
$$z \text{--------} \frac{\pi}{6}$$
$$z = \frac{180 \times \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30^\circ$$

Exercício proposto

18) Expresse em radianos:

a) 90° b) 60° c) 45°

d) 270° e) 120°

Ângulo central

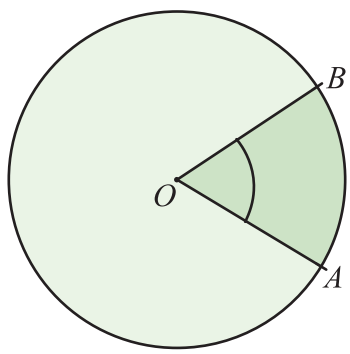


Figura 5.34

Seja O o centro da circunferência e A e B pontos sobre ela. As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ determinam o ângulo $A\hat{O}B$. Por definição, a medida do ângulo central $A\hat{O}B$ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ (em graus ou radianos).

Observação 16. Note que na figura 5.35 a seguir os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ têm a mesma *medida* (em graus ou radianos), mas não têm o mesmo *comprimento.*

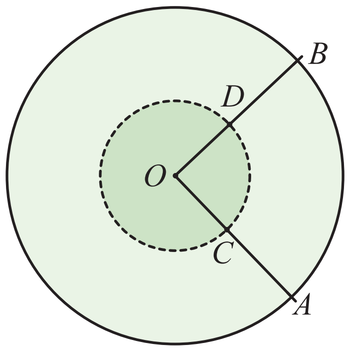


Figura 5.35

Isto acontece porque a medida de um arco independe do "tamanho" da circunferência, ou seja, do seu raio. Já o comprimento do arco depende do raio da circunferência que o contém.

Exemplo:

39) Calcule o comprimento L do arco correspondente a um ângulo central de 60°, em uma circunferência de raio 10 cm.

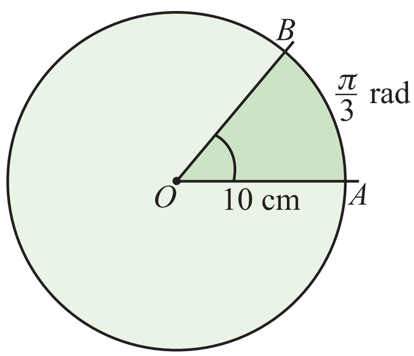


Figura 5.36

Note que a medida de arco que se relaciona com o comprimento é o radiano: um arco mede 1 rad quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém. 60° corresponde a $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

A cada 1 radiano corresponde uma medida do raio, ou seja, 10 cm. A $\frac{\pi}{3}$ rad corresponderá $\frac{\pi}{3} \times 10 = \frac{10\pi}{3}$ cm, ou aproximadamente 10,46 cm (lembre-se que π é um número real, irracional, com representação decimal 3,1415926535... Em geral usaremos para π a aproximação 3,14).

Ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica

Alguns autores chamam de **círculo trigonométrico**, como você deve ter estudado em Geometria II.

Em trigonometria convencionou-se estabelecer uma orientação sobre a circunferência, fixando nela um sentido de percurso. O ciclo trigonométrico é a circunferência de raio 1, centrada na origem do sistema cartesiano XOY, orientada a partir do ponto $(1,0)$. O sentido positivo é o anti-horário e o sentido negativo é horário. O ciclo trigonométrico é o "lugar" onde faremos nosso estudo das funções trigonométricas.

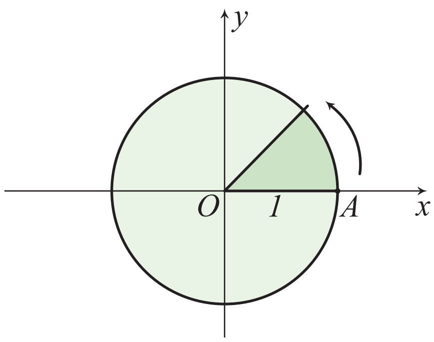


Figura 5.37

Marcamos os arcos no ciclo trigonométrico a partir do ponto $A=(1,0)$, em sentido positivo ou negativo. Veja em seguida os exemplos dos arcos de $\frac{\pi}{4}$ rad e de $-\frac{\pi}{4}$ rad no ciclo trigonométrico:

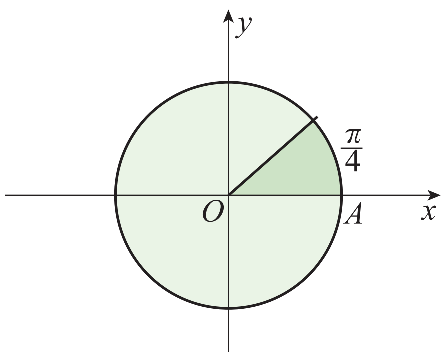


Figura 5.38 – Arco de $\frac{\pi}{4}$ rad

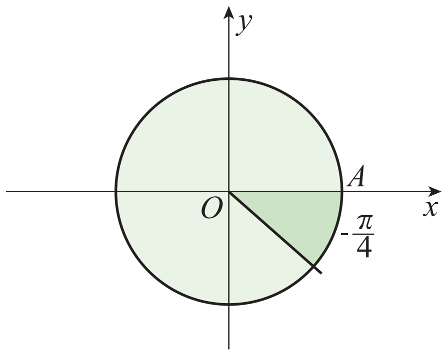


Figura 5.39 – Arco de $-\frac{\pi}{4}$ rad

No ciclo trigonométrico o *comprimento* de um arco é igual ao *módulo de sua medida* em radianos. Se α é a medida do arco em radianos (α pode ser negativo!) e L é o seu comprimento, vimos que $L = |\alpha| \cdot r$ (exemplo 39). Como $r = 1$, teremos $L = |\alpha|$.

Exemplo:

40) A medida do arco em radianos é $\frac{\pi}{4}$; como o raio é 1, seu comprimento é $\frac{\pi}{4}$ unidades de comprimento. O arco de medida $-\frac{\pi}{4}$ tem o mesmo comprimento.

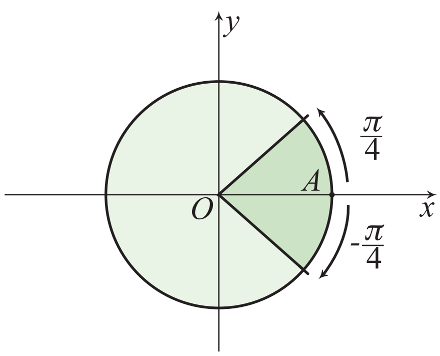


Figura 5.40

Quadrantes

O ciclo trigonométrico tem quatro quadrantes, numerados também a partir do ponto $(1, 0)$:

Quadrante I: de 0° ou 0 rad a 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad.

Quadrante II: de 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad a 180° ou π rad.

Quadrante III: de 180° ou π rad a 270° ou $\dfrac{3\pi}{2}$ rad.

Quadrante IV: de 270° ou $\dfrac{3\pi}{2}$ rad a 360° ou 2π rad, fechando o círculo.

Veja a figura:

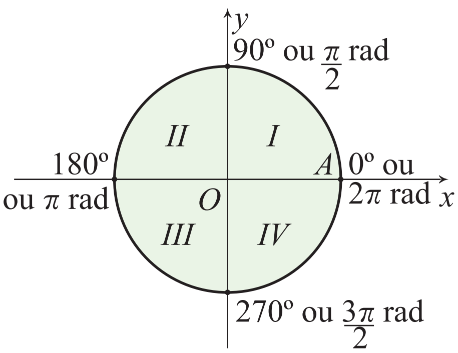


Figura 5.41

Exercício resolvido

4) Localizar no ciclo trigonométrico o arco de medida $\dfrac{3\pi}{4}$ rad.

Resolução. Note que um arco de medida $\dfrac{3\pi}{4}$ rad corresponde a 3 arcos sucessivos de $\dfrac{\pi}{4}$ rad, isto é, $\dfrac{3\pi}{4} = 3 \times \dfrac{\pi}{4}$. Como a circunferência mede 2π, um arco de $\dfrac{\pi}{4}$ corresponde a um oitavo da circunferência: $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$. Assim, o arco de medida $\dfrac{3\pi}{4}$ corresponde a três oitavos da circunferência. Veja a figura:

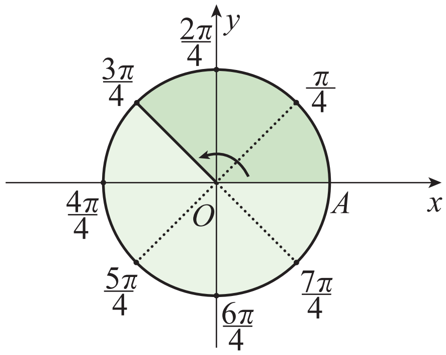


Figura 5.42

Exercícios propostos

20) O ciclo trigonométrico foi dividido em oito partes iguais. Localize sobre ele a extremidade B do arco $\overset{\frown}{AB}$, sendo dada a medida deste arco:

a) 135º

b) –180º

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad

d) $-\frac{\pi}{2}$ rad

e) $-\frac{3\pi}{4}$ rad

21) Localize no ciclo trigonométrico a extremidade B dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ de medida:

a) 120º

b) 330º

c) $-\frac{11\pi}{6}$ rad

d) $\frac{4\pi}{3}$ rad

e) $\frac{7\pi}{6}$ rad

Arcos côngruos

Suponha que um ponto móvel (como na definição de arco) desloque-se sobre a circunferência a partir de $(1,0)$, sempre no mesmo sentido, até parar em $\frac{\pi}{4}$. Temos duas possibilidades: o ponto pára em $\frac{\pi}{4}$ assim que o atinge ou o ponto dá certo número de voltas na circunferência antes de parar em $\frac{\pi}{4}$. Observe na figura 5.43 que o arco de $\frac{\pi}{4}$ rad tem a mesma extremidade que os arcos $\frac{\pi}{4}+2\pi$ rad, $\frac{\pi}{4}+4\pi$ rad, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ rad,..., $\frac{\pi}{4}+k\pi$,... para todo inteiro k. Os valores negativos de k também produzem arcos de mesma extremidade que $\frac{\pi}{4}$, resultantes do movimento em sentido horário (sentido negativo): $\frac{\pi}{4}-2\pi$ rad, $\frac{\pi}{4}-4\pi$ rad, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ rad...

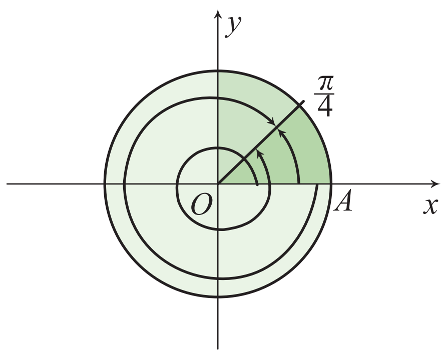


Figura 5.43

Côngruo
É um termo derivado da palavra congruente que, matematicamente, refere-se a objetos de mesma medida.

Genericamente, se B é a extremidade de um arco de α rad, então B é a extremidade de todos os arcos $\alpha+2k\pi$ rad, para todo k inteiro. Dois arcos são côngruos quando têm a mesma extremidade, isto é, diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π. Para medidas em graus, dois arcos são côngruos quando têm a mesma extremidade e diferem entre si por um múltiplo inteiro de 360°. Percebemos assim que quando marcamos a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico, estamos na verdade marcando a extremidade de uma infinidade de arcos. Chamamos de *primeira determinação positiva* (abreviamos pdp) de um arco de medida α rad ao arco côngruo a α cuja medida é β, com $0 \le \beta \le 2\pi$. Para medidas em graus, a primeira determinação positiva (pdp) de um arco de $x°$ é o arco côngruo a x cuja medida é y para $0 \leq y \leq 360°$.

Como exemplo, vamos encontrar a pdp do arco de medida $\frac{20\pi}{7}$. Procuramos o maior múltiplo de 7 menor do que 20. Como $20 = 2 \times 7 + 6$, este múltiplo é 14 e podemos escrever

Você lembra do Algoritmo da Divisão, estudado em Fundamentos I?

$$\frac{20\pi}{7} = \frac{(14+6)\pi}{7} = \frac{14\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = 2\pi + \frac{6\pi}{7}.$$

Como $0 \leq \frac{6\pi}{7} \leq 2\pi$, e os arcos de medidas $\frac{20\pi}{7}$ e $\frac{6\pi}{7}$ diferem de um múltiplo inteiro 2π (pois $\frac{20\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = 2\pi$), a pdp de $\frac{20\pi}{7}$ será $\frac{6\pi}{7}$.

Exercícios resolvidos

7) Encontrar a pdp do arco de medida $\frac{47\pi}{6}$.

Resolução. Como $47 = 7 \times 6 + 5$, escrevemos:

$$\frac{47\pi}{6} = \frac{(42+5)\pi}{6} = 7\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Note que 7π não é um múltiplo de 2π; neste caso fazemos $7\pi = 6\pi + \pi$. Então:

$$7\pi + \frac{5\pi}{6} = 6\pi + \pi + \frac{5\pi}{6} = 6\pi + \frac{11\pi}{6}$$

Assim, $\frac{47\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} = 6\pi$, o que significa que os arcos de medida $\frac{47\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ diferem por um múltiplo inteiro de 2π. Também $0 \leq \frac{11\pi}{6} \leq 2\pi$. A pdp será então $\frac{11\pi}{6}$. Veja a figura:

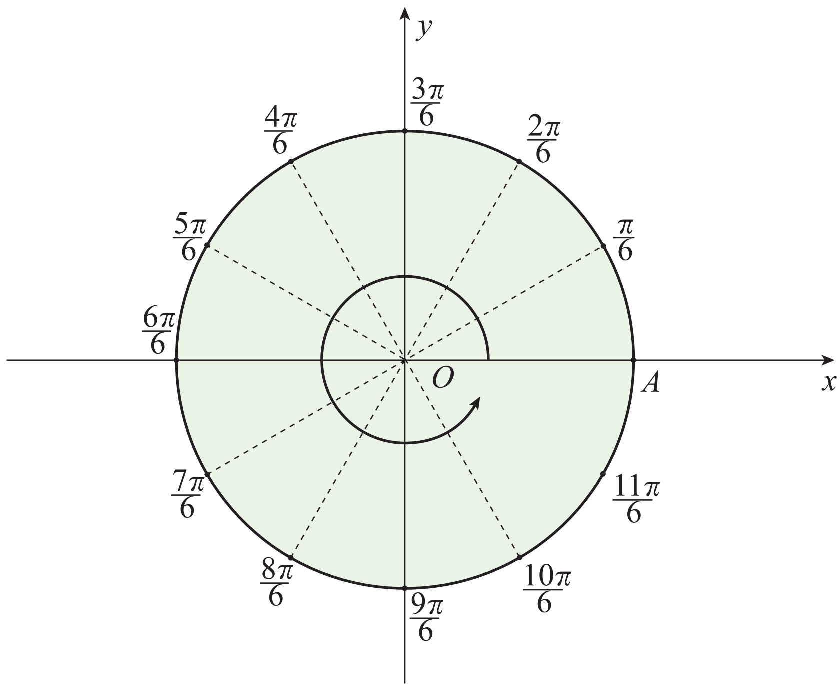


Figura 5.44

8) Encontre a pdp do arco de medida 465°.

Resolução. 465 é maior do que 360; logo, este arco tem mais de uma volta.

Como $465 = 1 \times 360 + 105$, a pdp do arco de medida 465° será 105°. Veja a figura:

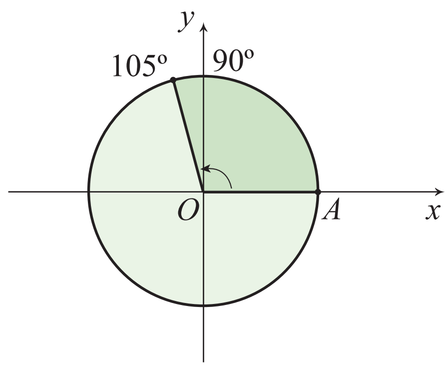


Figura 5.45

Exercícios propostos

21) Determinar a pdp dos arcos cujas medidas são:

a) $\dfrac{17\pi}{4}$

b) $-\dfrac{43\pi}{8}$

c) 615°

d) -1330°

22) Dê a medida de três arcos cuja pdp é $\dfrac{4\pi}{5}$.

23) Dê a medida de três arcos cuja pdp é 120°.

5.4.1 Função seno e função cosseno

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise.

O objetivo inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e o seu prolongamento, que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o *status* de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, além de $\cos\alpha$, cosseno do ângulo α, tem-se também $\cos x$, o cosseno do número real x, isto é, a função $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Analogamente há também as funções seno, tangente, cotangente, secante e cossecante, completando as *funções trigonométricas.*

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso, são especialmente adequadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Quando se opera com números $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ no triângulo retângulo, x representa a medida de um ângulo agudo. Vamos estender as noções de seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de x para o caso em que x representa a medida de um ângulo qualquer. Nesta situação usaremos como medida o radiano.

Seja x um número real e considere no ciclo trigonométrico o ponto P tal que o arco $\overset{\frown}{AP}$ tenha medida x rad. Este ponto P é determinado quando "enrolamos" o segmento de comprimento x no ciclo trigonométrico a partir do ponto A. Se x é positivo, este procedimento é no sentido anti-horário; se x é negativo, o sentido é horário. Os valores seno e cosseno de x são as coordenadas do ponto P. Veja a figura:

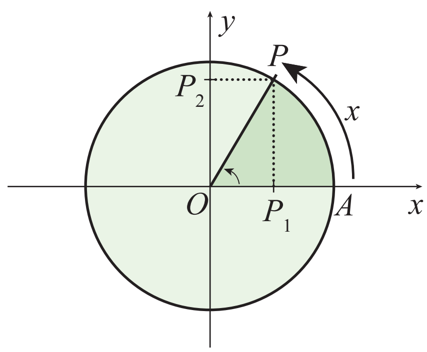


Figura 5.46

Podemos então definir:

Definição. O seno do ângulo de medida x rad ou o seno do número real x (ou do arco $\overset{\frown}{AP}$) é a ordenada do ponto P; o cosseno do número real x (ou do arco $\overset{\frown}{AP}$) é a abscissa do ponto P. Como as coordenadas de um ponto são únicas, ficam definidas as funções seno e cosseno:

$$\begin{aligned} \text{sen}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{sen}\, x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

Na figura 5.46, $\text{sen}\, x = \overline{OP_2}$ e $\cos x = \overline{OP_1}$.

Domínio e Imagem das funções seno e cosseno

O domínio das funções seno e cosseno é o conjunto dos números reais: a *todo número real* x podemos associar um ponto P no ciclo trigonométrico e este ponto P terá duas coordenadas: a ordenada (marcada no eixo Y) será $\operatorname{sen} x$ e a abscissa (marcada no eixo X) será $\cos x$.

Como estas coordenadas estão limitadas pelo ciclo trigonométrico, a imagem das funções seno e cosseno é o intervalo $[1,-1]$.

Relação fundamental

Decorre do Teorema de Pitágoras que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, para todo x real. De fato, é só considerar o triângulo retângulo OP_1P. Os segmentos $\overline{OP_1}$ e $\overline{P_1P}$ que correspondem a $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, respectivamente, são os catetos; o segmento $\overline{OP}$ é a hipotenusa. Veja a figura:

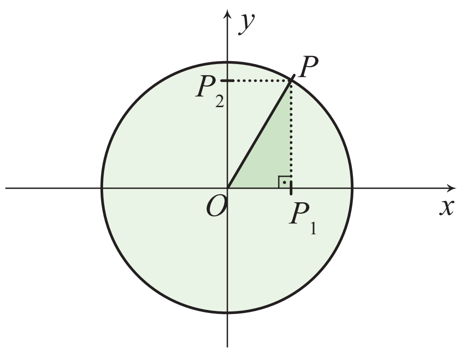


Figura 5.47

Observando o ciclo trigonométrico, podemos determinar alguns valores das funções seno e cosseno:

$\operatorname{sen} 0=0$	$\cos 0=1$
$\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}=1$	$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$
$\operatorname{sen}\pi=0$	$\cos\pi=-1$
$\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}=-1$	$\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$

Sinal algébrico do seno e cosseno de x

Na figura a seguir (5.48) apresentamos as possíveis posições de um ponto M no ciclo trigonométrico, de modo que o arco $\overset{\frown}{AM}$ tenha medida x, dependendo dos valores reais de x:

i) M_1 está no primeiro quadrante e corresponde ao arco de medida x_1: seno e cosseno de x_1 são positivos.

ii) M_2 está no segundo quadrante e corresponde ao arco de medida x_2: seno de x_2 é positivo e cosseno de x_2 é negativo.

iii) M_3 está no terceiro quadrante e corresponde ao arco de medida x_3: seno e cosseno de x_3 são negativos.

iv) M_4 está no quarto quadrante e corresponde ao arco de medida x_4: seno de x_4 é negativo e cosseno de x_4 é positivo.

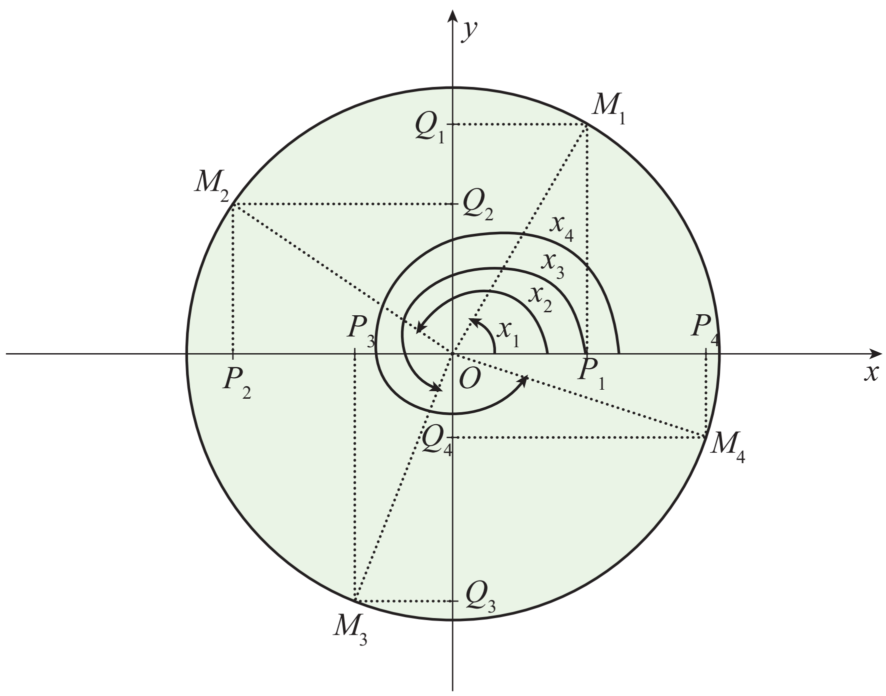


Figura 5.48

A figura 5.49 dá um resumo dos sinais algébricos dos valores de seno e cosseno nos quatro quadrantes:

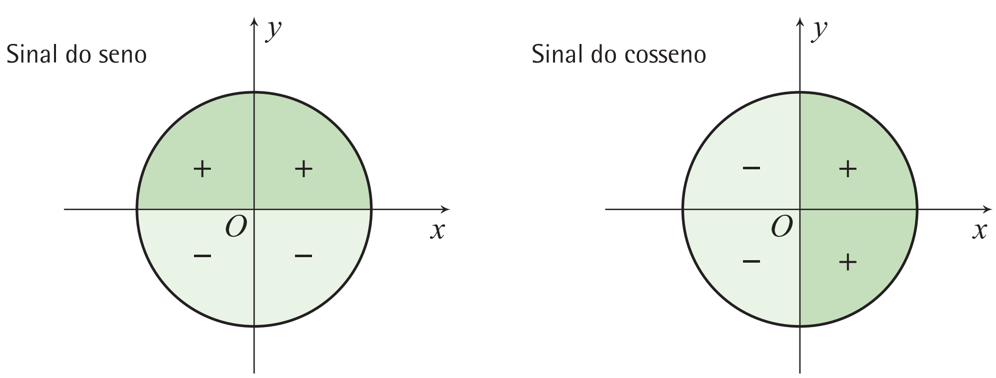


Figura 5.49

Seno e cosseno de arcos côngruos

Quanto vale $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}$? E $\cos\frac{7\pi}{2}$?

Como $\frac{7\pi}{2}$ é maior do que 2π, tomamos sua primeira determinação positiva (pdp): $\frac{7\pi}{2} = \frac{4\pi + 3\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$.

Assim, a pdp do arco de medida $\frac{7\pi}{2}$ é $\frac{3\pi}{2}$; isto significa que os arcos de medida $\frac{7\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ têm a mesma extremidade, determinando as mesmas coordenadas.

Logo, $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$ e $\cos\frac{7\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

Generalizando, *arcos côngruos têm o mesmo seno e o mesmo cosseno*. Se x é a primeira determinação positiva de um arco, os arcos côngruos a ele são representados por $x + 2k\pi$, com k percorrendo o conjunto dos números inteiros. Então

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x, \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

Valores notáveis do seno e cosseno

Vamos lembrar o que acontece no triângulo retângulo:

$\alpha + \beta = 90^\circ$, então:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} = \cos\beta$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} = \cos\alpha$$

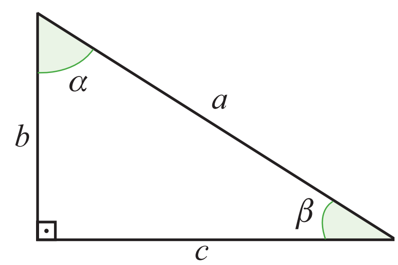


Figura 5.50

Vamos calcular agora os valores de seno e cosseno para os arcos de medida $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$. Veja a figura 5.51.

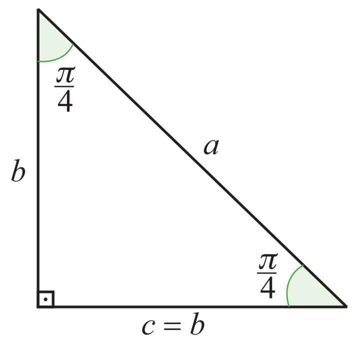


Figura 5.51

i) Para $\alpha = \beta = 45^o$, ou $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$2b^2 = a^2$$

$$a = b\sqrt{2}$$

$$sen\frac{\pi}{4} = \frac{b}{a} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

ii) $\alpha = 30^o = \frac{\pi}{6}$ e $\beta = 60^o = \frac{\pi}{3}$

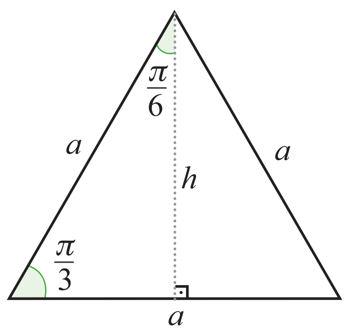


Figura 5.52

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Então

$$\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

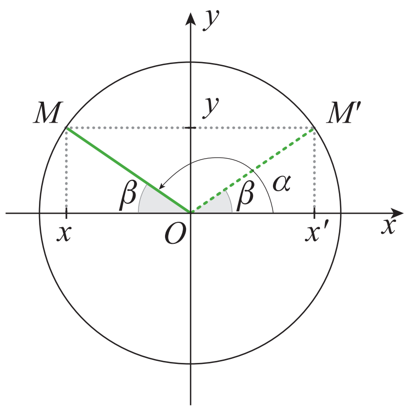
$$\text{e} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} = \text{sen}\frac{\pi}{6}$$

Resumindo:

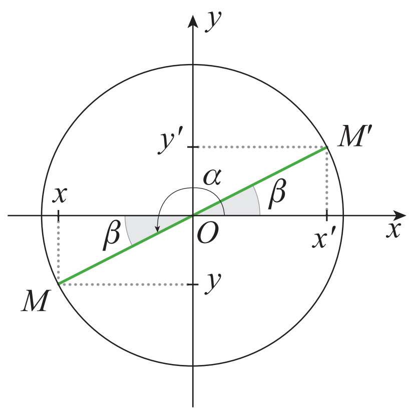
x (em rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1	0
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	- 1

Redução ao primeiro quadrante

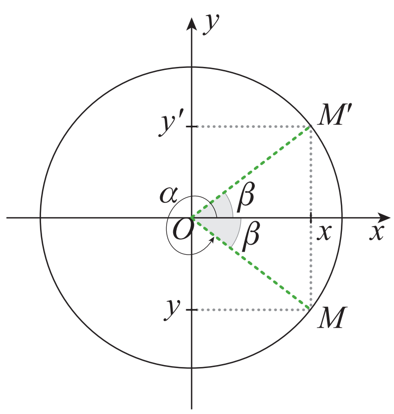
Se x é a medida em radianos de um arco no segundo, terceiro ou quarto quadrantes, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ podem ser determinados a partir de arcos no primeiro quadrante. Estes arcos do primeiro quadrante são tais que os valores de seno e cosseno, em módulo, são iguais a $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Observe na figura a seguir as simetrias que nos permitem proceder desta forma:



$\cos \alpha = x = -x' = -\cos \beta$
$\operatorname{sen} \alpha = y = \operatorname{sen} \beta$



$\cos \alpha = x = -x' = -\cos \beta$
$\operatorname{sen} \alpha = y = -y' = -\operatorname{sen} \beta$



$\cos \alpha = x = \cos \beta$
$\operatorname{sen} \alpha = y = -y' = -\operatorname{sen} \beta$

Figura 5.53

Faremos agora um exemplo para x em cada um dos quadrantes:

41) Determinar $\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{6}$ e $\cos \dfrac{5\pi}{6}$.

Observemos que o arco de medida $\frac{5\pi}{6}$ encontra-se no segundo quadrante e é um múltiplo de $\frac{\pi}{6}$, isto é, $\frac{5\pi}{6} = 5 \times \frac{\pi}{6}$. Para chegar a $\frac{5\pi}{6}$ é necessário percorrer cinco arcos de $\frac{\pi}{6}$.

Veja a figura:

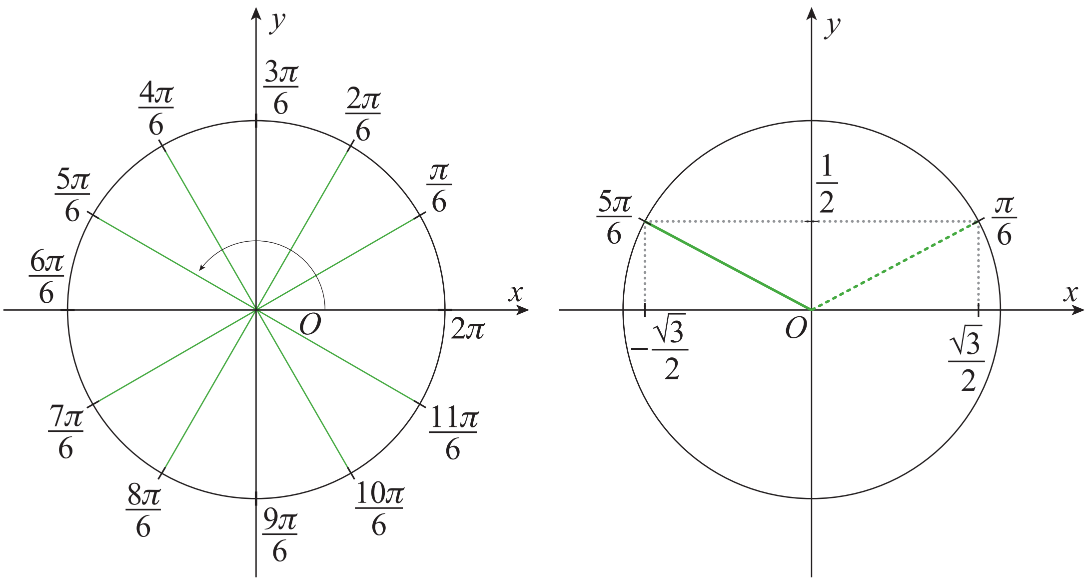


Figura 5.54

Observando a simetria, vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ e } \cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(lembre-se que no segundo quadrante o seno é positivo e o cosseno é negativo).

42) Determine $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$ e $\cos\frac{4\pi}{3}$.

O arco de medida $\frac{4\pi}{3}$ encontra-se no terceiro quadrante; usando a mesma idéia do exemplo anterior, para chegar a $\frac{4\pi}{3}$, é necessário percorrer quatro arcos de $\frac{\pi}{3}$. Veja a figura:

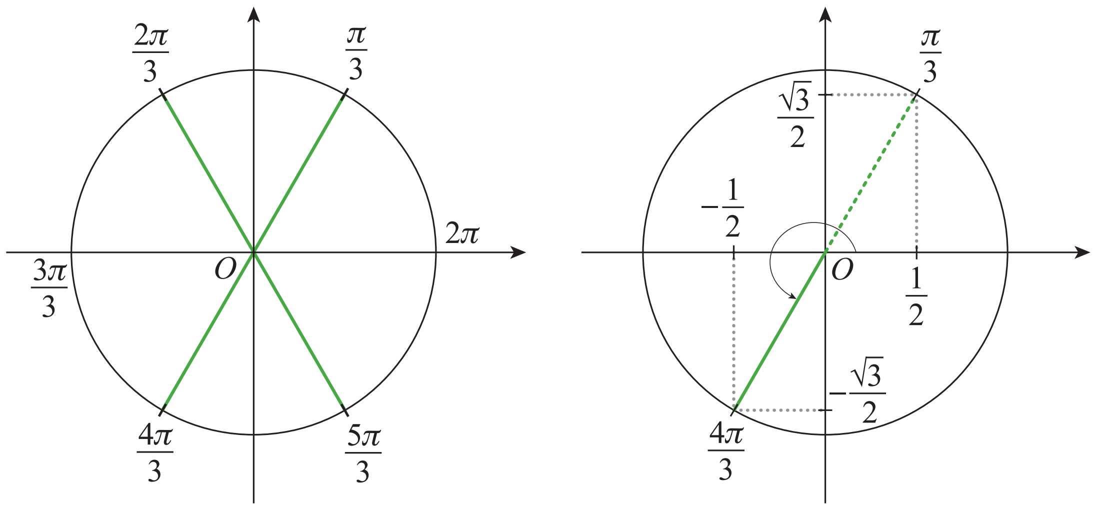


Figura 5.55

Vemos então que

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

(lembre-se que no terceiro quadrante seno e cosseno são negativos).

43) Determine $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$ e $\cos\frac{7\pi}{4}$.

O arco de medida $\frac{7\pi}{4}$ encontra-se no quarto quadrante; analogamente aos exemplos anteriores e observando a figura, concluímos que:

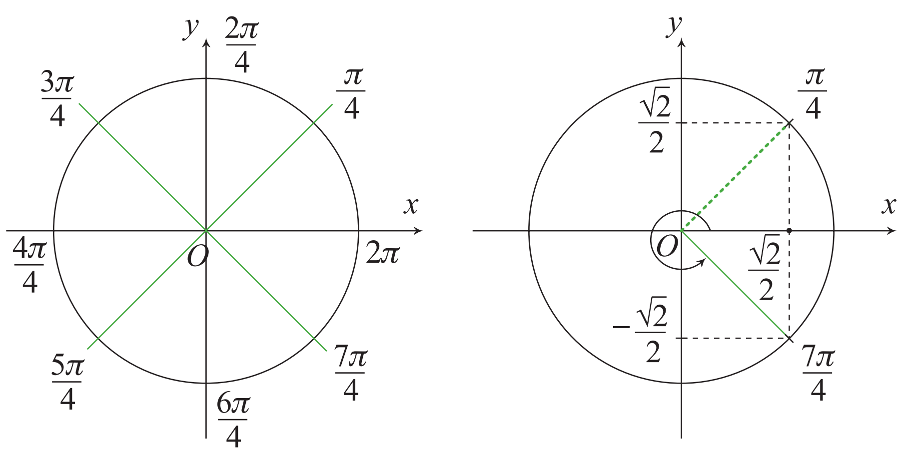


Figura 5.56

$$\text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(Lembre-se que no quarto quadrante o seno é negativo e o cosseno é positivo).

Exercício proposto

24) Determine seno e cosseno dos arcos de medida:

a) $\frac{7\pi}{6}$

b) $\frac{11\pi}{4}$

c) $\frac{8\pi}{3}$

d) $-\frac{5\pi}{4}$

e) $\frac{17\pi}{6}$

f) $\frac{23\pi}{3}$

g) $-\frac{24\pi}{16}$

Gráficos da função seno e da função cosseno

Como o domínio das funções seno e cosseno é o conjunto dos números reais e a imagem é o intervalo $[1,-1]$, os gráficos destas funções estão contidos na faixa horizontal $\mathbb{R}\times[1,-1]$. Estude os gráficos com atenção: eles darão informações sobre o comportamento das funções seno e cosseno.

Função seno

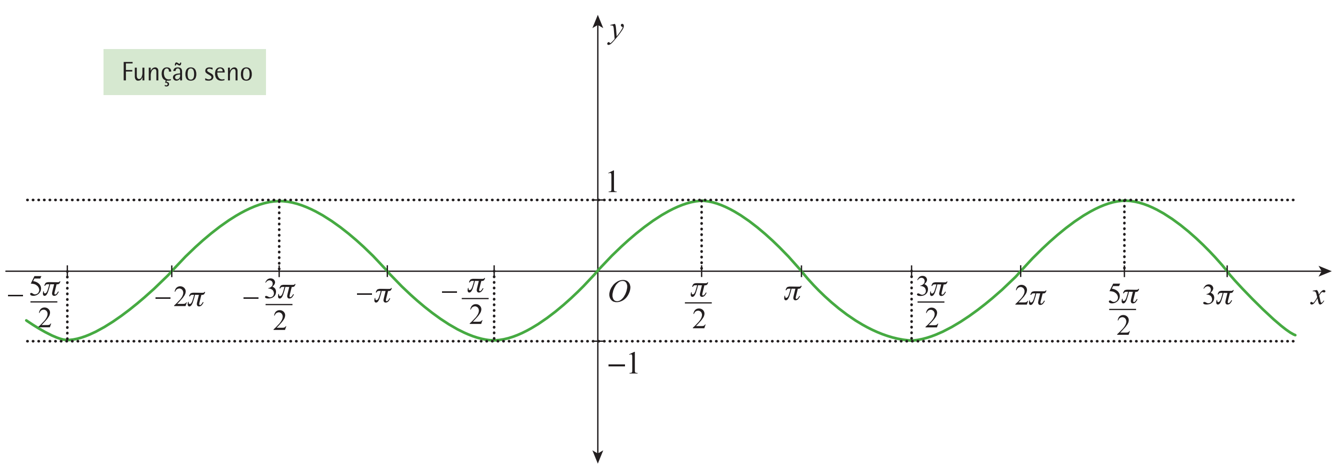


Figura 5.57

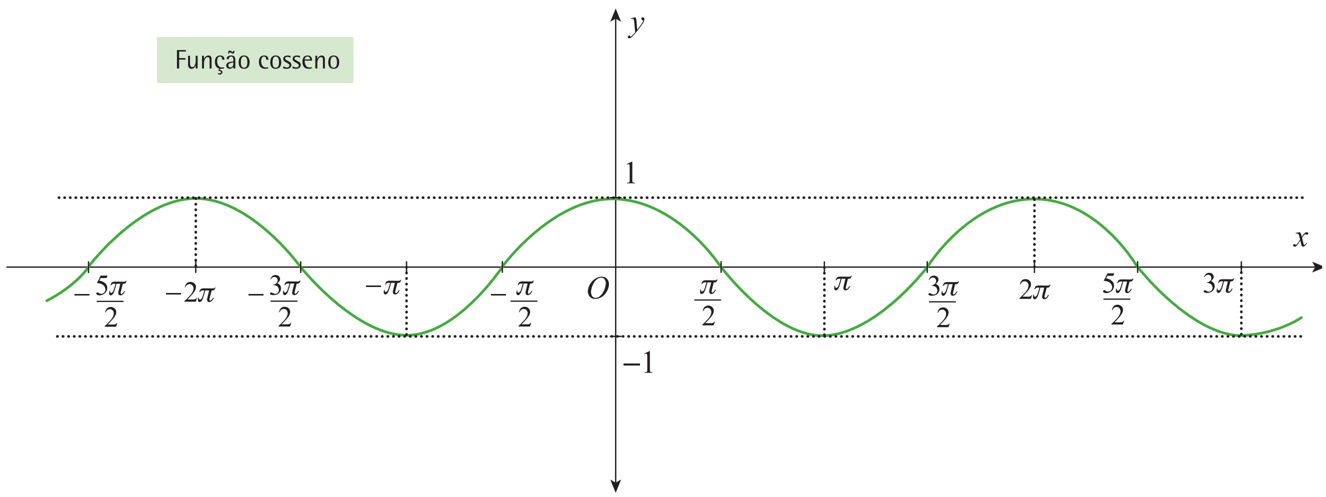


Figura 5.58

Considerações sobre as funções seno e cosseno

As funções seno e cosseno têm características especiais; vamos estudá-las agora, utilizando todas as informações que já temos sobre o comportamento destas funções. Estas informações serão muito importantes para as próximas disciplinas de Cálculo.

1) Zeros das funções seno e cosseno

Os zeros das funções seno e cosseno são os valores de x para os quais se tem $\operatorname{sen} x = 0$ e $\cos x = 0$, respectivamente. Analisando os gráficos, vemos que:

i) os zeros de $\operatorname{sen} x$ são

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots,\ -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi, \ldots$$

ou seja, os valores de x dados por $x = k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

ii) os zeros da função $\cos x$ são

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2}, \ldots,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{2},\ -\frac{7\pi}{2}, \ldots$$

ou seja, os valores de x dados por $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, ou $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2) Seno e cosseno são funções periódicas

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diz-se *periódica* quando existe um número real $T\neq 0$ tal que $f(x+T)=f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Neste caso também tem-se $f(x+kT)=f(x)$, para todo $k\in\mathbb{Z}$ e para todo $x\in\mathbb{R}$. O *menor número positivo* T tal que $f(x+T)=f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$, é chamado de *período* da função f.

Já sabemos que $\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen}x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e também $\operatorname{sen}(x+2k\pi)=\operatorname{sen}x,\ \forall\, k\in\mathbb{Z},\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Isto nos garante que seno é uma função periódica e o menor número positivo T para o qual se tem $\operatorname{sen}(x+T)=\operatorname{sen}x$ é $T=2\pi$. Assim, o período da função seno é 2π. Isto significa que o gráfico da função $\operatorname{sen}x$ "se repete" a cada intervalo de comprimento 2π, a partir da origem. Analogamente, o período da função cosseno também é 2π. Veja novamente as figuras 5.57 e 5.58.

Exercício resolvido

9) Encontre o período da função $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}x\right)$.

Resolução: Procuramos o menor número $T>0$ tal que $f(x+T)=f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Isto significa que

$$f(x+T)=\operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}(x+T)\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}T\right)=\operatorname{sen}\frac{4}{5}x=f(x).$$

Como o período da função seno é 2π, devemos ter

$$\frac{4}{5}T=2\pi\Rightarrow T=\frac{10\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}.$$

Logo, o período de f é $\frac{5\pi}{2}$. Confira o resultado fazendo o gráfico.

3) Cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *par* quando $f(x)=f(-x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ e uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *ímpar* quando $f(x)=-f(-x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Vamos analisar as funções seno e cosseno:

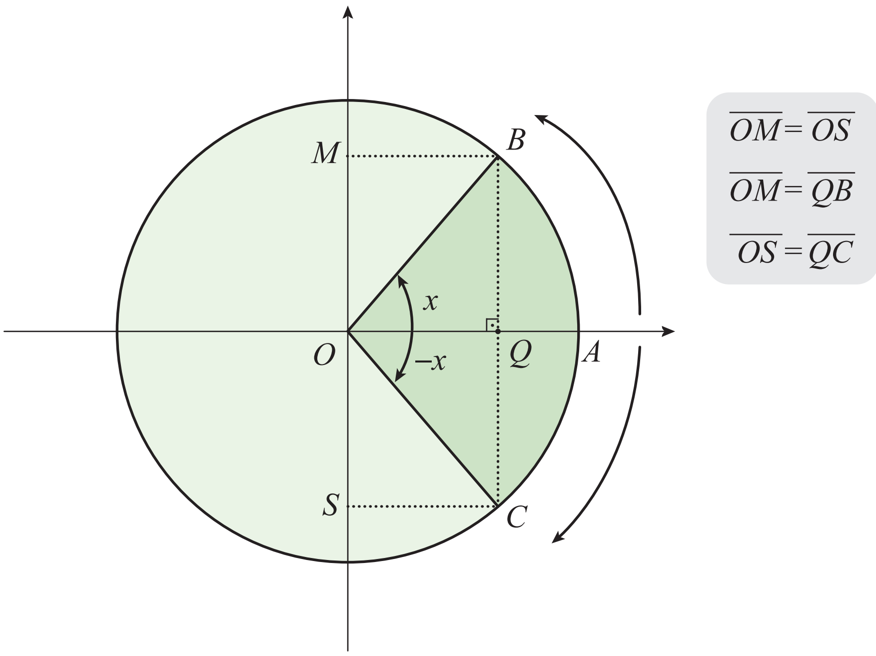


Figura 5.59

O triângulo BOC é isósceles, o que significa que os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ têm a mesma medida de x rad. Logo,

$$\cos x = \cos(-x),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \text{ e } \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar.

4) Funções compostas envolvendo seno e cosseno

Dada uma função real g, podemos pensar nas funções compostas $(\operatorname{sen} \circ g)(x) = \operatorname{sen}(g(x))$, $(\cos \circ g)(x) = \cos(g(x))$, $(g \circ \operatorname{sen})(x) = g(\operatorname{sen} x)$ e $(g \circ \cos)(x) = g(\cos x)$. Vamos fazer alguns exemplos para casos especiais da função g.

Exemplos:

44) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + \pi$,

$$(\operatorname{sen} \circ g)(x) = \operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{sen}(x + \pi)$$

Vamos fazer o gráfico da função $sen(x+\pi)$, comparando-o com o gráfico de $\operatorname{sen} x$:

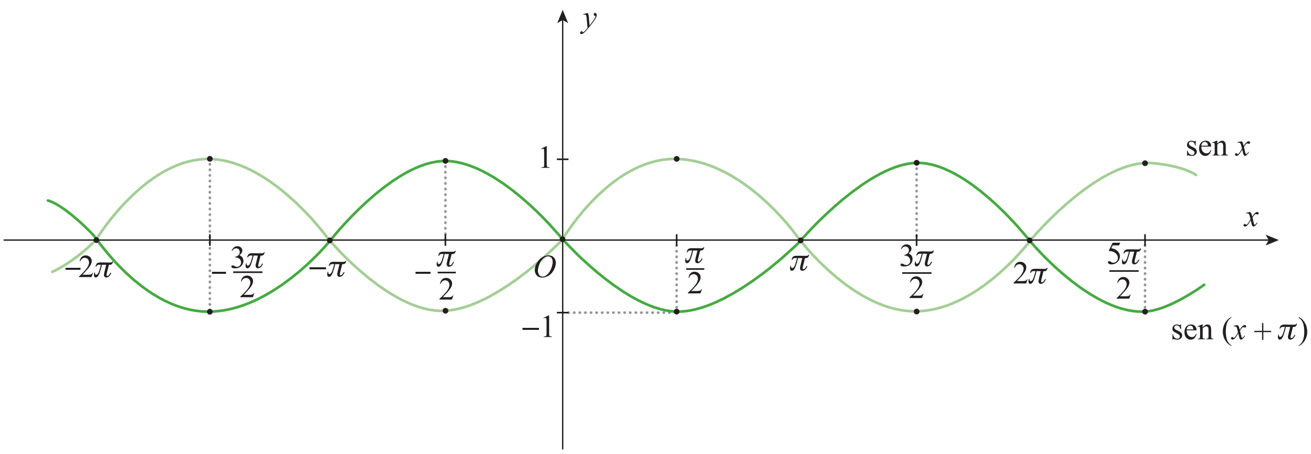


Figura 5.60

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\operatorname{sen}(x+\pi)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Analisando o gráfico, vemos que:

1) Os gráficos das funções $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(x+\pi)$ têm o mesmo "formato". A diferença é que o gráfico de $\operatorname{sen}(x+\pi)$ está "deslocado" π unidades à direita no plano cartesiano em relação ao gráfico de $\operatorname{sen} x$. Note que os gráficos das duas funções cortam o eixo X nos mesmos pontos.

2) O domínio e a imagem da função $\operatorname{sen}(x+\pi)$ são os mesmos da função $\operatorname{sen} x$.

3) $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(x+\pi)$ têm o mesmo período 2π (note que o gráfico de $\operatorname{sen}(x+\pi)$ se repete a cada intervalo de comprimento 2π, a partir de $x=0$).

Tarefa

Faça o gráfico da função composta

$$(\cos \circ g)(x) = \cos(g(x)) = \cos(x+\pi)$$

e compare-o com o gráfico de $\cos x$. O que você conclui?

45) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2x$, $(\cos\circ h)(x)=\cos(h(x))=\cos(2x)$

Vamos comparar o gráfico da função $\cos(2x)$ com o gráfico de $\cos x$:

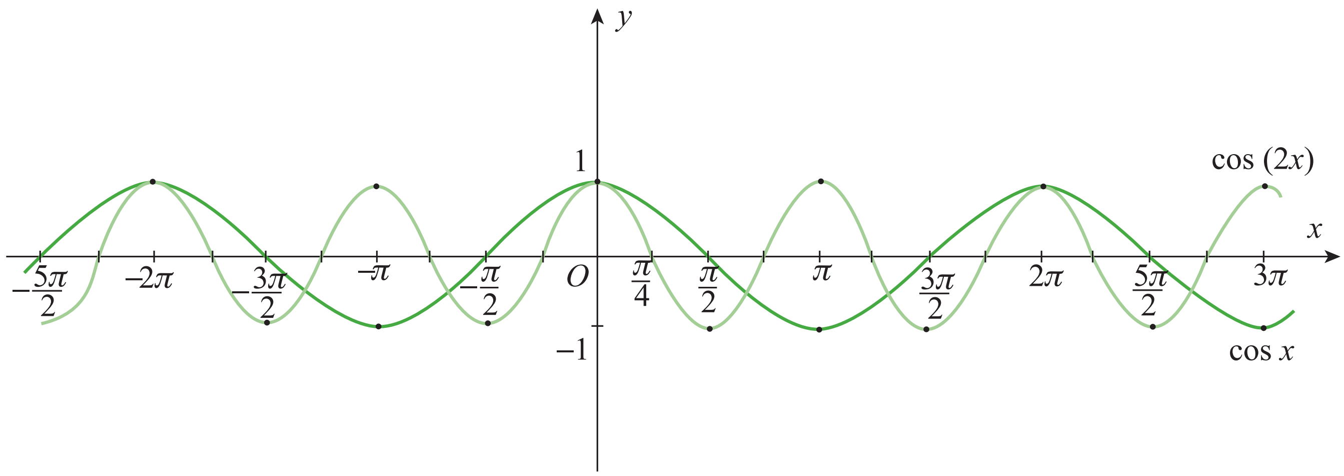


Figura 5.61

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
cos $(2x)$	1	0	-1	0	1

Analisando os gráficos, vemos que:

a) os gráficos de $\cos(2x)$ e $\cos x$ têm o mesmo "formato" mas o gráfico de $\cos(2x)$ parece que "encolheu"! Por exemplo, $\cos(2x)$ corta o eixo X em $x=\frac{\pi}{4}$, enquanto $\cos x$ corta o eixo X em $x=\frac{\pi}{2}$ (as funções não têm os mesmos zeros). Isto significa que $\cos x$ e $\cos(2x)$ não têm o mesmo período; o gráfico de $\cos(2x)$ se repete a cada intervalo de comprimento π, a partir da origem. De fato, para a função composta $(\cos\circ h)(x)=\cos(h(x))=\cos(2x)$, temos que:

$$(\cos\circ h)(x+\pi)=\cos(h(x+\pi))=\cos(2(x+\pi))=$$
$$\cos(2x+2\pi)=\cos(2x)=\cos(h(x))=(\cos\circ h)(x).$$

b) o domínio e a imagem da função $\cos(2x)$ são os mesmos da função $\cos x$.

Tarefa

1) Faça e estude os gráficos das funções compostas $\cos(3x)$, $\cos(4x)$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\cos\left(\frac{x}{4}\right)$. O que você conclui sobre os períodos destas funções? E sobre os períodos das funções $\operatorname{sen}(3x)$, $\operatorname{sen}(4x)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$?

2) Para $f(x)=2x+\frac{\pi}{2}$, faça o gráfico e determine o período da função composta $(\cos\circ f)(x)=\cos(f(x))=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Exemplo:

46) $u(x)=1+x$, $(u\circ \operatorname{sen})(x)=u(\operatorname{sen}(x))=1+\operatorname{sen} x$

Vamos analisar e comparar os gráficos de $\operatorname{sen} x$ e $1+\operatorname{sen} x$:

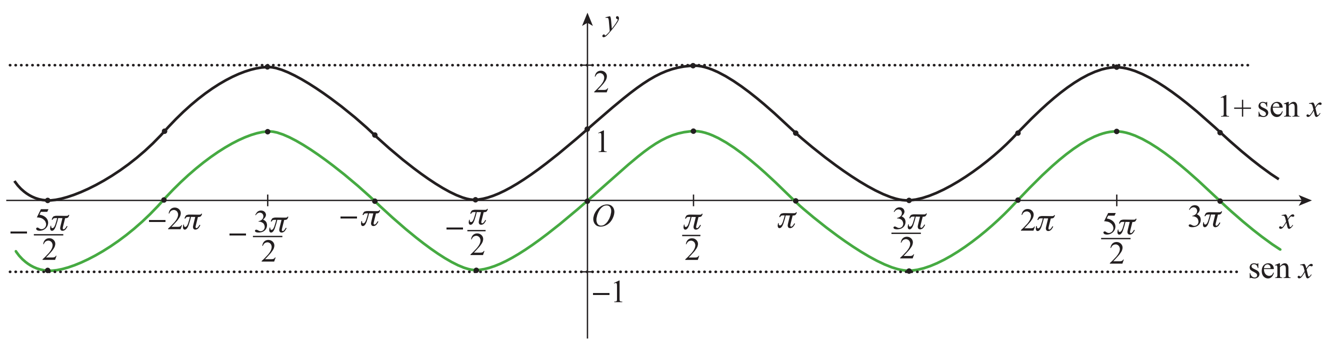


Figura 5.62

Observamos que:

a) os dois gráficos têm o mesmo "formato", mas o gráfico de $1+\operatorname{sen} x$ está deslocado uma unidade na vertical, para cima. Conseqüentemente, a função $1+\operatorname{sen} x$ não corta o eixo X nos mesmos pontos que a função $\operatorname{sen} x$ (as funções não têm os mesmos zeros).

b) o período das funções é 2π.

c) o domínio de $1+\operatorname{sen} x$ é o mesmo da função $\operatorname{sen} x$, mas as imagens são diferentes: $\operatorname{Im}(1+\operatorname{sen} x)=[0,2]$.

Tarefa

Seja $v(x)=-2+x$. Analise o gráfico da função composta

$$(v\circ\cos)(x)=v(\cos(x))=-2+\cos x.$$

Compare com o gráfico de $\cos x$.

Exercícios propostos

25) Dê o período e os zeros das seguintes funções:

a) $m(x)=3+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

b) $s(x)=-4+\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

26) Faça o gráfico das funções abaixo, no intervalo $[-2\pi,3\pi]$.

a) $f(x)=\text{sen}(-2x)$

b) $g(x)=\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

c) $m(x)=\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

27) Sabendo que $\cos x=0{,}1$ e x está no quarto quadrante, calcule $\text{sen} x$.

Inversas das funções seno e cosseno

Seno e cosseno não são funções injetoras; por exemplo, temos $\text{sen}\ 0=\text{sen}\ \pi=0$ e $\cos 0=\cos 2\pi=1$, valores distintos resultando na mesma imagem. Mas, observando o gráfico destas funções, vemos que, se as restringirmos a certos intervalos (domínio e contradomínio), elas serão injetoras e sobrejetoras e, portanto, terão uma inversa. Vamos analisar a função seno. Observe atentamente seu gráfico:

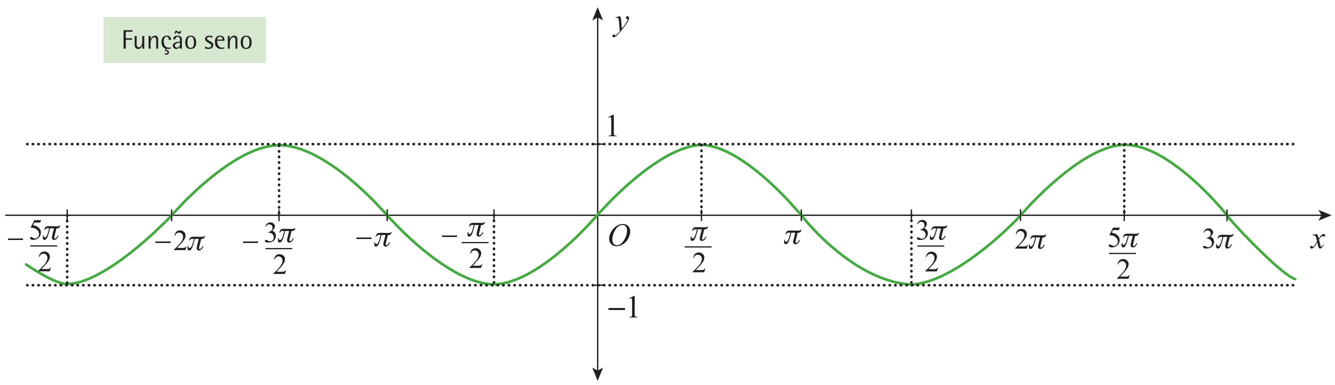


Figura 5.63

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ a função seno é injetora, e o mesmo ocorre nos intervalos $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$, e em uma infinidade de outros. Observe também que nestes intervalos a imagem da função é $[-1,1]$, ou seja, ela também é sobrejetora. Fixando o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, consideremos a função

$$F:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$

$$F(x)=\operatorname{sen} x$$

F é uma função bijetora (prove isso!) e, portanto, inversível! Definimos a inversa da função F como

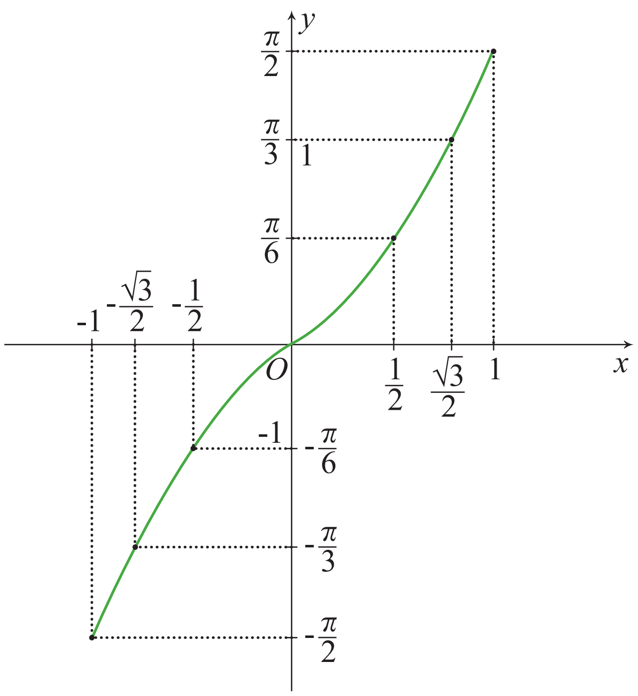
$$g:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$g(x)=\operatorname{arcsen} x$ (lê-se “arco seno de x”).

A função g associa a cada número real x do intervalo $[-1,1]$, o *arco* cujo *seno* é x. Por exemplo:

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6};\ g(0)=0;\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6};\ g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

O gráfico da função g é dado por



x	arc sen x
0	0
1/2	$\pi/6 \cong 0{,}52$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3 \cong 1{,}04$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4 \cong 0{,}78$
-1/2	$-\pi/6$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$

Figura 5.64

Note que os gráficos de F e g são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

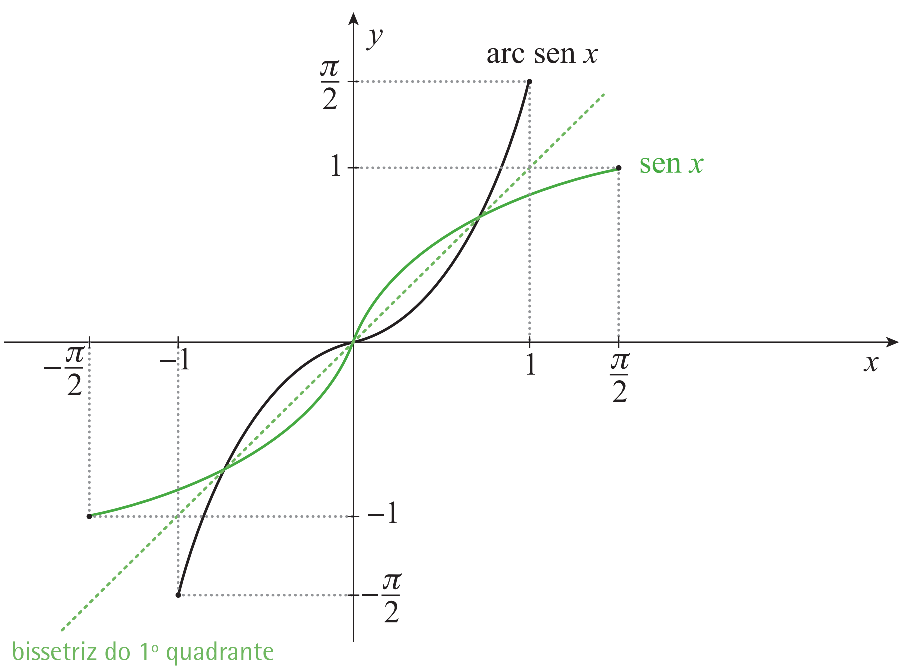


Figura 5.65

Analisando agora a função cosseno,

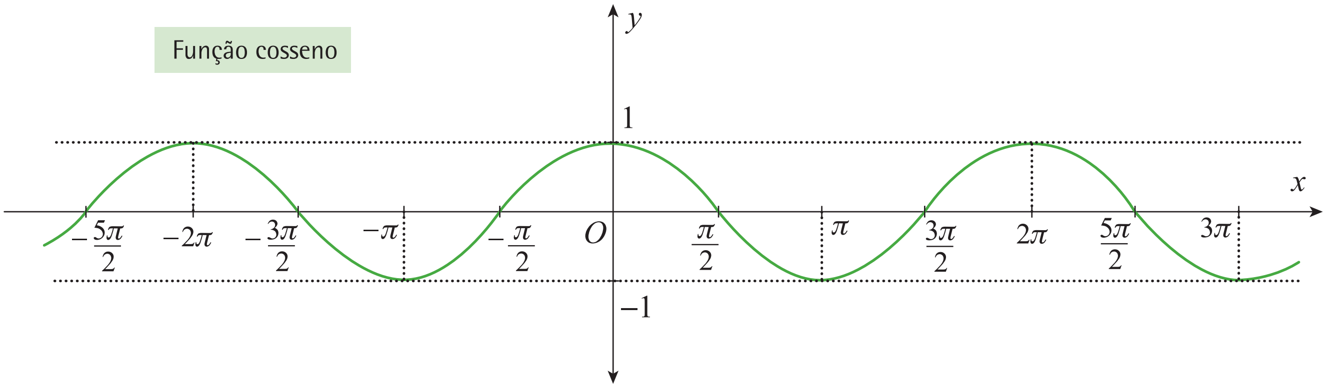


Figura 5.66

Vemos que ocorre a mesma situação que ocorria com o $\operatorname{sen}\alpha$: em certos intervalos a função é injetora. Fixamos o intervalo $[0,\pi]$ para definir a função

$$H:[0,\pi]\to[-1,1]$$

$$H(x)=\cos x$$

H é uma função bijetora (prove isso!) e, portanto, inversível. A inversa da função H é a função:

$$h:[-1,1]\to[0,\pi]$$

$$h(x)=\operatorname{arccos} x \text{ (lê-se “arco cosseno de } x\text{”).}$$

A função h associa a cada número real x do intervalo $[-1,1]$ o *arco* cujo *cosseno* é x. O gráfico da função h é dado por:

x	arccos x
-1	-1
-1/2	2π/3
0	π/2
1/2	π/3
1	0

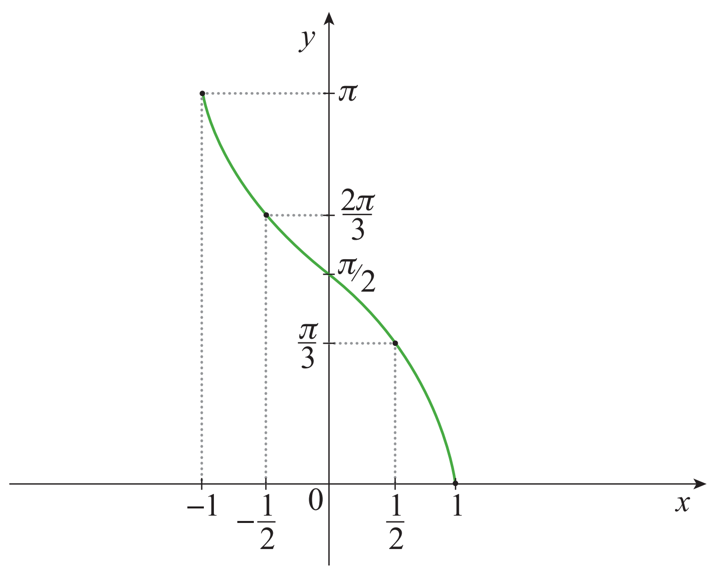


Figura 5.67

Também neste caso os gráficos de H e h são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

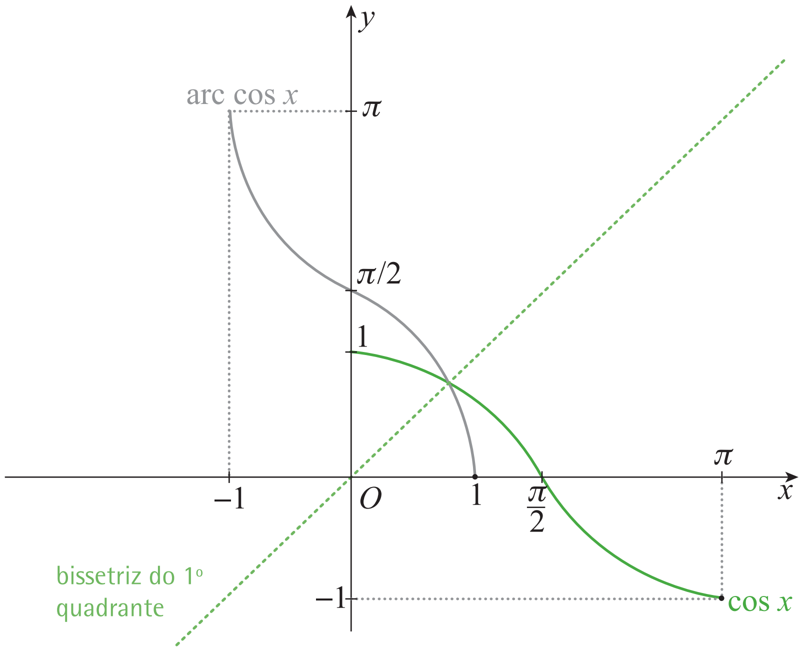


Figura 5.68

Exercícios resolvidos

10) Calcule $\operatorname{sen}\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Resolução. Queremos calcular o seno do arco cujo cosseno é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Se y é o arco cujo cosseno é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, isto é, $\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, qual o valor de $\operatorname{sen} y$? Lembramos que nosso intervalo de trabalho para os valores do arco y é o intervalo $[0,\pi]$, a imagem da função arco cosseno. Assim, existe um único valor de y no intervalo $[0,\pi]$, tal que $\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Este valor, como sabemos, é $\dfrac{\pi}{4}$. Assim,

$$\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

11) Determine $\operatorname{sen}(\arccos x)$, para x qualquer em $[-1,1]$.

Resolução. Seja y o arco cujo cosseno é x, isto é, $\cos y = x$.

Queremos determinar $\operatorname{sen} y$. Pela relação fundamental, temos que $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$; substituindo $\cos y = x$ na igualdade, temos:

$$\operatorname{sen}^2 y + x^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 y = 1 - x^2$$
$$\operatorname{sen} y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Para escolher o sinal correto, ou seja, para saber se $\operatorname{sen} y$ é positivo ou negativo, devemos observar que y pertence à imagem da função arco cosseno, isto é, y pertence ao intervalo $[0, \pi]$. Neste intervalo o seno é positivo, e temos $\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - x^2}$.

12) Determine $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Resolução. Como $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -1$, o problema consiste em determinar $\operatorname{arcsen}(-1)$. O único arco pertencente ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é -1 é $\dfrac{-\pi}{2}$. Logo, $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Você poderia pensar que, como seno e arco seno são funções inversas, então $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$, para qualquer valor x. Mas não podemos esquecer a definição! É preciso estar atento para o domínio e contradomínio das duas funções.

Exercício proposto

28) Calcule:

a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\cos\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\operatorname{sen}(\arccos 0)$

d) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

f) $\arccos\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}\right)$

5.4.2 A função tangente

Seja x um número real cujo cosseno é diferente de zero, determinando no ciclo trigonométrico o ponto D (lembre-se: o ponto D é a extremidade do arco de medida x rad). Definimos a função tangente de x (a notação é $\operatorname{tg} x$) como sendo a ordenada do ponto B, que é o ponto de intersecção do prolongamento do raio OD com uma reta paralela ao eixo Y passando pelo ponto A (tangente à circunferência), chamada "eixo das tangentes". Este eixo é uma "cópia" do eixo Y, com valores negativos abaixo de A e positivos acima de A. Veja a figura:

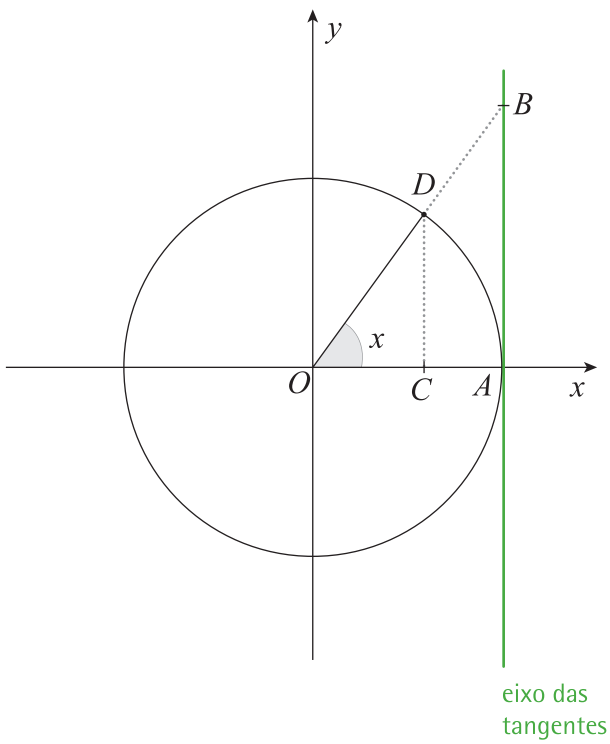


Figura 5.69

Observação 17. Note que se o cosseno de x for zero, então x será um arco de medida $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso não haverá intersecção do prolongamento do raio OD com o eixo das tangentes, uma vez que serão paralelos. Por isso excluímos estes arcos da definição de tangente.

Relação entre seno, cosseno e tangente

Por quê?

Na figura 5.69 considere os triângulos COD e AOB, que são semelhantes. Então seus lados são proporcionais e teremos

$\dfrac{CD}{OC} = \dfrac{AB}{OA}$, ou seja, $\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{\text{tg}\, x}{1}$, para valores de x tais que $\cos x \neq 0$.

Lembrando que $\cos x = 0$ quando $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, podemos definir a função tangente como:

$$tg : \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

$$\text{tg} x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

Sinal algébrico da tangente

O sinal da tangente depende dos sinais do seno e do cosseno. No primeiro e terceiro quadrantes seno e cosseno têm o mesmo sinal, o que significa que a tangente é um número positivo. No segundo e no quarto quadrantes seno e cosseno têm sinais contrários, o que significa que a tangente é um número negativo. Também podemos analisar geometricamente, como mostra a figura (notação análoga a da figura 5.69):

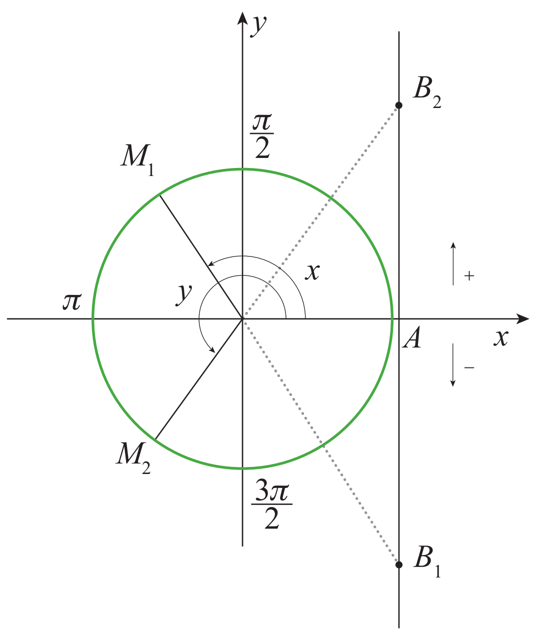


Figura 5.70

Valores notáveis da tangente

Para $x = 0$, temos $\text{sen } 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$. Logo, $\text{tg } 0 = 0$.

Para $x = \frac{\pi}{2}$, não existe um valor para a tangente, mas observe que quando x assume valores cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, porém menores do que $\frac{\pi}{2}$, os valores de $\text{tg } x$ aumentam, tornando-se infinitamente grandes. Veja a figura:

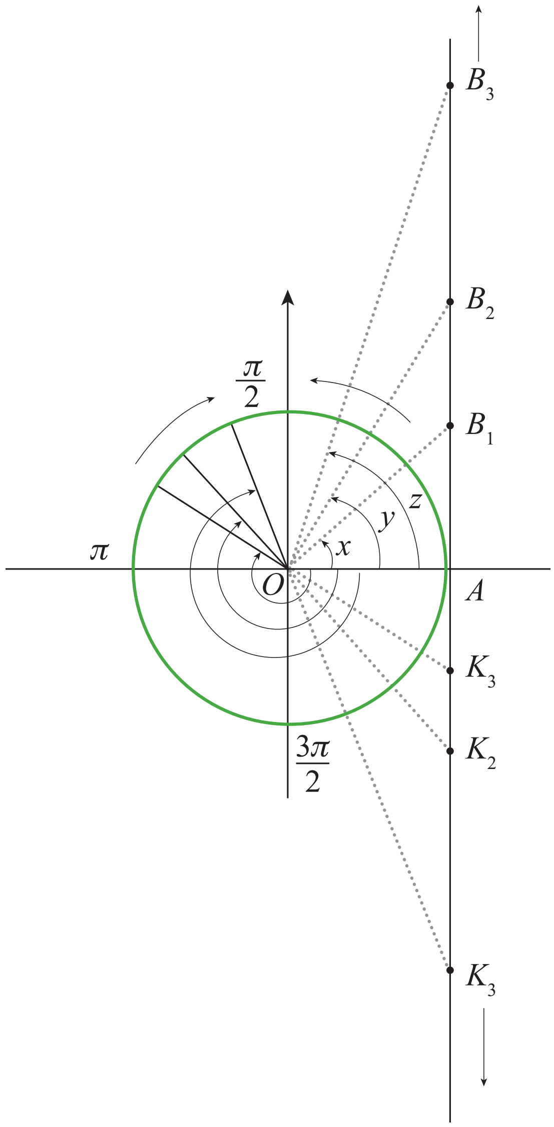


Figura 5.71

No entanto, quando x assume valores maiores do que $\frac{\pi}{2}$ e aproximando-se cada vez mais deste valor, $\text{tg } x$ é um número negativo assumindo, em módulo, valores infinitamente grandes.

Para $x = \pi$, $\text{sen}\,\pi = 0$ e $\cos\pi = -1$. Logo, $\text{tg}\,\pi = 0$.

Para $x = \frac{3\pi}{2}$, não existe $\text{tg}\,x$. Estude o que acontece com a $\text{tg}\,x$ quando os valores de x se aproximam de $\frac{3\pi}{2}$.

Para $x = \frac{\pi}{4}$, $tg\frac{\pi}{4} = \dfrac{sen\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Para $x = \frac{\pi}{6}$, $tg\frac{\pi}{6} = \dfrac{sen\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Para $x = \frac{\pi}{3}$, $tg\frac{\pi}{3} = \dfrac{sen\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Resumindo:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\text{tg}\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

Exercício resolvido

13) Determine o valor de $\text{tg}\frac{22\pi}{3}$.

Resolução.

$\frac{22\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 6\pi + \frac{4\pi}{3}$. Logo, $\text{tg}\frac{22\pi}{3} = \text{tg}\frac{4\pi}{3}$.

Como $\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$,

teremos $\text{tg}\frac{22\pi}{3} = \text{tg}\frac{4\pi}{3} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Observação 18. Como sabemos reduzir seno e cosseno ao primeiro quadrante, também podemos fazê-lo para a tangente, já que ela depende destas duas funções. Note que basta conhecer uma das funções, seno ou cosseno, para conhecermos a tangente, pois seno e cosseno estão relacionados pela Relação Fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Por exemplo, se sabemos que x está no primeiro quadrante e $\operatorname{sen} x = 0{,}2$, podemos calcular a $\operatorname{tg} x$ fazendo:

$$(0{,}2)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$0{,}04 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - 0{,}04$$

$$\cos^2 x = 0{,}96 = \frac{96}{100}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{96}{100}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(como x está no 1º quadrante, tomamos a raiz positiva).

Logo, $\operatorname{tg} x = \dfrac{0{,}2}{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}} = \dfrac{\dfrac{2}{10}}{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Gráfico da função tangente

Lembrando as considerações que fizemos para os valores notáveis da tangente, vamos construir seu gráfico:

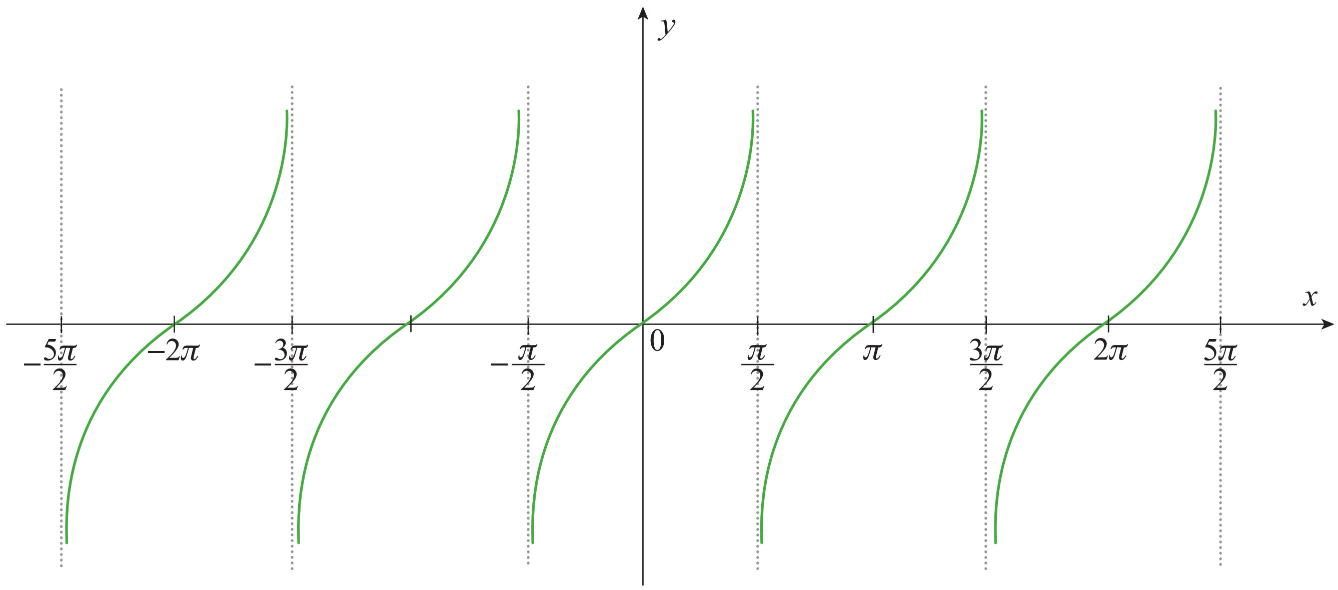


Figura 5.72

Estudando o gráfico, podemos observar que:

1) A tangente é uma função periódica e seu período é π. De fato,

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{\operatorname{sen} x.\cos\pi+\cos x.\operatorname{sen}\pi}{\cos x.\cos\pi-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen}\pi}=\frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x}=\operatorname{tg} x.$$

   Note que o gráfico no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ se repete a cada intervalo de comprimento π, do tipo $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ com $k\in\mathbb{Z}$.

2) Os zeros da função tangente são os zeros da função seno, isto é, $\operatorname{tg} x=0$ quando $x=k\pi$, pra todo $k\in\mathbb{Z}$.

3) A imagem da função tangente é o conjunto dos números reais.

4) A função não está definida para os valores $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, para todo $k\in\mathbb{Z}$, ou seja, estes pontos não têm imagem pela função tangente. Observe o que acontece na vizinhança destes pontos, lembrando das considerações que fizemos para os valores notáveis da tangente.

5) Nos intervalos

   $\ldots\left(\frac{-5\pi}{2},\frac{-3\pi}{2}\right),\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right),\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ldots$ a função tangente é injetora. Isto nos sugere que ela é inversível em cada um destes intervalos.

Inversa da função tangente

Restringindo a função tangente ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, obtemos uma função bijetora

$$G:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$$
$$G(x)=\operatorname{tg} x$$

A inversa da função G é a função

$$g:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$g(x) = \text{arctg}\, x$ (como para seno e cosseno, lê-se "arco tangente de x").

A função inversa g associa a cada número real x o arco cuja tangente é x. Por exemplo, $g(1) = \text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, $g(-1) = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $g(0) = \text{arctg}\, 0 = 0$.

Os gráficos da função tangente e de sua inversa são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante:

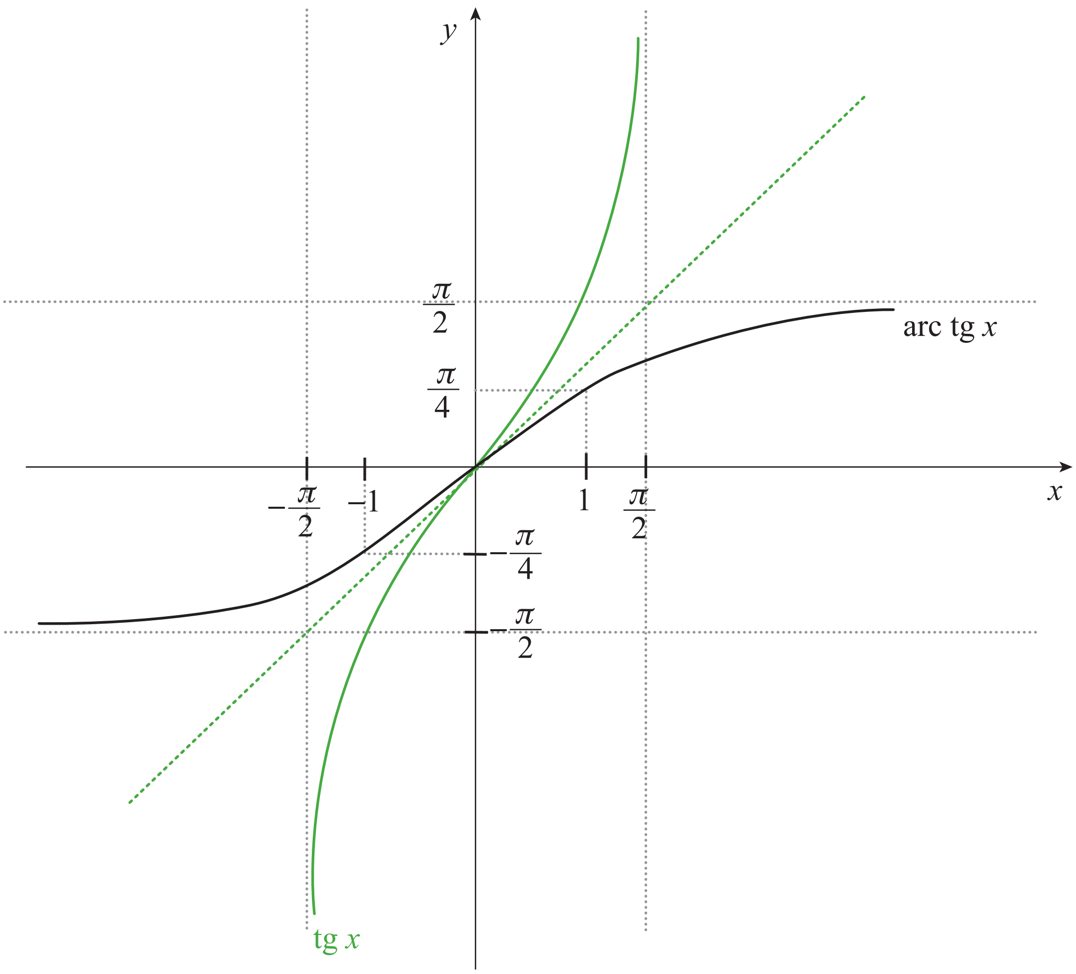


Figura 5.73

Exercício resolvido

14) Calcule $\text{sen}(\text{arctg}(-\sqrt{3}))$.

Resolução. Seja x o arco cuja tangente é $-\sqrt{3}$, isto é, $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$. Queremos calcular $\text{sen}\, x$. Sabemos dos valores notáveis que $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$; mas qual arco cuja tangente resulta no oposto deste número? Vamos observar no ciclo trigonométrico:

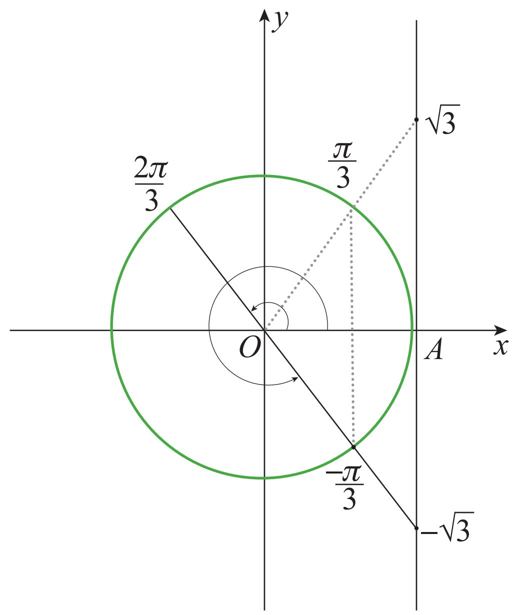


Figura 5.74

Vemos que, para os arcos de medida $\dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{-\pi}{3}$ tem-se $\text{tg}\,\dfrac{2\pi}{3}=\text{tg}\,\dfrac{-\pi}{3}=-\sqrt{3}$. Mas a função arctg tem como imagem o intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, isto é, tem como imagem arcos no primeiro ou quarto quadrantes. O arco de medida $\dfrac{2\pi}{3}$ está no segundo quadrante. Logo, escolhemos $x=\dfrac{-\pi}{3}$ e $\text{sen}\,\dfrac{-\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercícios propostos

29) Conhecendo o seno e o cosseno de $\dfrac{\pi}{6}$ rad, $\dfrac{\pi}{4}$ rad e $\dfrac{\pi}{3}$ rad, calcule $\text{sen}\,x$ e $\cos x$ para:

a) $x=1230^{\circ}$

b) $x=-960^{\circ}$

c) $x=\dfrac{-13\pi}{4}$ rad

d) $x=\dfrac{47\pi}{6}$ rad

30) Determine o sinal algébrico dos números reais:

a) $\text{sen}\sqrt{5}$ b) $\cos 7{,}68$

c) $\text{sen } 13$ d) $\cos\sqrt{2}$

31) Faça o gráfico das funções abaixo, no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$.

a) $f(x) = \text{tg } 2x$ b) $g(x) = \text{tg}\dfrac{x}{2}$

c) $h(x) = 1 + \cos 3x$ d) $m(x) = -2 + \text{sen}\dfrac{x}{2}$

32) Dê o período das funções:

a) $g_1(x) = \cos\dfrac{3x}{4}$ b) $g_2(x) = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $g_3(x) = 5\cos\dfrac{\pi x}{2}$ d) $g_4(x) = 8 - \text{sen}\dfrac{x}{3}$

e) $g_5(x) = 1 + \text{tg}\dfrac{x}{2}$ f) $g_6(x) = \text{tg}(2x)$

33) Mostre as identidades:

a) $\cos(\pi + t) = -\cos t$

b) $\text{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos t$

c) $\text{sen } 3t = 3\text{sen } t - 4\text{sen}^3 t$

d) $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$

34) Calcule:

a) $\text{tg}\dfrac{-13\pi}{3}$

b) $\text{tg}\dfrac{23\pi}{4}$

35) Sabendo que $\cos x = 0{,}8$ e que x está no quarto quadrante, calcule $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$.

36) Sabendo que $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{6}$ e x está no terceiro quadrante, calcule $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$.

37) Determine o domínio da função $f(t) = \operatorname{tg}(5t+1)$.

38) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Generalize para o conjunto $\mathbb{R}$.

Resumo

Neste capítulo estudamos as funções elementares:

- Funções polinomiais – função afim, função quadrática e funções polinomiais de modo geral.
- Funções racionais (quociente de funções polinomiais).
- Funções envolvendo módulo.
- Funções trigonométricas - seno, cosseno e tangente.

As funções trigonométricas cotangente, secante e cossecante dependem das funções seno e cosseno e serão apresentadas em material complementar. As funções logaritmo e exponencial também serão apresentadas em material complementar.

Para construção de gráficos, sugerimos que você use seus conhecimentos da disciplina Estudo de Softwares Educacionais: o software *Winplot*, por exemplo. Lembre-se que para utilizar confortavelmente um software de construção de gráficos, você precisa conhecer a teoria das funções.

Bibliografia comentada

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da matemática elementar*. 8. ed. Guarulhos: Atual, 2004. (Fundamentos da Matemática Elementar, v. 1 conjuntos, funções e v. 3 trigonometria).

Estes livros apresentam um resumo da teoria e muitos exercícios resolvidos e propostos.

CARNEIRO, V. C. *Funções elementares*. Porto Alegre: Editora da UFRG, 1993.

Dentre as refeências citadas na bibliografia, sugerimos a consulta deste livro.

Revista do Professor de Matemática (todos os números). São Paulo: SBM, 2006.

Em vários números você vai encontrar artigos interessantes sobre as funções elementares; a maioria deles será útil para seu trabalho em sala de aula.

Referências

ÁVILA, G. *Análise matemática para a licenciatura*. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

CARNEIRO, V. C. *Funções elementares*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1993.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de aritmética*. São Paulo: Atual, 1998.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*. São Paulo: Makron Books, 1992.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. São Paulo: LTC, 1987.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática)

MONTEIRO, L. H. J. *Iniciação às estruturas algébricas*. São Paulo: G.E.E.M., 1973.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw-Hill Ltda., 1985.

SPIVACK, M. *Calculus*. Houston: Publish or Perish, 1994.

Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula (coleção), 6 volumes. São Paulo: Saraiva S.A. Livreiros Editores, 2001.

ZILL, D.; DOWAR, J. *Basic mathematics for calculus.* New York: McGraw-Hill, 1994.

Revista do Professor de Matemática (todos os números). São Paulo: SBM, 2006.

Revista Eureka! (todos os números). Rio de Janeiro: OBM/SBM, 2006.