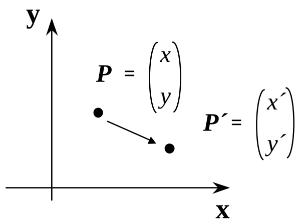
Transformações Geométricas

por
Marcelo Gattass
Departamento de Informática
PUC-Rio

(adaptado por Luiz Fernando Martha para a disciplina CIV2801 - Fundamentos de Computação Gráfica Aplicada)

Transformações Lineares $R^2 \rightarrow R^2$

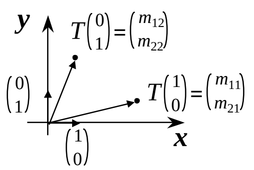


$$\boxed{T(a_1 \boldsymbol{P}_1 + a_2 \boldsymbol{P}_2) = a_1 T(\boldsymbol{P}_1) + a_2 T(\boldsymbol{P}_2)}$$

Mostre que:

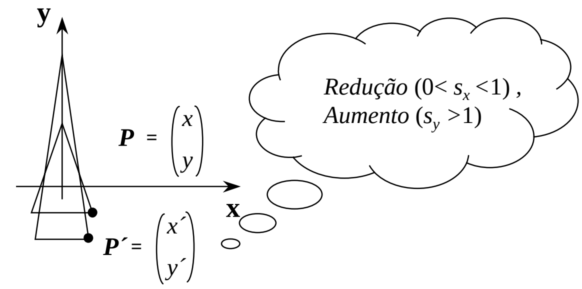
A) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

B)



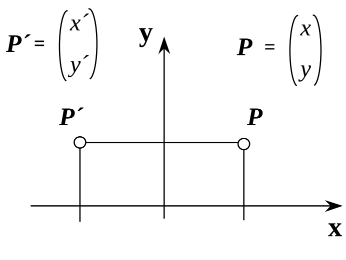
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares (escala)



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

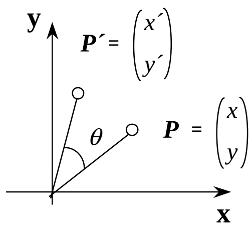
Transformações Lineares (espelhamento)



$x' = -1.x$
$y' = y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares (rotação)

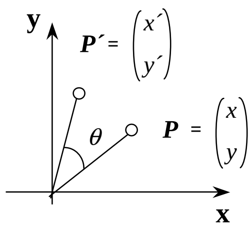


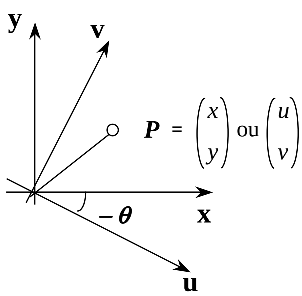
$x' = x.\cos\theta - y.\mathrm{sen}\,\theta$

$y' = x.\mathrm{sen}\,\theta + y.\cos\theta$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares (rotação .vs. mudança de base)



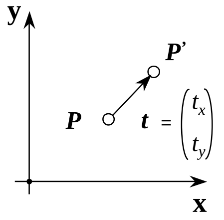


$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A rotação de um ponto de θ tem o mesmo efeito da mudança de base por rotação de -θ.
A matriz que implementa a mudança de base por rotação tem em cada linha as componentes dos vetores da nova base descritos na base antiga.

Transformações Geométricas (Translação)

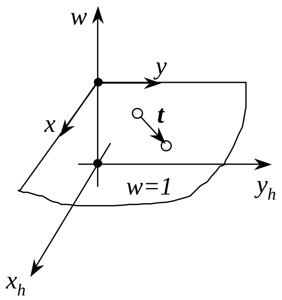


$$\mathbf{P'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ ⇦ *Não pode ser escrito na forma* ⊠

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$ ⇦ *Ruim para implementação* ⊠

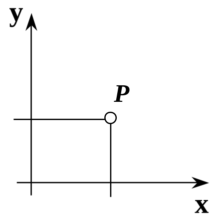
Vantagens das coordenadas homogêneas (Translação)



$$\mathbf{P'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Translação

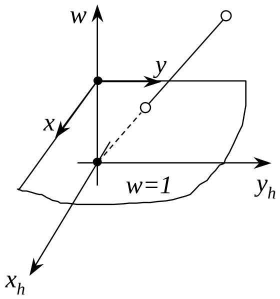
Coordenadas homogêneas



$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ w \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ w \end{bmatrix}$$

$x = x_h/w$

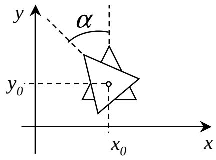
$y = y_h/w$ $\quad w>0$

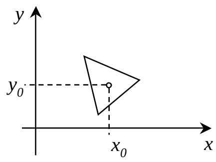


Ex.:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Concatenação

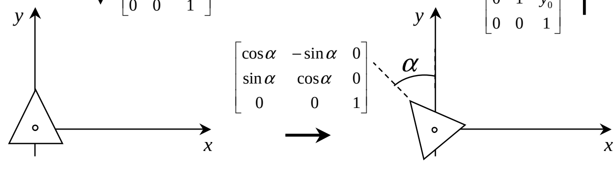




$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

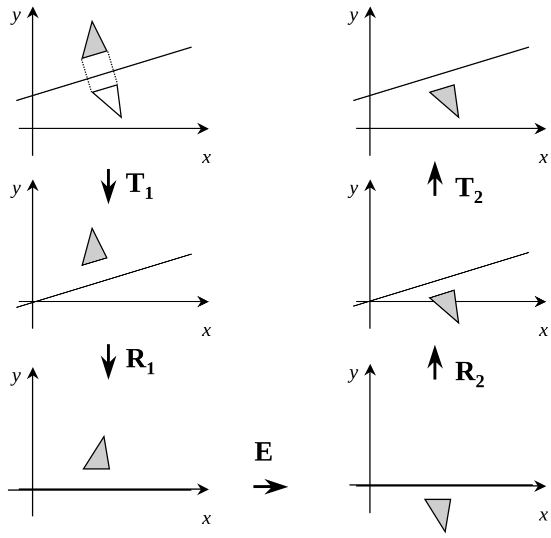
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



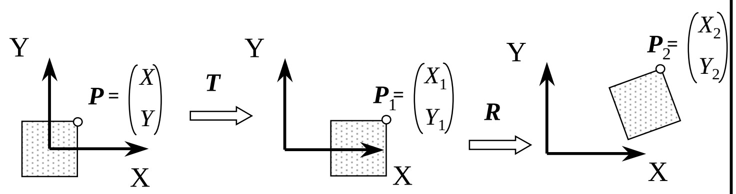
$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Concatenação de Transformações

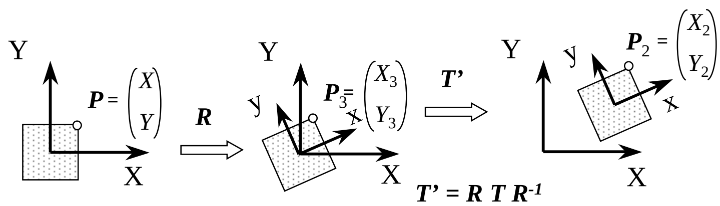


$$P' = T_2\, R_2\, E\, R_1\, T_1\, P$$

Composição com sistema local móvel



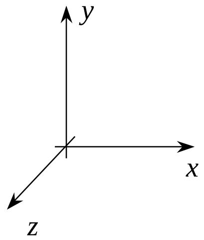
$P_1 = T\,P$ e $P_2 = R\,P_1$ $\Rightarrow$ $P_2 = R\,T\,P$



$T' = R\,T\,R^{-1}$

$P_3 = R\,P$ e $P_2 = T'\,P_3 \Rightarrow P_2 = R\,T\,R^{-1}\,R\,P$ *ou* $P_2 = R\,T\,P$

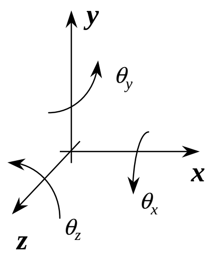
Transformações em 3D (translações e escalas)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações em 3D (Rotações)



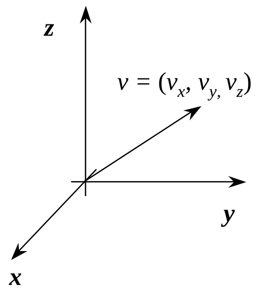
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\mathrm{sen}\,\theta_x & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_y & 0 & \mathrm{sen}\,\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_z & -\mathrm{sen}\,\theta_x & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta_x & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações em 3D
(rotação em torno de um eixo qualquer)

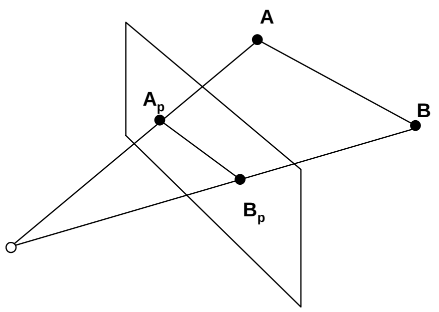
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$m_{11} = v_x^2 + \cos\theta\ (1 - v_x^2)$$
$$m_{12} = v_x v_y (1-\cos\theta\ ) - v_z \,sen\ \theta$$
$$m_{13} = v_z v_x (1-\cos\theta\ ) + v_y \,sen\ \theta$$
$$m_{21} = v_x v_y (1-\cos\theta\ ) + v_z \,sen\ \theta$$
$$m_{22} = v_y^2 + \cos\theta\ (1 - v_y^2)$$
$$m_{23} = v_y v_z (1-\cos\theta\ ) - v_x \,sen\ \theta$$
$$m_{31} = v_x v_z\ (1-\cos\theta\ ) - v_y \,sen\ \theta$$
$$m_{32} = v_y v_z (1-\cos\theta\ ) + v_x \,sen\ \theta$$
$$m_{22} = v_z^2 + \cos\theta\ (1 - v_z^2)$$

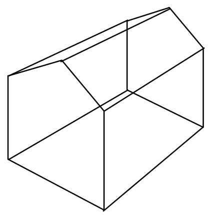
Projeções Clássicas

Projeções Planas Cônicas

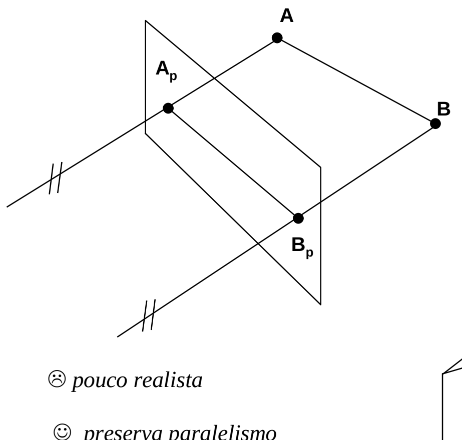


☺ *realista*

☹ *não preserva escala*
☹ *não preserva ângulos*

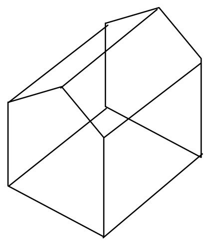


Projeções Planas Paralelas



☹ *pouco realista*

☺ *preserva paralelismo*
☺ *possui escala conhecida*

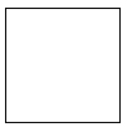


Classificação das projeções planas

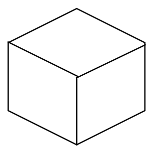
- Paralelas
  - » ortográficas **dp // n**
    - – plantas
    - – elevações
    - – iso-métrica
  - » oblíquas **dp** não é paralela a **n**
    - – cavaleiras
    - – *cabinet*
- Cônicas
  - » 1 pto de fuga
  - » 2 ptos de fuga
  - » 3 ptos de fuga

Projeções de um cubo

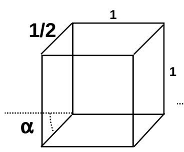
- **Paralelas**



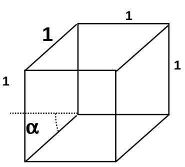
planta ou elevação



iso-métrica

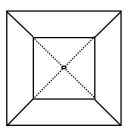


Cabinete (α=45 ou 90)

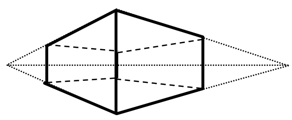


Cavaleira (α=45 ou 90)

- **Cônicas**



1 pto de fuga

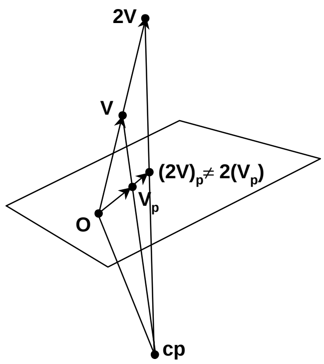


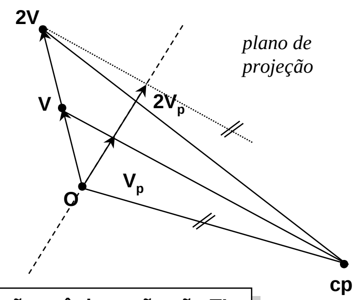
2 ptos de fuga

Projeção plana é uma transformação linear?

Ou seja:

T(P+Q) = T(P)+T(Q) e
T(αP) = αT(P) ?

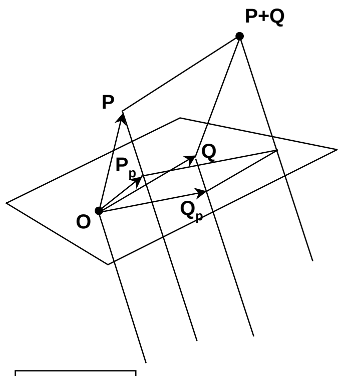




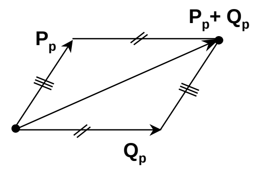
Projeções cônicas não são TL, paralelas podem ser.

Projeção plana paralela é uma transformação linear?

T(P+Q) = T(P)+T(Q) ?



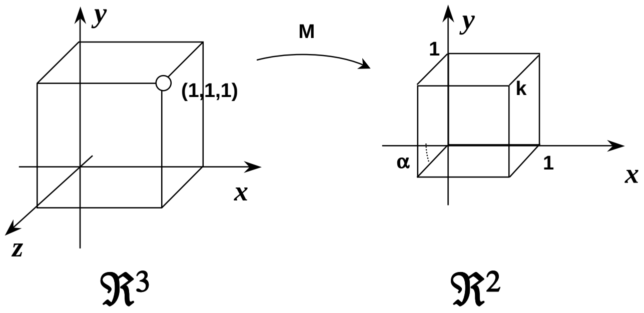
retas paralelas projetam em paralelas



T(0) = 0 ?

Projeção paralela em plano que passa pela origem é uma transformação linear

Matrizes de projeções Cavaleiras e Cabinetes



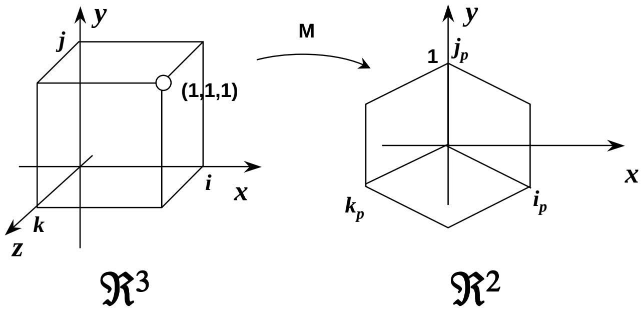
T(1,0,0) = (1,0)

T(0,1,0) = (0,1)

T(0,0,1) = (-k cos α, -k sin α)

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -k.\cos(\alpha) \\ 0 & 1 & -k.\sin(\alpha) \end{vmatrix}$$

Matrizes de projeções pseudo-isométricas



T(1,0,0) = (cos 30 ,-sin 30)

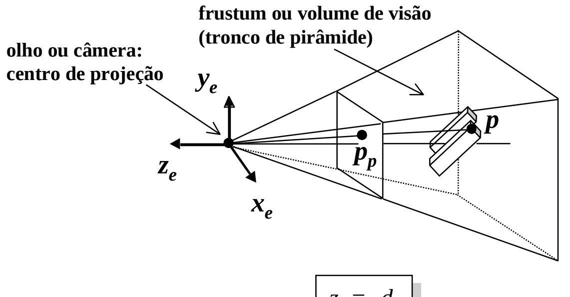
T(0,1,0) = (0,1)

T(0,0,1) = (-cos 30, -sin 30)

$$M = \begin{vmatrix} \cos 30 & 0 & -\cos 30 \\ -\sin 30 & 1 & -\sin 30 \end{vmatrix}$$

Projeções Cônicas

Projeção cônica simples



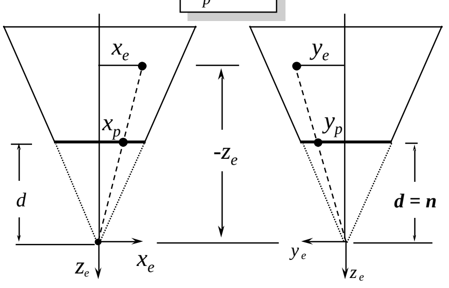
$$p = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix}$$

$$p_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ -d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{z_p = -d}$$

$$\frac{x_p}{x_e} = \frac{d}{-z_e}$$

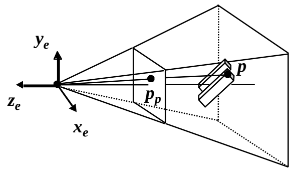
$$\boxed{x_p = \frac{d}{-z_e}\, x_e}$$



$$\frac{y_p}{y_e} = \frac{d}{-z_e}$$

$$\boxed{y_p = \frac{d}{-z_e}\, y_e}$$

Projeção cônica simples via coordenadas homogêneas



$$x_p = \frac{d}{-z_e}\, x_e$$

$$y_p = \frac{d}{-z_e}\, y_e$$

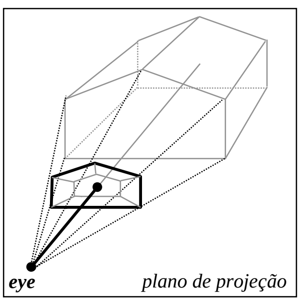
$$z_p = -d$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{[\,\boldsymbol{P}\,]} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\,x_e \\ d\,y_e \\ d\,z_e \\ -z_e \end{bmatrix} \xrightarrow{\div\, w} \begin{bmatrix} (d/-z_e)\,x_e \\ (d/-z_e)\,y_e \\ -d \\ 1 \end{bmatrix}$$

$w = -z_e$

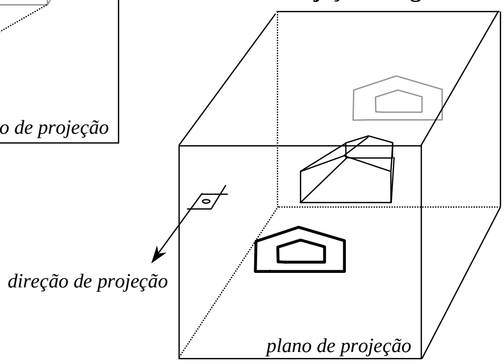
Simplificação da projeção cônica: distorção do frustum de visão

Projeção cônica



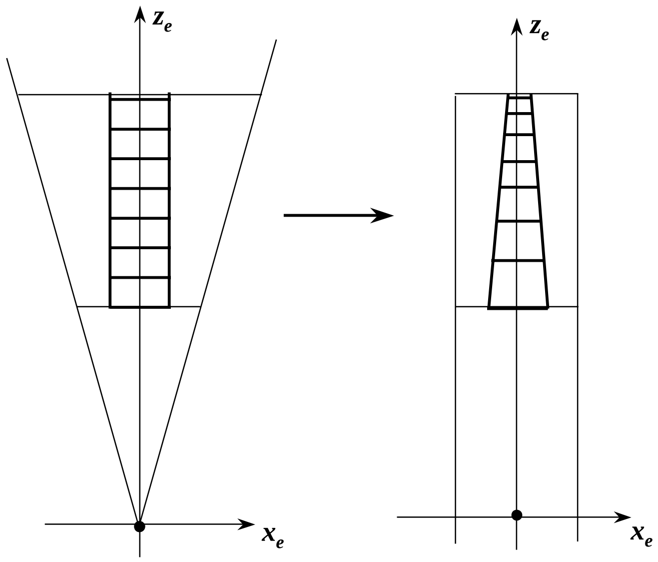
É muito mais simples implementar uma projeção ortográfica do que uma projeção cônica.

Projeção ortográfica



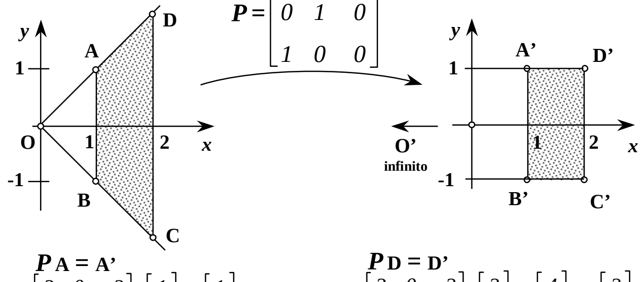
Efeito de profundidade

Como seria possível transformar a projeção cônica em uma projeção ortográfica considerando efeito de profundidade?



Solução: coordenadas homogêneas (exemplo 2D)

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$\boldsymbol{P}$ A = A'

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ☺$$

$\boldsymbol{P}$ D = D'

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ☺$$

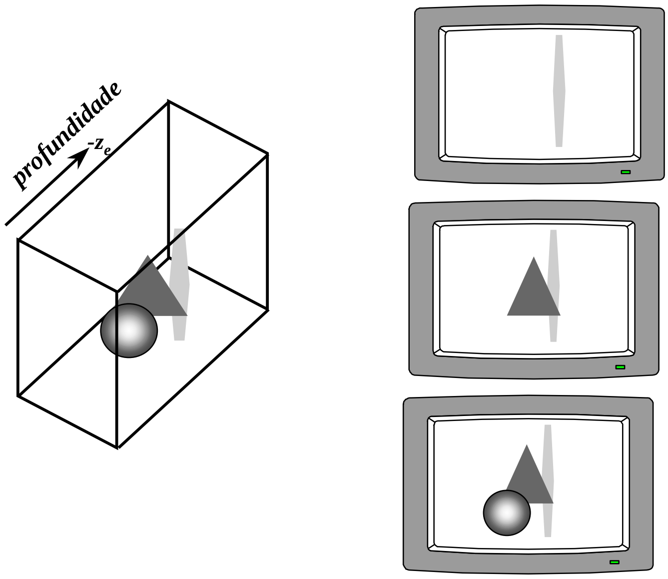
$\boldsymbol{P}$ B = B'

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ☺$$

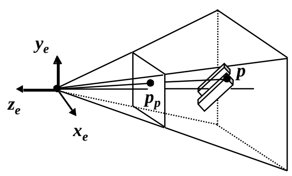
$\boldsymbol{P}$ C = C'

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ☺$$

Importância do efeito de profundidade: remoção de superfícies escondidas



Projeção cônica simples preservando profundidade em *z* e planaridade



$x_p = \frac{d}{-z_e}\, x_e$

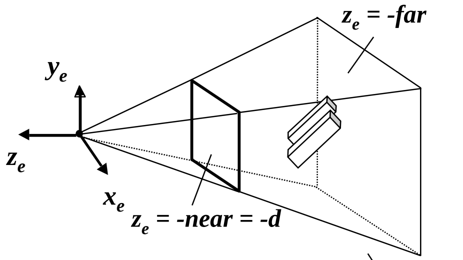
$y_p = \frac{d}{-z_e}\, y_e$

z_p = *profundade*

Condição de manutenção de planaridade de planos no espaço distorcido: $z_p = \alpha + (\beta / z_e)$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{[\,\boldsymbol{P}\,]} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\, x_e \\ d\, y_e \\ -\alpha z_e - \beta \\ \underbrace{-z_e}_{w} \end{bmatrix} \xrightarrow{\div\, w} \begin{bmatrix} (d/-z_e)\, x_e \\ (d/-z_e)\, y_e \\ \alpha + (\beta / z_e) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Distorção do frustum de visão para um paralelepípedo de mesma altura



Existem infinitos valores de α e β que satisfazem a condição de planaridade $z_p = \alpha + (\beta / z_e)$. Uma boa opção é manter a altura do frustum de visão na distorção. Isto faz o problema da projeção cônica recair no problema padrão de projeção ortográfica. Neste caso:
$\alpha = -(near + far)$
$\beta = -(near \bullet far)$

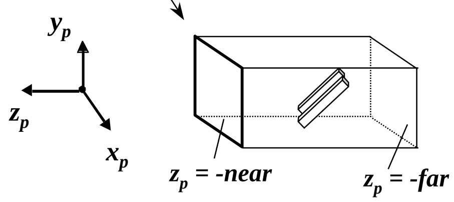
Obs.: *near* e *far* são distâncias (> 0);
d = *near* (usualmente adotado).

$$[\,\boldsymbol{P}\,] = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & n \bullet f \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

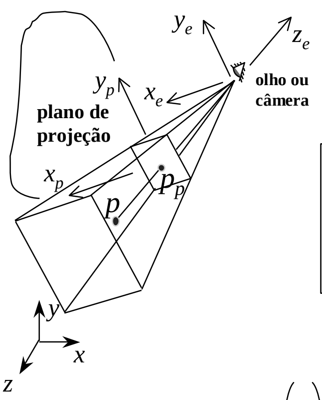
n = near

f = far

[*P*]



Geometria Projetiva e Coordenadas Homogêneas em 3D



Problema: como transformar a projeção cônica geral em uma projeção cônica simples?

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

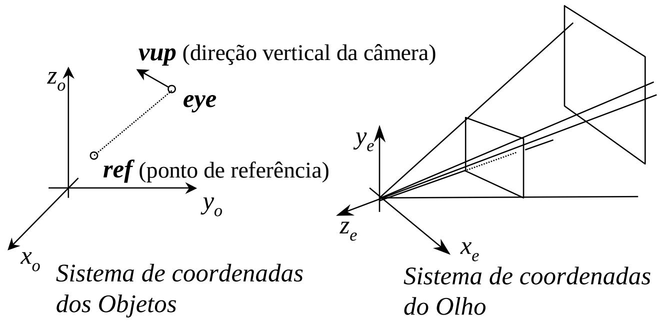
[***P***][?]

$$\boldsymbol{p_p} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_h/w \\ y_h/w \\ z_h/w \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Transformação de câmera

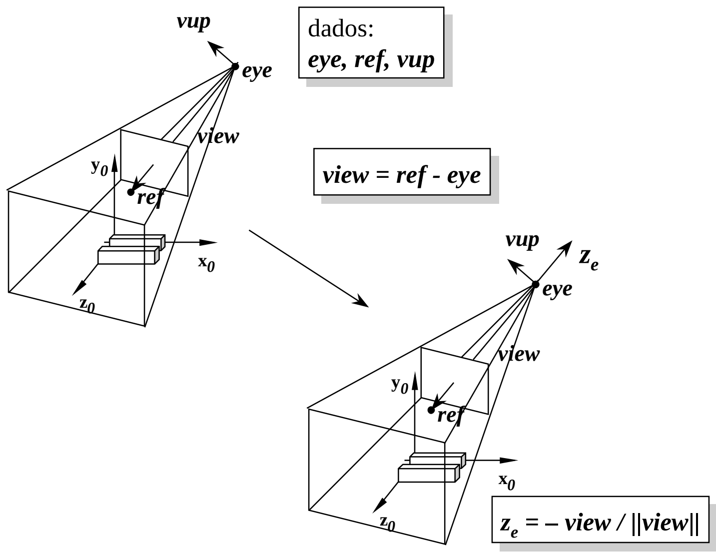
Dados: ***eye**, **ref**, **vup** (definem o sistema de coordenadas do olho)*

Determine a matriz que leva do sistema de Coordenadas dos Objetos para o sistema de Coordenadas do Olho



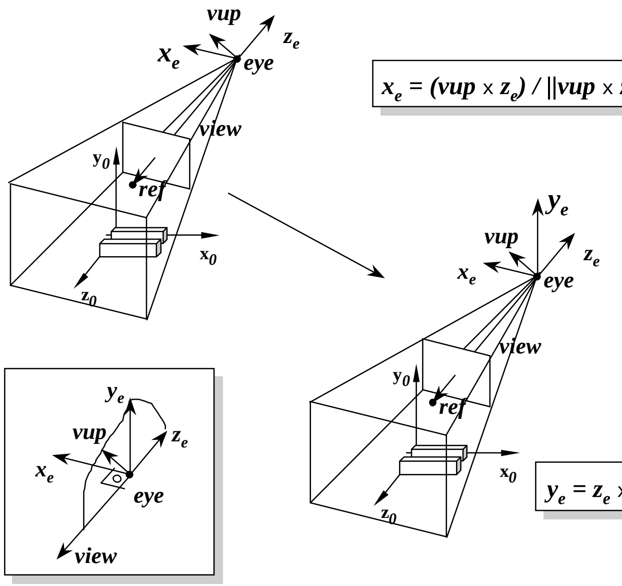

```
Parâmetros: eye( eyex, eyey, eyez )
            ref ( refx, refy, refz )
            vup( vupx, vupy, vupz )
```

Calcula o sistema – $x_e\, y_e\, z_e$



Calcula o sistema – $x_e\, y_e\, z_e$

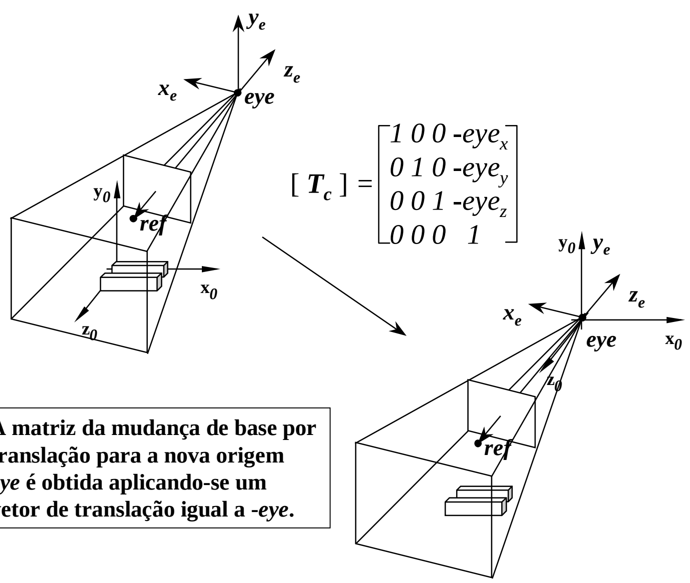
$x_e = (vup \times z_e) \,/\, \|vup \times z_e\|$



$y_e = z_e \times x_e$

Translada o *eye* para origem (mudança de base por translação)

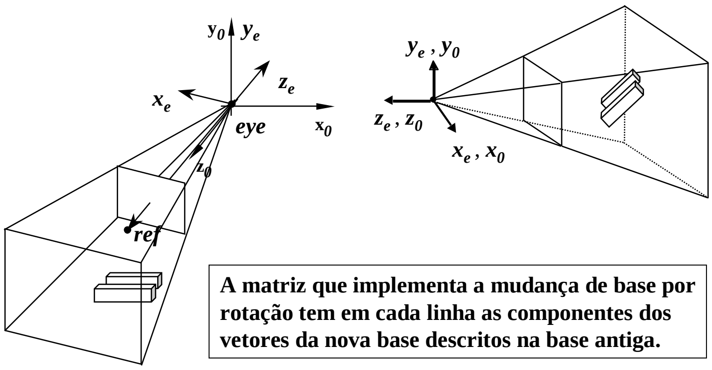
$$[\,T_c\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -eye_x \\ 0 & 1 & 0 & -eye_y \\ 0 & 0 & 1 & -eye_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A matriz da mudança de base por translação para a nova origem *eye* é obtida aplicando-se um vetor de translação igual a *-eye*.

Roda $x_e\, y_e\, z_e$ para $x_o\, y_o\, z_o$

$$[\,\boldsymbol{R}\,] = \begin{bmatrix} x_{ex} & x_{ey} & x_{ez} & 0 \\ y_{ex} & y_{ey} & y_{ez} & 0 \\ z_{ex} & z_{ey} & z_{ez} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A matriz que implementa a mudança de base por rotação tem em cada linha as componentes dos vetores da nova base descritos na base antiga.

Matriz de transformação de Câmera [*C*]

$$[\,\boldsymbol{T_c}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -eye_x \\ 0 & 1 & 0 & -eye_y \\ 0 & 0 & 1 & -eye_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\,\boldsymbol{R}\,] = \begin{bmatrix} x_{ex} & x_{ey} & x_{ez} & 0 \\ y_{ex} & y_{ey} & y_{ez} & 0 \\ z_{ex} & z_{ey} & z_{ez} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\boldsymbol{z_e} = \boldsymbol{-\,view} \,/\, \|\boldsymbol{view}\|}$

$\boxed{\boldsymbol{x_e} = (\boldsymbol{vup} \times \boldsymbol{z_e}) \,/\, \|\boldsymbol{vup} \times \boldsymbol{z_e}\|}$

$\boxed{\boldsymbol{y_e} = \boldsymbol{z_e} \times \boldsymbol{x_e}}$

$\boxed{[\,\boldsymbol{C}\,] = [\,\boldsymbol{R}\,]\,[\,\boldsymbol{T_c}\,]}$

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_h/w \\ y_h/w \\ z_h/w \end{pmatrix}$$

$\boxed{[\,\boldsymbol{P}\,][\,\boldsymbol{C}\,]}$