Resolução de Problemas

Carmem S. Comitre Gimenez
Nereu Estanislau Burin

2ª Edição
Florianópolis, 2011

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED

Coordenação Pedagógica

Coordenação Geral: Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

Núcleo de Formação: Nilza Godoy Gomes, Maria Bazzo de Espíndola

Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Daniela Karine Ramos

Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais

Design Gráfico

Coordenação: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior

Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

Diagramação: Gabriel Nietsche, Kallani Maciel Bonelli, Talita Ávila Nunes

Ilustrações: Kallani Maciel Bonelli, Laura Martins Rodrigues, Felipe Oliveira Gall, Gabriela Dal Toé Fortuna, Thiago Rocha Oliveira, Flaviza Righeto, Rafael de Queiroz Oliveira, Karina Silveira

Capa: Gustavo de Melo Apocalypse

Design Instrucional

Coordenação: Elizandro Maurício Brick

Design Instrucional: Gislaine Teixeira Borges Guérios

Revisão do Design Instrucional: Jaqueline Luiza Horbach

Revisão Gramatical: Mirna Saidy, Hellen Melo Pereira, Daniela Piantola

Ficha Catalográfica

G491r Gimenez, Carmem S. Comitre
Resolução de problemas / Carmem S. Comitre Gimenez, Nereu Estanislau Burin. — 2. ed. — Florianópolis : UFSC/EAD/CED/CFM, 2011.
183 p. : il. ; grafs. , tabs.

Inclui bibliografia
UFSC. Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância
ISBN 978-85-8030-011-6

1. Matemática. I. Burin, Nereu E. II. Título.
CDU 51

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da UFSC

Sumário

Apresentação

A disciplina Resolução de Problemas tem sua explicação no próprio nome: aqui vamos resolver problemas. A experiência nos mostra que muitos estudantes ficam indecisos diante de um problema, apesar de conhecerem o conteúdo. Nosso objetivo é que esta disciplina funcione como um laboratório de resolução de problemas relativos a conteúdos do ensino fundamental e médio, ampliando a discussão sobre estratégias já iniciadas na disciplina de Problemas, Sistematização e Representação.

A maioria dos conteúdos que aparece neste texto já foi objeto de trabalho em unidades de disciplinas anteriores, outros foram contemplados com uma disciplina inteira, outros ainda serão tratados em disciplinas posteriores. Em cada um destes três casos faremos um tipo de abordagem do conteúdo (sempre através de problemas), mas nosso intuito é trabalhar a resolução em si mesma: as estratégias, o conteúdo envolvido, a organização do raciocínio. É importante que você tenha em mãos o material das seguintes disciplinas: Problemas, Sistematização e Representação, Fundamentos de Matemática I, Fundamentos de Matemática II, Geometria I, Geometria II, Geometria Analítica e Introdução ao Cálculo. No início de cada capítulo indicaremos o material a ser consultado.

Carmem S. Comitre Gimenez

Nereu Estanislau Burin

Capítulo 1

Conjuntos e Funções

Capítulo 1

Conjuntos e Funções

Neste capítulo, iremos desenvolver a habilidade de utilizar conjuntos e funções para resolver problemas, além de analisar, elaborar e resolver exercícios sobre conjuntos e funções.

Tenha em mãos o material destas disciplinas para tirar suas dúvidas sobre as resoluções.

Os problemas deste capítulo tratam de conjuntos como uma linguagem dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ (suas operações e propriedades) e de funções. Estes conteúdos foram estudados nas disciplinas de **Introdução ao Cálculo e Fundamentos de Matemática I**. Apresentamos em cada tópico um conjunto de exercícios propostos, em seguida alguns exercícios resolvidos e finalizamos com uma tarefa de elaboração de exercícios.

1.1 Conjuntos

Exercícios propostos

1) Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{1, 2, \{1, 2\}\}, \quad B = \{\{1\}, 2\}, \quad C = \{1, \{1\}, \{2\}\}.$$

Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras (V) ou falsas (F) e justifique.

a) $A \cap B = \{2\}$.

b) $B \cap C = \{\{1\}\}$.

c) $B - C = A \cap B$.

d) $B \subset A$.

e) $A \cap P(A) = \{\{1, 2\}\}$, com $P(A)$ o conjunto das partes de A.

2) Sendo A e B conjuntos quaisquer, classifique as afirmações a seguir em verdadeiras (V) ou falsas (F) e justifique.

a) $A - B \subset B$.

b) $A - B \subset A \cup B$.

c) $A \cup B = B \Rightarrow B = \varnothing$.

d) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B = \varnothing$.

3) Determine o menor número natural x de modo que $1260x = n^3$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras (V) ou falsas (F) e justifique.

a) Todo inteiro par pode ser expresso na forma $n^2 + 2 \;,\; n \in \mathbb{Z}$.

b) Todo inteiro ímpar pode ser expresso na forma $2n - 9 \;,\; n \in \mathbb{Z}$.

c) Se n é um inteiro ímpar, então n^2 também é ímpar.

5) Sejam a, b, c números reais quaisquer. Classifique em verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações abaixo e justifique.

a) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$.

b) $a > b \Rightarrow ac > bc$.

c) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.

d) $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$.

e) $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$.

6) Dados dois números x e y reais positivos, chama-se *média aritmética* de x e y o número real $\dfrac{x+y}{2}$ e chama-se *média geométrica* de x e y o número real $\sqrt{xy}$. Mostre que a média geométrica é menor do que a média aritmética ou igual a ela para quaisquer x e y reais positivos.

7) Em um grupo de jovens, 210 pessoas dizem que costumam ler livros, 210 costumam assistir à TV, 250 costumam dançar. Anotações um pouco desordenadas indicam que 60 cos-

tumam ler e assistir à TV, 70 ler e dançar, 50 assistir à TV e dançar. 20 pessoas aproveitam de todos os três prazeres. Afinal, quantas pessoas deram os depoimentos? Quantas usam apenas um tipo de diversão?

8) Em certa comunidade, há indivíduos de três raças: branca, negra e amarela. Sabendo que 70 são brancos, 350 são não negros e 50% são amarelos, pergunta-se:

a) Quantos indivíduos têm a comunidade?

b) Quantos são os indivíduos amarelos?

9) Dê exemplo de conjuntos A com 2 elementos, B com 3 elementos e C com 4 elementos, de modo que $(A \cup B) \cap C$ tenha 4 elementos.

10) Em um conjunto de pontos do espaço, a distância entre dois pontos quaisquer é igual a 1. Qual o número máximo de pontos que pode haver neste conjunto?

11) No conjunto {101, 1 001, 10 001, ... , 1 000 000 000 001} cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns destes elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:

a) é igual a 11.

b) é igual a 4.

c) é menor do que 3.

d) é maior do que 4 e menor do que 11.

e) é igual a 3.

12) Esboce, sombreando a área apropriada, cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $\{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 2\} \times \{y \in \mathbb{R} / -2 < y < 4\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} / |x| < 3\} \times \{y \in \mathbb{R} / |y| \geq 3\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} / x = 7\} \times \{t \in \mathbb{R} / |t| \leq 2\}$.

Exercícios resolvidos

1) Em uma universidade, são lidos apenas os jornais A e B. 80% dos alunos dessa universidade lêem o jornal A e 60% lêem o jornal B. Sabendo-se que todo aluno é leitor de pelo menos um dos dois jornais, qual o percentual de alunos que lêem ambos os jornais?

Resolução: Suponha que a universidade tenha 100 alunos, 80 deles lêem o jornal A e 60 lêem o jornal B. Então, temos 40 alunos que lêem os dois jornais, pois 100 = 80 + 60 – 40.

Resposta: Logo, a porcentagem de alunos que lêem os dois jornais é 40%.

Este tipo de procedimento na resolução pode ser utilizado para problemas que solicitam a resposta em porcentagem (sem dados sobre as quantidades) e a quantidade mais conveniente a ser considerada é 100.

Observação. Outra opção de resolução é considerar o conjunto S de todos os alunos como a união do conjunto K dos alunos que lêem o jornal A com o conjunto M dos alunos que lêem o jornal B, ou seja, $S = K \cup M$. Chamando n o número de elementos de S, temos que:

i) o número de elementos de K é $\dfrac{80n}{100}$.

ii) o número de elementos de M é $\dfrac{60n}{100}$.

iii) chamando x o número de alunos que lêem os dois jornais, isto é, o número de elementos da intersecção $K \cap M$, e lembrando o resultado sobre o número de elementos de uma união, temos que:

$$\frac{80n}{100} + \frac{60n}{100} - x = n$$
$$\frac{140n}{100} - n = x$$
$$\frac{40n}{100} = x$$

Resposta: Logo, o número de alunos que lêem os dois jornais corresponde a $\dfrac{40n}{100}$, isto é, 40%.

2) Qual o conjunto dos valores assumidos pela expressão $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ em que a, b, c variam no conjunto dos números reais não nulos?

Resolução: Note que, se x é um número real não nulo, então x é positivo ou negativo. Se x é positivo, então $\frac{x}{|x|}=1$ e se x é negativo, então $\frac{x}{|x|}=-1$. Assim, temos que fazer as possíveis combinações positivo/negativo para os três números a, b, c.

i) Se todos são positivos, cada parcela da soma

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$$

é 1 e teremos o valor da soma igual a 4.

ii) Se todos são negativos, cada parcela da soma é -1 e teremos o valor da soma igual a -4.

iii) Se somente um deles for negativo, por exemplo a, e os outros forem positivos, teremos o valor da soma igual a $(-1)+1+1+(-1)=0$ Se considerássemos somente b negativo ou somente c negativo, teríamos o mesmo valor!).

iv) Se exatamente dois deles são negativos e o outro positivo, por exemplo a e b negativos e c positivo, teremos o valor da soma igual a $(-1)+(-1)+1+1=0$.

Resposta: Podemos então concluir que o conjunto dos possíveis valores é $\{-4,0,4\}$.

3) Sejam X um conjunto não vazio, A e B subconjuntos de X, $A^c=\{x\in X \,/\, x\notin A\}$ e $B^c=\{x\in X \,/\, x\notin B\}$. Assinale as sentenças corretas.

a) $A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow A\subset B^c \Leftrightarrow B\subset A^c$

b) Se $X=\mathbb{R}$, $A=\{x\in X \,/\, x^3-1=0\}$ e $B=\{x\in X \,/\, x^2-1=0\}$, então $A=B$.

c) $A-\varnothing=A$ e $A-B=A-(A\cap B)$

d) $A-B\neq A\cap B^c$

Resolução: Vamos analisar cada sentença.

(a) Temos aqui duas equivalências; veja um diagrama da situação na figura 1.1.

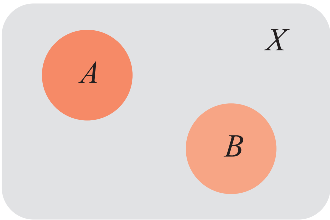


Figura 1.1

Observando o diagrama, somos levados a acreditar que a sentença é correta. Para fazer a prova das duas equivalências, mostraremos que

$$A \cap B = \varnothing \overbrace{\Rightarrow}^{(1)} A \subset B^c \overbrace{\Rightarrow}^{(2)} B \subset A^c \overbrace{\Rightarrow}^{(3)} A \cap B = \varnothing.$$

Provar estas três implicações é equivalente a provar as duas equivalências.

1) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subset B^c$

Hipótese: $A \cap B = \varnothing$

Tese: $A \subset B^c$

Seja $x \in A$. Por hipótese, temos que não há elementos comuns aos conjuntos A e B. Logo, podemos concluir que $x \notin B$. Como $x \in X$ e $x \notin B$, temos que $x \in B^c$. Assim, $A \subset B^c$.

2) $A \subset B^c \Rightarrow B \subset A^c$

Hipótese: $A \subset B^c$

Tese: $B \subset A^c$

Seja $x \in B$. Então, $x \notin B^c$. Como por hipótese $A \subset B^c$, podemos concluir que $x \notin A$. Assim, como $x \in X$ e $x \notin A$, temos que $x \in A^c$. Logo, $B \subset A^c$.

3) $B \subset A^c \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

Hipótese: $B \subset A^c$

Tese: $A \cap B = \varnothing$

Suponhamos que $A \cap B \neq \varnothing$. Então, existe um elemento x que pertence aos dois conjuntos, isto é, $x \in A$ e $x \in B$. Mas, se $x \in B$ e por hipótese $B \subset A^c$, podemos concluir que $x \in A^c$, mas $x \notin A$. Isto é uma contradição, pois $x \in A$. Logo, $A \cap B = \varnothing$.

Concluímos então que a primeira sentença é correta.

(b) Se $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in X \,/\, x^3 - 1 = 0\}$ e, então $A = B$.

Vamos descrever os conjuntos A e B (A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$); resolvendo as equações $x^3 - 1 = 0$ e $x^2 - 1 = 0$, temos $A = \{1\}$ e $B = \{-1,1\}$. Logo, A não é igual a B e a segunda sentença não é correta.

(c) $A - \varnothing = A$ e $A - B = A - (A \cap B)$.

Temos aqui duas sentenças unidas pelo conectivo "e". A sentença será correta se ambas as sentenças o forem. A primeira, é correta[1]. Quanto à segunda, vamos desenvolver o membro direito da igualdade utilizando os resultados já conhecidos[2]:

1. Você sabe provar?

2. Veja no capítulo 1 de Introdução ao Cálculo.

Se E, F e K são subconjuntos de U, então:

i) $E - F = E \cap F^c$

ii) $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

iii) $E \cap (F \cup K) = (E \cap F) \cup (E \cap K)$.

Então,

$$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c) =$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = \varnothing \cup (A \cap B^c) = A - B$$

Assim, podemos concluir que a terceira sentença é correta.

(d) $A - B \neq A \cap B^c$.

Como já sabemos, $A - B = A \cap B^c$. Logo, a quarta sentença é incorreta.

Resposta: Portanto, os itens a e c são corretos, e os itens b e d são incorretos.

4) Determine o subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que é solução da equação $x + y + xy = 120$.

Resolução: Vamos procurar os pares de números inteiros (x, y) que satisfazem a equação. Fatorando o membro esquerdo da igualdade, temos:

$$x + y + xy = x + y(1 + x) = x + (1 - 1) + y(1 + x) =$$

$$= (x + 1) - 1 + y(x + 1) = (x + 1)(y + 1) - 1$$

Note que, na segunda passagem, adicionamos $0=1-1$, o que não altera a expressão. Então, podemos escrever:

$$(x+1)(y+1)-1=120$$
$$(x+1)(y+1)=121$$

Temos agora um produto de dois números inteiros cujo resultado é 121. Fatorando 121, obtemos $121=11^2$. Faremos uma tabela com os possíveis valores inteiros de $x+1$ e $y+1$:

$x + 1$	$y + 1$	x	y	(x,y)
1	121	0	120	(0, 120)
–1	–121	–2	–122	(–2, –122)
121	1	120	0	(120, 0)
–121	–1	–122	–2	(–122, –2)
11	11	10	10	(10, 10)
–11	–11	–12	–12	(–12, –12)

Resposta: Logo, o conjunto solução em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é:

$S=\{(0,120),(-2,-122),(120,0),(-122,-2),(10,10),(-12,-12)\}$.

1.2 Funções

Exercícios propostos

13) Sejam $V=\{(P,Q)\,/\,P$ e Q são vértices distintos de um hexágono regular$\}$ e f uma função que associa a cada par $(P,Q)\in V$ a distância de P a Q. Qual o número de elementos do conjunto imagem de f?

14) Seja f a função que a cada número real x associa o menor dos números $(x+1)$ ou $(-x+5)$. Qual o valor máximo de $f(x)$?

15) Qual a função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria?

16) Seja $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades:

a) $F(0)=1$

b) $F(x+y)=F(x)\cdot F(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$

c) $0<F(1)<1$

Determine o valor da expressão

$$F(0)+F(1)+F(2)+F(3)+...+F(9).$$

17) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função definida por $f(x)=a\cdot 3^{bk}$, com a e b constantes reais. Sabendo que $f(0)=900$ e, calcule k tal que $f(k)=100$.

18) Se o ponto $(k,3k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pertence ao gráfico da função $f(x)=x^2-2x+k$, quais os possíveis valores de k?

19) Qual o maior número real cuja soma com o próprio quadrado é igual ao próprio cubo?

20) Para produzir um objeto, uma firma gasta R$1,20 por unidade. Além disso, há uma despesa fixa de R$4000,00, independente da quantidade produzida. O preço de venda é R$2,00 por unidade. Qual é o número mínimo de unidades que deve ser vendido, a partir do qual a firma começa a ter lucro?

21) Suponha que o número $f(x)$ de funcionários necessários para distribuir, em um dia, contas de luz para x por cento de moradores numa determinada cidade seja dado por $f(x)=\dfrac{300x}{150-x}$. Se o número de funcionários necessários para distribuir as contas de luz, em um dia, foi 75, qual a porcentagem dos moradores que as receberam?

22) Uma função polinomial de primeiro grau f é tal que $f(-1)=5$ e $f(3)=-3$. Qual o valor de $f(0)$?

23) A loja Continente de materiais de construção vende areia grossa por 18 coroas o metro cúbico. A sua concorrente, Ilhabela, vende o mesmo tipo de areia grossa por 16 coroas o metro cúbico, mas acrescenta a taxa de 5 coroas para cada caminhão de areia transportada. Sabendo que a capacidade do caminhão é de 5 metros cúbicos de areia grossa (ou uma

carrada de areia), avalie quando é mais vantajoso encomendar na Ilhabela a entrega de x metros cúbicos de areia, com $x < 25$.

24) Determine a função quadrática cuja única raiz é $-\frac{1}{3}$ e que corta o eixo y no ponto $(0, -5)$.

Exercícios resolvidos

5) Seja f uma função definida para todo número real x, satisfazendo as seguintes condições:

i) $f(3) = 2$;

ii) $f(x+3) = f(x) \cdot f(3), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Determine o valor de $f(-3)$.

Resolução: Pela condição (ii), temos que

$$f(3) = f(0+3) = f(0) \cdot f(3),$$

isto é, $f(3) = f(0) \cdot f(3)$. Como $f(3) = 2 \neq 0$, pela condição (i), pela lei do cancelamento, temos $f(0) = 1$. Assim,

$$1 = f(0) = f(3 + (-3)) = f(3) \cdot f(-3) = 2 \cdot f(-3),$$

ou seja, $2 \cdot f(-3) = 1$, o que nos dá $f(-3) = \frac{1}{2}$.

Resposta: O valor de $f(-3)$ é $\frac{1}{2}$.

6) Quais os valores de a e de b para que o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx - 1$ contenha os pontos $(-2, 1)$ e $(3, 1)$?

Resolução: Para que os pontos $(-2,1)$ e $(3,1)$ pertençam ao gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx - 1$, devemos ter $f(-2) = 1$ e $f(3) = 1$, isto é, $f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 1 = 1$ e $f(3) = a \cdot (3)^2 + b \cdot (3) - 1 = 1$. Temos então duas equações:

$$(1)\ 4a - 2b - 1 = 1 \quad \text{e} \quad (2)\ 9a - 3b - 1 = 1.$$

Isolando a na equação (1), temos $a = \frac{1+b}{2}$ e, substituindo na equação (2), temos:

$$9\cdot\left(\frac{1+b}{2}\right)+3b-1=1$$

$$9\cdot\left(\frac{1+b}{2}\right)+3b=2$$

$$\frac{9\cdot(1+b)+6b}{2}=2$$

$$9\cdot(1+b)+6b=4$$

$$9+9b+6b=4$$

$$15b=4-9$$

$$15b=-5$$

$$b=-\frac{5}{15}$$

$$b=-\frac{1}{3}.$$

Encontrado o valor b, e sabendo que $a=\frac{1+b}{2}$, determinamos a:

$$a=\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{\frac{3-1}{3}}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Resposta: Para $a=\frac{1}{3}$ e $b=-\frac{1}{3}$, o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\left(-\frac{1}{3}\right)x-1$ contém os pontos (-2,1) e (3,1).

Como verificar se a sua resposta está correta?

7) Seja $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ dada por $f(n+1)=n-1$. Qual o valor de $f(n-1)$?

Resolução: Vamos observar o que faz a função f a cada número inteiro $n+1$; ela associa o número inteiro $n-1$, ou seja, $f(n+1)=n-1=(n+1)-2$. Na reta, isso significa que a cada número inteiro k, f associa o número inteiro que está duas unidades à esquerda de k: $f(k)=k-2$.

Assim, $f(n-1)=(n-1)-2=n-3$.

Resposta: O valor de $f(n-1)$ é $n-3$.

8) Seja f uma função polinomial decrescente de primeiro grau tal que $f(3)=5$ e $f(f(1))=1$. Qual a abscissa do ponto onde f corta o eixo x?

Resolução: Pelos dados do problema podemos concluir que $f(x) = ax + b$, com $a<0$. Dessa forma, temos duas equações:

Lembre-se do estudo das funções afim!

(1) $f(3)=a\cdot 3+b=5$ e

(2) $f(f(1))=a\cdot f(1)+b=1$.

Como $f(1)=1\cdot a+b=a+b$, e substituindo na segunda equação, podemos escrever:

(1) $3a+b=5$ e

(2) $a(a+b)+b=1$, isto é, $a^2+ab+b=1$.

Isolando b na primeira equação e substituindo na segunda, temos:

$$b=5-3a \text{ e}$$

$$a^2+a(5-3a)+(5-3a)=1$$

$$a^2+5a-3a^2+5-3a-1=0$$

$$-2a^2+2a+4=0 \quad \text{ou} \quad 2a^2-2a-4=0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos as raízes $a_1=2$ e $a_2=-1$. Como o valor de a é negativo (pois f é decrescente), devemos ter $a=-1$. Consequentemente, $b=5-3\cdot(-1)=5+3=8$ e a função é dada por $f(x)=(-1)\cdot x+8-x+8$. A abscissa do ponto onde f corta o eixo x é a raiz da função, isto é, o valor de x para o qual $f(x)=0$. Assim, se $-x+8=0$, teremos $x=8$.

Resposta: f corta o eixo das abscissas no pontos $x=8$.

Tarefa

I) Elabore cinco exercícios sobre "conjuntos", que contemplem:

a) operações (união, intersecção, diferença);

b) número de elementos de um conjunto;

c) inclusão de conjuntos;

d) conjuntos numéricos.

II) Elabore cinco exercícios sobre “funções”, que contemplem:

a) função afim e/ou função quadrática;

b) conceito de função;

c) função definida por mais de uma sentença;

d) gráfico de função;

e) função inversa.

Capítulo 2

Polinômios e Equações

Capítulo 2

Polinômios e Equações

Desenvolveremos, neste capítulo, a habilidade de utilizar polinômios e equações para resolver problemas, além de analisar, elaborar e resolver exercícios sobre polinômios e equações.

Assunto já estudado na disciplina de Introdução ao Cálculo.

Neste capítulo, trataremos de *polinômios*, um tipo especial de função. Apresentamos inicialmente uma série de resultados sobre polinômios, que irão auxiliar os seus estudos. O assunto *equações* será tratado em seguida. Contudo, daremos mais ênfase às equações polinomiais.

2.1 Polinômios

Um polinômio é uma função do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais e $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os *coeficientes* do polinômio $p(x)$. O maior valor de n para o qual a_n é diferente de zero é chamado de *grau* do polinômio; neste caso, a_n é chamado o *coeficiente dominante* do polinômio. Para o polinômio nulo $p(x) \equiv 0$ (com todos os coeficientes iguais a zero), não está definido grau. Os polinômios de grau zero são constantes diferentes de zero. Denotamos o grau do polinômio $p(x)$ por δp.

2.1.1 Igualdade de polinômios

Dois polinômios

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ e}$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

são iguais quando $m = n$ e

$$a_n = b_m, a_{n-1} = b_{m-1}, \ldots, a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Assim, dois polinômios são iguais quando têm o mesmo grau e seus termos correspondentes são iguais.

2.1.2 Raiz de um polinômio

Dizemos que k é *raiz* do polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

quando $p(k) = 0$, ou seja, quando

$$p(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0\,.$$

Um polinômio de grau n tem exatamente n raízes complexas. Eventualmente, essas raízes também podem ser reais, uma vez que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (ou seja, o conjunto dos números reais é subconjunto do conjunto dos números complexos). Esse resultado é conhecido como *Teorema Fundamental da Álgebra*, que foi provado por Gauss. Uma consequência desse teorema nos diz que um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

pode ser fatorado como

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\,,$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as n raízes complexas (ou eventualmente reais) do polinômio. Essas raízes não são necessariamente distintas.

Exemplos:

1) $p(x) = x^4$ possui quatro raízes iguais, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Diz-se, neste caso, que zero é uma raiz de *multiplicidade* 4.

2) $q(x) = x^5 - x^3$ possui cinco raízes reais, mas três delas são iguais.

De fato, $x^5 - x^3 = 0$ implica $x^3(x^2 - 1) = 0$ e daí obtemos as raízes $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Zero é uma raiz de *multiplicidade* 3.

Teorema. *Se um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *com* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *números inteiros possui uma raiz racional* $\dfrac{c}{d}$, *então* $c \mid a_0$ *e* $d \mid a_n$.

Lê-se: c divide a_0 ou c é divisor de a_0, já visto na disciplina de Fundamentos da Matemática I.

Demonstração:

Seja $p\left(\frac{c}{d}\right)=0$. Tomando $\frac{c}{d}$ em sua forma irredutível, temos

$$p\left(\frac{c}{d}\right)=a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-1}+\ldots+a_2\left(\frac{c}{d}\right)^2+a_1\frac{c}{d}+a_0=0.$$

Somando o oposto de a_0 em ambos os membros, obtemos

$$a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-1}+\ldots+a_2\left(\frac{c}{d}\right)^2+a_1\frac{c}{d}=-a_0.$$

Multiplicando ambos os membros por d^n,

$$a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}d+a_{n-2}c^{n-2}d^2+\ldots+a_2c^2d^{n-2}+a_1cd^{n-1}=-a_0d^n.$$

Colocando c em evidência,

$$c(a_nc^{n-1}+a_{n-1}c^{n-2}d+\ldots+a_2cd^{n-2}+a_1d^{n-1})=-a_0d^n.$$

Como $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ são números inteiros, pela definição de divisibilidade teremos que $c\,|-a_0d^n$. Como c não é um divisor de d^n (pois $\frac{c}{d}$ é irredutível), temos que $c\,|\,a_0$.

Por outro lado, se

$$a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-1}+\ldots+a_2\left(\frac{c}{d}\right)^2+a_1\frac{c}{d}+a_0=0,$$

podemos escrever

$$a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n=-\left[a_{n-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-1}+\ldots+a_2\left(\frac{c}{d}\right)^2+a_1\frac{c}{d}+a_0\right].$$

Multiplicando ambos os membros por d^n, teremos

$$a_nc^n=-\left[a_{n-1}c^{n-1}d+\ldots+a_2c^2d^{n-2}+a_1cd^{n-1}+a_0d^n\right].$$

Colocando d em evidência no membro da direita,

$$a_nc^n=-d\left[a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_2c^2d^{n-3}+a_1cd^{n-2}+a_0d^{n-1}\right].$$

Assim, $-d\,|\,a_nc^n$, ou seja, $d\,|\,a_nc^n$. Como d não é um divisor de c^n (pois $\frac{c}{d}$ é irredutível), devemos ter $d\,|\,a_n$.

$\blacksquare$

Exemplos:

3) O polinômio $p(x)=x^5+3x^2-3$ admite raiz racional?

Resolução: Se $p(x)$ admite uma raiz racional $\frac{c}{d}$ (irredutível), então $c\,|-3$ e $d\,|\,1$. Logo, as possibilidades para o numerador c são $1, -1, 3$ e -3 e para o denominador d são 1 e -1. As possíveis raízes racionais seriam então -3, -1, 1 ou 3. Vamos verificar:

$$p(-3)=(-3)^5+3(-3)^2-3=-219\neq 0$$

$$p(-1)=(-1)^5+3(-1)^2-3=-1\neq 0$$

$$p(1)=(1)^5+3(1)^2-3=1\neq 0$$

$$p(3)=(3)^5+3(3)^2-3=267\neq 0$$

Logo, $p(x)$ não admite raízes racionais.

4) Mostre que $\sqrt{5}$ é um número irracional.

Resolução: $\sqrt{5}$ é raiz do polinômio $p(x)=x^2-5$. Pelo teorema, suas possíveis raízes racionais são -5, -1, 1 ou 5. Vamos verificar:

$$p(1)=1^2-5=-4\neq 0$$
$$p(-1)=(-1)^2-5=-4\neq 0$$
$$p(5)=5^2-5=20\neq 0$$
$$p(-5)=(-5)^2-5=20\neq 0.$$

Logo, esse polinômio não admite raízes racionais. Como $\sqrt{5}$ é raiz, deve ser irracional.

2.1.3 Operações com polinômios

Faremos a seguir alguns exemplos de adição, subtração e multiplicação de polinômios. Esses algoritmos são bastante parecidos com os algoritmos das operações em $\mathbb{Z}$. Em nosso estudo, essas operações estão definidas para polinômios com coeficientes reais.

Adição

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

$$q(x) = -5x^4 + 7x^3 + 2x - 9$$

Para somar $p(x)$ e $q(x)$, fazemos uso das propriedades dos números reais; o polinômio resultante da adição é:

$$s(x) = p(x) + q(x) = -5x^4 + (3+7)x^3 - 2x^2 + (4+2)x + (-8-9) =$$
$$= -5x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 6x - 17$$

Podemos também "armar a conta", como fazemos com a adição de números inteiros:

$$\begin{array}{r} 0x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\ -5x^4 + 7x^3 + 0x^2 + 2x - 9 \\ \hline -5x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 6x - 17 \end{array} + \ .$$

Nesse caso, é interessante completarmos as potências de x que "faltam" com coeficientes zero.

Note que $\delta s \leq \max\{\delta p, \delta q\}$.

Subtração

Utilizamos, aqui, a palavra diferença como sinônimo de subtração. Note que também aqui "subtrair é somar o oposto".

Dados dois polinômios, $p(x)$ e $q(x)$, o polinômio $d(x)$, que resulta da **diferença** de $p(x)$ e $q(x)$, é dado por

$$d(x) = p(x) - q(x) = p(x) + (-q)(x),$$

onde $(-q)(x)$ é o polinômio cujos coeficientes são os opostos dos coeficientes de $q(x)$.

Veja um exemplo:

$$p(x) = 3x^5 - 8x^4 + 5x^2 + 1$$

$$q(x) = 7x^5 + 3x^3 + x^2 - 9x - 3$$

$$(-q)(x) = (-7)x^5 + (-3)x^3 + (-1)x^2 - (-9)x - (-3)$$

Somando $p(x)$ com $(-q)(x)$, obtemos o polinômio diferença

$$d(x) = [3+(-7)]x^5 - 8x^4 + (-3)x^3 + [5+(-1)]x^2 - (-9)x + [1-(-3)] =$$
$$= -4x^5 - 8x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 9x + 4.$$

Como vimos na adição $\delta s \leq \max\{\delta p, \delta q\}$.

Multiplicação

Também na multiplicação de dois polinômios usamos o algoritmo da multiplicação de números inteiros. Veja o exemplo:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$$
$$q(x) = 2x^2 - 1$$

$$m(x) = p(x) \cdot q(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \cdot (2x^2 - 1) =$$
$$= x^3(2x^2 - 1) - 3x^2(2x^2 - 1) + 5x(2x^2 - 1) - 6(2x^2 - 1) =$$
$$= 2x^5 - x^3 - 6x^4 + 3x^2 + 10x^3 - 5x - 12x^2 + 6 =$$
$$= 2x^5 - 6x^4 + (-1+10)x^3 + (3-12)x^2 - 5x + 6 =$$
$$= 2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 9x^2 - 5x + 6$$

Portanto, $m(x) = 2x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 9x^2 - 5x + 6$.

Note que, se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios não nulos, então $\delta m = \delta p + \delta q$.

Divisão (algoritmo da divisão para polinômios)

Dados dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ ($g(x)$ diferente do polinômio nulo), **dividir** $f(x)$ (dividendo) por $g(x)$ (divisor) é determinar dois polinômios $q(x)$ (quociente) e $r(x)$ (resto) de modo que se verifiquem as condições:

i) $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$;

ii) $\delta r < \delta g$ ou $r = 0$.

Lembre-se de que, como acontece no conjunto dos números inteiros, o quociente e o resto são únicos.

Podem ocorrer três situações:

1) O dividendo f é o polinômio nulo.

Nesse caso, q e r são também o polinômio nulo para qualquer g, pois $0 = g \cdot 0 + 0$.

2) $\delta f < \delta g$

Fazendo $q = 0$ e $r = f$, temos $f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$, o que satisfaz as condições.

3) $\delta f \geq \delta g$

Nesse caso, como determinar os polinômios $q(x)$ e $r(x)$?

Vamos fazer um exemplo usando o mesmo algoritmo que conhecemos para a divisão de inteiros.

Dividir $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2$ por $g(x) = x^2 - 3x + 5$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 0x + 0 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{2-2}
-x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 0x + 0 & \quad x^2 + 1 \\ \cline{1-1}
0x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x + 0 & \\
-x^2 + 3x - 5 & \\ \cline{1-1}
0x^2 + 3x - 5 &
\end{array}
$$

Temos então que

$$x^4 - 3x^3 + 6x^2 = (x^2 - 3x + 5) \cdot (x^2 + 1) + (3x - 5).$$

Assim, o quociente é $q(x) = x^2 + 1$ e o resto é $r(x) = 3x - 5$, com $\delta r = 1 < \delta g = 2$.

Observação 1. Quando $\delta f \geq \delta g$, é sempre possível encontrar polinômios q e r satisfazendo as duas condições.

Observação 2. Quando na divisão de f por g o resto é o polinômio nulo, então dizemos que f é *divisível* por g.

Teorema do Resto

O resto da divisão de um polinômio $f(x)$ pelo polinômio $g(x) = x - a$ é igual a $f(a)$.

Demonstração: Pela segunda condição do Algoritmo da Divisão para polinômios, devemos ter $\delta r < \delta g = 1$. Logo, o resto r será o polinômio nulo ou terá grau zero (será uma constante).

Como $f(x) = q(x) \cdot (x - a) + r(x)$, o valor numérico de f em a é dado por $f(a) = q(a) \cdot (a - a) + r(a) = q(a) \cdot 0 + r = r$, o que demonstra o resultado.

■

Consequências do Teorema do Resto

1) (*Teorema D'Alembert*) a é raiz do polinômio f se, e somente se, f é divisível por $x-a$.

   Demonstração: De fato, se $f(a)=0$, então, pelo Teorema do Resto, $r=f(a)=0$ é o polinômio nulo e f é divisível por $x-a$. Reciprocamente, se f é divisível por $x-a$, então o resto r é o polinômio nulo e $f(a)=0$. Logo, a é raiz de f. ■

2) Se um polinômio f é divisível por $x-a$ e por $x-b$, com $a \neq b$, então f é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$. *Deixamos a prova como exercício.*

3) Se um polinômio f tem uma raiz a de multiplicidade n, então f é divisível por $(x-a)^n$. *Deixamos a prova como exercício.*

Relações entre Coeficientes e Raízes (Relações de Girard)

Um polinômio depende unicamente de seus coeficientes e de seu grau; consequentemente, há uma relação entre seus coeficientes e suas raízes. Vamos deduzir essa relação para polinômios de grau 2 e, em seguida, daremos a generalização para polinômios de grau n.

Considere um polinômio de grau 2, $p(x)=ax^2+bx+c$, cujas raízes são x_1 e x_2. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, temos

$$p(x)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

onde x_1 e x_2 são as raízes de $p(x)$. Então, para todo x, temos a igualdade

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Desenvolvendo o membro da direita, obtemos

$$ax^2+bx+c=ax^2+a(-x_1-x_2)x+ax_1x_2.$$

Pela igualdade de polinômios, temos que

$$b=a(-x_1-x_2)=-a(x_1+x_2) \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ e}$$

$$c=ax_1x_2 \Rightarrow x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Generalizando essa ideia, se $p(x)$ é um polinômio de grau n,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obtemos as relações:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$S_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exemplo:

5) Determine as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 - 12x - 36$, sabendo que uma raiz é igual ao produto das outras duas.

Resolução: Se a, b, c são as raízes do polinômio e $a_3 = 1$, $a_2 = 5$, $a_1 = -12$, $a_0 = -36$ são os coeficientes, pelas Relações de Girard temos:

$$S_1 = a + b + c = -\frac{a_2}{a_3} = -5$$

$$S_2 = ab + ac + bc = \frac{a_1}{a_3} = -12$$

$$S_3 = abc = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3} = -(-36) = 36.$$

Como $a = bc$ (uma das raízes é igual ao produto das outras duas), substituindo em S_3, obtemos

$$abc = a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \text{ ou } a = -6.$$

i) Se $a = 6$, de S_1 temos $b + c = -11$ e de S_2 temos $6(b + c) + 6 = -12$, ou seja, $b + c = -3$. Isso é uma contradição, o que significa que não ocorre $a = 6$.

ii) Se $a = -6$, de S_1 temos $b + c = 1$, isto é, $c = 1 - b$. Substituindo em $bc = -6$, obtemos

$$b(1-b)=-6$$
$$b-b^2+6=0$$
$$b^2-b-6=0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos $b=3$ ou $b=-2$.

Se $b=3$, então $c=1-3=-2$ e se $b=-2$ temos $c=1-(-2)=3$. Assim, as raízes do polinômio são –6, 3 e –2. (Verifique!)

Exercícios resolvidos

1) Mostre que, se a soma dos coeficientes de um polinômio é zero, então ele é divisível por $x-1$.

Resolução: Consideremos um polinômio

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

com $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1+a_0=0$. Isso significa que $p(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1+a_0=0$, ou seja, 1 é raiz de $p(x)$.

Resposta: O polinômio é divisível por $x-1$.

2) Sabendo-se que 1 é raiz dupla do polinômio $p(x)=x^3-3x+2$, determine o conjunto dos números reais para os quais está definida a expressão $\dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}$.

Resolução: Para que a expressão $\dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}$ esteja definida, devemos ter $p(x)>0$.

Inicialmente vamos encontrar todas as raízes do polinômio. Se 1 é raiz dupla, então $p(x)$ é divisível por $(x-1)^2$ (consequência 3 do Teorema do Resto). Efetuando essa divisão, obtemos $p(x)=(x-1)^2(x+2)$.

Então, se $(x-1)^2(x+2)=0$, tem-se $x=1$ ou $x=-2$. Assim, a outra raiz do polinômio é -2.

Devemos excluir do conjunto os números 1 e –2.

Vejamos agora quando $p(x)=(x-1)^2(x+2)>0$.

Como o primeiro fator é sempre positivo (pois é um quadrado), basta sabermos quando $x+2>0$. Isso nos dá $x>-2$.

Resposta: O conjunto dos números para os quais está definida a expressão $\frac{1}{\sqrt{p(x)}}$ é: $A = \{x \in \mathbb{R} / x > -2 \text{ e } x \neq 1\} = (-2, +\infty) - \{1\}$.

3) Sabendo que uma das raízes de $p(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$ é 2, calcule todas as outras.

Resolução: Se uma das raízes é 2, então o polinômio é divisível por $x - 2$. Efetuando essa divisão, temos

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x-2)(x^2 + 8x + 15).$$

As outras raízes de $p(x)$ serão as raízes de $q(x) = x^2 + 8x + 15$, uma vez que

$$(x-2)(x^2 + 8x + 15) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } x^2 + 8x + 15 = 0.$$

Como a soma das raízes de $q(x)$ é -8 e o produto é 15, concluímos que as raízes de $q(x)$ são -3 e -5.

Resposta: As raízes de $p(x)$ são 2, –3 e –5.

4) Qual o resto da divisão de $p(x) = x^{1000} + x^2 + 56$ por $g(x) = x + 1$?

Resolução: Pelo Teorema do Resto, como $x + 1 = x - (-1)$, temos que esse resto é $p(-1) = (-1)^{1000} + (-1)^2 + 56 = 1 + 1 + 56 = 58$.

Resposta: O resto da divisão é 58.

Exercícios propostos

1) Determine os valores de A e B tais que $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$.

2) Qual o número de raízes reais do polinômio $p(x) = (x^2 + 1)(x-1)^2(x+1)$?

3) Determine o quociente e o resto da divisão de $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ por $g(x) = 2x^2 + 3$.

4) Considere o polinômio $p(x) = 8x^2 - (a-1)x + (a-7)$. Qual o valor de a para que:

a) $p(x)$ tenha raízes reais e iguais?

b) $p(x)$ tenha raízes opostas uma da outra?

c) $p(x)$ tenha uma raiz nula?

5) Determine um polinômio de grau 3 cujas raízes são 1, 2 e 3.

6) Determine um polinômio f de grau 2 tal que $f(0)=1$, $f(1)=4$ e $f(-1)=0$.

7) Um polinômio $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ satisfaz as seguintes condições:

(i) $p(1)=0$; (ii) $p(-x)+p(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Qual o valor de $p(2)$?

8) Se $p(x)=x^n-3x^{\frac{n}{2}}+x^{n-6}$ é um polinômio, qual o menor valor de n?

9) Se dividirmos um polinômio $p(x)$ por $x-2$, o resto é 13 e, se dividirmos $p(x)$ por $x+2$, o resto é 5. Se $r(x)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por x^2-4, qual o valor de $r(1)$?

10) Qual o valor de m para que o resto da divisão de $p(x)=x^3-x^2-4x+m$ por $x+2$ seja zero?

2.2 Equações polinomiais

Dados dois polinômios, $f(x)$ e $g(x)$, chama-se *equação polinomial (ou equação algébrica)*, a sentença aberta $f(x)=g(x)$.

Exemplos:

6) $x^5-x^3+x-1=3x^2+5x+2$

7) $x^3-x^2+x-1=0$

Resolver uma equação é determinar todos os valores de x que satisfazem a igualdade $f(x)=g(x)$. Dizemos também que os valores de x que satisfazem a igualdade são as *raízes* da equação. Ao conjunto das raízes da equação damos o nome de *conjunto solução (ou conjunto verdade)* da equação. Todos os resultados que estudamos para polinômios serão úteis na resolução das equações polinomiais (por exemplo, as Relações de Girard, raízes múltiplas e outros).

Exercícios resolvidos

5) Qual a média aritmética das raízes da equação $x^3 - x^2 = 6x$?

Resolução: $x^3 - x^2 = 6x$ pode ser escrita como

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 - x - 6) = 0.$$

Então, uma das raízes é zero e as outras duas são as raízes de $x^2 - x - 6 = 0$.

Resolvendo essa equação, temos as raízes -2 e 3. O conjunto solução da equação é $S = \{0, -2, 3\}$ e a média aritmética das raízes é

$$m = \frac{0 + (-2) + 3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Resposta: A média aritmética das raízes é $\frac{1}{3}$.

6) Quais os valores de m e n reais para os quais a equação $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + n = 0$ admite uma raiz de multiplicidade 3?

Resolução: O problema nos diz que as três raízes da equação são iguais; vamos chamar esse valor de b. Se consideramos o polinômio $p(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + n$, então $p(x)$ tem uma raiz de multiplicidade 3. Pelas Relações de Girard,

$$b + b + b = 3b = -\frac{(-2)}{\frac{1}{3}} = 6 \Rightarrow b = 2.$$

Assim, $p(2) = 0$ e teremos

$$p(2) = \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + m \cdot 2 + n = 0$$

$$\frac{-16+6m+3n}{3}=0$$

$$6m+3n=16.$$

Por outro lado, também pelas Relações de Girard,

$$3b^2=\frac{m}{\frac{1}{3}}=3m \Rightarrow m=4.$$

Substituindo $m=4$ em (1), temos

$$6\cdot 4+3n=16$$
$$3n=16-24$$
$$n=-\frac{8}{3}$$

Resposta: Os valores procurados são $m=4$ e $q=-\frac{8}{3}$.

Você sabe verificar se encontrou os valores corretos?

Exercícios propostos

11) Determine uma raiz real da equação $(1-\sqrt{2})x^3-1-\sqrt{2}=0$.

12) Se a e b são, respectivamente, a maior e a menor das raízes de $x^4-10x^2+9=0$, qual o valor de $a-b$?

13) Se as raízes da equação $x^2+bx+27=0$ são múltiplos positivos de 3, qual o valor de b?

14) Determine as raízes da equação $x^3-12x^2+39x-28=0$ sabendo que uma das raízes é a média aritmética das outras duas.

15) Resolva a equação $x^3-3x^2-4x+12=0$ sabendo que duas raízes são opostas.

16) Qual o valor de m para que a equação $x^3+mx-1=0$ tenha uma raiz de multiplicidade 2?

Capítulo 3

Sequências – Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Capítulo 3

Sequências – Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Neste capítulo, apresentamos inicialmente a definição formal de sequência, a notação usual e as duas principais sequências utilizadas, que são a progressão aritmética (PA) e a progressão geométrica (PG).

3.1 Sequências

Uma sequência é qualquer conjunto ordenado de elementos. Por exemplo, o conjunto dos números primos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...). Embora essa sequência seja muito importante, ela não possui uma lei de formação, isto é, não temos uma "fórmula" que nos forneça cada termo desta sequência.

Muitas sequências podem ser expressas por uma lei de formação. Isso significa que podemos obter um termo qualquer da sequência a partir de uma expressão que relaciona o valor do termo com sua posição. Essa expressão é denominada termo geral da sequência.

De modo geral, uma sequência é uma função $f:\mathbb{N}^* \to B$. Isto é, a cada número natural não nulo, associa-se um elemento do conjunto B. O termo geral pode então ser escrito $a_n = f(n)$. *Notação:* (a_n).

Em uma sequência, denotamos a_1 o primeiro termo, a_2 o segundo termo e assim sucessivamente até a_n o n-ésimo termo.

- **Sequência Finita:** $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$
- **Sequência Infinita:** $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$

Note que os conjuntos $A=\{2,4,6,\cdots\}$ e $B=\{6,4,2,\cdots\}$ são iguais, porém as sequências $A=(2,4,6,\cdots)$ e $B=(6,4,2,\cdots)$ são diferentes, pois para serem iguais teriam que possuir os mesmos termos com a mesma ordem. Se pensarmos em uma sequência como uma função, a igualdade de sequências é uma igualdade de funções. Como o domínio é $\mathbb{N}^*$, duas sequências (a_n) e (b_n) são iguais quando $a_n=b_n$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$.

3.2 Progressão aritmética

Chama-se progressão aritmética (PA) à sequência de termos que segue um padrão de formação tal que seus termos, a partir do segundo, são originados pela soma do termo anterior com uma constante r, chamada de razão da progressão. Isto é:

Atenção: Pesquisar sobre a origem desta denominação.

$$a_n=a_{n-1}+r,\ n\geq 2,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Exemplos:

1) (1, 3, 5, 7, 9, ...).

   3 – 1 = 5 – 3 = 7 – 5 = 9 – 7 = 2. Portanto, $r=2$.

2) (6, 11, 16, 21, 26, ...).

   11 – 6 = 16 – 11 = 21 – 16 = 5. Portanto, $r=5$.

3) (– 4, – 1, 2, 5, ...).

   – 1 – (– 4) = 2 – (– 1) = 5 – 2 = 3. Portanto, $r=3$.

4) (5, 4, 3, 2, 1, 0, – 1, ...).

   4 – 5 = 3 – 4 = 2 – 1 = ... = –1. Portanto, $r=-1$.

5) $\left(-4,-\frac{3}{2},1,\frac{7}{2},6,\frac{17}{2},\cdots\right)$.

   $-\frac{3}{2}-(-4)=1-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}-1=6-\frac{7}{2}=\ldots=\frac{5}{2}$. Portanto, $r=\frac{5}{2}$.

3.2.1 Expressão do termo geral

Da definição de PA, temos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seguindo com esse processo, para o n-ésimo termo obtemos as fórmulas para termos quaisquer:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \text{, com } n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_n = a_k + (n-k)r \text{, com } n, k \in \mathbb{N}^* \text{ (caso geral).}$$

Exemplo:

6) Para determinar a expressão do termo geral da PA (–5, 1, 7, 13, ...), devemos conhecer o a_1 (primeiro termo) e a razão r. Nessa PA, temos $a_1 = -5$ e $r = 6$. Então, o termo geral será $a_n = -5 + (n-1) \cdot 6$ ou $a_n = 6n - 11$.

3.2.2 Propriedades de uma PA

a) Podemos relacionar três termos consecutivos de uma PA da seguinte maneira: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Isso significa que, para quaisquer três termos consecutivos, o termo central é a média aritmética dos outros dois termos.

b) Em uma PA, a soma dos termos extremos é igual à soma dos termos equidistantes a eles. Sendo ímpar o número de termos da PA, a soma dos extremos é igual a duas vezes o termo médio.

Exemplos:

7) Considere a PA $\left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{5}{2}\right)$ e os termos $a_2 = 1$, $a_3 = \dfrac{3}{2}$ e $a_4 = 2$. Então, $\dfrac{a_2 + a_4}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} = a_3$.

8) Considere a PA com 10 termos (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20). Observe que

$2 + 20 = 22$

$4 + 18 = 22$

$6 + 16 = 22$

$8 + 14 = 22$

$10 + 12 = 22.$

9) Para PA com 5 termos (– 3, – 1, 1, 3, 5), temos também: $-3 + 5 = 2, -1 + 3 = 2$. A soma dos extremos, 2, é o dobro do termo central (ou médio) $a_3 = 1$.

3.2.3 Classificação

Classifica-se uma PA em relação à sua razão r:

- Caso $r > 0$, a PA é crescente;
- Caso $r < 0$, a PA é decrescente;
- Caso $r = 0$, a PA é constante.

3.2.4 Soma dos termos

Considere a PA $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n)$. A soma dos n termos da PA dada é definida por: $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.

Exemplo:

10) Considere a PA (7, 4, 1, – 2, – 5, – 8, – 11, – 14) $a_1 = 7$ e n = 8.

A soma de seus termos é $S_8 = \frac{(7 + (-14))}{2} \cdot 8 = (-7) \cdot 4 = -28$.

Observação: Note que a soma dos termos de uma PA independe de sua razão.

Teorema 1. *A soma dos termos de uma PA* $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n)$ *é dada por* $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$, $\forall n \geq 1$.

Demonstração 1: Faremos por indução sobre n o número de termos da PA.

(i) Para $n=1$, $a_1 = a_n$, e a PA tem 1 termo, a_1, cuja "soma" é a_1 ou $S_1 = \frac{(a_1+a_1)}{2}\cdot 1 = a_1$. Logo, vale para $n=1$.

(ii) H.I. : $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$

Devemos provar que:

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = \frac{(a_1+a_{n+1})}{2}\cdot(n+1).$$

De fato:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} &= \frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n + a_{n+1} \\
&= \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]}{2}\cdot n + a_{n+1} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]}{2}\cdot n + a_{n+1} \\
&= a_1 n + \frac{(n-1)nr}{2} + a_{n+1} = a_1 n + \frac{(n-1)nr}{2} + a_1 + nr \\
&= a_1(n+1) + nr\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = a_1(n+1) + nr\left(\frac{n+1}{2}\right) \\
&= a_1(n+1) + \frac{nr}{2}(n+1) = \left(a_1 + \frac{nr}{2}\right)(n+1) \\
&= \left(\frac{2a_1+nr}{2}\right)(n+1) = \left(\frac{a_1+a_1+nr}{2}\right)(n+1) \\
&= \left(\frac{a_1+a_{n+1}}{2}\right)(n+1) = S_{n+1}.
\end{aligned}$$

Logo, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

■

Demonstração 2: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em progressão aritmética de n termos. Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ a soma dos n termos dessa PA. Lembrando da expressão do termo geral, podemos reescrever essa soma na forma

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \cdots + (a_1 + (n-1)r)$$

ou, equivalentemente,

$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \cdots + (a_n - (n-1)r) \qquad .$$

Agora, se somarmos essas duas equações, observando que existem n parcelas no membro direito, obtemos:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n),$$

o que nos dá a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA.

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

■

Exercícios resolvidos

1) A soma dos n primeiros termos de uma PA é expressa pela fórmula $S_n = 2n^2 - 12n$. Calcule o décimo quinto termo dessa PA.

Resolução: Notemos, primeiramente, que

$$S_1 = a_1 = 2 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -10.$$

Assim,

$$S_{15} = (a_1 + a_{15}) \cdot \frac{15}{2}$$

$$2 \cdot 15^2 - 12 \cdot 15 = (-10 + a_{15}) \cdot \frac{15}{2}$$

$$270 \cdot \frac{2}{15} = -10 + a_{15}$$

$$36 = -10 + a_{15}$$

$$a_{15} = 46.$$

Resposta: O décimo quinto termo dessa PA vale 46.

2) Determine a PA com dez termos sabendo que a soma dos dois primeiros é 5 e a soma dos dois últimos é 53.

Resolução:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 5 \\ a_9 + a_{10} = 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + r = 5 \\ 2a_1 + 17r = 53. \end{cases}$$

Diminuindo uma equação da outra, temos $16r = 48 \Rightarrow r = 3$. Dessa forma, $2a_1 + 3 = 5 \Rightarrow 2a_1 = 5 - 3 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$.

Resposta: A PA é dada por $(1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28)$.

3.3 Progressão geométrica

Chama-se progressão geométrica (PG) à sequência de termos que segue um padrão de formação tal que seus termos, a partir do segundo, são originados pelo produto do termo anterior por uma constante q, chamada de razão da progressão. Isto é:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \quad \text{com} \quad n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo:

11) As sequências $(1000, 800, 640, \cdots)$ e $(1, 6, 36, \cdots)$ são progressões geométricas de razão $\frac{2}{5}$ e 6, respectivamente.

3.3.1 Expressão do termo geral

Da definição de PG, temos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seguindo com esse processo para o n-ésimo termo, obtemos as fórmulas:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{com} \quad n \geq 2$$
$$a_n = a_k \cdot q^{n-k} \quad \text{com} \quad n, k \in \mathbb{N}^* \ \text{(caso geral).}$$

3.3.2 Propriedades de uma PG

a) Podemos relacionar três elementos consecutivos de uma PG da seguinte maneira:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{ou} \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}\,.$$

Isto é, para quaisquer três termos consecutivos, o termo central é a *média geométrica* dos outros dois termos.

b) Em uma PG, o produto dos termos extremos é igual ao produto dos termos equidistantes a eles. Caso o número de termos seja ímpar, o produto dos extremos é igual ao quadrado do termo médio.

3.3.3 Classificação

i) Caso $q > 1$.

a) Se os termos forem positivos, a PG é crescente.

b) Se os termos forem negativos, a PG é decrescente.

ii) Caso $0 < q < 1$.

a) Se os termos forem positivos, a PG é decrescente.

b) Se os termos forem negativos, a PG é crescente.

iii) Caso $q < 0$, a PG é alternada (termos positivos e negativos).

iv) Caso $q = 1$, a PG é constante.

v) Caso $q = 0$, a PG é dada por $(a_1, 0, 0, \cdots)$.

Exemplos:

12) Suponha que a população de um determinado Estado seja hoje T habitantes e que sofre um aumento de 3% ao ano. Determine qual o número de habitantes dessa população daqui n anos.

Resolução: Sofrendo um aumento de 3% ao ano, o número de habitantes é 103% do número de habitantes do ano anterior. Portanto, a cada ano decorrido o número de habitantes sofre uma multiplicação por $\frac{103}{100}$, isto é, por 1,03.

Resposta: Dessa forma, após n anos, o número de habitantes será igual a $T \cdot (1,03)^n$.

13) Em uma PG alternada, o quarto termo é igual a 32 , e o sexto é 16. Qual o valor da razão dessa PG?

Resolução: Temos que $a_4 = 32$ e $a_6 = 16$. Dessa forma,

$$a_6 = a_4 \cdot q^2 \Rightarrow 16 = 32q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Resposta: Uma vez que a PG é alternada, concluímos que a razão é $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.3.4 Soma dos termos

Teorema 2. *A soma dos termos da PG* $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n)$, *com razão* $q \neq 0$ *e* $q \neq 1$, *é:*

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Demonstração: Seja a PG finita com n termos dada por $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n)$. A soma de seus termos é dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando-se ambos os lados dessa equação pela razão $q \neq 0$ da PG, obtemos:

$$S_n \cdot q = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \cdot q$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_2q + \cdots + a_{n-1}q + a_nq$$

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_n \cdot q \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$$S_n \cdot q - S_n = a_n \cdot q - a_1$$

$$S_n(q-1) = a_n \cdot q - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

Substituindo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ficamos com a fórmula

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

■

Observação: Por outro lado, seja a PG infinita $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ de razão q. Suponha que queiramos calcular a soma de seus infinitos termos. Essa soma faz sentido? Note que, se $q > 1$, os termos da PG são crescentes e, portanto, não teremos uma soma bem definida, isto é, não teremos uma soma finita. Também se $q < 0$, não teremos uma soma finita. No entanto, se $0 < q < 1$, os termos sofrerão decréscimo a cada passo, tornando-se números muito próximos a zero. Dessa forma, teremos um limite para a soma. Seja n o número de termos. A medida que n torna-se cada vez maior, o valor de q^n torna-se um número tão pequeno quanto se queira, cada vez mais próximo de zero. Assim, temos que $\lim\limits_{x\to\infty} q^n = 0$ e, portanto,

$$\lim_{x\to\infty} S_n = S_\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Logo, a fórmula para a soma de infinitos termos em PG é dada por $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Exercícios resolvidos

3) Em uma PG crescente de três termos, o segundo termo é igual à razão. Se do terceiro termo subtrairmos 4, os três novos números, na mesma ordem, formarão uma PA crescente. Determine a soma dos termos da PG.

Resolução: Seja q a razão da PG dada. Desde que $a_2 = q$, $a_2 = a_1 q$ e $a_3 = a_2 q$ segue que a PG é dada por $(a_1, a_2, a_3) = (1, q, q^2)$, enquanto que a PA $(a_1, q, a_3 - 4) = (1, q, q^2 - 4)$.

Dessa forma, pela lei de formação da PA, temos:

$$q^2 - 4 - q = q - 1$$

$$q^2 - 2q - 3 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2° grau, obtemos os possíveis valores para a razão

$$\begin{cases} q' = -1 \\ q'' = 3. \end{cases}$$

Como a PG é crescente, tomamos $q = 3$. Logo, a PG é dada por $(1, 3, 9)$, e a soma de seus termos é: $1 + 3 + 9 = 13$.

Resposta: A soma dos termos da PG é igual a 13.

4) Qual o número de termos da PG em que $a_3 = 9$, $q = 3$ e $S_n = 1093$?

Resolução: Como a fórmula para a soma depende de a_1, calculamos este por meio de a_3:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$9 = a_1 \cdot 3^2$$
$$a_1 = 1 .$$

Portanto,

$$1093 = \frac{1(3^n - 1)}{3-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$3^n - 1 = 2186$$

$$3^n = 2187 = 3^7 \Rightarrow 3^n = 3^7 \Rightarrow n = 7 .$$

Resposta: O número de termos da PG é $n = 7$.

Exercícios propostos

1) Determine a quantidade de múltiplos de 4 compreendidos entre 190 e 1001.

2) Determine três números em PA sabendo que sua soma é 12 e que a soma de seus quadrados é 66.

3) Em uma PG, a soma do terceiro com o quinto termo vale 45, e a soma do quarto com o sexto termo vale 135. Determine a razão dessa PG.

4) A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada pela expressão $S_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$. Determine a razão e o primeiro termo dessa PG.

5) A soma de três números em progressão aritmética crescente é 12. Se somarmos 2 ao terceiro termo, a nova sequência constitui uma progressão geométrica. Determine o produto dos três termos da progressão geométrica.

6) Quantos números entre 1000 e 10000 têm seus algarismos em PA? E em PG?

7) A soma dos termos de uma PG crescente de três termos positivos é 21, e a diferença entre os extremos é 15. Determine a razão dessa PG.

8) Um químico tem 12 litros de álcool. Ele retira 3 litros e os substitui por água. Em seguida, retira 3 litros da mistura e os substitui por água novamente. Após efetuar esta operação 5 vezes, aproximadamente quantos litros de álcool sobraram na mistura? Quantas operações são necessárias para se ter menos que um litro de álcool na mistura?

9) Dadas as sequências $(4a, 3, a-7b)$ e $(a, 3, b)$, determine o valor de $a+b$ sabendo que a primeira sequência é uma progressão aritmética decrescente e a segunda é uma progressão geométrica decrescente.

10) A soma dos termos de ordem ímpar de uma PG infinita é $\frac{8}{3}$, e a soma dos termos de ordem par é $\frac{4}{3}$. Calcule o 1° termo dessa PG.

11) Os inteiros de 1 a 1000 são escritos ordenadamente em torno de um círculo. Partindo de 1, riscamos os números de 15 em 15. O processo continua até se atingir um número já riscado. Quantos números sobraram sem serem riscados?

12) Qual a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 8 termos entre 2 e 38?

Capítulo 4

Trigonometria

Capítulo 4
Trigonometria

Iremos, ao longo deste capítulo, analisar, elaborar e resolver problemas utilizando a trigonometria no triângulo e as funções trigonométricas.

Atenção: tenha em mãos os materiais destas disciplinas durante o estudo deste capítulo.

Neste capítulo vamos trabalhar com trigonometria, um assunto que você já estudou nas disciplinas de Geometria e Introdução ao Cálculo. Iniciaremos com uma relação das principais fórmulas da trigonometria, ilustrando sua utilização com alguns exercícios resolvidos. Em seguida, faremos uma exposição das equações trigonométricas, de exercícios resolvidos e exercícios propostos.

4.1 Relações fundamentais e fórmulas

4.1.1 Relações fundamentais e fórmulas para valores x na primeira determinação positiva

Relações Fundamentais	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in [0, 2\pi]$
	$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \forall x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$
	$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$ e $x \neq \pi$
	$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \quad \forall x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$
	$\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$ e $x \neq \pi$

Consequências	$\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x},\ \forall x \in]0, 2\pi[$ e $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$
	$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x,\ \forall x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$
	$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x,\ \forall x \in]0, 2\pi[$ e $x \neq \pi$
	$\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x},\ \forall x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$
	$\text{sen}^2 x = \dfrac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x},\ \forall x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

4.1.2 Relações apresentadas em $\mathbb{R}$

Fórmulas da adição	$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b,\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$
	$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\, a \cos b \pm \cos a\, \text{sen}\, b,\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$
	$\text{tg}(a \pm b) = \dfrac{\text{tg}\, a \pm \text{tg}\, b}{1 \mp \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b},\ \ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,$ $b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ a \pm b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$
	$\text{cotg}(a + b) = \dfrac{\text{cotg}\, a \cdot \text{cotg}\, b - 1}{\text{cotg}\, a + \text{cotg}\, b},\ \ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a \neq k\pi,$ $b \neq k\pi,\ a + b \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$
Fórmulas de multiplicação	$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a,\ \ \forall a \in \mathbb{R}$
	$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1,\ \ \forall a \in \mathbb{R}$
	$\cos 2a = 1 - 2\text{sen}^2 a,\ \ \forall a \in \mathbb{R}$
	$\text{sen}\, 2a = 2\text{sen}\, a \cdot \cos a,\ \ \forall a \in \mathbb{R}$
Fórmulas da divisão	$\cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}},\ \ \ \forall a \in \mathbb{R}$
	$\text{sen}\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}},\ \ \ \forall a \in \mathbb{R}$

Seno e cosseno em função da tangente	$\operatorname{sen} a = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}, \quad \dfrac{a}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ e $1+\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} \neq 0$
	$\cos a = \dfrac{2-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}, \quad \dfrac{a}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
Transformação em produto	$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\dfrac{p+q}{2} \cdot \cos\dfrac{p-q}{2}, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$
	$\cos p - \cos q = -2 \cdot \operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$
	$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2} \cdot \cos\dfrac{p-q}{2}, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$
	$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2} \cdot \cos\dfrac{p+q}{2}, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$

Exercícios resolvidos

1) Um retângulo com lados adjacentes medindo $\operatorname{sen} a$ e $\cos a$, com $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, tem perímetro igual a $\sqrt{6}$. Qual é a área do retângulo? Qual o valor de a?

Resolução:

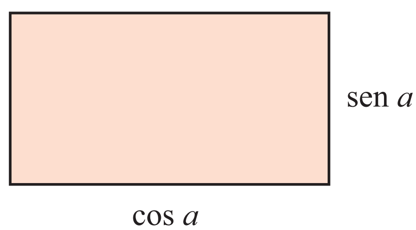


Figura 4.1

O perímetro do retângulo é $2\operatorname{sen} a + 2\cos a$. Então:

$$2\operatorname{sen} a + 2\cos a = \sqrt{6}$$

$$2(\operatorname{sen} a + \cos a) = \sqrt{6}$$

$$\operatorname{sen} a + \cos a = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a \cos a + \cos^2 a = \frac{6}{4}.$$

Usando a relação fundamental, temos $2\operatorname{sen} a \cos a = \frac{1}{2}$.

A área do retângulo é $\operatorname{sen} a \cos a = \frac{1}{4}$. Para calcular o valor de a, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, fazemos:

$$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{12}.$$

Resposta: A área do retângulo é $\frac{1}{4}$ e $a = \frac{\pi}{12}$.

2) Determine o conjunto de valores de a para os quais é verdadeira a afirmação: $\cos x = \frac{2a-1}{5}$.

Resolução: Sabemos que $-1 \le \cos x \le 1$. Então, $-1 \le \frac{2a-1}{5} \le 1$, e resolvendo a inequação encontramos os valores de a que desejamos.

(i) $-1 \le \frac{2a-1}{5} \Leftrightarrow -5 \le 2a-1 \Leftrightarrow 2a \ge -4 \Leftrightarrow a \ge -2 . S_1 = [-2, +\infty[$

(ii) $\frac{2a-1}{5} \le 1 \Leftrightarrow 2a-1 \le 5 \Leftrightarrow 2a \le 6 \Leftrightarrow a \le 3 . S_2 =]-\infty, 3]$.

Fazendo a intersecção: $S = [2,3]$.

Resposta: A afirmação é verdadeira para $a \in [2,3]$.

3) Se $\operatorname{tg} x = \sqrt{5}$, qual o valor de $\operatorname{sen}^2 x$?

Resolução:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{5} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = 5$$

Como $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, temos que $\sec^2 x = 5 + 1 = 6 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Então, $\cos^2 x = \frac{1}{6}$ e $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Resposta: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{6}$

4) Calcule em função de a o valor de

$$M=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},$$

com $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ e $a=\operatorname{sen}x$.

Resolução: Vamos calcular cada uma das parcelas:

(i) $$\cos\left(x\frac{3\pi}{2}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{3\pi}{2}-\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$$
$$=\cos x\cdot 0-[\operatorname{sen}x\cdot(-1)]=\operatorname{sen}x=a$$

(ii) $$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}x=a$$

(iii) $$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\cdot\cos x-\operatorname{sen}x\cdot\cos\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\cos x+\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}$$
$$=\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen}x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

(iv) $$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Temos então:

$$M=a-a+\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}+\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{1-a^2+a^2}{a\sqrt{1-a^2}}=\frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}$$

Resposta: O valor de M é $\dfrac{1}{a\sqrt{1-a^2}}$.

4.2 Equações trigonométricas fundamentais

De modo geral, as equações trigonométricas reduzem-se a uma das seguintes:

i) $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$

ii) $\cos\alpha=\cos\beta$

iii) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$

Essas equações são chamadas *equações fundamentais*. Vamos estudar cada uma delas.

i) $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$

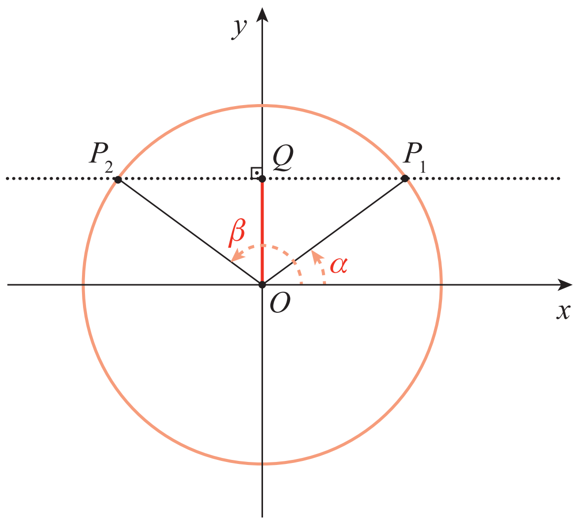


Figura 4.2

Note no ciclo trigonométrico que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \overline{OQ}$. Então, as imagens de α e β estão em P_1 ou em P_2. Isso nos dá duas possibilidades:

a) α e β são arcos côngruos, isto é, $\alpha = \beta + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

b) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos: $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

ii) $\cos\alpha = \cos\beta$

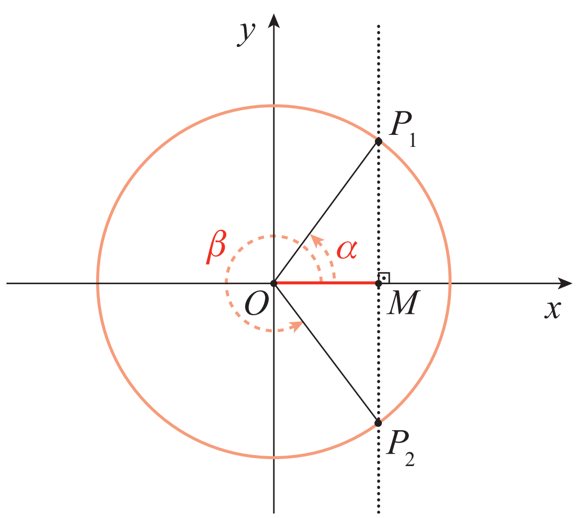


Figura 4.3

Analogamente, podemos ver no ciclo trigonométrico que $\cos\alpha = \cos\beta = \overline{OM}$. Logo, as imagens de α e β estão em P_1 ou em P_2. Também nesse caso há duas possibilidades:

a) α e β são arcos côngruos, isto é, $\alpha = \beta + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

b) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cos-senos: $\alpha + \beta = 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

iii) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$

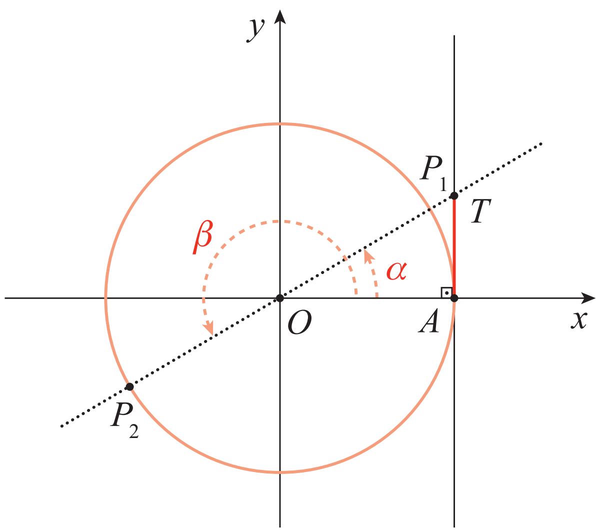


Figura 4.4

Observando o ciclo trigonométrico, vemos que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \overline{AT}$. Assim, as imagens de α e β estão em P_1 ou em P_2, e as possibilidades são:

a) α e β são arcos côngruos, isto é, $\alpha = \beta + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

b) α e β têm imagens simétricas em relação à origem: $\alpha - \beta = \pi + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Resumindo (a) e (b) podemos concluir que

$$\alpha = \beta + k\pi, \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

Outras estratégias também podem ser utilizadas para resolver as equações trigonométricas, como a mudança de variáveis e as fórmulas de adição, divisão e transformação em produto. Faremos alguns exemplos.

Exercícios resolvidos

5) Resolva as equações a seguir.

a) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos x = \operatorname{sen} 2x$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

Resolução:

a) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

No ciclo trigonométrico:

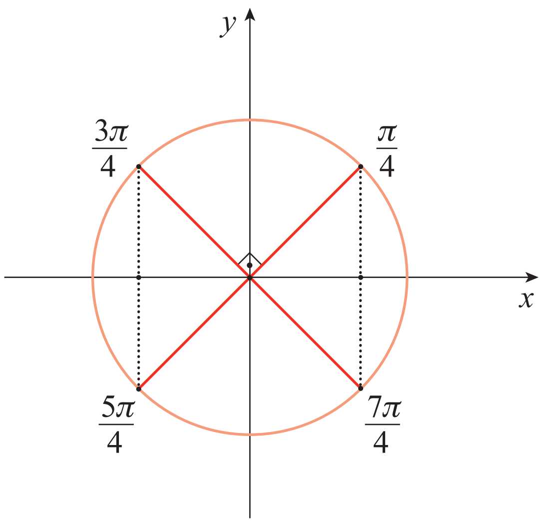


Figura 4.5

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) $\cos x = \operatorname{sen} 2x$

Sabemos que $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$. Como $\cos x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$, temos duas possibilidades:

(1) $\cos x \neq 0$.

Nesse caso, podemos cancelar $\cos x$ e ficamos com

$$2\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

(2) $\cos x = 0$.

Se $\cos x = 0$, então $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Logo,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \ ou \ \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right.$$

$$\left. ou \ \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ , k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

Fazemos aqui uma mudança de variáveis: $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$.

Resolvemos, então, o sistema: $\begin{cases} u + v = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Isolando u em (1) e substituindo em (2), obtemos:

$$\begin{aligned}
& u + v = 1 \Leftrightarrow u = 1 - v \\
& (1 - v)^2 + v^2 = 1 \\
& 1 - 2v + v^2 + v^2 = 1 \\
& 2v^2 - 2v = 0 \\
& 2v(v - 1) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \ \ ou \ \ v = 1
\end{aligned}$$

(i) Se $v = 0$, então $u = 1 - 0 = 1$, e teremos $\cos x = 0 \ \ e \ \ \operatorname{sen} x = 1$.

Então, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Se $v = 1$, então $u = 1 - 1 = 0$, e teremos $\cos x = 1 \ \ e \ \ \operatorname{sen} x = 0$.

Então, $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Logo, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ ou \ \ x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercícios propostos

1) Qual o conjunto de todos os valores x para que o ângulo $\frac{x}{x^2 + 1} \cdot \pi$ pertença ao primeiro quadrante?

2) Considerando a aproximação $\pi = 3{,}14$, se um arco de circunferência mede 1,57 cm e o diâmetro desta mesma circunferência mede 8 cm, quanto mede o ângulo correspondente a este arco?

3) Um barco atravessa um rio num trecho onde a largura é 100m, seguindo uma direção que forma um ângulo de 30^0 com uma das margens. Qual a distância percorrida pelo barco para atravessar o rio?

4) Qual o valor aproximado de $\cos 1$? Qual o sinal algébrico de $\cos 2$?

5) Se $\cos x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, qual o valor de

$$\sqrt{2 \operatorname{cotg} x + \operatorname{cossec}^2 x}\ ?$$

6) Se $f(x) = \dfrac{1}{2}\sec x + \sqrt{3}\sec\dfrac{x}{2}$, qual o valor de $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$?

7) Determine o domínio das funções a seguir.

a) $f(x) = \operatorname{cotg}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x) = \sqrt{2\operatorname{sen} x - 1}$ para $0 \le x \le 2\pi$

8) Qual o valor máximo da função real de variável real $f(x) = |-1 + \operatorname{sen} x|$?

9) Foram feitos os gráficos das funções

$$f(x) = \operatorname{sen} 4x \ \text{ e } \ g(x) = \frac{x}{100}$$

para $x \in (0, 2\pi)$. Qual o número de pontos comuns aos dois gráficos?

10) Determine o conjunto das abscissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções co-seno e secante, quando traçados em um mesmo sistema de eixos.

11) Seja $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x}$.

Se $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, calcule $f(\alpha)$.

12) Determine a solução das seguintes equações.

a) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

b) $\operatorname{sen}(\pi x)=0$

c) $\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=0$

d) $\cos^2 x=1$

e) $\operatorname{sen} 3x=\operatorname{sen} x$

f) $\cos x-\operatorname{sen}(2x)=0$

g) $\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}+\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

h) $\operatorname{tg} x=\operatorname{sen}(2x)$

i) $\sqrt{3}\operatorname{sen} x+\cos x=2$

j) $\operatorname{sen} x+\cos x=0$

k) $\operatorname{sen} x-\cos x=1$

l) $|\operatorname{sen} x|+|\cos x|=1$

13) Resolva as inequações a seguir.

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\geq\frac{1}{2}$, para $0\leq x\leq 2\pi$

b) $\cos\left(\frac{x}{3}\right)<\frac{1}{2}$, para $0\leq x\leq 2\pi$

Tarefa

i) Elabore e resolva cinco exercícios de inequações trigonométricas.

Capítulo 5

Geometria

Capítulo 5
Geometria

Iremos, ao longo deste capítulo, analisar, elaborar e resolver problemas utilizando os conceitos da geometria plana e espacial.

Atenção: tenha em mãos seus materiais de Geometria I e de Geometria II.

Neste capítulo, vamos resolver problemas de geometria, objeto de estudo de duas disciplinas já cursadas. A primeira parte é dedicada a problemas de geometria plana, e a segunda a problemas de geometria espacial. Não esqueça que todos os conteúdos das disciplinas já cursadas podem também aparecer!

5.1 Geometria plana

Problemas resolvidos

1) Em um triângulo equilátero ABC, de 8 cm de lado, traça-se MN paralelo ao lado BC, de modo que o triângulo se decomponha em um trapézio e em um novo triângulo. Qual a medida de MN para que o perímetro do trapézio $BMNC$ seja igual ao perímetro do triângulo MAN?

Resolução:

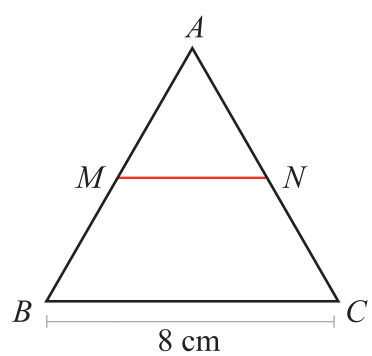


Figura 5.1

Chamando x a medida de NC e y a medida de MN, temos:

$2(8-x)+y=8+2x+y \Rightarrow x=2$

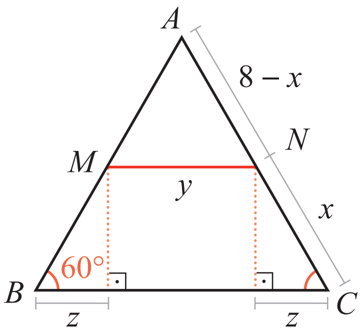


Figura 5.2

Para encontrar y, fazemos $\cos 60^0 = \dfrac{z}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{z}{2} \Rightarrow z = 1$.

Logo, como $y = 8 - 2z$, temos que $y = 6$.

Resposta: A medida de MN é 6 cm.

2) A diferença entre as áreas de um quadrado e de um círculo nele inscrito é $4(4-\pi)$ cm². Qual é a área do quadrado?

Resolução:

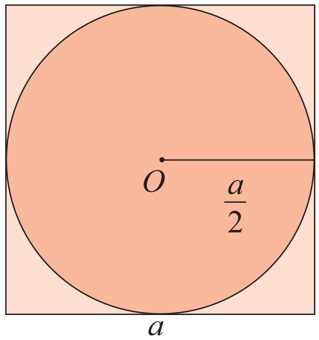


Figura 5.3

Chamando a o lado do quadrado, o raio da circunferência nele inscrita é $\dfrac{a}{2}$. A área do quadrado é então $A_1 = a^2$, e a área do círculo é $A_2 = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$. Logo,

$$A_1 - A_2 = 4(4-\pi)$$

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = 4(4-\pi)$$

$$\frac{4a^2 - \pi a^2}{4} = 4(4-\pi)$$

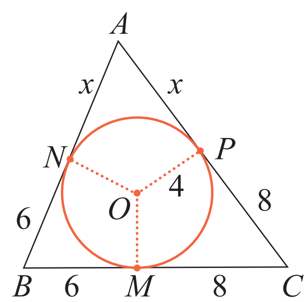
$$\frac{a^2(4-\pi)}{4} = 4(4-\pi)$$

$$a^2 = 16$$

Resposta: A área do quadrado é 16 cm^2.

3) Um dos lados de um triângulo é dividido em segmentos de comprimentos 6 e 8, por um ponto de tangência de um círculo inscrito. Se o raio do círculo é 4 u.c., qual é o comprimento do menor lado do triângulo?

Resolução:



$\overline{AC} = b$

$\overline{AB} = c$

$\overline{BC} = a$

Figura 5.4

Note inicialmente que a área do triângulo pode ser dada em função do semiperímetro; em um triângulo de lados a, b e c, seu semiperímetro é dado por $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ e a área é dada por

$$A_T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Por outro lado, lembre-se de que a área do triângulo também é dada em função do raio r do círculo inscrito e do semiperímetro:

$$A_T = r \cdot s\,.$$

Em nosso problema, temos:

$$s = \frac{14 + (8+x) + (6+x)}{2} = 14 + x$$

$$A_T = 4 \cdot (14 + x) \text{ e}$$

$$A_T = \sqrt{(14+x)\cdot(14+x-14)\cdot[14+x-(8+x)]\cdot[14+x-(6+x)]}$$
$$= \sqrt{48x(14+x)} = 4\sqrt{3x(14+x)}$$

Igualando as duas expressões, temos:

$$4\cdot(14+x) = 4\sqrt{3x(14+x)}$$

Resolvendo a equação irracional, obtemos:

Lembre-se de Introdução ao Cálculo!

$$4\cdot(14+x) = 4\sqrt{3x(14+x)}$$
$$14+x = \sqrt{3x(14+x)}$$
$$(14+x)^2 = 3x(14+x) \qquad \textbf{(1)}$$
$$14+x = 3x$$
$$x = 7$$

Substituindo o valor encontrado na equação (1), verificamos que $14+7=21$ e $\sqrt{3\cdot7\cdot21}=21$. Logo, o valor é de fato raiz da equação, e os lados do triângulo valem:

$$a=14,\ b=8+7=15,\ c=6+7=13$$

Resposta: O menor lado do triângulo mede 13 u.c.

Problemas propostos

1) Em um trapézio, cujos lados paralelos medem 4 cm e 6 cm, as diagonais interceptam-se de tal modo que os menores segmentos determinados em cada uma delas medem 2 cm e 3 cm. Qual é a medida da menor diagonal?

2) Em um triângulo, a base mede 60 cm, a altura e a mediana em relação a esta base medem, respectivamente, 12 cm e 13 cm. Quais são as medidas dos outros dois lados do triângulo?

3) A soma dos quadrados dos três lados de um triângulo retângulo é igual a 32 cm. Quanto mede a hipotenusa do triângulo?

4) Qual é a medida do lado de um polígono regular de 12 lados, inscrito num círculo de raio unitário?

5) Qual é a razão entre os comprimentos das circunferências, inscrita e circunscrita a um quadrado?

6) Os lados de dois octógonos regulares têm, respectivamente, 5 cm e 12 cm. Qual é o comprimento do lado de um terceiro octógono regular, de área igual à soma das áreas dos outros dois?

7) Se o comprimento de um retângulo aumenta em 10% e a área permanece constante, de quanto diminui sua largura?

8) Qual é a razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência?

9) Um comício político lotou uma praça semicircular de 130 m de raio. Admitindo uma ocupação média de 4 pessoas por metro quadrado, qual é a estimativa do número de pessoas presentes?

10) Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir $2x$ cm e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a x, qual é a área do círculo?

5.2 Geometria espacial

Problemas resolvidos

4) A área total de um cilindro reto, de base circular, com $\frac{1}{2}$ m de altura, é igual à área de um círculo de 1 m de raio. Qual é o volume do cilindro?

Resolução:

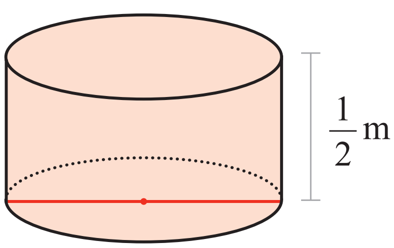


Figura 5.5

Para encontrarmos o volume do cilindro, precisamos conhecer o raio r de sua base, uma vez que este volume é dado por

$$V_{\text{cilindro}} = (\text{área da base}) \times (\text{altura}) = \pi r^2 \cdot \frac{1}{2}.$$

A área de um círculo de raio 1 m é $A_{\odot} = \pi\,\text{m}^2$.

A área total do cilindro é:

$$A_{\text{cilindro}} = [(\text{comprimento da circunferência da base}) \times (\text{altura})] + [2 \times (\text{área da base})]$$

$$A_{\text{cilindro}} = \left(2\pi r \cdot \frac{1}{2}\right) + 2\pi r^2 = \pi(r + 2r^2).$$

Como $A_{\odot} = A_{\text{cilindro}}$, igualamos as duas expressões e obtemos:

$$\pi(r + 2r^2) = \pi$$
$$2r^2 + r - 1 = 0\ .$$

Resolvendo a equação, temos $r = \dfrac{1}{2}$. Então, o volume do cilindro é:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Resposta: O volume do cilindro é $\dfrac{\pi}{8}\text{m}^3$.

5) Considere um paralelepípedo retângulo de arestas a, b e c. Determine o seu volume, sabendo-se que a área total é $4a^2$ e que c é o dobro de b.

Resolução: A área total do paralelepípedo é

$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc = 4a^2,$$

ou equivalentemente, $ab + ac + bc = 2a^2$. Substituindo $c = 2b$, obtemos:

$$ab + 2ab + 2b^2 = 2a^2$$
$$3ab + 2b^2 = 2a^2$$
$$2a^2 - 3ab - 2b^2 = 0\ .$$

Resolvendo essa equação em a, obtemos:

$$a = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 + 16b^2}}{4} = \frac{3b \pm \sqrt{25b^2}}{4} = \frac{3b \pm 5b}{4}.$$

Tomando o valor positivo, temos que $a = \dfrac{8b}{4} = 2b$. Logo, o volume do paralelepípedo será dado em função de b:

$$V_P = a \cdot b \cdot c = 2b \cdot b \cdot 2b = 4b^3 .$$

Resposta: O volume do paralelepípedo é $4b^3$.

6) A base quadrada de uma pirâmide tem 144 m² de área. A 4 m do vértice traça-se um plano paralelo à base e a secção assim feita tem 64 m² de área. Qual é a altura da pirâmide?

Resolução: Observemos um corte vertical da pirâmide:

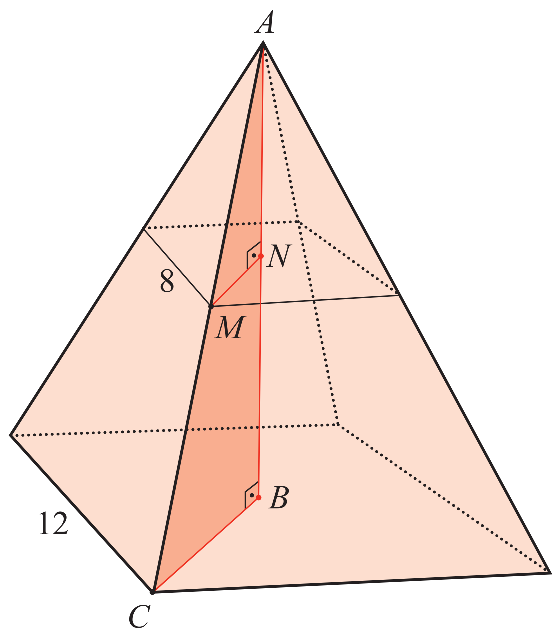


Figura 5.6

Os triângulos ABC e ANM são semelhantes. O lado do quadrado da base é 12 m e o lado do quadrado determinado pelo plano é 8 m; as suas diagonais são respectivamente $12\sqrt{2}$ e $8\sqrt{2}$. Assim, os catetos do triângulo maior são $6\sqrt{2}$ (metade da diagonal) e $4+x$ (a altura da pirâmide) e os catetos do triângulo menor são $4\sqrt{2}$ e 4. Fazendo a semelhança, temos:

$$\frac{4+x}{4} = \frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{4+x}{4} = \frac{6}{4}$$

$$16 + 4x = 24$$

$$4x = 8$$

$$x = 2.$$

Assim, a altura da pirâmide é $4+x=4+2=6$.

Resposta: A altura da pirâmide é 6 m.

Problemas propostos

11) Um poliedro convexo P possui 7654 faces, todas triangulares. Determine o número de arestas e o número de vértices.

12) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números $\ln t$, $\ln t^2$, $\ln t^3$ e a área total é 792 cm². Sabendo-se que a soma das dimensões vale 12 vezes a razão de proporcionalidade, quais são os valores destas dimensões?

13) Qual o volume de um prisma hexagonal regular reto, de altura $\sqrt{3}$ cm e cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm?

14) Na figura a seguir, que representa um cubo, o perímetro do quadrilátero $ABCD$ é $8(1+\sqrt{2})$. Calcule o volume do cubo.

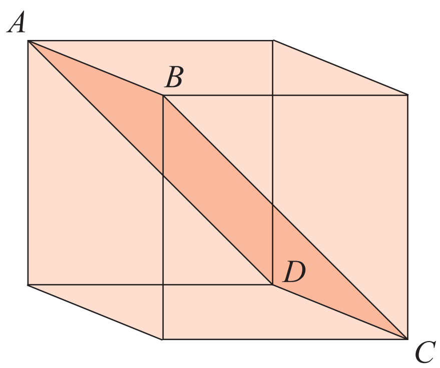


Figura 5.7

15) Sabe-se que a média harmônica entre o raio e a altura de um cilindro de revolução é 4. Qual a razão entre o volume e a área total?

16) Dois cones de mesma base têm alturas iguais a 18 cm e 6 cm, respectivamente. Qual é a razão entre seus volumes?

17) A área da intersecção de um plano com uma esfera de raio 13 é 144π. Qual é a distância do plano ao centro da esfera?

18) Têm-se dois vasilhames geometricamente semelhantes. O primeiro é uma garrafa de vinho, cuja altura é 27 cm. O se-

gundo é uma miniatura do primeiro, usado como propaganda do produto, e cuja altura é 9 cm. Quantas vezes será necessário esvaziar o conteúdo da miniatura na garrafa comum para enchê-la completamente?

19) A que distância do vértice se deve passar um plano paralelo à base de uma pirâmide de altura H para que ela fique dividida em dois sólidos de igual volume?

20) Uma esfera de raio 1 cm repousa sobre uma abertura de madeira, em forma de triângulo equilátero, de lado 2 cm. Qual a altura da calota acima do plano de madeira?

Capítulo 6

Funções Exponencial e Logarítmica

Capítulo 6

Funções Exponencial e Logarítmica

Neste capítulo estudaremos as funções exponencial e logarítmica. Para isso, lembraremos aqui as principais propriedades da potência e do logaritmo, que serão úteis em todo o desenvolvimento do capítulo. Lembre-se de que esse assunto já foi estudado em Introdução ao Cálculo.

Atenção: tenha à mão o material desta disciplina.

6.1 Equações e inequações exponenciais

Para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, valem as seguintes propriedades:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$;

6) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$;

7) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$;

8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

A resolução de uma equação exponencial baseia-se, de modo geral, na propriedade 6 acima, ou seja, na comparação de duas potências de mesma base: $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$.

Entretanto, para as inequações, tomamos por base as seguintes propriedades:

- Se $m < n$, então $a^m < a^n$ se $a > 1$.
- Se $m < n$, *então* $a^m > a^n$ se $0 < a < 1$.

As desigualdades podem ser trocadas por ≤ ou ≥ sem perda de generalidade.

Exercícios resolvidos

1) Resolva $5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+3}$.

Resolução:

$$5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow 5^{3x-1} = (5^{-2})^{2x+3} \Leftrightarrow 5^{3x-1} = 5^{-4x-6} \Leftrightarrow$$

$$3x - 1 = -4x - 6 \Leftrightarrow 3x + 4x = -6 + 1 \Leftrightarrow 7x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{7}$$

Resposta: Resolvendo, encontramos $x = -\frac{5}{7}$.

2) Determine o conjunto solução para a equação:

$$2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14.$$

Resolução: Note que em cada parcela aparece o fator 2^x; tratemos de evidenciá-lo:

$$2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14$$

$$\Rightarrow \frac{2^x}{8} + \frac{2^x}{16} + \frac{2^x}{2} - \frac{2^x}{4} = 14$$

$$\Rightarrow \frac{(2+1+8-4)2^x}{16} = 14$$

$$\Rightarrow 7 \cdot 2^x = 14 \cdot 16$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^5$$

$$\Rightarrow x = 5.$$

Resposta: O conjunto solução é $S = \{5\}$.

3) Qual a solução para a desigualdade $(\sqrt[3]{3})^x \leq \frac{1}{9}$?

Resolução:

$$(\sqrt[3]{3})^x \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{3}x} \leq 3^{-2}.$$

Sendo a base 3 > 1, segue da propriedade 1 de inequações que

$$\frac{1}{3}x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -6.$$

Resposta: O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -6\} = (-\infty, -6]$.

6.2 Função exponencial

Dado um número real a, $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é indicada por $f(x) = a^x$. Essa função possui as seguintes propriedades:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Se $0 < a < 1$ a função é decrescente.
- Se $a > 1$ a função é crescente.

Quando $0 < a < 1$, o gráfico da função $f(x) = a^x$ toma a seguinte forma:

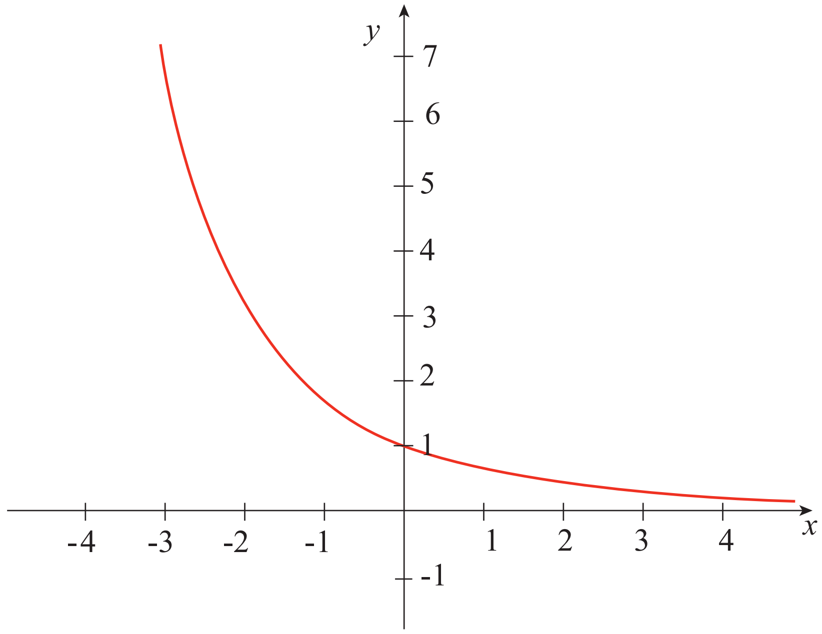


Figura 6.1

Quando $a > 1$, o gráfico de $f(x) = a^x$ é da seguinte forma:

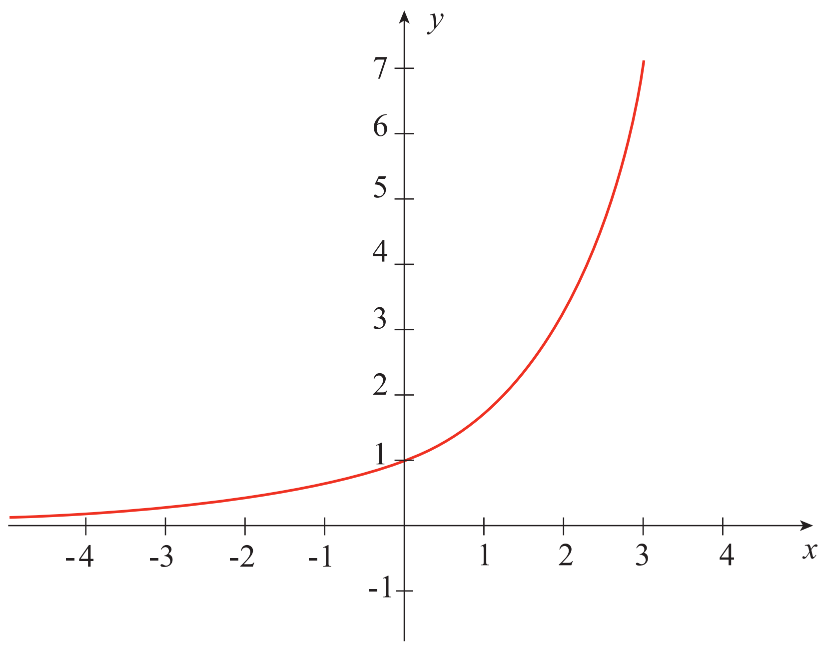


Figura 6.2

Por que $a > 0$ e $a \neq 1$?

- Se $a = 1$, $f(x) = 1^x = 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, é uma função constante.

- Se $a = 0$, $f(x) = 0^x$ nem sempre existe. Por exemplo: para $x = 0$, temos $f(0) = 0^0$, que não está definido.

- Se $a < 0$, $f(x) = a^x$ nem sempre existe em $\mathbb{R}$. Por exemplo: se $a = -16$ e $x = \dfrac{1}{2}$, então $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = (-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$.

Observação: a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, é bijetora. Prove como exercício.

Exercício resolvido

4) Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 1$ e determine o conjunto imagem.

Resolução: Para auxiliar a construção do gráfico, façamos a tabela:

x	$y = f(x)$
10	$-\dfrac{1023}{1024}$
2	$-\dfrac{3}{4}$
1	$-\dfrac{1}{2}$
0	0
-1	1
-2	3
-10	1023

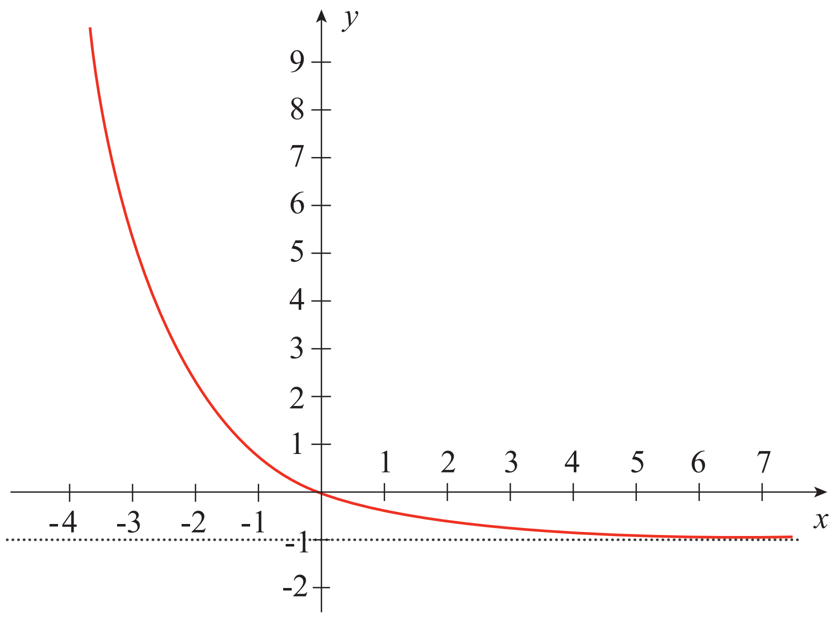


Figura 6.3

Imagem: Como $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 1 > -1$.

Resposta: A imagem da função é dada por

$$\operatorname{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\} = (-1, +\infty).$$

Observação: note que o gráfico de $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$ é o gráfico de $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ "transladado" uma unidade no sentido vertical, para baixo.

6.3 Logaritmo

Dados a e b reais positivos, com $b\neq 1$, chamamos de logaritmo de a na base b o expoente a que se deve elevar b para se obter a:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x .$$

Por consequências da definição, temos:

1) $\log_b 1 = 0$;
2) $\log_b b = 1$;
3) $\log_b b^m = m$;
4) $b^{\log_b a} = a$.

Nota:

a) Quando não for mencionada a base, esta valerá 10. $\log_{10} N = \log N$
b) Quando a base for igual a e, o logaritmo é dito *logaritmo natural* ou *neperiano,* $\log_e N = \ln N$. O número $e = 2,71828...$ é conhecido como número de Euler.

Em homenagem ao matemático John **Napier**, criador da tábua de logaritmos e do número neperiano.

Em homenagem ao matemático suíço Leonhard **Euler** (pronuncia-se "óiler"); é a base dos logaritmos naturais. As variantes do nome do número e = 2,71828... incluem: número de Napier, constante de Neper, número neperiano, número exponencial, etc.

Também para logaritmos temos propriedades que estão diretamente ligadas às exponenciais. Para $\{a,b,c,d\}\subset\mathbb{R}^*_+$, com $b\neq 1$ e $d\neq 1$, valem as propriedades:

1) $\log_b(a\cdot c) = \log_b a + \log_b c$;
2) $\log_b(a\div c) = \log_b a - \log_b c$;
3) $\log_b a^m = m\cdot\log_b a$;
4) $\log_b a = \dfrac{\log_d a}{\log_d b}$ (mudança de base);

5) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, $a \neq 1$;

6) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$.

Para resolver equações logarítmicas, começamos por analisar a condição de existência do logaritmo, em seguida usamos as propriedades acima.

Para as inequações logarítmicas usamos as seguintes propriedades:

1) Para $b > 1$, $\log_b a < \log_b c \Leftrightarrow a < c$.

2) Para $0 < b < 1$, $\log_b a < \log_b c \Leftrightarrow a > c$.

Observação: as desigualdades podem ser trocadas por ≥ ou ≤ sem perda de generalidade.

Exercícios resolvidos

5) Determine o valor de $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$.

Resolução: Usando a propriedade mudança de base e passando para base 5, temos:

$$\begin{aligned}\log_3 5 \cdot \log_{25} 27 &= \frac{\log_5 5}{\log_5 3} \cdot \frac{\log_5 27}{\log_5 25} \\ &= \frac{1}{\log_5 3} \cdot \frac{\log_5 3^3}{\log_5 5^2} \\ &= \frac{1}{\log_5 3} \cdot \frac{3 \log_5 3}{2 \log_5 5} \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Resposta: $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \dfrac{3}{2}$.

6) Determine x que satisfaça a equação $\log_3 8 = \log_3 (3x - 1)$.

Resolução: Pela condição de existência do logaritmo, $3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{3}$. Pela propriedade 6, temos $3x - 1 = 8 \Leftrightarrow x = 3$.

Resposta: $x = 3$ satisfaz a equação.

7) A equação $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ tem duas raízes reais. Determine o valor da maior raiz.

Resolução: Pela condição de existência dos logaritmos: $x > 0$ e $x \neq 1$. Aplicando a propriedade de mudança de base do logaritmo, temos:

$$\log_3 x = 1 + \log_x 9 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 + \frac{2}{\log_3 x}.$$

Fazendo $\log_3 x = y$ temos: $y = 1 - \dfrac{2}{y} \Leftrightarrow y^2 - y + 2 = 0$, e portanto $y = -1$ e $y = 2$.

Logo, $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ e $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$.

Resposta: A maior raiz de $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ é $x = 9$.

6.4 Função logarítmica

Dado um número real $b > 0$ e $b \neq 1$, a função logarítmica de base b, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, indicada por $f(x) = \log_b x$, é uma função que possui as propriedades vistas anteriormente. A partir daí, podemos perceber que:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$;
- $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = b$;
- Se $0 < b < 1$, então a função é decrescente;
- Se $b > 1$, então a função é crescente.

Assim, analisando o gráfico para as funções logarítmicas, percebemos que se $0 < b < 1$, o gráfico é análogo ao abaixo.

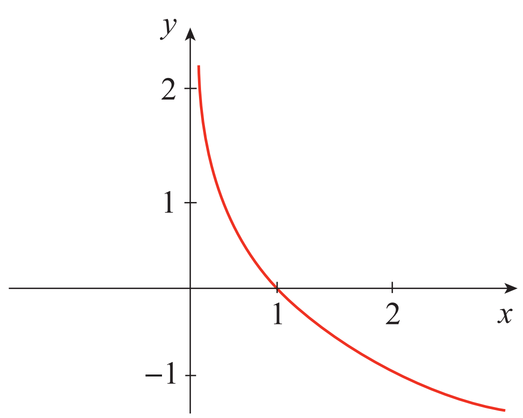


Figura 6.4

No caso em que $b > 1$, temos um gráfico similar ao que se segue:

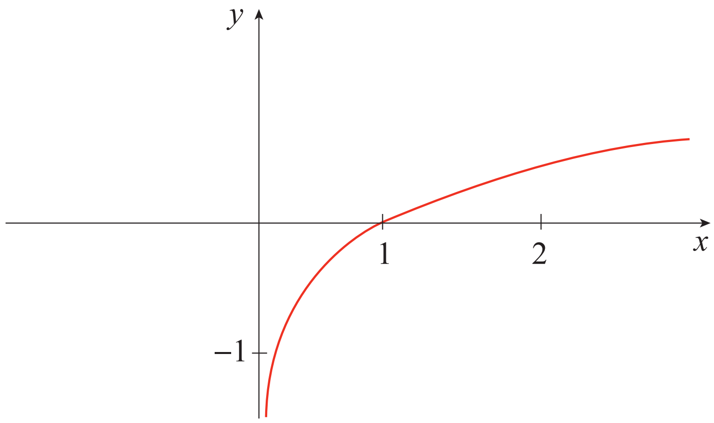


Figura 6.5

Observação: a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Prove como exercício.

Exercício resolvido

8) Determine o domínio da função $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$.

Resolução: Desde que a base do logaritmo seja $\frac{1}{2}$, portanto maior do que zero e diferente de 1, basta termos $x - 3 > 0$, ou seja, $x > 3$. Logo o domínio da função é $D(f) = (3, +\infty)$.

Exercícios propostos

1) Resolva as equações:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25$

b) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

c) $2^x + 4 \cdot 2^{-x} = 5$

d) $4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x = 0$

e) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$

2) Resolva a inequação $\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$.

3) A metade de $2^{11}+4^{8}$ vale?

4) Determine o conjunto solução para a equação $\log_3(x-1)^2=2$.

5) Encontre valores de x que satisfaçam a equação: $x+\log(1+2^x)=x\cdot\log 5+\log 6$.

6) Todo número real positivo pode ser escrito na forma 10^x. Determine o expoente x tal que $125=10^x$, tendo em vista que $8\cong 10^{0,90}$.

7) Num triângulo retângulo a hipotenusa mede a e os catetos medem b e c. Prove que $\log_{a+b}c+\log_{a-b}c=2\log_{a+b}c\cdot\log_{a-b}c$.

8) Qual o conjunto solução de $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)>\log_{\frac{1}{2}}(3x+9)$?

9) Esboce o gráfico e dê o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções:

   a) $f(x)=3+\log_2(x-2)$

   b) $f(x)=4-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

   c) $f(x)=3\cdot 2^{\frac{x}{10}}$

   d) $f(x)=20\cdot 2^{-\frac{x}{4}}$

Tarefa

1) Elabore dois problemas cuja resolução dependa do uso adequado da função exponencial.

Capítulo 7

Matrizes e

Sistema Lineares

Capítulo 7

Matrizes e Sistemas Lineares

Ao longo deste capítulo iremos resolver problemas envolvendo matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Neste capítulo vamos tratar de matrizes, determinantes e sistemas lineares, assuntos já trabalhados na disciplina de Geometria Analítica. Iniciaremos com algumas definições e resultados sobre matrizes e determinantes, em seguida apresentaremos exercícios resolvidos e propostos. Na segunda parte trabalharemos sistemas lineares.

7.1 Matrizes

Como foi visto em Geometria Analítica, as matrizes são formas de organizar dados. Mais precisamente, uma matriz de ordem $m \times n$ é um bloco retangular com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas. Das operações que podemos realizar com as matrizes, relembremos alguns detalhes e algumas propriedades:

7.1.1 Adição

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a matriz soma de A e B é uma matriz $(A+B)_{m\times n}$ tal que

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),\ 1 \le i \le m \ \text{ e } \ 1 \le j \le n.$$

Propriedades: Sejam A, B, C e 0 matrizes de ordem $m \times n$, em que 0 é a matriz nula, valem as afirmações:

- $A + B = B + A$;
- $A + 0 = 0 + A = A$;
- $A + (-A) = (-A) + A = 0$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.

7.1.2 Multiplicação por escalar

Seja k um escalar, o produto de uma matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ por um número real k é uma matriz $B=(b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$, $1\leq i\leq m$ e $1\leq j\leq n$.

Propriedades: Para A e B matrizes de mesma ordem, e k e s escalares, vale:

- $k(A+B)=kA+kB$;
- $(k+s)A=kA+sA$;
- $(ks)A=k(sA)$.

7.1.3 Multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{n\times p}$, o produto de A e B é uma matriz $C=(c_{ij})_{m\times p}$ em que cada elemento c_{ij} é dado por $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$ com $i=1,2,\cdots,m$ e $j=1,2,\cdots,p$.

Propriedades: Para A, B e C matrizes de ordem $n\times n$, vale:

- $(AB)C=A(BC)$;
- $(A+B)C=AC+BC$;
- $C(A+B)=CA+CB$;
- $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

Observações:

a) Em geral, $AB\neq BA$.

b) Quando $AB=BA$, dizemos que A e B comutam.

c) $AB=0$ não implica, necessariamente, em $A=0$ ou $B=0$.

d) $AB=AC$ não implica, necessariamente, em $B=C$.

Tarefa

1) Encontrar exemplos que ilustram as afirmações a, b, c e d.

7.1.4 Matriz inversa

Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = BA = I$ (sendo I a matriz identidade), então B é chamada inversa de A, e escrevemos $B = A^{-1}$. Também A é chamada inversa de B, e anotamos $A = B^{-1}$.

7.1.5 Matriz transposta

A matriz transposta de $A_{m\times n}$ é a matriz $(A^t)_{n\times m}$ que se obtém de A permutando-se as linhas pelas colunas de mesmo índice.

Exemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Propriedades: Sejam A e B matrizes de mesma ordem e k uma constante, então valem as afirmações:

- $(A^t)^t = A;$
- $(A+B)^t = A^t + B^t;$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t;$
- $(AB)^t = B^t A^t.$

7.1.6 Matriz simétrica

Uma matriz quadrada A tal que $A = A^t$ é dita simétrica.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação: Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^t$ é simétrica.

7.1.7 Matriz antissimétrica

Uma matriz quadrada A tal que $A=-A^t$ é dita uma matriz antissimétrica.

Exemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}=-A\,.$$

Observação: Se A é uma matriz quadrada, então $A-A^t$ é antissimétrica.

7.1.8 Matriz triangular superior

Uma matriz quadrada $A=(a_{ij})$ que tem os elementos $a_{ij}=0$ para $i>j$ é chamada matriz triangular superior.

Exemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

7.1.9 Matriz triangular inferior

Uma matriz quadrada $A=(a_{ij})$ que tem os elementos $a_{ij}=0$ para $i<j$ é chamada matriz triangular inferior.

Exemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.1.10 Matriz potência

Uma matriz quadrada $A=(a_{ij})$ pode ser multiplicada n vezes por si mesma. A matriz que resulta dessas n operações, que representamos por A^n, é chamada potência n da matriz A.

7.1.11 Outros tipos de matrizes

Você poderá encontrar outros tipos de matrizes, que raramente aparecem em livros do ensino médio. São eles:

- **Matriz periódica:** Dada uma matriz quadrada A, diz-se que A é uma matriz periódica se $A^n = A$, sendo $n \geq 2$. Se n é o menor inteiro para o qual $A^n = A$, diz-se que o período de A é $n-1$.
- **Matriz idempotente:** Dada uma matriz periódica A, se $A^2 = A$, então diz-se ser A uma matriz idempotente. O período da matriz idempotente é, portanto, igual a 1.
- **Matriz nilpotente:** Dada uma matriz quadrada A, se existir um número p, inteiro positivo, tal que $A^p = 0$, então diz-se que A é uma matriz nilpotente. Se p é o menor inteiro positivo tal que $A^p = 0$, diz-se que A é nilpotente de índice p.
- **Matriz involutória:** Uma matriz quadrada A tal que $A^2 = I$ é dita uma matriz involutória.

7.1.12 Operações elementares

Chamamos de operações elementares sobre uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ as seguintes operações:

1) Permuta da linha i com a linha j denotada por L_{ij}.
2) Permuta da coluna i com a coluna j denotada por K_{ij}.
3) Multiplicação dos elementos da linha i por um escalar $k \neq 0$, denotada por $L_i(k)$.
4) Multiplicação dos elementos da coluna i por um escalar $k \neq 0$, denotada por $K_i(k)$.
5) Substituição da linha j pela adição dos elementos da linha i multiplicados pelo escalar $k \neq 0$ aos elementos da linha j, denota-dos por $L_{ij}(k)$, onde $L_{ij}(k) = kL_i + L_j$.
6) Adição dos elementos da coluna i multiplicados pelo escalar $k \neq 0$ aos elementos da coluna j, denotados por $K_{ij}(k)$.

7.1.13 Determinante

Também em Geometria Analítica foi definido o determinante de uma matriz. O determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada um número real. Vamos relembrar as propriedades do determinante. Sejam A, B, C matrizes quadradas de ordem n e k um número natural. Valem as seguintes propriedades:

1) $\det(A) = 0$ quando a matriz:

    a) tiver uma fila (linha ou coluna) de zeros;

    b) tiver duas filas iguais;

    c) tiver duas filas proporcionais;

    d) tiver uma fila que seja combinação linear de outras filas quaisquer.

2) O determinante de uma matriz tem seu sinal alterado quando é trocada a ordem entre duas filas quaisquer.

3) O determinante fica multiplicado por k quando se multiplicam todos os elementos de uma fila por k.

4) $\det(k \cdot A_{n\times n}) = k^n \cdot \det(A_{n\times n})$.

5) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

6) $\det(A) = \det(A^t)$.

7) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

8) O determinante de uma matriz triangular (inferior ou superior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

9) O determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma fila os elementos de outra fila multiplicados por um número real diferente de zero.

10) Sejam A, B, C matrizes quadradas de ordem $n \times n$ tais que:

    a) Somente as *i-ésimas* filas das três matrizes são diferentes.

b) Essa *i-ésima* fila de C é igual à soma das filas correspondentes de A e B.

Então $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

7.1.14 Matrizes escalonadas (ou matrizes escadas)

Definição: Diz-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma escalonada se, e somente se, o número de zeros que precede o primeiro elemento não nulo cresce de linha em linha enquanto a linha não for constituída só de zeros.

Exemplos:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

7.1.15 matrizes equivalentes

Duas matrizes A e B são equivalentes se, e somente se, uma delas é obtida da outra por meio de uma sequência de operações elementares.

Notação: $A \sim B$ (A é equivalente a B).

Observação: Quando uma matriz B é obtida de uma matriz A por meio de operações elementares sobre linhas, dizemos que B é equivalente linha (ou linha equivalente) à matriz A.

7.1.16 Matriz na forma canônica

Definição: O primeiro elemento não nulo de uma linha de uma matriz na forma escalonada é dito *elemento notável* da matriz.

Definição: Chamamos matriz canônica equivalente linha a uma matriz A, a matriz escalonada equivalente linha à matriz A, quando:

Os elementos notáveis são todos iguais a 1.

Nas colunas em que se encontram os elementos notáveis, eles são os únicos diferentes de zero.

Exemplos:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 1: Toda matriz canônica equivalente linha a uma matriz é única.

Definição (Posto de uma matriz): Seja A uma matriz e B uma forma escalonada da matriz A, o posto de A é igual ao número de linhas não nulas de B.

Notação: $p(A)$.

Exercícios resolvidos

1) Obtenha uma matriz equivalente linha à matriz A dada a seguir, na forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Resolução: A ideia é trabalhar com operações elementares sobre a matriz de modo a torná-la escalonada por linha. Para isso, façamos:

1) $L_2 = L_2 - 2L_1$. Portanto, $\begin{cases} 2-2\cdot 1=0 \\ 4-2\cdot 2=0 \\ 3-2(-1)=5 \\ 5-2(4)=-3. \end{cases}$

2) $L_3 = L_3 + L_1$. Portanto, $\begin{cases} -1+1=0 \\ -2+2=0 \\ 6+(-1)=5 \\ -7+4=-3. \end{cases}$

A matriz resultante é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_3 = L_3 - L_2$, portanto $\begin{cases} 5-5=0 \\ -3-(-3)=0 \end{cases}$, obtemos a matriz escalonada por linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está na forma escalonada.

2) Determine a matriz canônica equivalente linha à matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Aproveitando o exercício anterior, temos que a matriz equivalente linha de A, na forma escalonada, é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Basta, agora, transformar em 1 (o número inteiro 1) todos os elementos notáveis, e em zero os elementos das colunas correspondentes. Para isso, façamos as operações elementares:

$L_2 = \dfrac{L_2}{5}$, obtendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, fazendo $L_1 = L_1 + L_2$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz canônica equivalente linha à matriz A.

3) Verifique se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é inversa de $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolução: Para verificar se uma determinada matriz é inversa de outra, basta verificar se o resultado da multiplicação dessas matrizes é a identidade. Isto é: $A \cdot B = B \cdot A = I$.

De fato, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deixamos para você verificar que $B \cdot A = I$ e concluir que A é a inversa de B.

Resposta: Conclui-se que A é a inversa de B.

4) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule: A^2 e A^3.

Resolução: Comecemos por A^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Portanto, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Para calcular A^3, façamos $A^3 = A^2 \cdot A$ usando o resultado anterior encontrado.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) & (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Portanto, $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Resposta: $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercícios propostos

1) Mostre que as matrizes $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ comutam para todos os valores reais de a, b, c e d.

2) Mostre que a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ é nilpotente de índice 3, isto é, A^3 é a matriz nula.

3) Mostre que $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ não comutam e que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

4) Mostre que a matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ é involutória, isto é, A^2 é a matriz identidade.

5) Mostre que se $AB = A$ e $BA = B$, então $A^2 = A$ e $B^2 = B$ (isto é, as matrizes são idempotentes).

6) Determine a matriz canônica equivalente linha para cada matriz.

a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$

c) $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$

7) Determine a matriz equivalente linha à matriz $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$ na forma escalonada.

8) Uma indústria produz dois tipos de produtos, P e Q, em duas fábricas, X e Y. Ao fazer esses produtos, são gerados os poluentes dióxido de enxofre, óxido nítrico e partículas em suspensão. As quantidades de poluentes gerados são dadas (em quilograma) pela matriz

$$A=\begin{bmatrix}300 & 100 & 150\\ 200 & 250 & 400\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{Produto P}\\ \to \text{Produto Q}\end{array}$$
$$\begin{array}{ccc}\downarrow & \downarrow & \downarrow\\ \text{Dióxido de} & \text{Óxido} & \text{Partículas em}\\ \text{enxofre} & \text{nítrico} & \text{suspensão}\end{array}$$

Leis e regulamentos federais e estaduais exigem que esses poluentes sejam eliminados. O custo diário de remover cada quilo de poluente é dado (em reais) pela matriz

$$B=\begin{bmatrix}8 & 12\\ 7 & 9\\ 15 & 10\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{Dióxido de enxofre}\\ \to \text{Óxido nítrico}\\ \to \text{Partículas em suspensão}\end{array}$$
$$\begin{array}{cc}\downarrow & \downarrow\\ \text{Fábrica X} & \text{Fábrica Y}\end{array}$$

Que informações os elementos do produto AB fornecem?

7.2 Sistemas de equações lineares

Definição: Um sistema linear S de m equações com n incógnitas é um conjunto de m equações lineares tal que cada uma tem n incógnitas.

$$S=\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}.$$

Nele, os $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i$, $\forall j$, $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$ e x_i é a incógnita $\forall i$.

Notação matricial do sistema S: $A \cdot X = B$ ou $A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

$A_{m\times n}$ é a matriz dos coeficientes, $X_{n\times 1}$ é a matriz das incógnitas e $B_{m\times 1}$ é a matriz dos termos constantes.

A matriz $[A \vdots B]$ é a matriz aumentada, ou matriz completa, do sistema S.

$$[A \vdots B] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} & \vdots & b_3 \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \vdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} & \vdots & b_m \end{array}\right] \\ \text{A} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{B} \end{array}$$

7.2.1 Sistemas equivalentes

Definição: Dois sistemas são ditos equivalentes se, e somente se, têm o mesmo conjunto solução.

Dado um sistema S_1, dizemos que um sistema S_2 é equivalente a S_1 quando:

- S_2 é obtido de S_1 permutando-se duas equações. Corresponde à operação elementar L_{ij} em $[A \vdots B]$.
- S_2 é obtido de S_1 multiplicando-se uma equação por $k \neq 0$. Corresponde à operação elementar $L_i(k)$ em $[A \vdots B]$.

- S_2 é obtido de S_1 somando-se a uma equação de S_1 outra equação multiplicada por uma constante $k \neq 0$.

  Corresponde à operação elementar $L_{ij}(k)$ em $[A \vdots B]$.

Teorema 2: Dado um sistema linear $AX = B$, são verdadeiras as seguintes afirmações:

- O sistema linear $AX = B$ de m equações com n incógnitas é consistente se, e somente se, $p(A) = p[A \vdots B]$.
- O sistema linear $AX = B$ tem uma única solução se, e somente se, $p(A) = p[A \vdots B] = n$.
- O sistema linear $AX = B$ tem infinitas soluções se, e somente se, $p(A) = p[A \vdots B] < n$.
- O sistema linear $AX = B$ é inconsistente se, e somente se, $p(A) < p[A \vdots B]$.

Observação: $p(A)$ é o posto da matriz A e o número $n - p(A)$ indica o grau de liberdade do sistema, isto é, a quantidade de variáveis livres.

7.2.2 Conjunto solução de sistemas lineares

Resolver um sistema linear com m e n incógnitas é encontrar uma n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que satisfaça cada uma das m equações. Ao conjunto de todas as soluções do sistema linear chamamos "Conjunto Solução".

Sejam C_1, C_2, C_3, ..., C_m os conjuntos solução da 1ª, 2ª, 3ª, ..., $m^{ésima}$ equação de S, respectivamente. O conjunto solução de S é dado por

$$C = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_m.$$

Podemos ter:

- $C = \varnothing$. Neste caso, o sistema é inconsistente.
- C é unitário. Neste caso, o sistema tem uma única solução.
- C é infinito. Neste caso, o sistema tem uma infinidade de soluções.

7.2.3 Regra de Cramer

A regra de Cramer é uma das formas para obtenção explícita da solução de um sistema de equações lineares. Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \,. \end{cases}$$

A regra de Cramer exprime a solução por meio de uma razão entre determinantes. O que se faz é trabalhar com os vetores coluna: $a = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $b = (b_1,\ b_2,\ b_3)$, $c = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ e $d = (d_1,\ d_2,\ d_3)$. As equações de um sistema indicam que o vetor d é uma combinação linear dos vetores a, b e c. Daí concluímos que a solução é dada por:

$$x = \frac{\det[d,b,c]}{\det[a,b,c]} \qquad y = \frac{\det[a,d,c]}{\det[a,b,c]} \qquad z = \frac{\det[a,b,d]}{\det[a,b,c]}.$$

Observe que essas três fórmulas fornecem os valores das incógnitas x, y e z do sistema através de determinantes. Essa é a Regra de Cramer. Essa regra só é válida quando temos $\det[a,b,c] \neq 0$.

Exercícios resolvidos

1) Discuta o sistema abaixo, encontrando a solução, se existir.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \\ 4x + 4y + 4z = 5\,. \end{cases}$$

Resolução: Observando o sistema, vemos que ele não possui solução; observe que, se $x + y + z = 1$, então deveríamos ter $4x + 4y + 4z = 4$, e não 5. Porém, façamos a resolução desse sistema através da regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0}.$$

Note que esse resultado nos leva a concluir que o sistema é possível e indeterminado! Sabemos que isso não acontece, pois, como já foi comentado, o sistema não possui solução. É claro que, se $\det[a,b,c]=0$ e algum dos determinantes $\det[d,b,c]$, $\det[a,d,c]$ ou $\det[a,b,d]$ é diferente de zero, então as igualdades $x=\dfrac{\det[d,b,c]}{\det[a,b,c]}$ e suas análogas y e z nos levam a concluir que o sistema é impossível.

Resposta: O sistema é impossível.

Note, portanto, que a regra de Cramer não deverá ser usada quando $\det[a,b,c]=0$.

2) Encontre a solução do sistema abaixo usando a Regra de Cramer.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x-2y=z+5 \\ 4y+2z+2=2x. \end{cases}$$

Resolução: O sistema acima não está escrito na forma adequada. Vamos reescrevê-lo.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x-2y-z=5 \\ -2x+4y+2z=-2. \end{cases}$$

Note que $D=\det[a,b,c]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=4.$

$$D_x=\det[d,b,c]=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=8.$$

$$D_y=\det[a,d,c]=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

$$D_z=\det[a,b,d]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=12.$$

Usando a Regra de Cramer, temos que:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 5 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\end{vmatrix}}=\frac{8}{4}=2,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 5 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-4}{4}=-1\quad \text{e}\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 5\\ -2 & 4 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\end{vmatrix}}=\frac{12}{4}=3.$$

Resposta: A solução do sistema é $x=2$, $y=-1$ e $z=3$.

7.2.4 Resolução por escalonamento

Outra forma de resolver um sistema linear do tipo $AX = B$ é fazendo uso do processo de escalonamento da matriz $[A\vdots B]$ associada ao sistema e utilizar o Teorema 2:

1) Fixamos como 1ª equação uma das que possuem o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero;
2) Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações;
3) Anulamos todos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação;
4) Repetimos o processo com as demais incógnitas enquanto o número de incógnitas da linha abaixo for maior que um.

Observação: Para sistemas lineares com 2 ou até 3 equações, usam-se também os métodos de substituição, adição e comparação.

Exercícios resolvidos

3) Determine a solução através do método de escalonamento para o sistema $\begin{cases}x-3y+2z=8\\ 2x-7y-z=-9\\ x+2y-z=-7\end{cases}$.

Resolução:

A matriz $[A \vdots B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 8 \\ 2 & -7 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & -7\end{array}\right]$.

Para colocá-la na forma escalonada, fazemos primeiro as operações $L_2=-2L_1+L_2$ e $L_3=-L_1+L_3$, obtendo a matriz equivalente linha

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -25 \\ 0 & 5 & -3 & -15\end{array}\right].$$

Agora, fazendo $L_3=5L_2+L_3$, obtemos a matriz escalonada por linhas equivalente à matriz $[A \vdots B]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -25 \\ 0 & 0 & -28 & -140\end{array}\right].$$

Como $p(A)=p([A \vdots B])=n=3$, o sistema admite uma única solução.

Para encontrar a solução, basta determinar a matriz canônica equivalente à matriz $[A \vdots B]$. Isto é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -5 & -25 \\ 0 & 0 & -28 & -140\end{array}\right] \xrightarrow[L_3=-\frac{1}{28}L_3]{L_2=-L_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right]$$

$$L_1=3L_2+L_1 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 17 & 83 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right]$$

$$L_1=-17L_3+L_1$$

$$L_2=-5L_3+L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5\end{array}\right].$$

Resposta: Portanto, $x=-2$, $y=0$ e $z=5$.

4) Resolver o sistema $\begin{cases} x+3y+z-2w=2 \\ x+2y-3z-4w=6 \\ 2x+5y-2z-5w=10 \end{cases}$.

Resolução: A matriz $[A \vdots B]$ associada ao sistema é

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3=-2L_1+L_3]{L_2=-L_1+L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

$$L_2 = -L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

$$L_3 = L_2 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Como $p(A) = p([A \vdots B]) = 3 < 4 = n$, pelo Teorema 2 o sistema tem uma infinidade de soluções. Já que $n - p(A) = 4 - 3 = 1$, o sistema tem uma variável livre.

Agora vamos determinar a matriz canônica equivalente a $[A \vdots B]$, fazendo:

$$L_1 = -3L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & -8 & 14 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$L_1 = 8L_3 + L_1$$

$$L_2 = -2L_3 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Portanto, o sistema equivalente é $\begin{cases} x - 11z = 30 \\ y + 4z = -8 \\ w = 2 \end{cases}$ e para cada $z \in \mathbb{R}$

(variável livre) obtemos $x = 30 + 11z$, $y = -8 - 4z$ e $w = 2$.

Resposta: O conjunto solução do sistema é

$$S = \{(30 + 11z, -8 - 4z, z, 2) / z \in \mathbb{R}\}.$$

7.3 Sistemas não lineares

A resolução de um problema pode dar origem a um tipo de sistema "não linear", ou seja, um sistema no qual uma ou mais incógnitas apresentam um expoente maior do que um, ou aparecem como um produto.Por exemplo: encontrar dois números x e y tais que seu produto é 10 e a soma dos seus quadrados é 29. Neste caso, o sistema é dado por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}.$$

Note que o sistema não é linear; os métodos de resolução abordados neste capítulo não se aplicam aqui. Neste caso pode-se usar o método da substituição e outros resultados, como produtos notáveis. Observe:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^2 = 29 + 20 = 49$$

$$x + y = 7$$

Assim, ficamos com as equações:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$$

Substituindo $y = 7 - x$ na segunda equação, temos:

$$x(7 - x) = 10 \Rightarrow 7x - x^2 = 10 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos $x = 5$ ou $x = 2$.

Para $x=2$ encontramos $y=5$; o par $(2,5)$ é uma solução.

Para $x=5$ encontramos $y=2$; o par $(5,2)$ é outra solução.

O conjunto solução do sistema é $S=\{(2,5),(5,2)\}$.

Resposta: Os números são 2 e 5.

Exercícios propostos

9) Resolva e discuta as soluções do sistema $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+y-2z=1 \\ 4x-3y-z=3 \\ 2x+4y+2z=4 \end{cases}$.

10) Classifique os sistemas quanto ao número de soluções:

a) $\begin{cases} x+z=5 \\ 2x+y+3z=-1 \\ -2x-2z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x-y=-1 \\ 2x+y+3z=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x-y+z+w=2 \\ x+y+z-w=4 \\ x+y-z+w=-4 \end{cases}$

11) Fazendo uso do método de escalonamento, resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x+6y-7z=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{2y}=\dfrac{2y+1}{2x+3}=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+w=0 \\ x+2y+z+w=1 \\ \quad y+3z-w=3 \\ 3x+3y+z+2w=-1 \end{cases}$

12) Determine o valor de a para que o sistema $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ ax-y=-3 \\ -x+2ay-z=0 \end{cases}$ possua solução única.

13) Um par de tênis, duas bermudas e três camisetas custam juntos R$460,00. Dois pares de tênis, cinco bermudas e oito camisetas custam juntos R$1100,00. Quanto custam juntos um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta?

14) Bronze é uma liga de cobre e zinco na qual a porcentagem de cobre varia geralmente entre 60% e 70%. Usando dois tipos de bronze, um com 62% e outro com 70% de cobre, deseja-se obter uma tonelada de bronze com exatamente 65% de cobre. Quantos quilos do primeiro tipo de bronze e quantos quilos do segundo tipo devem ser usados?

15) Problemas cuja tarefa é determinar a intersecção de curvas de modo geral resultam em sistemas não lineares. Resolva:

a) Determine os pontos de intersecção da reta $3x-2y=1$ com a circunferência $x^2+y^2+4x-6y=13$.

b) Encontre os pontos de intersecção entre as curvas $4x^2+9y^2=180$ e $xy=12$. (Você sabe que curvas são essas?)

Capítulo 8

Análise Combinatória e Probabilidade

Capítulo 8

Análise Combinatória e Probabilidade

Neste capítulo, iremos resolver problemas que envolvem contagem e probabilidades.

Como foi visto na disciplina de Fundamentos II, o estudo de Análise Combinatória e Probabilidades começa pelo conhecimento de determinados conceitos, dentre eles: *Princípio Fundamental da Contagem*, *Experimento Aleatório*, *Espaço Amostral*, *Evento e Probabilidade*.

8.1 O princípio fundamental da contagem

Lembre-se de que este princípio decorre das "árvores de possibilidades", já estudadas na disciplina Problemas, Sistematização e Representação.

Dado que S_1 é uma determinada decisão que pode ser tomada de m formas distintas e S_2 outra decisão que pode ser tomada de n formas distintas, pelo princípio fundamental da contagem tem-se que o número total de maneiras distintas de se tomar as decisões S_1 e S_2, sucessivamente, é dado pelo produto $m \cdot n$.

Exercícios resolvidos

1) Quantos números com 4 algarismos distintos podemos formar? E que sejam ímpares?

Resolução: Formar números com 4 algarismos significa tomar 4 decisões:

- S_1 : escolher o primeiro algarismo;
- S_2 : escolher o segundo algarismo;
- S_3 : escolher o terceiro algarismo;
- S_4 : escolher o quarto algarismo.

Em S_1 temos 9 modos para a escolha, já que no primeiro algarismo o número 0 (zero) não pode ser assumido. Em S_2 também temos 9 modos para a escolha do algarismo, uma vez que este não pode ser igual ao primeiro dígito. Em S_3 temos 8 modos para a escolha e em S_4 7 modos. Sendo assim, temos $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ números formados com 4 algarismos.

Para que um número seja ímpar, deve terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9. Dessa forma, fixamos o último algarismo (5 modos) e seguimos com as decisões acima, notando que agora temos 8 modos para S_1, 8 para S_2, 7 para S_3. O que nos dá $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2240$ números.

Resposta: É possível formar 4536 números com 4 algarismos distintos e 2240 números ímpares.

De forma geral, todos os problemas em combinatória são aplicações do princípio fundamental da contagem, porém existem alguns que são regidos por uma mesma regra, tornando o trabalho de resolução muito mais simples. São os casos de *permutação* e de *combinação*.

2) Quantos anagramas é possível formar com a palavra TUTOR?

Resolução: Como anagramas são equivalentes a uma simples ordenação na colocação das letras, temos 5 escolhas possíveis para a primeira letra, 4 para a segunda, 3 para a terceira, 2 para a quarta e 1 para a última. O que nos dá $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ anagramas. No entanto, temos a repetição da letra T, que aparece duas vezes, e isso gera uma repetição de $2! = 2$ anagramas, uma vez que existem $2!$ modos de troca para as letras T entre si. Assim, temos que dividir o resultado por $2!$ para obtermos o verdadeiro número de anagramas. Logo, existem $\frac{120}{2!} = \frac{120}{2} = 60$ anagramas.

Resposta: O número de anagramas possíveis é 60.

3) De quantas maneiras podemos organizar, em fila, 4 livros de Matemática, 5 livros de Física e 3 livros de Biologia de modo que os de mesma matéria fiquem juntos?

Resolução: Primeiramente, podemos escolher a ordem em que vamos organizar as matérias ($3!$ modos). Em seguida, percebendo que há $4!$ modos para organizar os livros de Matemática, $5!$ modos para os livros de Física e $3!$ para os de Biologia, concluímos que será possível organizar tais livros de $3!4!5!3! = 6 \cdot 24 \cdot 120 \cdot 6 = 103680$ maneiras.

Resposta: É possível organizar os livros de 103680 maneiras.

4) De quantas formas podemos dividir 7 cores distintas em um grupo com 3 cores e outro com 4 cores?

Resolução: Sejam a, b, c, d, e, f, g as sete cores distintas, vamos supor que estamos dispondo as cores em fila. Assim, as 3 primeiras cores formam o grupo de 3 cores, enquanto as 4 últimas formam o grupo com 4 cores. Dessa forma existirão $7!$ grupos. No entanto, as filas de cores $\{a, b, c\}; \{d, e, f, g\}$ e $\{a, c, b\}; \{d, e, f, g\}$ formam a mesma divisão de cores; e cada divisão de cores foi contada uma vez para cada ordem das cores de cada grupo. Há $3!4!$ modos de organizar as cores em cada grupo. Cada divisão foi contada $3!4!$ vezes.

Lembre-se de que, em um conjunto, não há uma ordem dos elementos, isto é, os conjuntos $\{a, b, c\}$ e $\{a, c, b\}$ são iguais.

Resposta: O total de formas de dispor 7 cores em grupos de 3 e 4 cores é dado por $\frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2} = 35$ grupos.

A seleção de p objetos distintos de um total de n objetos distintos, ou seja, a *combinação* de n objetos tomados p a p é dada pela divisão de $n!$ pelo produto $p!(n-p)!$ (p são os objetos selecionados e $n-p$ os objetos não selecionados).

$$C_n^p = C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

5) Quantas são as possibilidades distintas de organizar 6 pessoas em uma mesa redonda para almoçar?

Resolução: De modo geral, organizar 6 pessoas em diferentes posições faz-se por $6! = 720$ possibilidades. No entanto, como a organização das posições é cíclica, as posições ABCDEF e BCDEFA são as mesmas, bem como qualquer "giro" na posição dos integrantes da mesa. Neste caso, temos 6 integrantes, o que nos dá 6 posições equivalentes para cada configuração da mesa. Estamos contando 6 vezes mais cada posição.

Resposta: Portanto, existem $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ posições distintas para organizarmos 6 pessoas em uma mesa redonda para almoçar.

> O número total de organizar n objetos em círculo, isto é, o número de permutações circulares de n objetos, é dado por
>
> $$PC_n = (n-1)!.$$

6) Dispondo-se de 5 mulheres e 8 homens, quantos casais (homem-mulher) é possível formar?

Resolução: Formar casais é equivalente a tomar as decisões:

- S_1 : escolher uma mulher (5 modos);
- S_2 : escolher um homem (8 modos).

Portanto, o número de casais é dado por $5 \times 8 = 40$ casais.

Veja o esquema:

$$m_1\left\langle\begin{matrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\\h_5\\h_6\\h_7\\h_8\end{matrix}\right| + m_2\left\langle\begin{matrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\\h_5\\h_6\\h_7\\h_8\end{matrix}\right| + m_3\left\langle\begin{matrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\\h_5\\h_6\\h_7\\h_8\end{matrix}\right| + m_4\left\langle\begin{matrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\\h_5\\h_6\\h_7\\h_8\end{matrix}\right| + m_5\left\langle\begin{matrix}h_1\\h_2\\h_3\\h_4\\h_5\\h_6\\h_7\\h_8\end{matrix}\right|$$

Resposta: É possível formar 40 casais com 5 mulheres e 8 homens.

7) Existem cinco ruas ligando os supermercados S_1 e S_2; três ruas ligando os supermercados S_2 e S_3. Quantos trajetos podem ser utilizados para irmos de S_1 a S_3 passando por S_2?

Resolução: Podemos ir de S_1 a S_2 através de 5 modos distintos; e de S_2 a S_3 através de 3 modos distintos. Desta forma temos $3 \cdot 5 = 15$ modos distintos para ir de S_1 a S_3, passando por S_2.

Esquematicamente,

$$S_1 \left\langle \begin{array}{c} rua_1 \\ rua_2 \\ rua_3 \\ rua_4 \\ rua_5 \end{array} \right\rangle S_2 \left\langle \begin{array}{c} rua_a \\ rua_b \\ rua_c \end{array} \right\rangle S_3$$

Resposta: Nas condições desejadas, existem 15 trajetos distintos ligando os supermercados S_1 e S_3 passando pelo supermercado S_2.

Exercícios propostos

1) Escrevem-se números inteiros de 1 a 2222. Quantas vezes o algarismo 0 aparece?

2) De quantos maneiras é possível colocar 10 pessoas em fila, de modo que as pessoas A, B e C não fiquem juntas?

3) Quantos anagramas é possível formar com a palavra COMPUTAR? E com a palavra CALCULAR?

4) Um campo de futebol tem 7 entradas. Qual o número de modos distintos para esse campo ser aberto?

5) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 7 vagões distintos, sendo um deles o restaurante. Sabendo que a locomotiva deve vir à frente e que o vagão restaurante não pode vir imediatamente após a locomotiva, determine o número de modos diferentes para a composição desse trem.

6) Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 15 alunos oferecendo, durante 5 dias consecutivos, 5 jantares para cada 5 alunos. De quantas maneiras ele pode fazer os convites de modo que um mesmo par de alunos não compareça a mais de um jantar?

7) Uma empresa tem três diretores e cinco gerentes. Quantas comissões de cinco pessoas podem ser formadas contendo no mínimo um diretor?

8) Escrevem-se os números de 5 algarismos em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo, e como 6 de cabeça para baixo transforma-se em 9, e vice-versa, um mesmo cartão pode representar dois números (06198 e 86190, por exemplo). Qual o número mínimo de cartões para representar todos os números de 5 dígitos?

9) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$ e a função $f : A \to B$, quantas funções injetoras definidas em f existem?

10) Organiza-se um campeonato de futebol envolvendo 14 times. Sendo feito à noite e em dois turnos, para que cada time enfrente o outro no seu campo e no campo deste, quantos jogos serão realizados?

11) Numa determinada apresentação, x professores se distribuem em 12 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor comum.

    a) Calcule x.

    b) Quantos professores fazem parte de cada banca?

8.2 O triângulo de Pascal

Iniciando pela linha 0 (zero) e coluna 0 (zero), o triângulo de Tartaglia-Pascal é formado pelos valores de C_n^p, localizados na linha n, coluna p, e é dado por:

Em homenagem a Nicolo Fontana (Tartaglia) (1500-1557), matemático italiano, e Blaise Pascal (1623-1662), matemático, filósofo e físico francês.

$$
\begin{array}{llllll}
C_0^0 \\
C_1^0 & C_1^1 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \\
\ldots
\end{array}
$$

A denominação desse triângulo varia muito ao redor do mundo, por isso não faz sentido perguntar quem foi o primeiro que o descobriu. Por exemplo: os franceses o chamam de triângulo de Pascal, os chineses de triângulo de Yang Hui, os italianos de triângulo de Tartaglia, e encontramos outras denominações, como triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente triângulo aritmético ou triângulo combinatório.

Em homenagem ao matemático alemão Michael Stifel (1487-1567).

Relação de Stifel: $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Desde que p represente a coluna e n a linha à qual C_n^p pertence, $C_n^p + C_n^{p+1}$ significa a soma entre um elemento e o elemento logo ao lado; C_{n+1}^{p+1} significa o elemento logo abaixo e à direita de C_n^p. Sendo assim, a relação de *Stifel* fornece uma forma rápida para construção do triângulo de Pascal.

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\ldots
\end{array}
$$

Perceba que a soma dos elementos de uma mesma linha, digamos a linha n, é igual a 2^n. Isso de fato é verdadeiro, uma vez que cada elemento representa o número de subconjuntos de um conjunto composto de n elementos.

8.3 O binômio de Newton

Em homenagem ao cientista inglês Isaac Newton (1643-1727).

Da potenciação, temos que

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)\cdot(x+a)\cdots(x+a)}_{n\text{ fatores}}.$$

Assim, um termo qualquer dessa sequência de n fatores é obtido analisando-se a p-ésima multiplicação: $x^{n-p}a^p$. Uma vez que o produto de números reais é comutativo, essa parcela é calculada através de C_n^p modos. Portanto, a expressão que resume um termo qualquer do desenvolvimento de $(x+a)^n$ é dada por $C_n^p \cdot x^{n-p} \cdot a^p$. E, sendo assim,

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{x-p} a^p = \sum_{p=0}^{n} T_{p+1}\text{, onde } T_{p+1} = C_n^p x^{n-p} a^p,\ 0 \le p \le n.$$

Exercícios resolvidos

8) Para o binômio $\left(2x-\frac{y}{2}\right)^8$, determine o coeficiente numérico do seu termo médio.

Resolução: Para tal binômio, teremos 9 parcelas, ou seja, o termo médio será o quinto termo. Como o termo genérico é dado, neste caso, por $T_{p+1} = C_8^4(2x)^{8-p}\left(-\frac{y}{2}\right)^p$, o termo médio é:

$$\begin{aligned} T_{4+1} &= C_8^4(2x)^{8-4}\left(-\frac{y}{2}\right)^4 = \frac{8!}{4!4!}(2x)^4\left(-\frac{y}{2}\right)^4 \\ &= 70\cdot 2^4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^4y^4 \\ &= 70x^4y^4 \end{aligned}$$

Resposta: O coeficiente numérico do termo médio é igual a 70.

9) Determine, se existir, o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$.

Resolução: Aqui temos que um termo qualquer é dado por

$$T_{p+1} = C_9^p \left(\frac{x}{2}\right)^{9-p} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p = C_9^p \cdot \frac{1}{2^{9-p}} \cdot x^{9-p} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^p}}$$

$$= C_9^p \cdot \frac{1}{2^{9-p}} \cdot \frac{x^{9-p}}{x^{\frac{p}{2}}}$$

$$= C_9^p \cdot \frac{1}{2^{9-p}} \cdot x^{9-p-\frac{p}{2}}$$

$$= C_9^p \cdot \frac{1}{2^{9-p}} \cdot x^{\frac{18-3p}{2}}$$

Como estamos tratando do termo independente de x, devemos ter $\frac{18-3p}{2} = 0$ e, portanto, $p = 6$. Dessa forma, o termo independente de x é igual a

$$T_{6+1} = C_9^6 \cdot \frac{1}{2^{9-6}} \cdot x^{\frac{18-3\cdot 6}{2}} = \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{21}{2}.$$

Resposta: O termo independente de x é: $T_7 = \frac{21}{2}$.

Exercícios propostos

1) Determine o conjunto solução para a equação $\binom{12}{2x} = \binom{12}{x^2}$.

2) Simplifique a expressão $\dfrac{n! + (n+1)!}{2!(n-1)!}$.

3) Determine o valor de a para que o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x+a)^7$ seja 1890.

4) Qual o valor para a soma $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \cdots + \binom{9}{6}$?

5) Determine a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(2x+3y)^6$.

6) Qual é o valor da soma $\sum_{p=0}^{7} 3^{7-p}(-2)^p$?

7) Qual o valor do termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x - \dfrac{1}{3x}\right)^8$?

8.4 Probabilidade

8.4.1 Experimento aleatório

Chamamos de experimento aleatório aquele que, repetido várias vezes sob mesmas condições, gera resultados que não podem ser previstos. Dessa forma, o lançamento de uma moeda não viciada, de um dado não viciado, ou a retirada de uma bola numa urna etc., são exemplos de experimentos aleatórios.

8.4.2 Espaço amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis para um determinado experimento aleatório. É comum denotarmos esse conjunto por Ω. Assim, $n(\Omega)$ representa o número de elementos do espaço amostral, isto é, o número de resultados possíveis para um determinado evento. Portanto, no lançamento de um dado temos $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, ou seja, $n(\Omega) = 6$.

8.4.3 Evento

É a denominação de qualquer subconjunto de Ω. É comum representarmos os eventos por letras maiúsculas do alfabeto.

Exemplo 1: No lançamento de uma moeda, por exemplo, o espaço amostral é dado por $\Omega = \{cara, coroa\}$, portanto há 4 eventos: $\varnothing$, $A = \{cara\}$, $B = \{coroa\}$, Ω. O evento $\varnothing$ significa o evento que não ocorre nunca. Por outro lado, o evento Ω representa o evento cara ou coroa, isto é, ocorre sempre.

8.4.4 Probabilidade

É a função que associa a cada evento A um número $P(A)$ tal que:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$, para qualquer evento A.
2) $P(A) = 1$ se, e somente se, $A = \Omega$.
3) Se A e B são dois eventos mutuamente exclusivos, isto é, não podem ocorrer simultaneamente, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A probabilidade de um evento A ocorrer é dada pela razão entre o número de possibilidades desse evento pelo total das possibilidades possíveis.

Exemplo 2: Sendo A e B dois eventos em um dado espaço amostral, $A \cup B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorrer o evento A ou ocorrer o evento B. Já o evento $A \cap B$ ocorre se, e somente se, ocorrerem os eventos A e B simultaneamente. O evento $A - B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorrer o evento A mas não ocorrer o evento B. Por último, o evento $\overline{A}$ ocorre se, e somente se, o evento A não ocorrer. Esse evento é chamado de evento complementar de A. Em termos de probabilidade temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, sendo A e B eventos independentes;

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Uma dúvida natural neste ponto é questionar-se, no item 2, a respeito de como ficaria a probabilidade caso os eventos A e B não fossem independentes. A resposta para essa dúvida está logo a seguir, no tópico *Probabilidade Condicional*.

Exemplo 3: Lança-se um dado e verifica-se o número voltado para cima. O espaço amostral é dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e vários eventos podem ser definidos. Dentre eles, definimos:

- $A = \{\textit{tirar o número } 5\}$;
- $B = \{\textit{tirar o número } 2\}$;
- $C = \{\textit{tirar um número par}\}$;
- $D = \{\textit{tirar um número menor que } 8\}$;
- $E = \{\textit{tirar um número diferente de } 5\}$.

Analisando as respectivas probabilidades temos que

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(D) = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{e} \quad P(E) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Notemos que a probabilidade do evento D ocorrer foi igual a 1, já que este evento é um evento certo (tirar um número menor do que 8 num dado!). Já para o evento E, percebemos que ele complementa o evento A, ou seja, $A \cup E = \Omega$, com $A \cap E = \varnothing$. Também temos que a probabilidade do evento A é igual à de B, ou seja, a probabilidade de cada elemento do espaço amostral é a mesma. Isso ocorre para todo modelo probabilístico em que os eventos unitários são equiprováveis, isto é, para todo modelo equiprobabilístico.

Exemplo 4: Considere o experimento "lançamento de um dado não viciado". Olhando-se a face voltada para cima, qual a probabilidade de ocorrer o evento B, dado por "sair um número ímpar"? De imediato fazemos $P(B) = \frac{3}{6} = 0,5$. Essa é a probabilidade para o evento B antes que a experiência se realize. Vamos supor que após a experiência ser realizada, alguém nos informe que o número não foi o 3. Como isso afeta nosso experimento em termos de probabilidade? Se o número que saiu foi diferente de 3, temos que o evento A, dado por "tirar um número diferente de 3", ocorreu. Dessa forma passamos a ter apenas 5 casos possíveis (o espaço amostral foi reduzido), dos quais apenas 2 são favoráveis. Isso significa que

$$P(A|B) = \frac{2}{5} = 0,4.$$

$P(A \mid B)$ é a probabilidade do evento B ocorrer dado que o evento A já ocorreu. Lembre-se de Fundamentos de Matemática II.

Note que os resultados favoráveis a B não são mais os elementos de B, e sim de $A \cap B$, pois somente os elementos que pertencem a A podem ocorrer.

8.4.5 Probabilidade condicional

Definição: Dados dois eventos A e B, com $P(A) \neq 0$, a probabilidade de B condicionada ao fato de A ter ocorrido é dada por

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Dessa igualdade tiramos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$, que é a probabilidade de $A \cap B$, quando A e B nem sempre são independentes.

Exercícios resolvidos

10) Lançando-se dois dados, d_1 e d_2, qual a probabilidade para os eventos: (A) resultado 2 em d_2; (B) soma 6; (C) resultado 2 em d_2 sabendo que a soma dos dados foi 6.

Resolução: Começamos por analisar nosso espaço amostral:

$$\Omega = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\cdots(2,1);\cdots(6,6)\}$$

(36 possíveis resultados).

Já para os eventos, temos que o espaço amostral para o evento (A) é

$$A = \{(1,2);\ (2,2);\ (3,2);\ (4,2);\ (5,2);\ (6,2)\}$$

(6 possibilidades);

para o evento (B), o espaço amostral é

$$B = \{(1,5);\ (2,4);\ (3,3);\ (4,2);\ (5,1)\}$$

(5 possibilidades).

Assim,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$$

Para o evento (C) podemos fazê-lo de duas maneiras:

A primeira maneira é feita reduzindo nosso espaço amostral, já que nem todas as possibilidades de Ω são aceitas. O espaço amostral reduzido é dado por B. Portanto, temos uma escolha favorável dentre as 5 escolhas possíveis, o que nos dá $P(B\,|\,A) = \frac{1}{5}$.

A segunda maneira é fazendo uso da fórmula, percebendo que $A \cap B = \{(4,2)\}$;

$$P(B\,|\,A) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

Resposta: As probabilidades dos eventos são $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{5}{36}$ e $P(C) = \frac{1}{5}$.

11) Uma urna contém 8 bolas amarelas e 6 verdes. Qual é a probabilidade de retirarmos duas bolas sucessivamente, sem reposição, sendo a primeira verde e a segunda amarela?

Resolução: Nosso espaço amostral possui 14 elementos. Nossos eventos são:

- A : retirar uma bola verde;
- B : retirar uma bola amarela.

Como as retiradas são realizadas sem reposição, o evento (B) é influenciado pelo evento (A), tornando assim o problema condicionado. Em termos de probabilidade, queremos encontrar $P(A \cap B)$ para o problema condicionado. Isto é, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. A saber, $P(A \cap B) = \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$.

Resposta: A probabilidade de serem tiradas uma bola verde e, em seguida, uma amarela (sem reposição) é igual a $\frac{24}{91}$.

Exercícios propostos

1) Um polígono regular de $2n+1$ lados está inscrito em um círculo. Escolhem-se três dos seus vértices, formando um triângulo. Determine a probabilidade de o triângulo formado conter o centro do círculo.

2) Distribuindo-se ao acaso 5 sorvetes de chocolate e 5 sorvetes de creme a 10 pessoas, das quais 3 preferem creme, 2 preferem chocolate e as demais não têm preferência, qual a probabilidade de todas saírem satisfeitas?

3) Há 8 carros estacionados em 12 vagas em fila. Determine a probabilidade:

   a) das vagas vazias serem consecutivas;

   b) de não haver duas vagas vazias adjacentes.

4) Doze pessoas são divididas em três grupos de 4 pessoas. Qual é a probabilidade de duas determinadas pessoas dessas ficarem no mesmo grupo?

5) Quantas vezes, no mínimo, deve-se lançar um dado para que a probabilidade de se obter algum seis seja superior a 0,9?

6) Uma urna contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas brancas, outra urna contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos o resultado "primeira urna – bola vermelha"?

7) Numa certa comunidade, 52% dos habitantes são mulheres e destas 2,4% são canhotas. Dos homens, 2,5% são canhotos. Calcule a probabilidade de que um indivíduo escolhido ao acaso seja canhoto.

8) São feitos três lançamentos de uma mesma moeda. Qual a probabilidade de os resultados serem duas caras e uma coroa?

Capítulo 9

Geometria Analítica

Capítulo 9

Geometria Analítica

Resolveremos, ao longo deste capítulo, exercícios envolvendo distâncias e curvas no plano.

Este capítulo é dedicado a problemas de Geometria Analítica, disciplina já conhecida dos estudantes desta fase. Faremos um breve resumo sobre as equações de retas e circunferências e, em seguida, apresentaremos exercícios resolvidos e propostos.

Uma vez que determinamos, ou escolhemos, um sistema de coordenadas no plano, curvas nesse plano passam a ser representadas por equações. Sendo assim, a equação que define uma determinada curva C é uma igualdade envolvendo as variáveis x e y. Essa igualdade é satisfeita se, e somente se, o ponto $P(x,y)$ pertencer à curva C.

Como foi visto na disciplina de **Geometria Analítica,** as equações que definem uma reta podem ser representadas das seguintes formas:

- Geral: $ax+by+c=0, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$.
- Segmentária: $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1, \quad p,q \neq 0$.
- Paramétrica: $x=f(t)$, $y=g(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Reduzida: $y=mx+n, \quad m,n \in \mathbb{R}$.
- Feixe de retas: $y-y_0=m(x-x_0)$, $m \in \mathbb{R}$ coeficiente angular, $P(x_0,y_0)$ ponto dado.

Uma *circunferência* é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto dado, chamado de centro da circunferência. Representando por $C(a,b)$ o centro, os pontos da circunferência são os pontos $P(x,y)$ cuja distância ao centro é constante. Essa distância é o raio da circunferência. Como a distância entre dois pontos $C(a,b)$ e $P(x,y)$ é dada por $d(C,P)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, a equação que define a circunferência é $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Essa equação é dita *equação reduzida da circunferência*. Ela relaciona os elementos principais da circunferência: centro e raio. Da mesma equação origina-se a *equação geral* da circunferência, que é dada por $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

Note que para encontrar esta equação basta efetuar os produtos notáveis!

Com base nos estudos da circunferência, podemos saber exatamente se um determinado ponto pertence, é interno ou é externo a ela. Basta analisar a distância desse ponto ao centro da circunferência.

Exercícios resolvidos

1) Determine qual a relação entre a circunferência $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ e os pontos $P(2,1)$, $Q(-1,2)$ e $R(1,3)$.

Resolução: Encontramos a distância entre cada ponto e o centro da circunferência, isto é, entre os pontos $P(2,1)$, $Q(-1,2)$, $R(1,3)$ e o centro $C(2,3)$. Em seguida, comparamos essas distâncias com o valor do raio.

- Para o ponto P temos: $d_{PC}=\sqrt{(2-2)^2+(1-3)^2}=2$. Desde que $r=2$ e $d_{PC}=2$, concluímos que o ponto P é ponto pertencente à circunferência.
- Para o ponto Q temos: $d_{QC}=\sqrt{(-1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}>r$, logo o ponto Q é ponto externo à circunferência, pois $d_{QC}=\sqrt{10}>r=2$.
- Para o ponto R temos: $d_{RC}=\sqrt{(1-2)^2+(3-3)^2}=1<r$, logo o ponto R é ponto interno à circunferência, $d_{RC}=1<r=2$.

Resposta: O ponto P pertence à circunferência, o ponto Q está no exterior e R está no interior da circunferência.

Observação: Algumas relações interessantes aparecem quando estudamos distâncias entre ponto e reta e entre retas. No último caso, se as retas não forem paralelas, temos que a distância será igual a zero, uma vez que elas se intersectam em um determinado ponto.

2) Calcule a distância entre as retas paralelas dadas por $r: 3y=4x-2$ e $s: 3y=4x+8$.

Resolução: A distância entre duas retas paralelas é igual ao comprimento do segmento que as une e lhes é perpendicular. Portanto, consideraremos um ponto de uma das retas e, a partir daí, encontraremos a reta perpendicular, digamos t, passando por esse ponto. Acompanhe!

Seja o ponto $P(2,2)$, pertencente à reta r. A reta t perpendicular à reta r, passando por $P(2,2)$, é dada pela equação $y - y_o = m(x - x_o)$. Lembre-se de que $r \perp t \Leftrightarrow m_r \cdot m_t = -1$. Da equação da reta r concluímos que $m_r = \frac{4}{3}$ e, portanto, $m_t = -\frac{3}{4}$. Logo, a equação da reta t é: $y - 2 = -\frac{3}{4}(x-2)$ ou $y = -\frac{3}{4}x + \frac{14}{4}$. Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas s e t encontramos o ponto $Q\left(\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$, que é o ponto de intersecção entre s e t. Assim, a distância entre as retas r e s é dada pela distância entre os pontos P e Q. Ou seja,

$$d_{rs} = d_{PQ} = \sqrt{\left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{16}{5}\right)^2} = 2 \text{ u.c.}$$

Outra maneira de calcular a distância entre duas retas paralelas é calculando a distância de um ponto $P(x_o, y_o)$ à reta $ax + by + c = 0$ usando a fórmula $d_{Pr} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Nesse caso, podemos considerar o ponto $P(2,2)$ pertencente à reta r e calculamos a distância até a reta s. Colocando a equação da reta s, dada, na forma geral temos: $s: 4x - 3y + 8 = 0$. Portanto,

Lembre-se de que essa fórmula já foi estudada na disciplina de Geometria Analítica.

$$d_{rs} = d_{Ps} = \frac{|4\cdot 2 - 3\cdot 2 + 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|8-6+8|}{5} = \frac{10}{5} = 2.\ \text{Logo, } d_{rs} = 2 \text{ u.c.}$$

Resposta: A distância entre as retas s e r é 2 u.c.

3) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, são dados um ponto $P(2,3)$ e uma reta r de equação $x + y + 1 = 0$. Seja Q o ponto de interseção da perpendicular à reta r, traçada pelo ponto P, com a reta r. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento PQ.

Resolução:

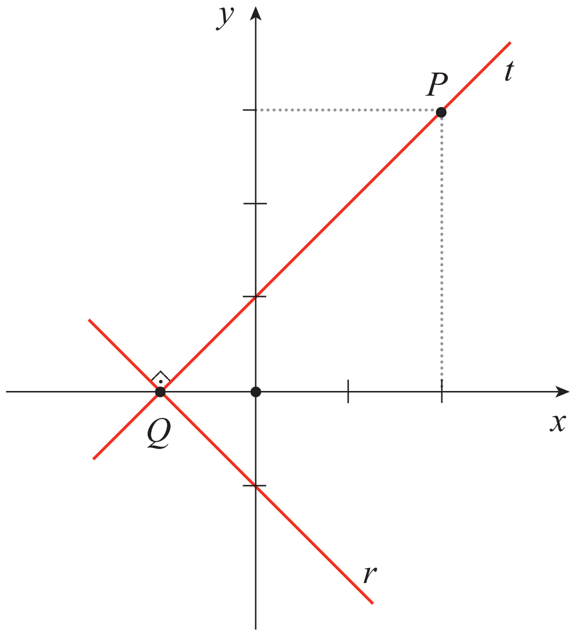


Figura 9.1

Seja t a reta perpendicular em questão.

Primeiramente devemos encontrar o coeficiente angular da reta r dada. É fácil ver que $m_r = -1$. Logo $m_t = 1$ e, portanto, a equação de t é $x - y + 1 = 0$.

Como a intersecção entre as retas ocorre em $x = -1$ e $y = 0$, temos que o ponto Q é dado por $Q(-1, 0)$.

Portanto, o ponto médio M de PQ é dado por

$$M = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Resposta: O ponto $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é o ponto médio do segmento PQ.

4) A equação $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0$ representa uma circunferência. Determine as coordenadas do centro e o seu raio.

Resolução: Dada a equação geral da circunferência, devemos transformá-la na equação reduzida, pois desta forma teremos os principais elementos explicitados. Pois bem, devemos perceber que

$$x^2 + 12x = (x+6)^2 - 36$$

$$y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x^2 + 12x + y^2 - 4y - 9 &= (x+6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 - 9 \\ &= (x+6)^2 + (y-2)^2 - 49. \end{aligned}$$

Logo, a equação na forma reduzida é

$$(x+6)^2 + (y-2)^2 = 7^2.$$

Resposta: De onde tiramos que o centro é dado por $C(-6, 2)$ e o raio é $r = 7$.

5) Dada a reta $r: x + y - 3 = 0$ e a circunferência de equação $(\lambda): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$, qual é a posição de r em relação a (λ)?

Resolução: Este tipo de exercício pode ser resolvido de duas maneiras:

(1) Por sistemas: se a reta tocar ou cruzar a circunferência, então teremos que o sistema abaixo tem solução. Caso contrário, não teremos a existência de uma solução, o que significa que a reta não tocou a circunferência. Note que o sistema não é linear!

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + (3-x)^2 - 2x - 2(3-x) - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

A segunda equação nos dá raízes $x' = 0$ e $x'' = 3$. Consequentemente, $y' = 3$ e $y'' = 0$.

Resposta: Uma vez que a reta tem dois pontos em comum com a circunferência, ela é uma reta secante à circunferência.

(2) Pela distância entre ponto e reta: se a distância do centro da circunferência até a reta for menor do que o raio, a reta é secante à circunferência. Se a distância for igual ao raio, a reta será tangente à circunferência; e se a distância for maior do que o raio, então a reta é externa à circunferência.

Deixamos que você resolva pela segunda maneira.

6) O triângulo ABC tem vértices $A(5,5)$, $B(5,0)$ e baricentro $G(4,3)$. Determine o vértice C.

Resolução:

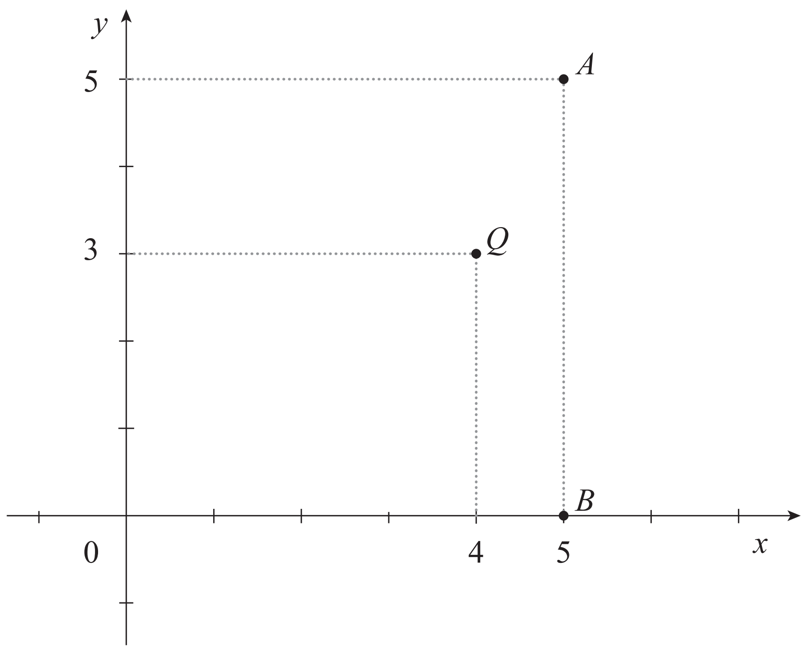


Figura 9.2

O baricentro G de um triângulo é dado por

$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$. Assim:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\Rightarrow 4=\dfrac{5+5+x_C}{3}\Rightarrow x_C=2 \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\Rightarrow 3=\dfrac{5+0+y_C}{3}\Rightarrow y_C=4 \end{cases}.$$

Resposta: O vértice C é $(2,4)$.

7) Os vértices do triângulo PQR têm as seguintes coordenadas: $P(0,a)$, $Q(b,0)$, $R(c,d)$, com a, b, c, d reais positivos. A origem e o ponto R estão em lados opostos em relação à reta r dada pelos pontos P e Q. Qual é a expressão da área do triângulo PQR?

Resolução:

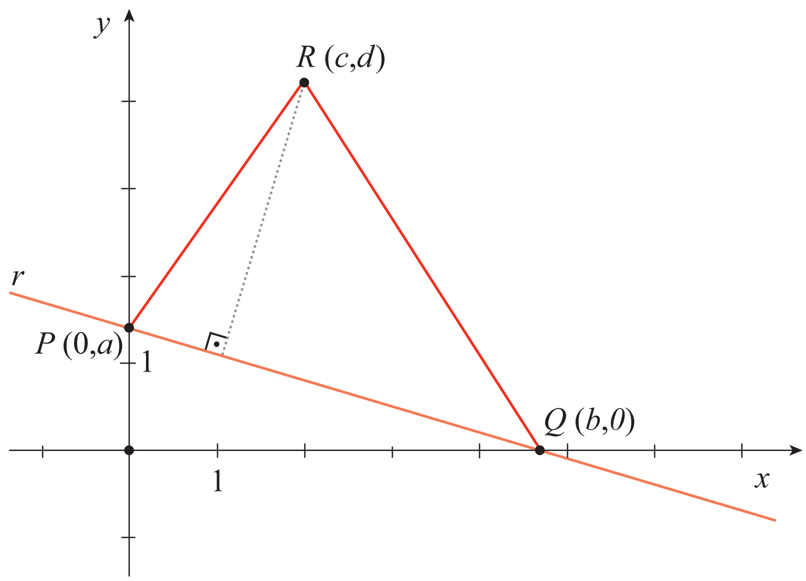


Figura 9.3

Para calcular a expressão da área do triângulo, $A_T = \dfrac{base \times altura}{2}$ observemos que:

(1) a distância entre os pontos $P(0,a)$ e $Q(b,0)$ é a base do triângulo:

$$d(P,Q) = \sqrt{(0-b)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

(2) a altura do triângulo é dada pela distância entre o ponto $R(c,d)$ e a reta r determinada pelos pontos $P(0,a)$ e $Q(b,0)$. Vamos inicialmente determinar a equação da reta $r:\ y = mx + n$.

$$P(0,a) \in r \Rightarrow a = 0 \cdot x + n \Rightarrow a = n$$

$$Q(b,0) \in r \Rightarrow 0 = m \cdot b + n \Rightarrow 0 = m \cdot b + a \Rightarrow m = -\frac{a}{b}.$$

Logo, a equação da reta r é dada por $y = -\dfrac{a}{b}x + a$, ou em sua forma geral $\dfrac{a}{b}x + y - a = 0$.

A distância entre r e $R(c,d)$ (altura do triângulo) é dada por:

$$d(R,r)=\frac{\left|\frac{a}{b}\cdot c+1\cdot d-a\right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1^2}}=\frac{\left|\frac{ac}{b}+\frac{bd}{b}-\frac{ab}{b}\right|}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}}=\frac{|ac+bd-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Assim, a área do triângulo é dada por:

$$A_T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{|ac+bd-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ac+bd-ab|}{2}.$$

Resposta: A área do triângulo PQR é $A_T=\dfrac{|ac+bd-ab|}{2}$.

Exercícios propostos

1) Dados os pontos $P(x,2)$, $A(4,-2)$ e $B(2,-8)$, determine o número real x de modo que o ponto P seja equidistante de A e de B.

2) Calcule o comprimento das medianas do triângulo cujos vértices são $A(0,0)$, $B(4,2)$ e $C(2,4)$.

3) Encontre a interseção das retas $2x-3y-1=0$ e $5x+y-2=0$.

4) Num paralelogramo $ABCD$, dois vértices consecutivos são os pontos $A(2,3)$ e $B(6,4)$. Seja $M(1,-2)$ o ponto de encontro das diagonais AC e BD do paralelogramo. Determine as coordenadas dos vértices C e D desse paralelogramo.

5) Determine a equação da reta s que passa pela interseção das retas u e t de equações $x-y+2=0$ e $3x-y+6=0$, respectivamente, e é paralela à reta r de equação $2y-x+1=0$.

6) A bissetriz do 2º e 4º quadrantes intercepta a reta r de equação $4x-2y+5=0$ no ponto P. Determine as coordenadas de P.

7) Seja r a reta que passa por $P(3,2)$ e perpendicular à reta s de equação $x+y-1=0$. Calcule a distância do ponto $A(3,0)$ à reta r.

8) Determine a distância do ponto $A(1,1)$ à reta r de equação $x+y-3=0$.

9) O ponto $P(-3,b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C(0,3)$ e de raio $R=5$. Calcule o valor de b.

10) Determine os pontos de interseção das circunferências $x^2+y^2+2x+2y-3=0$ e $x^2+y^2-x-4y-3=0$.

11) A reta r de equação $x-y-2=0$ intercepta a circunferência $x^2+y^2=100$ nos pontos A e B. Sendo C o centro da circunferência, determine a área do triângulo ABC.

12) Considere as circunferências $C_1: x^2+y^2-2x-2y=0$ e $C_2: x^2+y^2-2x-3=0$. Qual é a posição de C_1 em relação a C_2?

13) Obtenha um ponto da reta $2x-y=0$ que forme com os pontos $(2,0)$ e $(5,2)$ um triângulo de área igual a 10 u.a.

14) Determine o ponto P da reta $x+2y=-10$ que equidista dos pontos $A(1,4)$ e $B(3,0)$.

15) Ache a equação reduzida da circunferência cujo diâmetro é o segmento de extremidades $A(2,8)$ e $B(4,0)$.

Capítulo 10

Números Complexos

Capítulo 10

Números Complexos

Neste capítulo iremos proporcionar um primeiro contato com o universo dos números complexos, apresentando suas principais definições e propriedades e resolvendo exercícios que as envolvem.

A necessidade de ampliação do conjunto $\mathbb{R}$

Determine x na equação real $x^2 - 2x + 5 = 0$. Neste caso $\Delta = 4 - 4 \cdot 5 = -16$.

E, assim, $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$. Porém, $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$!

Observe também a equação $x^2 + 1 = 0$. Esta equação não tem solução real, isto é, não existe número real cujo quadrado somado a 1 resulte em zero. A ideia, então, é ampliar o conjunto dos números reais para que, neste novo conjunto, essas equações tenham solução. É a mesma ideia da ampliação de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, feita em Fundamentos I: "acrescentamos" a $\mathbb{R}$ as soluções (raízes) das equações que não possuem raízes reais. Os números desse conjunto serão da forma $a + bi$, com a e b números reais e $i = \sqrt{-1}$. O conjunto $\mathbb{R}$ será um subconjunto desse novo conjunto, chamado *Conjunto dos Números Complexos* e denotado por $\mathbb{C}$. Note que um número complexo fica determinado quando conhecemos o par ordenado (a, b) de números reais. Por exemplo, $1 + i$, $-5 + 3i$, $\sqrt{2} - 2i$, $-\dfrac{1}{2}i$ são números complexos relacionados, respectivamente, aos pares $(1,1)$, $(-5,3)$, $(\sqrt{2},-2)$ e $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Definição: *O conjunto dos números complexos é o conjunto dos números escritos sob a forma:*

$$z = a + b \cdot i$$

em que a *e* b *são números reais. O número real* a *é a parte real de* z, $\operatorname{Re}(z)$, *e o número real* b *é a parte imaginária de* z, $\operatorname{Im}(z)$, *enquanto que* i *é definido como* $i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = -1$, *chamado a unidade imaginária.*

Em relação à unidade imaginária i, *observamos que*

$$
\begin{aligned}
i^0 &= 1 \\
i^1 &= i \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= -i \\
i^4 &= i^0 = 1 \\
i^5 &= i^1 = i \\
i^6 &= i^2 = -1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

E, portanto, $i^n = i^r$, *em que* r *é o resto da divisão de* n *por* 4.

Exercício resolvido

1) Calcule o valor de $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{199}+i^{200}$.

Resolução: Do resultado acima, sabemos que potências de base i não variam mais do que quatro números, ou seja, a cada quatro parcelas temos uma repetição de um determinado número. Assim, das 201 parcelas dadas, temos

$$
\begin{aligned}
i^1 &= i^5 = i^9 = \cdots = i^{197} = i \\
i^2 &= i^6 = i^{10} = \cdots = i^{198} = -1 \\
i^3 &= i^7 = i^{11} = \cdots = i^{199} = -i \\
i^4 &= i^8 = i^{12} = \cdots = i^{200} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Observando que temos 50 igualdades a cada uma das 4 potências acima, segue que

$$
\begin{aligned}
1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{199}+i^{200} &= 1+50(i)+50(-1)+50(-i)+50(1) \\
&= 1+50i-50-50i+50 \\
&= 1\,.
\end{aligned}
$$

Resposta: $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{199}+i^{200}=1$.

10.1 Representação geométrica de um número complexo

Em homenagem aos matemáticos Jean Robert Argand (1768-1822) e Johann Carl Friedrich Gauss (1777 -1855)

Fixado um sistema de coordenadas, um número complexo $z = a + bi$ é representado por um ponto, a imagem do número complexo, isto é, $z = (a,b)$. Este ponto é conhecido como *afixo* de z. O sistema de coordenadas no qual representamos os números complexos é chamado plano de Argand-Gauss; nele, a parte imaginária de um número complexo é representada pela ordenada e a parte real pela abscissa. Pelo fato de que cada número complexo possui imagem única, é comum relacionarmos os complexos com suas respectivas imagens, ou seja, $(a,b) = a + bi$. Note que, para um número complexo $z = a + bi$, se $b = 0$, então $z = a + 0i = a$. Isso significa que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. No plano complexo, estes pontos estão representados pelos pontos sobre o eixo X. Por outro lado, se $a = 0$, então $z = 0 + bi = bi$, denominado número complexo imaginário puro; no plano complexo, estes números são representados por pontos sobre o eixo Y.

Exemplo:

1) Determine a representação dos números complexos $z_1 = -4 + 2i = (-4, 2)$; $z_2 = 3i = (0, 3)$; $z_3 = 4 = (4, 0)$; $z_4 = 2 - i = (2, -1)$; $z_5 = 1 + i = (1, 1)$ e $z_6 = -3 - 3i = (-3, -3)$ no plano de *Argand-Gauss*.

Resolução:

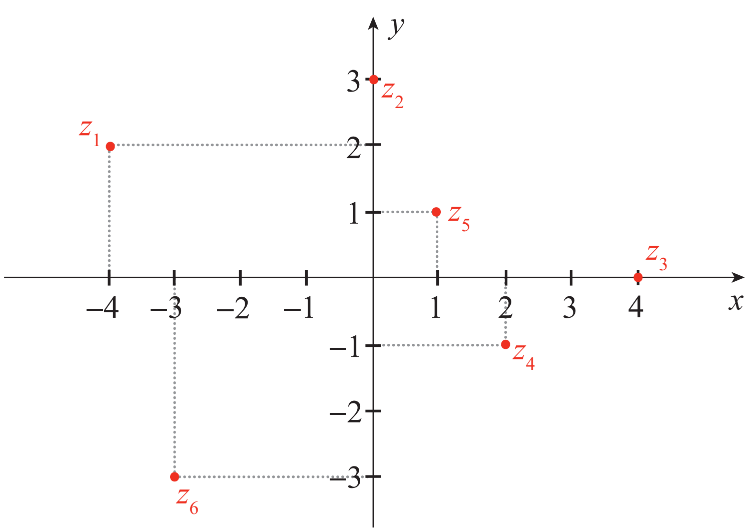


Figura 10.1

10.2 Igualdade de números complexos

Dois números complexos são iguais quando têm mesma parte real e mesma parte imaginária:

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ e } b=d.$$

10.3 Operações com números complexos

As operações entre números complexos são realizadas de maneira análoga às operações com pares ordenados, uma vez que todo número complexo pode ser representado por um par ordenado. Sendo assim, para $z_1=a+bi=(a,b)$ e $z_2=c+di=(c,d)$; $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, i a unidade imaginária, definimos:

Lembre-se das operações com pares ordenados estudadas em Introdução ao Cálculo.

- $z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c$ e $b=d$;
- $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$;
- $z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$;
- $z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Exemplo:

2) Sejam os números complexos $z_1=2+3i$ e $z_2=-5+i$, determine z_1-5z_2 e $z_1\cdot z_2$.

Resolução:

$$\begin{aligned} z_1-5z_2 &= 2+3i-5(-5+i)\\ &= 2+3i+25-5i\\ &= 27-2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (2+3i)\cdot(-5+i)\\ &= \big(2\cdot(-5)-3\cdot 1\big)+\big(2\cdot 1+3\cdot(-5)\big)i\\ &= (-10-3)+(2-15)i\\ &= -13-13i. \end{aligned}$$

Para todo a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Note que a multiplicação pode ser efetuada pela lei da distributividade para a soma, ou seja,

$$\begin{aligned}(2+3i)\cdot(-5+i) &= 2(-5)+2i+3i(-5)+3i(i)\\ &= -10+2i-15i+3i^2\\ &= -10-13i+3(-1)\\ &= -13-13i\,.\end{aligned}$$

10.4 Conjugado de um número complexo

Dado um número complexo $z = a+bi$, definimos o conjugado de z por $\overline{z} = a-bi$.

Exemplo:

3) Seja o número complexo $z = 4-i$. Determine:

a) $z+\overline{z}$

b) $z-\overline{z}$

Resolução:

a) $z+\overline{z} = 4-i+4+i = 8$, real puro!

b) $z-\overline{z} = 4-i-(4+i) = 4-i-4-i = -2i$, imaginário puro!

Propriedades:

1) $z+\overline{z} = 2\cdot \mathrm{Re}(z) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$

2) $z-\overline{z} = 2i\cdot \mathrm{Im}(z) \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

3) $z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}_+$

Tarefas

1) Prove as propriedades acima.

2) Represente z e seu conjugado $\overline{z}$ no plano complexo.

10.5 Divisão de números complexos

Sejam dois números complexos z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$. Dividir z_1 por z_2 corresponde a obter o número complexo $z = x + yi$ tal que $\frac{z_1}{z_2} = z$, ou seja, $z_2 \cdot (x + yi) = z_1$.

Exemplo:

4) Dados os números complexos $m = 2 + 3i$ e $n = 1 + 2i$, determine o quociente de m por n.

Resolução: O quociente de m por n é dado por $\frac{m}{n} = x + yi$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{2+3i}{1+2i} = x + yi &\Leftrightarrow 2 + 3i = (1+2i)(x+yi) \\ &\Leftrightarrow 2 + 3i = x + yi + 2xi + 2yi^2 \\ &\Leftrightarrow 2 + 3i = (x+2y) + (2x+y)i. \end{aligned}$$

E pela igualdade entre dois números complexos, concluímos que

$$\begin{cases} 2 = (x - 2y) \\ 3 = (2x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{5} \\ y = -\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Assim,

$$\frac{2+3i}{1+2i} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Uma maneira mais prática de dividir z_1 por z_2 consiste em multiplicar ambos pelo conjugado de z_2, levando-se em consideração a propriedade 3. Veja:

$$\begin{aligned} \frac{2+3i}{1+2i} &= \frac{(2+3i)}{(1+2i)} \cdot \frac{(1-2i)}{(1-2i)} \\ &= \frac{2 - 4i + 3i - 6i^2}{1^2 + 2^2} \\ &= \frac{8 - i}{5} \\ &= \frac{8}{5} - \frac{i}{5}. \end{aligned}$$

10.6 Argumento e módulo de um número complexo

O módulo de um número complexo $z = a + bi$ é definido como o módulo do vetor que o representa, isto é, a distância de z até a origem do plano complexo.

Simbolicamente, $|z| = d((a,b),(0,0)) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercício resolvido

2) Qual o módulo de $z = -3 - 4i$?

Resolução: $z = -3 - 4i = (-3,-4)$ representa um ponto no plano complexo, acompanhe:

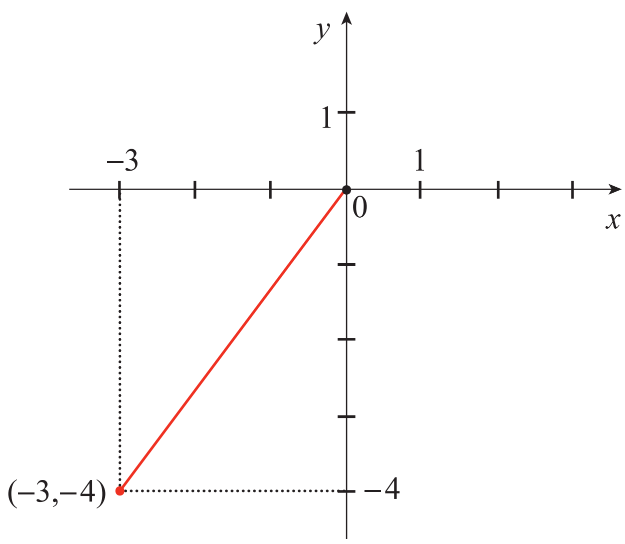


Figura 10.2

Resposta: Assim, calculando a distância de $(-3,-4)$ até a origem, temos:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Em geral temos:

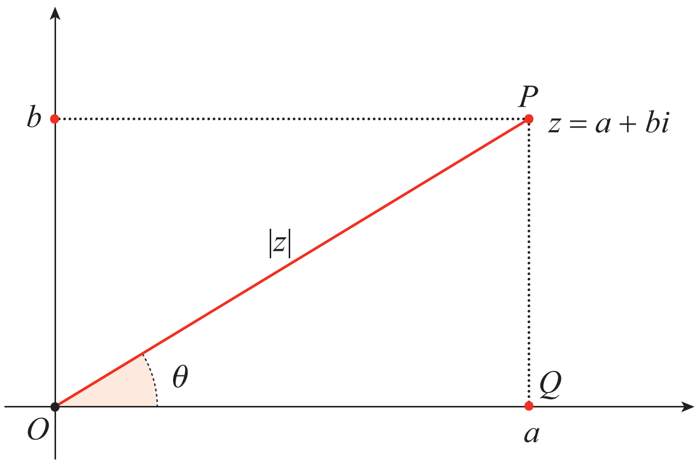


Figura 10.3

Do *Teorema de Pitágoras*, vemos que o módulo de um número complexo z é dado por $|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ainda pela figura 10.3, observando o triângulo OPQ, temos que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|}$ e $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$, isto é, $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\operatorname{sen}\theta$. Assim, $z = a + bi = |z|\cos\theta + |z|\operatorname{sen}\theta \cdot i = |z|(\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta)$.

Portanto, o argumento de z é definido como sendo o ângulo θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, determinado pelos números reais a e b. $z = |z|(\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta)$ é chamada de *forma trigonométrica*, ou *forma polar*, de um número complexo. Por essa fórmula podemos reescrever o produto, a divisão e a n-ésima potência de números complexos usando adequadamente algumas propriedades da trigonometria:

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$;
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$;
- $z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\cdot\operatorname{sen}(n\theta)]$.

Exercícios resolvidos

3) Determine o módulo, o argumento e a forma trigonométrica do número complexo $z = \sqrt{3} + i$.

Resolução:

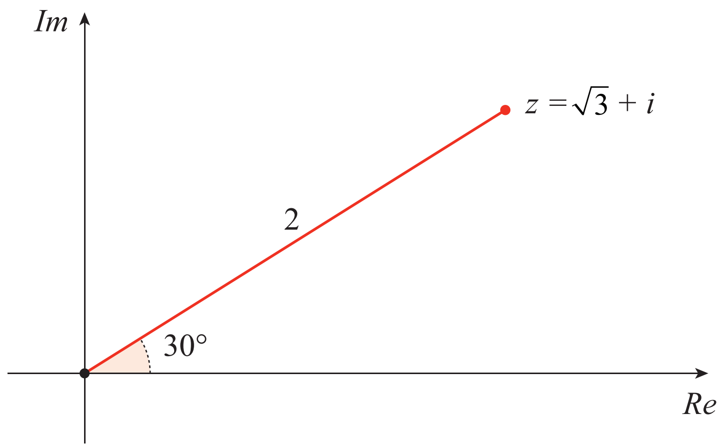


Figura 10.4

$$z = \sqrt{3} + i \Rightarrow a = \sqrt{3} \text{ e } b = 1.$$

Módulo de z:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Portanto $|z| = 2$.

Argumento de z: $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 30° = \dfrac{\pi}{6}\text{rad}.$

Resposta: O módulo de z é $|z| = 2$, o argumento de z é $\theta = 30° = \dfrac{\pi}{6}\text{rad}$ e a forma trigonométrica de z é

$$z = 2(\cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30°).$$

3) Escreva a forma trigonométrica do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Resolução:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Portanto, $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 60° = \dfrac{\pi}{3}\text{rad}.$

Resposta: Assim, a forma trigonométrica fica:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right).$$

4) Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$, calcule z^4.

Resolução: Escrevendo o número z na forma trigonométrica, temos:

$$z = 2(\cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30°).$$

Logo:

$$\begin{aligned} z^4 &= 2^4 \cdot (\cos(4 \cdot 30°) + i \cdot \operatorname{sen}(4 \cdot 30°)) \\ &= 16 \cdot (\cos 120° + i \cdot \operatorname{sen} 120°) \\ &= 16 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -8 + 8\sqrt{3} \cdot i. \end{aligned}$$

Resposta: Portanto, $z^4 = -8 + 8\sqrt{3} \cdot i$.

10.7 Forma exponencial (ou de Euler) de um número complexo

Para $z = a + bi = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$, em que θ é dado em radianos, a forma exponencial de representá-lo é : $z = |z| e^{i\theta}$ $(e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$.

Tarefa

1) Faça uma pesquisa sobre tal igualdade detalhando sua história.

Observação: assim, temos três formas de se representar um número complexo:

- Forma algébrica: $z = a + bi$;
- Forma trigonométrica: $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$;
- Forma exponencial: $z = |z| e^{i\theta}$.

Exercícios resolvidos

6) Existe um número real x, tal que o quociente $\frac{x-i}{1-3i}$ é um número imaginário puro. Determine o oposto de x.

Resolução:

$$\begin{aligned}\frac{x-i}{1-3i} &= \frac{x-i}{1-3i}\cdot\frac{1+3i}{1+3i}\\ &= \frac{x-i+3xi-3i^2}{1-9i^2}\\ &= \frac{x+3+(3x-1)i}{10}\\ &= \frac{x+3}{10}+\frac{(3x-1)i}{10}.\end{aligned}$$

Que é um número imaginário puro se, e somente se,

$$\frac{x+3}{10}=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3.$$

Resposta: O oposto de x vale $-(-3)=3$.

7) Sendo $z_1=\frac{1}{3}-\frac{2}{5}i$ e $z_2=-\frac{2}{3}-\frac{3}{5}i$, faça o que se pede.

a) Determine a representação trigonométrica para $z_1-\overline{z}_2$.

b) Qual é maior, $(1-i)^{20}$ ou -2^{10}?

Resolução:

a) Seja $z=z_1-\overline{z}_2$. Então:

$$\begin{aligned}z=z_1-\overline{z}_2 &= \frac{1}{3}-\frac{2}{5}i-\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}i\right)\\ &= \frac{1}{3}-\frac{2}{5}i+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}i\\ &= 1-i\ .\end{aligned}$$

Para a forma trigonométrica de um número complexo precisamos calcular o módulo e o argumento desse número. Portanto, para $z=1-i$, temos:

Módulo de z: $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Argumento de z: $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Isto é, $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$ com θ no quarto quadrante (seno negativo e cosseno positivo); então $\theta = 315°$.

Resposta: Portanto, a forma trigonométrica de z é dada por $z = (1-i) = \sqrt{2}\cdot(\cos 315° + i\cdot \operatorname{sen} 315°)$.

b) Para determinar a relação entre os números $(1-i)^{20}$ e -2^{10}, devemos determinar o valor de $(1-i)^{20}$; para isto basta tomarmos a forma trigonométrica de $1-i$ e aplicarmos a potência: $1-i = \sqrt{2}\cdot(\cos 315° + i\cdot \operatorname{sen} 315°)$.

Então,

$$\begin{aligned}(1-i)^{20} &= (\sqrt{2})^{20}\cdot[\cos(20\cdot 315°) + i\cdot \operatorname{sen}(20\cdot 315°)]\\ &= 2^{10}\cdot(\cos 6300° + i\cdot \operatorname{sen} 6300°)\\ &= 2^{10}\cdot[\cos(17\cdot 360° + 180°) + i\cdot \operatorname{sen}(17\cdot 360° + 180°)]\\ &= 2^{10}\cdot(\cos 180° + i\cdot \operatorname{sen} 180°)\\ &= 2^{10}\cdot(-1+0) = -2^{10}.\end{aligned}$$

Resposta: Portanto, $(1-i)^{20} = -2^{10}$.

Nota: Lembramos que só faz sentido comparar dois números complexos em termos de módulo, uma vez que não foi definida uma relação de ordem no conjunto dos números complexos.

Exercícios propostos

1) Sendo que $(a+3i)(1+2i) = b+5i$, determine o valor de $a+b$.

2) Determine o conjugado de $z = (2+3i)(5-2i)$.

3) Qual o valor para $(1+i)^{35}$?

4) Determine todas as raízes (reais e complexas) da equação $x^5 + 32 = 0$.

5) Determine o número real positivo k que torna o módulo do número complexo $z = \dfrac{k-i}{3+i}$ igual a $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

6) Sendo $u = 3+2i$ e $v = 1+i$, determine o valor de $|u+v|$.

7) Qual o valor para a fração $\dfrac{i^3 - i^2 + i^{17} - i^{35}}{i^{16} - i^{13} + i^{30}}$?

8) Verifique a igualdade $e^{i\pi} - 1 = 0$.

9) Determine a forma trigonométrica do número $z = \dfrac{-1-i}{i}$.

10) Seja z um número complexo de módulo 1 e de argumento θ. Se n é um número inteiro positivo, determine o valor para $z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

11) Seja $z = \cos t + i \cdot \text{sen}t$ com $0 < t < 2\pi$. Mostre que

$$\frac{1+z}{1-z} = i \cdot \text{cotg}\frac{t}{2}.$$

12) Os números complexos z e w têm $\dfrac{5\pi}{12}$ e $\dfrac{\pi}{3}$ como argumento, respectivamente. Encontre u e v reais tais que $zw = u + v$, sabendo que $|zw| = 10$.

13) Mostre que $\dfrac{z}{1+i} + \dfrac{\overline{z}}{1-i}$ é real $\forall z \in \mathbb{C}$.

14) Determine todas as 5 raízes da equação $x^5 - 1 = 0$. (Uma é real e as outras quatro são complexas.)

Capítulo 11

Coletânea de Problemas

Capítulo 11

Coletânea de Problemas

O objetivo deste capítulo é apresentar uma coletânea de problemas relativos aos conteúdos dos capítulos anteriores. Quanto mais problemas você resolver, mais caminhos encontrará para trabalhar os conteúdos com seus alunos.

1) O 7º termo de uma PG é 8 e a razão é -2. Determine a soma dos três primeiros termos dessa progressão.

2) Calcule três números em PG sabendo que a soma é 26 e que o maior excede a soma dos outros dois em uma dezena.

3) Em uma progressão geométrica de seis termos positivos, a soma de a_2 e a_4 é 6; a soma de a_4 e a_6 é 12. Qual é a razão dessa PG?

4) Em uma PA crescente de cinco termos, a_5 e a_1 são as raízes da equação $x^2 - 12x - 64 = 0$. Calcule a razão dessa PA.

5) Em uma PG, o terceiro termo é $\frac{16}{9}$ e o sétimo 144. Qual é o quinto termo?

6) Determine quatro números em PA, sabendo que sua soma é 4 e seu produto é 105.

7) A soma de dois números naturais é 29. Determine o mínimo valor para a soma de seus quadrados.

8) Sabendo que $a + b = 8$ e $\log_2(a - b) = m$, calcule $\log_2(a^2 - b^2)$ em função de m.

9) Considere um número racional $\frac{m}{n}$, em que m e n são primos entre si. Sob que condições esse número admite uma representação decimal finita? Quando a representação é uma dízima periódica simples?

10) Com um lápis cuja ponta tem 0,02 mm de espessura, deseja-se traçar o gráfico da função $f(x)=2^x$. Até que distância à esquerda do eixo vertical pode-se ir sem que o gráfico atinja o eixo horizontal?

11) Um menino joga três dados e soma os números que aparecem nas faces voltadas para cima. Qual o número dos diferentes resultados dessa adição?

12) Uma linha ferroviária tem dezesseis estações. Quantos tipos de bilhete devem ser impressos, se cada bilhete deve registrar a estação de origem e a de destino?

13) Determine o número de triângulos determinados por sete pontos distintos sobre uma reta, e quatro sobre uma outra reta paralela à primeira.

14) Em um veículo viajam sete pessoas, das quais duas são motoristas. De quantos modos é possível acomodá-las, sabendo que no banco dianteiro há três lugares e no traseiro quatro?

15) De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro 8×8, de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes?

16) Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitando as ordens de preferência?

17) Quantos números de três algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25?

18) Determine o domínio da função: $f(x)=\log_{x+1}(2x^2-5x+2)$.

19) Resolva as seguintes equações.

a) $\log_4(3x+2)=\log_4(2x+5)$

b) $\log_3\left[\log_2(3x^2-5x+2)\right]=\log_3 2$

c) $\log x^2 = \log\left(x + \frac{11}{10}\right) + 1$

d) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 2$

e) $\log_x(2x+3) = 2$

f) $\log_3(2x-1)^2 - \log_3(x-1)^2 = 2$

g) $\sqrt{\log x} = \log\sqrt{x}$

h) $\log(2x+1) + \log(4x+3) = \log(2x^2 - x - 2)$

i) $9x^{\log x} = x^3$

j) $\log_3(x+3) - \log_{\frac{1}{3}}(x-6) = \log_3(2x-5)$

k) $(\log_2 x)^2 - 9\log_8 x = 4$

l) $\log_x 2 + \log_2 x = 2$

m) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$

n) $\log_2(2\text{sen}x - 1) = \log_4(3\text{sen}^2 x - 4\text{sen}x + 2)$

20) Resolva as inequações.

a) $\log_3(3x+2) < 2$

b) $(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 > 0$

c) $|\log x| < 1$

d) $\log(x^2 + 3x + 3) > 0$

e) $2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} < \frac{3}{4}$

f) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$

g) $2^x > 128$

h) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27}$

21) Simplifique a expressão:

$$\log_{\sqrt[3]{9}}\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right) - \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}(\sqrt{8}) + \log_{\sqrt[3]{100}}(\sqrt[6]{0,1}).$$

22) Calcule o valor de x na equação $10^{2x} = 625$, sabendo que $\log 5 = 0,699$.

23) Em uma progressão aritmética o primeiro termo é $\frac{1+n}{n}$ e a soma dos termos é $\frac{1+3n}{n}$. Encontre a razão e o último termo.

24) Um fabricante de móveis produz cadeiras e mesas, cada uma das quais deve passar por um processo de montagem e por um processo de acabamento. Os tempos exigidos por esses processos são dados (em horas) pela matriz

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to \text{Cadeira} \\ \to \text{Mesa} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{Estágio de} & \text{Estágio de} \\ \text{montagem} & \text{acabamento} \end{array} & \end{array}$$

O fabricante tem uma fábrica em São Bento e outra em Rio Negro. Os preços por hora de cada um dos processos são dados (em reais) pela matriz:

$$B = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to \text{Estágio de montagem} \\ \to \text{Estágio de acabamento} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{São Bento} & \text{Rio Negro} \end{array} & \end{array}$$

O que os elementos do produto matricial AB representam para o fabricante?

25) Um projeto de pesquisa sobre dietas analisa adultos e crianças de ambos os sexos. A composição dos participantes no projeto é dada pela matriz a seguir:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to \text{Masculino} \\ \to \text{Feminino} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{Adultos} & \text{Crianças} \end{array} & \end{array}$$

O número de gramas diários de proteínas, gorduras e carboidratos consumidos por cada criança e adulto é dado pela matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Adultos} \\ \rightarrow \text{Crianças} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Proteínas} & \text{Gorduras} & \text{Carboidratos} \end{matrix}$$

a) Quantos gramas de proteínas são consumidos diariamente pelos homens no projeto?

b) Quantos gramas de gordura são consumidos diariamente pelas mulheres no projeto?

26) Qual a soma dos valores reais de x tais que

$$x^2 + x + 1 = \frac{156}{x^2 + x}?$$

27) Para quantos valores de x existe um triângulo acutângulo de lados 12, 10 e x?

28) Determine os três últimos algarismos de 7^{9999}.

29) Considere uma progressão geométrica x, y e z de razão r, com $x \neq y$ e $x \neq 0$. Se x, $2y$ e $3z$ formam uma progressão aritmética, qual o valor de r?

30) Calcule o valor de S, sendo

$$S = \log_4 2 + \log_4 2^3 + \log_4 2^5 + \cdots + \log_4 2^{999}.$$

31) Se $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = 0$, qual o valor de x?

32) Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^8$.

33) A soma de dois logaritmos na base 9 é $\frac{1}{2}$. Determine o produto desses dois números.

34) Qual o valor de $(i^2 + i)^2$?

35) Sabendo que $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$ é real positivo, $n>0$, qual é o menor valor inteiro n?

36) Um lote é constituído de 12 peças perfeitas e 5 defeituosas. Feita uma retirada de 3 peças, qual a probabilidade de serem duas perfeitas e uma defeituosa?

37) Uma urna contém três bolas; uma verde, uma azul e uma branca. Tira-se uma bola ao acaso, registra-se a cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se essa experiência mais duas vezes. Qual a probabilidade de serem retiradas três cores diferentes?

38) Considerando um polígono regular de n lados, $n \geq 4$, e tomando-se ao acaso uma diagonal, qual a probabilidade de que ela passe pelo centro?

39) Num pátio há galinhas e coelhos, num total de 50 animais e 140 pés. Qual a probabilidade de se considerar ao acaso um desses animais e o mesmo ser coelho?

40) Num jogo com dados, o jogador X ganha se tirar, no seu lance, um número de pontos maior ou igual ao do lance do jogador Y. Qual a probabilidade de X ganhar?

41) Em uma reunião de 24 homens, 2 são casados e os outros solteiros, 20 são brasileiros e torcem pelo Flamengo. Qual a probabilidade de, entrevistando um deles ao acaso, entrevistar um brasileiro, solteiro e torcedor do Flamengo?

42) Determine o módulo e o argumento principal do númerocomplexo $z=\frac{1+2i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$.

43) Quantos são os pares de inteiros positivos (x, y) que satisfazem a equação $2x+3y=101$?

44) Quantos são os números inteiros que satisfazem $3<\sqrt{x}<7$?

45) Seja f uma função definida para todo x real, satisfazendo as condições:

$$f(3)=2; \qquad f(x+3)=f(x)\cdot f(3).$$

Determine o valor de $f(-3)$.

46) Qual o número de pares (x, y) de números inteiros que satisfazem a equação $x+y+xy=120$?

47) Nos extremos de um diâmetro de um círculo, escreve-se o número 1 (primeiro passo). A seguir, cada semicírculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios escreve-se a soma dos números que estão nos extremos do semicírculo (segundo passo). A seguir, cada quarto de círculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios coloca-se a soma dos números que estão nos extremos de cada arco (terceiro passo). Procede-se assim, sucessivamente: sempre cada arco é dividido ao meio e em seu ponto médio é escrita a soma dos números que estão em seus extremos. Determinar a soma de todos os números escritos após 1999 passos.

48) Se seu salário sobe 26% e os preços sobem 20%, de quanto aumenta seu poder aquisitivo?

49) Classifique cada afirmação abaixo em Verdadeira ou Falsa:

( ) No sistema de numeração decimal existem 2240 números ímpares formados por quatro algarismos distintos.

( ) Com os elementos do conjunto $\{2,4,5,6,7,8\}$ podem-se formar 120 números de três algarismo distintos começados por um algarismo par.

( ) Existem 3024 números entre 10000 e 20000 formados com algarismos distintos de 1 a 9.

( ) Com os algarismos de 1 a 9, sem repeti-los, podem-se formar 7200 números com quatro algarismos pares e dois ímpares.

( ) Listando-se, em ordem crescente, todos os números de seis algarismos distintos, formados com os elementos do conjunto $\{1,4,5,6,7,8\}$, o número 768415 ocupa o 514° lugar.

50) Seja A um conjunto de quatro elementos. Qual o número de funções $f : A \to A$ tais que a equação $f(x) = x$ não tem solução?

51) Determine o valor da expressão

$$(1+\text{sen } 2)^2 - 5(1+\text{sen } 2)^4 + 10(1+\text{sen } 2)^3 - 10(1+\text{sen } 2)^2 + 5(1+\text{sen } 2) - 1$$

52) A soma de dois números complexos é 1 e seu produto também é 1. Qual a soma dos quadrados dos números?

53) Calcule o número natural n que satisfaz a equação $(2i)^n + (1+i)^{2n} = -16i$.

54) Qual o produto dos números complexos $z = x + yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y = 2x - 1$ no plano complexo?

55) Se $a + bi$ é raiz do polinômio $P(x)$ de grau n, mostre que $a - bi$ também é raiz de $P(x)$.

56) No triângulo

1			
3	5		
7	9	11	
13	15	17	19
...	...	...	...

determine:

a) o primeiro elemento da 31ª linha.

b) a soma dos elementos da 31ª linha.

57) Determine o 1993° algarismo após a vírgula na representação decimal de $\frac{3}{101}$.

58) Determine a razão da PA na qual, para qualquer valor de n, a soma dos n primeiros termos vale $S_n = 3n^2 + n$.

59) Calcule a soma de todos os inteiros entre 20 e 200 que, divididos por 7, dão resto 5.

60) Calcule o valor da soma de n parcelas:

$$S = 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ algarismos } 1}.$$

61) A soma de três números em PG é 19. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma PA. Calcule os números.

62) Aumentos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um único aumento de quanto?

63) Em uma pirâmide com 12 cm de altura, tendo como base um quadrado de lado medindo 10 cm, qual é a área lateral?

64) O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é um quarto da altura da lata e cujo diâmetro é um terço do diâmetro da base da lata. Qual é o número de potes necessários?

65) Qual é a altura de uma pirâmide hexagonal regular de volume unitário e raio da base igual a $\sqrt{3}$ cm?

66) Qual é o volume da esfera inscrita num cilindro equilátero de área lateral igual a 36π cm^2 ?

67) Em uma esfera de raio R está inscrito um cubo. Quanto mede sua aresta?

68) Determine o polinômio $P(x)$ do terceiro grau que apresenta uma raiz nula e satisfaz a condição $P(x-1) = P(x) + (2x)^2$, para todo x real. Com o auxílio deste polinômio, calcule o valor da soma $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$.

69) Determine os valores A e B tais que $\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$.

70) Qual é o resto da divisão de $P(x) = (x+1)^{100}$ por $g(x) = x+1$?

71) Se x é um arco do terceiro quadrante e $\operatorname{tg} x = 1$, qual o valor de $\cos x$?

72) Determine o conjunto de todos os valores x para os quais é possível definir $y = \text{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

73) Calcule o domínio da função $f(x) = \sqrt{2\,\text{sen}\,x - 1}$ para $0 \leq x < 2\pi$.

74) Se $f(x) = \dfrac{1}{2}\sec x + \sqrt{3}\sec\left(\dfrac{x}{2}\right)$, qual é o valor de $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$?

75) Determine o período e a imagem da função

$$g(x) = -3 + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

76) Se $\cos x = \dfrac{3}{5}$ e $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, qual é o valor de $\text{tg}\,x$?

77) Considere um quadrado de lado 1, diagonal d e perímetro p. Qual é a função $d(p)$ que define a diagonal em termos do perímetro?

78) A medida em graus do ângulo interno de um polígono regular é um número inteiro. Qual é o número de polígonos regulares não semelhantes que têm essa propriedade?

79) De uma placa circular de raio 3, recorta-se um triângulo retângulo de maior área possível. Qual é a área do restante da placa?

80) Em um trapézio a soma das bases é 24 cm, a altura é igual à metade da base maior e a base menor é igual à altura. Qual é a área do trapézio?

81) Os pontos de intersecção das curvas $xy = 12$ e $x^2 + y^2 = 25$ são ligados e formam uma figura. Qual é a figura?

82) Dados os pontos $A(5,5)$, $B(2,1)$ e $C(0,k)$, qual o valor de k que torna $\overline{AC} + \overline{BC}$ mínimo?

83) Determine x para que $z = (x+i)(3-2i)$ seja um número real.

84) Calcule $|z|^2$ sabendo que $z + 2\overline{z} = 3 + 3i$.

85) Determine x real para que $\dfrac{2 + xi}{1 - i}$ seja:

a) real.

b) imaginário puro.

86) Determine os números complexos que têm o quadrado igual ao conjugado.

87) Calcule $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{n-1} + i^n$.

88) Determine o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que:

a) $z = \overline{z}$.

b) $z \cdot \overline{z} = 1$.

c) z^2 seja um imaginário puro.

d) $|z + i| \leq 1$.

89) Resolva a equação $2\overline{z} - z = 1 - 6i$.

90) Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos nos quais o algarismo 7 figura?

91) Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se os quadrantes com uma linha de fronteira não podem ter a mesma cor?

92) Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando este marca 12h12min.

93) Somando-se 14 ao denominador de uma fração, esta se torna igual a $\dfrac{1}{2}$. Somando-se 13 ao numerador da fração dada, esta se torna igual a 1. Que fração é essa?

94) Um copo cheio de água pesa 325 gramas. Se jogarmos metade da água fora, seu peso cai para 180 gramas. Determine o peso do copo vazio.

95) Determine os valores naturais de n para os quais $(1-\sqrt{3}i)^n$ é real.

96) Resolva a equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ sabendo que uma de suas raízes é $1-i$.

97) Determine os valores das constantes a, b e c tais que

$$\frac{2x+1}{x^3-x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

para todo x real, tal que $x \neq 1$, $x \neq 0$ e $x \neq -1$.

98) Encontre um polinômio $p(x)$ de grau mínimo tal que $p(0) = 1$, $p(1) = 2+i$ e $p(i) = -1$.

99) Determine todas as soluções da equação $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

100) Calcule o valor de $A = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} \cdot \cos\frac{5\pi}{12}$.

101) De quantos modos o número 1440 pode ser decomposto num produto de dois números inteiros positivos?

102) Os números 2, x, y, 1458 formam, nesta ordem, uma PG. Determine o valor de $x + y$.

103) No lançamento de um moeda 5 vezes, quais os possíveis resultados? Qual a probabilidade de se obter exatamente 2 coroas? E de a primeira e a última serem cara?

104) Considere a Figura 11.1. Girando a flecha, quais as probabilidades de se ter, ao fim dos giros, a flecha em 1, 2, 3 e 4?

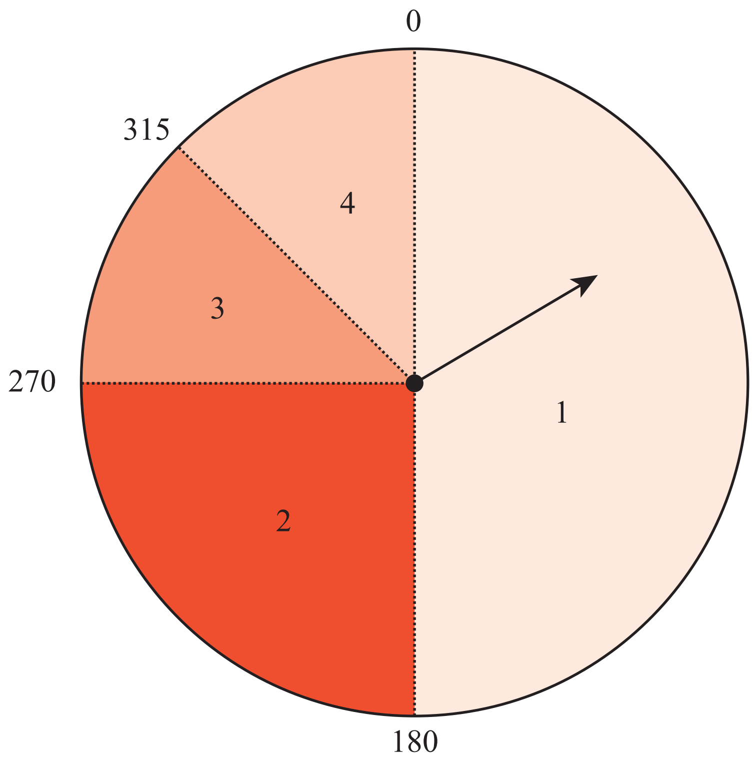


Figura 11.1

105) Considere o lançamento de dois dados. Sejam os eventos:

- A : "soma igual a 8"
- B : "ambos pares"

Determine as probabilidades $P(A)$ e $P(B)$. Qual o significado para $P(A \mid B)$? Determine sua probabilidade de ocorrência.

106) Se B_1 e B_2 são dois eventos quaisquer, o que podemos afirmar sobre esses eventos se $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Como fica a probabilidade $P(B_1 \cap B_2)$?

107) (Bayes) Uma urna A contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis, enquanto outra urna, urna B, contém 2 fichas vermelhas e 8 azuis. Retirou-se uma ficha vermelha, qual a probabilidade de ela ter sido retirada da urna A?

Referências

COLEÇÃO FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001. v. 1, 2, 3. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: SBM.

REVISTA EUREKA! Rio de Janeiro: OBM/SBM.