# Avaliação e Expressão
# de Medições e de Suas Incertezas

## INTRODUÇÃO

A Física — assim como todas as outras ciências — é baseada em observações e medições quantitativas. A partir de observações e dos resultados de medições, são formuladas teorias que podem prever os resultados de experimentos futuros. Os resultados das medições realizadas em um experimento indicam as condições em que uma teoria é satisfatória e até mesmo se ela deve ser reformulada ou não. Portanto, boa precisão das medições são fundamentais para o estabelecimento das leis físicas.

Medir é um procedimento experimental em que o valor de uma grandeza é determinado em termos do valor de uma unidade, estabelecida por um padrão. O resultado desse procedimento — a medida da grandeza — deve conter as seguintes informações: **o valor da grandeza**, **a incerteza da medição** e **a unidade**. Além disso, para que qualquer indivíduo saiba avaliar ou mesmo reproduzir uma medição, é importante qualificar o tipo da incerteza que foi indicada, bem como descrever como foi feita a medição. No Brasil, o sistema legal de unidades é o Sistema Internacional — SI (ver Apêndice A) —, e as regras para a expressão dos resultados e das incertezas nas medições são definidas pela ABNT — Associação Brasileira de Normas Técnicas — e pelo INMETRO — Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial[1]. Neste texto, é apresentado um resumo dessa terminologia, adaptada para ser utilizada em um laboratório de ensino.

## RESULTADO E INCERTEZA DE UMA MEDIÇÃO

Toda medição está sujeita a incertezas que podem ser devidas ao processo de medição, aos equipamentos utilizados, à influência de variáveis que não estão sendo medidas e, também, ao operador. É importante expressar o resultado de uma medição de forma que outras pessoas o entendam e saibam com que confiança o resultado foi obtido.

---

[1] *Guia para Expressão da Incerteza de Medição*, 3ª Ed. Brasileira, ABNT, INMETRO, Rio de Janeiro, 2003.

Considere, por exemplo, uma situação em que se deseja medir o comprimento de um objeto utilizando uma régua graduada em milímetros, como representado na Figura 1. Para isso, diferentes observadores, um de cada vez, posicionam a régua junto ao objeto e fazem uma leitura. Eles repetem esse procedimento muitas vezes e verificam que os valores obtidos, em cada medição, diferem um do outro. Na Figura 2, apresenta-se a distribuição dos resultados dessas medições. Nessa distribuição, o valor obtido em cada medição está representado na abscissa, e cada barra vertical representa o número de vezes que esse valor foi encontrado.

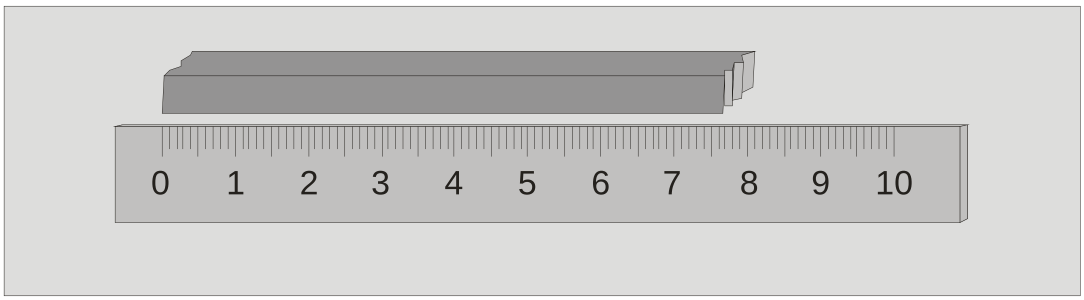


FIGURA 1 **-** Régua, graduada em centímetros, utilizada para medir o comprimento de um objeto.

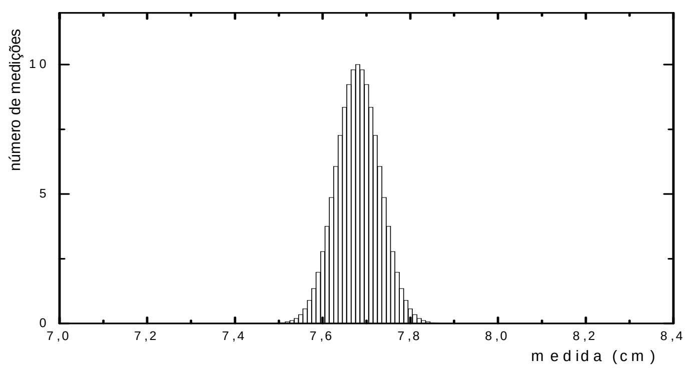


FIGURA 2 **-** Distribuição dos resultados das medições do objeto mostrado na Figura 1 com uma régua graduada em milímetros.

Verifica-se, claramente, que os resultados das medições estão dispersos em torno de um valor médio. Apesar de os observadores poderem afirmar que o comprimento do objeto está entre 7 cm e 8 cm, não se tem certeza sobre o valor da fração adicional no comprimento, por uma série de razões: o objeto pode não ter contornos bem definidos; há diferenças entre a posição escolhida, por cada operador, para a marca de zero da régua junto ao objeto; a régua pode estar deformada etc. Observa-se, no entanto, que há um grande número de medidas próximas ao valor médio e que as medidas mais afastadas são menos freqüentes. Sempre que se efetua uma série de medições de uma grandeza, as medidas apresentam essas características. Isso é inerente ao processo de medição.

Considere, agora, que o comprimento do mesmo objeto é medido da mesma forma, porém, utilizando-se uma régua com graduações de meio centímetro, como mostrado na Figura 3. Nesse caso, o valor médio do comprimento, obtido a partir de uma série de medições, tem, aproximadamente, o mesmo valor obtido com a régua graduada em milímetros. No entanto, verifica-se que uma maior dispersão dos resultados, como mostrado na Figura 4. Novamente, isso é uma característica do processo de medição — nesse caso, a maior dispersão é devida, principalmente, ao uso de um instrumento que tem precisão diferente.

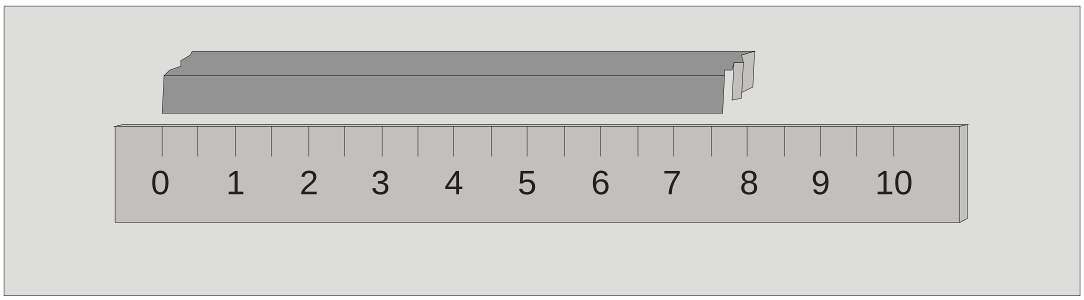


FIGURA 3 - Régua, graduada a cada meio centímetro, utilizada para medir o comprimento de um objeto

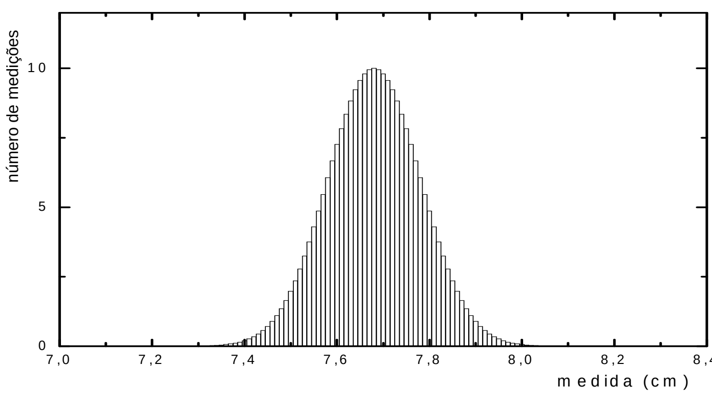


FIGURA 4 - Distribuição dos resultados das medições do objeto mostrado na Figura 3 com uma régua graduada a cada meio centímetro

O parâmetro associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão de valores atribuídos à grandeza submetida à medição, é chamado de **incerteza da medição**.

A forma mais comum de se expressar o resultado de uma medição é a seguinte:

**(valor da grandeza ± incerteza da medição) [unidade]**

Essa e outras formas comumente utilizadas estão mostradas a seguir:

*i.* (21,23 ± 0,06) mm
*ii.* 21,23(6) mm
*iii.* 21,23(0,06) mm

Conforme já discutido, a incerteza no resultado de uma medição caracteriza a dispersão das medidas em torno da média. Essa incerteza é agrupada em duas categorias, de acordo com o método utilizado para estimar o seu valor:

Avaliação Tipo A — a incerteza é avaliada por meio de uma análise estatística da série de medidas.

Avaliação Tipo B — a incerteza é avaliada por meio de métodos não estatísticos, por não se dispor de observações repetidas.

Essas considerações são baseadas em padronizações internacionais, estabelecidas com intuito de se ter uma maneira universal de expressar resultados de grandezas obtidas por medições diretas ou indiretas.

**Avaliação Tipo A**

Considere que uma medição foi repetida *n* vezes, nas mesmas condições, obtendo-se $x_1$, $x_2$, ... $x_n$. Nesse caso, estabeleceu-se que a melhor estimativa para a medida é dada pela média aritmética $\langle x \rangle$ dos valores obtidos, ou seja,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ,$$

e a incerteza padrão da medição é identificada com o desvio padrão $u$ da média das observações, dado por

$$u = \left[ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left( x_i - \langle x \rangle \right)^2 \right]^{1/2} \quad .$$

---

<u>Observação</u>

As distribuições mostradas nas figuras 2 e 4 são exemplos de uma distribuição normal ou gaussiana, que é descrita pela função

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x - \langle x \rangle\right)^2}{2u^2}} \quad ,$$

em que $\langle x \rangle$ é o valor central ou médio e $u$ é o desvio padrão da média da distribuição.

Nesse tipo de distribuição, aproximadamente 68% dos valores encontram-se dentro do intervalo de um desvio padrão em torno da média; cerca de 95% estão dentro do intervalo de duas vezes o desvio padrão; e cerca de 99,7%

estão dentro de três vezes o desvio padrão. Isso está representado na Figura 5. Esses intervalos são chamados de *intervalos de confiança*.

A incerteza de medição, estimada com base no desvio padrão da média de uma distribuição normal, tem a seguinte interpretação: qualquer medida da grandeza tem uma probabilidade de 68% de estar dentro do intervalo $\langle x\rangle \pm u$ (ver Figura 5).

Na verdade, essa estimativa é confiável quando o número de medições é muito grande ($n$ > 200). Quando $n$ é pequeno, deve-se multiplicar o desvio padrão por um fator de correção conhecido como coeficiente $t$-Student, cujo valor depende do número de medições e do intervalo de confiança desejado. Uma tabela com os valores desse coeficiente é facilmente encontrada na literatura. Para simplificar, esse tipo de correção não será abordado neste livro.

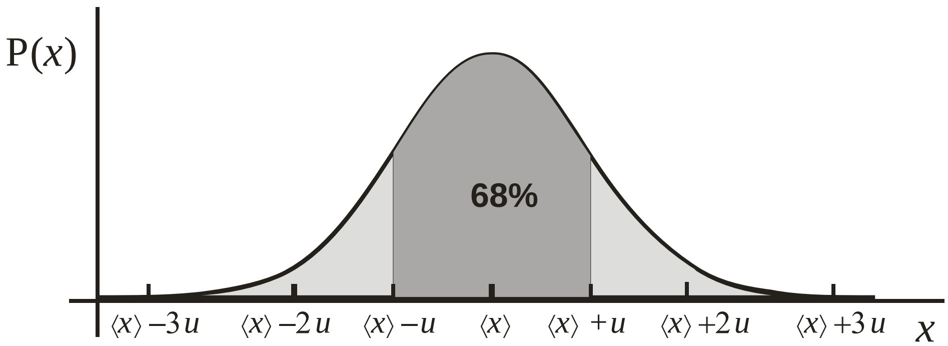


FIGURA 5 - A probabilidade $P$ do valor $x$ de uma medição estar dentro do intervalo $\langle x\rangle \pm u$ é de 68%.

**Exemplo 1**

Considere o exemplo a seguir de uma avaliação Tipo A de incerteza.

Em um teste balístico, são feitas medidas do intervalo de tempo entre o disparo de um projétil e o instante em que ele toca o solo. Para isso, utiliza-se um cronômetro, com resolução de centésimos de segundo.

Os valores $t_i$ obtidos para o tempo de queda de cada projétil e os desvios $\Delta t_i$ do tempo médio estão mostrados na tabela ao lado:

| $i$ | $t_i$ (s) | $[t_i - \langle t\rangle]$(s) |
|---|---|---|
| 1 | 11,31 | 0,10 |
| 2 | 11,09 | 0,12 |
| 3 | 11,10 | 0,11 |
| 4 | 11,27 | 0,06 |
| 5 | 11,18 | 0,03 |
| 6 | 11,32 | 0,11 |
| 7 | 11,24 | 0,03 |
| 8 | 11,15 | 0,06 |
| $\langle t\rangle$ = | 11,21 | |

Nesse caso, o tempo médio $\langle t\rangle$ de queda de uma pedra é dado por

$$\langle t\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{8}\left(11{,}31 + 11{,}09 + 11{,}10 + 11{,}27 + 11{,}18 + 11{,}32 + 11{,}24 + 11{,}15\right)$$

$$\langle t\rangle = 11{,}21 \text{ s.}$$

A avaliação Tipo A da incerteza $u(t)$ no tempo de queda, estimada como o desvio padrão da média, é dada por

$$u = \left[ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left( \Delta t_i \right)^2 \right]^{1/2} = 0{,}101s$$

$u$ = 0,101 s.

Portanto, o valor do tempo $t$ que o projétil fica no ar é

$t$ = (11,2 ± 0,1) s.[2]

---

## Avaliação Tipo B

Quando o número de medições realizadas não é suficiente, ou em situações em que não é prático ou, ainda, quando não é possível se estimar a incerteza com base em um cálculo estatístico, utiliza-se a avaliação Tipo B. Essa avaliação baseia-se, normalmente, no bom senso do operador que, a fim de estabelecer uma incerteza para a medição, deve utilizar toda informação disponível, por exemplo: dados de medições anteriores, conhecimento acumulado sobre os instrumentos e materiais utilizados, especificações do fabricante e dados de calibração dos instrumentos. Portanto, essa avaliação é bastante subjetiva.

Em alguns casos, essas informações podem permitir ao operador inferir uma distribuição aproximada para as medidas, cujo desvio padrão aproximado deve ser usado como uma estimativa para a incerteza padrão da medição.

### Exemplo 2

Considere que um objeto de massa $m$ foi colocado sobre uma balança que apresentou uma leitura de 93 g. A única informação disponível sobre a balança era “erro máximo = 4g”.

Nessa situação, o resultado da medição da massa do objeto é

$m$ = (93 ± 4)g .

### Exemplo 3

Considere que a única informação que um operador tem sobre uma medição de uma grandeza é que o seu valor se situa entre os limites $x_-$ e $x_+$. Nesse caso, é aceitável supor que $x$ pode assumir qualquer valor dentro desse intervalo com igual probabilidade (distribuição retangular).

Portanto, o valor mais provável da grandeza é dado por

---

[2] Conforme será detalhado posteriormente, a incerteza será escrita com apenas 1 algarismo significativo.

$$x = \frac{x_+ + x_-}{2}$$

e a incerteza padrão, estimada como o desvio padrão dessa distribuição, é dada por

$$u = \frac{x_+ - x_-}{2\sqrt{3}} \; .$$

**Exemplo 4**

Na Figura 4, apresenta-se um voltímetro analógico durante uma medição. Devido a flutuações na diferença de potencial, observa-se que o ponteiro do aparelho oscila, aproximadamente, entre $V_-$ = 12,5V e $V_+$ = 14,0V. Usando-se esses valores como limites para uma avaliação Tipo B da incerteza nessa medição, obtém-se

$$V = \frac{V_+ + V_-}{2} = 13{,}25 \text{ V}$$

e

$$u = \frac{V_+ - V_-}{2\sqrt{3}} = \; 0{,}43 \text{ V}$$

Assim, o resultado da medição dessa diferença de potencial é ( 13,3 ± 0,4)V.

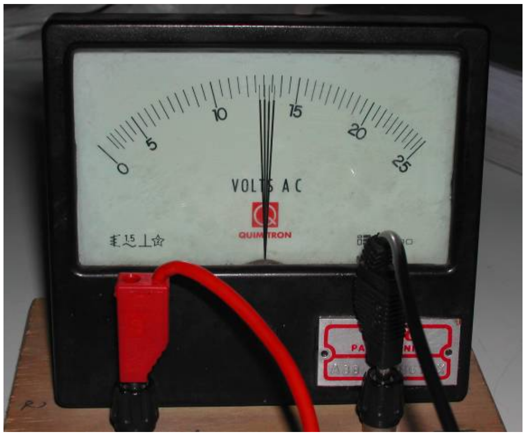


FIGURA 6 - Voltímetro analógico durante uma medição de uma tensão elétrica alternada

**Exemplo 5**

Na Figura 7, apresenta-se a tela de um osciloscópio, usado para medir um sinal de tensão elétrica em um indutor. Deseja-se medir a tensão pico-a-pico desse sinal. Devido a ruídos no circuito sob medição, o sinal registrado não é estável. Pode-se estimar que a tensão pico-a-pico desse sinal oscila, aproximadamente, entre $d_-$ = 4,3 divisões e $d_+$ = 5,5 divisões. Usando-se esses valores como limites para uma avaliação Tipo B da incerteza nessa medição, obtém-se

$$V = \frac{d_+ + d_-}{2} \times \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{divisão}} = 4{,}9 \text{ divisões} \times 0{,}1\text{V/divisão} = 0{,}49 \text{ V}$$

e

$$u = \frac{d_+ - d_-}{2\sqrt{3}} \times \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{divisão}} = 0{,}35 \text{ divisões} \times 0{,}1\text{V/divisão} = 0{,}035 \text{ V}$$

Assim, o resultado da medição dessa tensão pico-a-pico é (0,49 ± 0,04) V.

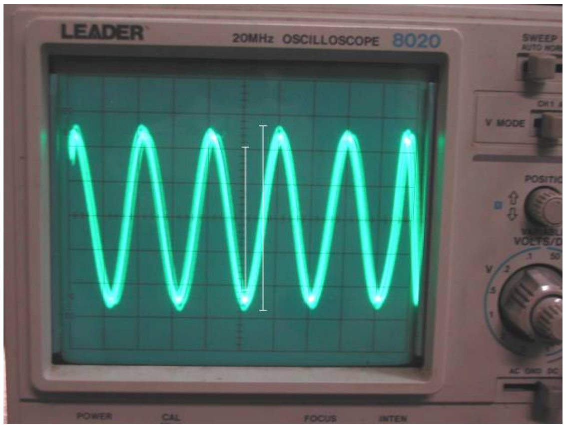


FIGURA 7 - Sinal observado na tela de um osciloscópio. Devido a ruídos, a tensão pico-a-pico do sinal oscila entre os limites indicados pelas barras brancas

## Algarismos significativos

Em toda medição é importante se expressar o resultado com o número correto de algarismos significativos. Para isso, é preciso seguir as seguintes regras:

- os algarismos significativos de uma medida são todos os corretos mais um duvidoso;
- o algarismo duvidoso é o que é afetado pela incerteza da medição.
- os zeros, à esquerda do primeiro algarismo não nulo, antes ou depois da vírgula, não são significativos — eles apenas servem para representar a medida em múltiplos ou submúltiplos da unidade.
- qualquer zero, à direita do primeiro número não nulo, é significativo.
- a potência de 10 em uma medida não altera o número de algarismos significativos.

Considere, por exemplo, a medição do comprimento do objeto, mostrado na Figura 1, em que se utiliza uma régua graduada em milímetros. Após terem sido realizadas várias medições, calcula-se a média dos resultados e estima-se a incerteza Tipo A por meio do desvio padrão, obtendo-se o resultado $L$ = (7,6 ± 0,1) cm, expresso corretamente. Nessa medida, a incerteza incide sobre o algarismo 6, que é o duvidoso.

Seria incorreto expressar esse resultado em qualquer das formas seguintes:

| | | |
|---|---|---|
| (7,6385 ± 0,1) cm | — | como a incerteza é de 1 milímetro, não faz sentido indicar o resultado com precisão menor que esse valor, ou seja, os algarismos 3, 8 e 5 não são significativos e não devem ser escritos. |
| (7 ± 0,1) cm | — | o algarismo duvidoso deve ser aquele sobre o qual incide a incerteza, portanto, falta um algarismo significativo no resultado. |
| (7,6385 ± 0,1178) cm | — | Nas normas da ABNT, recomenda-se que a incerteza da medição seja fornecida com, no máximo, dois algarismos significativos. Assim, mesmo que o processo de cálculo do desvio padrão tenha fornecido o valor 0,1178, a norma recomenda que ele seja escrito como 0,1 ou 0,12. Caso se faça a opção por escrever a incerteza com dois algarismos significativos, o resultado deve ser escrito na forma L=(7,64 ± 0,12) cm. Caso o primeiro algarismo abandonado seja igual ou maior que 5, acrescenta-se uma unidade ao algarismo que permaneceu. |

É importante observar que o número de algarismos significativos no resultado é determinado apenas pela incerteza, e não pelo instrumento utilizado. A incerteza, por sua vez, é inerente ao processo de medição. Por exemplo, se a régua milimetrada for utilizada na medição do diâmetro de uma moeda, facilmente obtém-se uma incerteza de décimos de milímetros. No entanto, se a mesma régua ou uma trena milimetrada for utilizada para determinar o comprimento de um corredor da escola, dificilmente será obtida incerteza menor que um centímetro.

O resultado final de uma medição deve ser sempre indicado com os algarismos significativos consistentes com a incerteza. No entanto, para se evitar erros de arredondamento, todos os cálculos intermediários — cálculos da média, desvio padrão — devem ser feitos com todos os algarismos disponíveis. Isso significa, por exemplo, que todas as medidas intermediárias realizadas com uma régua milimetrada devem ser escritas com todos os algarismos disponíveis, ou seja, até décimos de milímetros.

## Regra de propagação da incerteza

Nem sempre é possível fazer uma medição direta de uma grandeza — aquela em que o valor da grandeza é obtido diretamente do sistema de medição. Muitas vezes, o valor de uma grandeza é determinado por meio de medições de outras grandezas relacionadas a ela. Nesse caso, diz-se que a medição é indireta.

Considere que uma grandeza $Y$, que não pode ser medida diretamente, é uma função $f$ de $N$ outras grandezas $X_1$, $X_2$, ... $X_N$ , ou seja,

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) .$$

Sejam $x_1 \pm u(x_1)$, $x_2 \pm u(x_2)$, ... $x_n \pm u(x_N)$ os resultados das medições das grandezas $X_1$, $X_2$, ... $X_N$. O resultado $y$ da medição da grandeza $Y$ é dado por

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) .$$

**Exemplo 6a**

Deseja-se medir a potência elétrica $P$ dissipada por um resistor ligado à rede elétrica. Para isso, foram feitas várias medições da resistência elétrica $R$ do resistor e da tensão elétrica $V$ da rede, determinando-se os valores médios e as incertezas padrão dessas grandezas. Os resultados obtidos são

$$R = (2,5 \pm 0,3)\ \Omega \qquad \text{e} \qquad V = (127 \pm 1)\ \text{V} .$$

A potência elétrica dissipada no resistor é dada por

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{127^2}{2,5} ,$$

ou seja, $P$ = 6451,6 W.

Como as incertezas em $R$ e em $V$ afetam o resultado da medição de $P$ ?

A incerteza padrão da medição de uma grandeza obtida dessa forma, ou seja, por meio de uma medição indireta, é chamada de **incerteza padrão combinada $u_c$**, e é determinada por meio da equação

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) .$$

Portanto, a incerteza padrão combinada da variável $y$ é igual à raiz quadrada positiva da soma dos quadrados das incertezas das medições das outras grandezas, ponderadas pelo termo $\left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$. Esse termo avalia o quanto o resultado da medição varia com a mudança em cada grandeza $x_i$.

Observação

A equação acima é válida apenas para o caso em que todas as grandezas de entrada ($x_i$) sejam independentes umas das outras. Para efeito de simplificação, o caso em que elas são correlacionadas não será tratado neste livro.

**Exemplo 6b**

No Exemplo 6a, como as incertezas em $R$ e em $V$ afetam o resultado da medição de $P$ ?

A incerteza padrão combinada $u_c(P)$ da potência é dada por

$$u_c(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)^2 u^2(R)} \cdot$$

Como, $P = \dfrac{V^2}{R}$, então

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{2V}{R}, \; \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{V^2}{R^2}, \qquad u(V)=1\text{V e } u(R)=0{,}3\Omega,$$

sendo,

$$u_c(P) = \sqrt{\left(\frac{2\times 127}{2{,}5}\right)^2 \times (1)^2 + \left(\frac{127^2}{2{,}5^2}\right)^2 \times (0{,}3)^2}$$

$u_c(\text{P})= 781$ W.

Portanto, o resultado da medição da potência é

$$P = (6{,}5 \pm 0{,}8)\times 10^3 \text{ W}$$

Conforme a dependência da grandeza que se deseja medir com as grandezas que, de fato, são medidas, a equação para a incerteza padrão combinada se reduz a formas mais simples, como mostrado a seguir.

| $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ | **Incerteza padrão combinada $u_c(y)$** |
|---|---|
| $y = ax_1 + bx_2 + \ldots$ <br> ($a$, $b$,... são constantes) <br> $y$ depende linearmente das outras grandezas | $u_c(y) = \sqrt{a^2 u^2(x_1) + b^2 u^2(x_2) + \ldots}$ |
| $y = a x_1^{p_1} \, x_2^{p_2} \ldots x_N^{p_N}$ | $\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(p_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right)^2} =$ <br> $\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(p_1 \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(p_2 \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(p_N \frac{u(x_N)}{x_N}\right)^2}$ <br> A incerteza padrão combinada relativa é igual à raiz quadrada positiva da soma dos quadrados das incertezas padrão relativas das grandezas, ponderadas pelos quadrados dos respectivos expoentes. |
| $y = a \ln x$ | $u_c(y) = a \frac{u(x)}{x}$ |
| $y = ae^x$ | $u(y) = ae^x u(x)$ |

**Exemplo 6c**

No Exemplo 6a, a incerteza padrão combinada de *P* pode ser calculada utilizando-se as equações acima.

Como $P = \frac{V^2}{R}$, então

$$\frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{\left(2\frac{u(V)}{V}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2} \;.$$

Como, $V$=127 V, $R$=2,5 Ω, $P$=6451,6 W, u($V$)=1V e $u(R)$=0,3Ω, então,

$$\frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{\left(2\times\frac{1}{127}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{2,5}\right)^2}$$

$u_c$(P)= 781 W,

que é igual ao resultado obtido no Exemplo 6b.

## APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS EM TABELAS E GRÁFICOS

### Tabelas

Os resultados das medições realizadas devem ser apresentados no formato de tabela. Uma tabela deve conter:

Legenda — Inicia com a palavra “Tabela”, seguida pelo número que a identifica no texto. Deve conter uma frase curta, que descreve o que é apresentado na tabela, bem como as variáveis, símbolos e abreviações não incluídas no texto;

Cabeçalho — Linha, no topo da tabela, que contém os nomes ou símbolos das grandezas listadas em cada coluna, com suas respectivas unidades e, caso necessário, incertezas padrão.

Conteúdo — Linhas e colunas com os resultados que se pretende apresentar. Se forem numéricos, devem ter o número correto de algarismos significativos.

### Exemplo

TABELA 1

Tensão *V* e a corrente elétrica *I* no resistor de resistência *R*=(500 ± 3) Ω.

| *V* (V) ± 0,1V | *I* (mA) |
|---|---|
| 11,3 | 22,5± 0,3 |
| 15,8 | 31,8± 0,4 |
| 19,5 | 40,0± 0,5 |
| 22,7 | 44,4± 0,5 |

| | |
|---|---|
| 29,1 | 59,2± 0,6 |
| 38,4 | 76,1± 0,6 |
| 42,3 | 83,8± 0,7 |
| 50,0 | 99,3± 0,8 |

**Gráficos**

Um gráfico é um recurso extremamente útil para a apresentação de resultados experimentais, pois permite uma visualização dos resultados e da dependência existente entre as grandezas representadas. Um gráfico deve conter:

Legenda — Inicia com a palavra “Gráfico” ou “Figura”, seguida do número que o identifica no texto. Assim como na tabela, deve conter uma frase curta, que descreve o que é apresentado no gráfico, bem como as variáveis, símbolos e abreviações não incluídas no texto;

Eixos — Cada eixo — horizontal e vertical — deve conter o nome ou símbolo da grandeza correspondente, com suas respectivas unidades. As escalas de cada eixo devem permitir que o conjunto de dados representado ocupe o maior espaço possível da área do gráfico. As escalas podem ser lineares ou logarítmicas, dependendo da variação da grandeza e do tipo de dependência entre elas que se deseja mostrar.

**Exemplo 7**

A seguir, representa-se o gráfico das grandezas mostradas na Tabela 1.

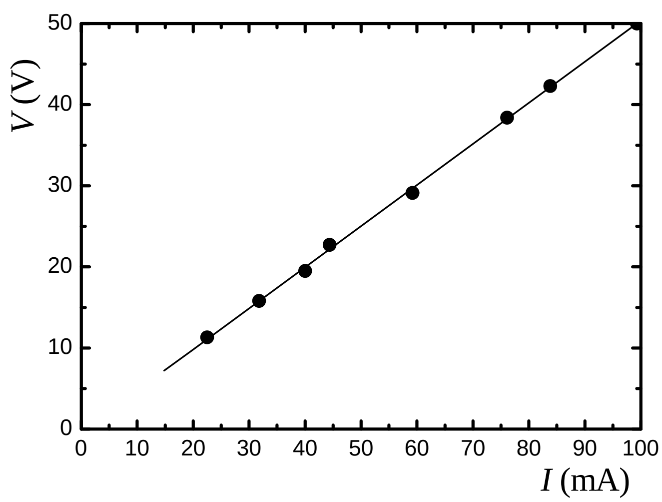


FIGURA 8 - Tensão $V$ *versus* corrente elétrica $I$ em um resistor de resistência $R$=(500 ± 3) Ω. A reta traçada no gráfico, obtida por regressão linear, é descrita pela equação $V = aI + b$, em que $a$ = (506 ± 5) Ω e $b$ = (– 0,3 ± 0,3) V

## AJUSTE DE UMA CURVA AOS DADOS EXPERIMENTAIS

Na Física, a maior parte das análises de dados consiste em se determinar uma expressão analítica ou um modelo matemático que melhor descreva um conjunto de resultados experimentais.

Suponha que os dados consistem em pontos ($x_i$, $y_i$), com $i$ = 1, 2, ..., $n$, e que se deseja determinar os parâmetros $a_j$ de uma função $f$ tal que $f(x_i) \approx y_i$ para todo $i$. Isso é feito por meio do **método de mínimos quadrados**, que estabelece que os parâmetros que melhor ajustam uma função aos dados são aqueles que minimizam a soma dos quadrados das diferenças $\delta_i = y_i - f(x_i)$ entre cada ponto $y_i$ dos dados e o ponto $f(x_i)$ correspondente, gerado pela função. Essa soma é dada por

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[ y_i - f(x_i) \right]^2 .$$

Seja $a_j$, em que $j$ =1, 2, ..., $m$, os parâmetros da função que se deseja determinar. Nesse caso, os valores dos parâmetros que minimizam $S$ são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \end{cases}$$

**Exemplo 8**

Sabe-se que durante o resfriamento, a variação $T$ na temperatura de um objeto decresce exponencialmente com o tempo $t$, ou seja, esse processo é descrito por uma equação do tipo $T = ce^{-kt}$. O problema consiste em se determinar os valores mais apropriados para os parâmetros $c$ e $k$ dessa função, a partir de uma série de medições ($T_i$, $t_i$). A seguir, representa-se o gráfico de $T$ em função de $t$ e, também, o gráfico da função $f(t) = ce^{-kt}$. Com uma escolha adequada dos parâmetros $c$ e $k$, obtém-se a equação $f$ que melhor se ajusta ao conjunto de pontos ($T_i$, $t_i$).

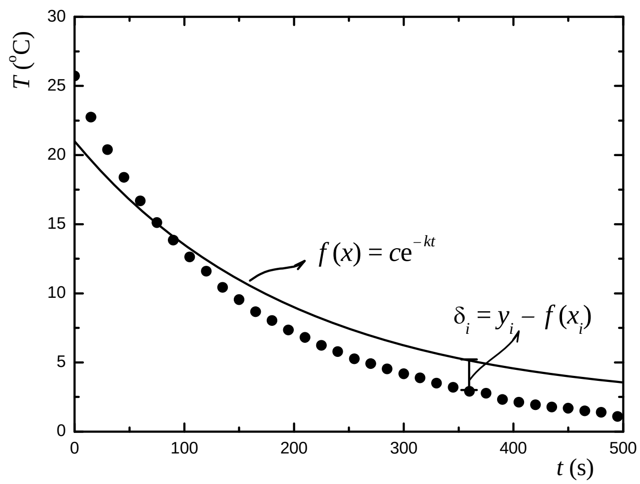


Figura 9 - Variação $T$ da temperatura de um objeto *versus* tempo $t$, enquanto ele se esfria. A curva contínua corresponde a uma função $f = ce^{-kt}$

Quando a função $f$ é linear nos parâmetros que se deseja ajustar, esse sistema de equações tem solução analítica. Por exemplo, a função $f(x) = a + bx + cx^2$ é linear nos parâmetros $a$, $b$¸ e $c$, que podem ser facilmente determinados por meio do método de mínimos quadrados.

Caso contrário, ou seja, se $f$ não é linear nos parâmetros a serem determinados, o problema se torna mais complicado. No entanto, para resolvê-lo existem algoritmos que já estão desenvolvidos em vários programas de computador, tanto comerciais quanto de domínio público. Esse procedimento é conhecido como **ajuste não-linear por mínimos quadrados**.

**Regressão linear**

Na Física, são muito comuns as situações em que se deseja determinar a equação da melhor reta que se ajusta a um conjunto de pontos ($x_i$, $y_i$), com $i$ =1, 2, ..., $n$. Esse é um exemplo de ajuste linear de mínimos quadrados ou regressão linear.

Considere a reta descrita pela equação

$$f(x) = ax + b\,.$$

Os parâmetros $a$ e $b$ que melhor ajustam essa reta aos pontos ($x_i$, $y_i$) são os que minimizam a soma $S = \sum \left[ y_i - (ax_i + b) \right]^2$ . Portanto, esses parâmetros são as soluções das equações

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum \left( y_i - ax_i - b \right) x_i = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum \left( y_i - ax_i - b \right) = 0\,.$$

A solução desse sistema de equações é simples. Com uma análise mais completa, também podem ser obtidas as incertezas padrão de *a* e de *b*.

Esses resultados — os parâmetros *a* e *b*, ou seja, inclinação e coeficiente linear — e suas respectivas incertezas padrão, $u(a)$ e $u(b)$, são

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \qquad u(a) = \frac{S}{(n-2)}\sqrt{\frac{\sum x_i^{\,2}}{n\sum x_i^{\,2} - (\sum x_i)^2}},$$

$$b = \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{n}, \qquad u(b) = \frac{S}{(n-2)\sqrt{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}},$$

em que $S = \sum\left[y_i - f(x_i)\right]^2$ e $i$ varia de 1 até $n$ em todos os somatórios.

Há situações em que é possível utilizar o método de regressão linear para ajustar uma função que não é linear, desde que seja possível expressá-la em termos de outras variáveis de forma a obter uma função linear. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 8**

Considere o problema descrito no Exemplo 7, em que se deseja ajustar a função $T = ce^{-kt}$ a uma série de medições ($T$, $t$) da variação $T$ na temperatura de um objeto com o tempo $t$. Nesse caso, não se pode fazer uma regressão linear, pois a função não é linear, como mostrado na Figura 9.

No entanto, calculando o logaritmo de ambos os termos da função, obtém-se

$$\ln T = \ln\left(ce^{-kt}\right),$$

$$\ln T = \ln c - kt .$$

Essa equação pode ser escrita como a equação de uma reta,

$$Y = at + b$$

em que $Y = \ln T$; $a = -k$ é a inclinação; e $b = \ln c$ é o coeficiente linear da reta.

Assim, ao invés de se fazer um ajuste não-linear por mínimos quadrados da função exponencial $T = ce^{-kt}$ aos dados ($T_i$, $t_i$), faz-se uma regressão linear com os dados ($\ln T_i$, $t_i$), como mostrado no gráfico na Figura 10.

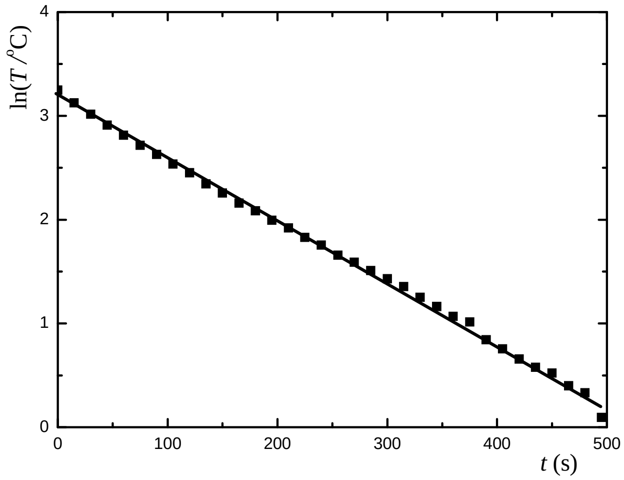

Figura 10 - Temperatura $T$ *versus* tempo $t$ de um objeto enquanto se esfria. A curva corresponde a uma função $f = ce^{-kt}$

Dessa regressão linear obtêm-se a inclinação $a$ e o coeficiente linear $b$ da reta que melhor se ajusta aos dados:

$$a = (-6{,}64 \pm 0{,}07)\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$b = (3{,}31 \pm 0{,}03)$$

Portanto,

$$k = a = (-6{,}64 \pm 0{,}07)\ \mathrm{s}^{-1} \quad \text{e}$$

$$c = \exp(3{,}31 \pm 0{,}03) = (27{,}4 \pm 0{,}8)\ ^{o}\mathrm{C}\ .$$