

# Eletromagnetismo

Sétima edição

William H. Hayt, Jr.  
John A. Buck

**Mc  
Graw  
Hill**



  
**Inclui  
CD**

Obra originalmente publicada sob o título:  
*Engineering Electromagnetics, Seventh Edition*

© 2006 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

ISBN da obra original: 0-07-252495-2

*Preparação de Texto:* Maria Cecília Madarás

*Imagem da Capa:* Diana Fonts

*Composição Editorial:* ERJ Composição Editorial e Artes Gráficas.

---

H426c Hayt, William H.

Eletrromagnetismo [recurso eletrônico] / William H. Hayt, Jr., John A. Buck ; tradução Amilton Soares Júnior ; revisão técnica Antonio Pertence Júnior. – 7. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2011.

Editado também como livro impresso em 2008

ISBN 978-85-63308-76-4

I. Eletricidade. 2. Eletrromagnetismo. I. Buck, John A.  
II. Título.

CDU 537.8



---

Catálogo na publicação: Ana Paula Magnus – CRB 10/2052

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à AMGH Editora Ltda.  
(AMGH EDITORA é uma parceria entre ARTMED Editora S.A. e MCGRAW-HILL EDUCATION).  
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 - Santana  
90040-340 Porto Alegre RS  
Fone (51) 3027-7000 Fax (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

SÃO PAULO

Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 - Pavilhão 5 - Cond. Espace Center  
Vila Anastácio 05095-035 São Paulo SP  
Fone (11) 3665-1100 Fax (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL  
PRINTED IN BRAZIL

# SUMÁRIO

---

Prefácio	xi
Visão Geral do Livro	xv

## Capítulo 1

### **Análise Vetorial** 1

1.1	Escalares e Vetores	1
1.2	Álgebra Vetorial	2
1.3	O Sistema de Coordenadas Cartesianas	4
1.4	Componentes Vetoriais e Vetores Unitários	5
1.5	O Campo Vetorial	8
1.6	O Produto Escalar	9
1.7	O Produto Vetorial	12
1.8	Outros Sistemas de Coordenadas: Coordenadas Cilíndricas Circulares	14
1.9	O Sistema de Coordenadas Esféricas	19
	Referências Bibliográficas	22
	Problemas do Capítulo 1	23

## Capítulo 2

### **Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico** 26

2.1	A Lei Experimental de Coulomb	27
2.2	Intensidade de Campo Elétrico	30
2.3	Campo Devido a uma Distribuição Volumétrica Contínua de Cargas	34
2.4	Campo de uma Linha de Cargas	37
2.5	Campo de uma Lâmina de Cargas	43
2.6	Linhas de Força e Esboços de Campos	45
	Referências Bibliográficas	48
	Problemas do Capítulo 2	48

## Capítulo 3

### **Densidade de Fluxo Elétrico, Lei de Gauss e Divergência** 51

3.1	Densidade de Fluxo Elétrico	51
3.2	A Lei de Gauss	55
3.3	Aplicação da Lei de Gauss: Algumas Distribuições Simétricas de Carga	59
3.4	Aplicação da Lei de Gauss: Elemento Diferencial de Volume	64
3.5	Divergência	67
3.6	Primeira Equação de Maxwell (Eletrostática)	70
3.7	O Operador Vetorial $\nabla$ e o Teorema da Divergência	72
	Referências Bibliográficas	75
	Problemas do Capítulo 3	76

## Capítulo 4

### **Energia e Potencial** 80

4.1	Energia Gasta na Movimentação de uma Carga Pontual em um Campo Elétrico	81
4.2	A Integral de Linha	82
4.3	Definição de Diferença de Potencial e Potencial	87
4.4	O Campo Potencial de uma Carga Pontual	89
4.5	O Campo Potencial de um Sistema de Cargas: Propriedade Conservativa	91
4.6	Gradiente do Potencial	95
4.7	O Dipolo	101
4.8	Densidade de Energia no Campo Eletrostático	106
	Referências Bibliográficas	110
	Problemas do Capítulo 4	110

**Capítulo 5****Corrente e Condutores** 114

- 5.1 Corrente e Densidade de Corrente 114
- 5.2 Continuidade da Corrente 116
- 5.3 Condutores Metálicos 118
- 5.4 Propriedades dos Condutores e Condições de Fronteira 123
- 5.5 O Método das Imagens 128
- 5.6 Semicondutores 130
  - Referências Bibliográficas 132
  - Problemas do Capítulo 5 132

**Capítulo 6****Dielétricos e Capacitância** 136

- 6.1 A Natureza dos Materiais Dielétricos 137
- 6.2 Condições de Fronteira para Materiais Dielétricos Perfeitos 143
- 6.3 Capacitância 149
- 6.4 Diversos Exemplos de Capacitância 152
- 6.5 Capacitância de uma Linha de Dois Fios 155
- 6.6 Utilizando Esboços de Campos para Estimar a Capacitância em Problemas Bidimensionais 160
- 6.7 Analogias de Correntes 165
  - Referências Bibliográficas 167
  - Problemas do Capítulo 6 167

**Capítulo 7****Equações de Poisson e de Laplace** 172

- 7.1 Derivação das Equações de Poisson e de Laplace 173
- 7.2 Teorema da Unicidade 175
- 7.3 Exemplos de Solução da Equação de Laplace 177
- 7.4 Exemplo de Solução da Equação de Poisson 184
- 7.5 Solução Produto da Equação de Laplace 188

- 7.6 Resolvendo a Equação de Laplace por Iteração Numérica 196
  - Referências Bibliográficas 202
  - Problemas do Capítulo 7 203

**Capítulo 8****O Campo Magnético Estacionário** 210

- 8.1 A Lei de Biot-Savart 210
- 8.2 Lei Circuital de Ampère 218
- 8.3 Rotacional 225
- 8.4 Teorema de Stokes 232
- 8.5 Fluxo Magnético e Densidade de Fluxo Magnético 237
- 8.6 Os Potenciais Escalar e Vetor Magnéticos 240
- 8.7 Derivação das Leis do Campo Magnético Estacionário 247
  - Referências Bibliográficas 253
  - Problemas do Capítulo 8 253

**Capítulo 9****Forças Magnéticas, Materiais e Indutância** 259

- 9.1 Força em uma Carga em Movimento 260
- 9.2 Força em um Elemento Diferencial de Corrente 261
- 9.3 Força entre Elementos Diferenciais de Corrente 265
- 9.4 Força e Torque em um Circuito Fechado 267
- 9.5 A Natureza dos Materiais Magnéticos 273
- 9.6 Magnetização e Permeabilidade 276
- 9.7 Condições de Fronteira Magnéticas 281
- 9.8 O Circuito Magnético 284
- 9.9 Energia Potencial e Forças em Materiais Magnéticos 290
- 9.10 Indutância e Indutância Mútua 292
  - Referências Bibliográficas 299
  - Problemas do Capítulo 9 299

**Capítulo 10****Campos Variantes no Tempo e Equações de Maxwell** 306

- 10.1 Lei de Faraday 306
- 10.2 Corrente de Deslocamento 313
- 10.3 Equações de Maxwell na Forma Pontual 317
- 10.4 Equações de Maxwell na Forma Integral 319
- 10.5 Os Potenciais Retardados 321
  - Referências Bibliográficas 325
  - Problemas do Capítulo 10 325

**Capítulo 11****Linhas de Transmissão** 331

- 11.1 Descrição Física da Propagação em Linhas de Transmissão 332
- 11.2 As Equações das Linhas de Transmissão 334
- 11.3 Propagação sem Perdas 336
- 11.4 Propagação sem Perdas de Tensões Senoidais 339
- 11.5 Análise Complexa de Ondas Senoidais 341
- 11.6 Equações da Linha de Transmissão e suas Soluções na Forma Fasorial 343
- 11.7 Propagação sem Perdas e com Poucas Perdas 345
- 11.8 Transmissão de Potência e Caracterização de Perdas 347
- 11.9 Reflexão de Ondas em Descontinuidades 350
- 11.10 Taxa de Onda Estacionária para a Tensão 353
- 11.11 Descrição Física da Propagação em Linhas de Transmissão 357
- 11.12 Alguns Exemplos de Linhas de Transmissão 360
- 11.13 Métodos Gráficos 364
- 11.14 Análise Transiente 375
  - Referências Bibliográficas 388
  - Problemas do Capítulo 11 388

**Capítulo 12****A Onda Plana Uniforme** 396

- 12.1 Propagação de Ondas no Espaço Livre 396
- 12.2 Propagação de Ondas em Dielétricos 404
- 12.3 Teorema de Poynting e Potência da Onda 413
- 12.4 Propagação em Bons Condutores: Efeito Pelicular 416
- 12.5 Polarização de Ondas 423
  - Referências Bibliográficas 430
  - Problemas do Capítulo 12 430

**Capítulo 13****Reflexão e Dispersão de Ondas Planas** 434

- 13.1 Reflexão de Ondas Planas Uniformes de Incidência Normal 434
- 13.2 Taxa de Onda Estacionária 441
- 13.3 Reflexão de Ondas em Interfaces Múltiplas 445
- 13.4 Propagação de Ondas Planas em Direções Genéricas 453
- 13.5 Reflexão de Ondas Planas com Ângulos de Incidência Oblíquos 456
- 13.6 Reflexão Total e Transmissão Total de Ondas Incidentes Oblíquas 462
- 13.7 Propagação de Ondas em Meios Dispersivos 465
- 13.8 Alargamento de Pulso em Meios Dispersivos 471
  - Referências Bibliográficas 475
  - Problemas do Capítulo 13 476

**Capítulo 14****Ondas Guiadas e Radiação** 480

- 14.1 Campos e Constantes Primárias das Linhas de Transmissão 481
- 14.2 Operação Básica de um Guia de Onda 490

- 14.3 Análise da Onda Plana no Guia de Onda de Placas Paralelas 494
- 14.4 Análise do Guia de Placas Paralelas Utilizando a Equação de Onda 503
- 14.5 Guias de Ondas Retangulares 506
- 14.6 Guias de Ondas Dielétricos Planos 511
- 14.7 Fibra Ótica 517
- 14.8 Princípios Básicos de Antenas 527
  - Referências Bibliográficas 537
  - Problemas do Capítulo 14 537

Apêndice A  
**Análise Vetorial** 542

Apêndice B  
**Unidades** 546

Apêndice C  
**Constantes dos Materiais** 551

Apêndice D  
**Origens da Permissividade Complexa** 554

Apêndice E  
**Respostas dos Problemas Ímpares** 561

**Índice** 567

Preparar a edição de um livro-texto é uma mistura ímpar de grande esforço e satisfação máximos. Em meio a longas horas e minúcias sem fim, os atos de incorporar novas idéias que se somam àquelas que já existem ou que substituem as que se tornaram cansativas proporcionam sentimentos de alívio e realização. Através do esforço, existe a esperança e uma crença crescente de que o novo livro será melhor e mais útil.

No caso de eletromagnetismo, o núcleo do assunto nunca muda, e então poderia ser argumentado que provavelmente seria melhor não mexer nas abordagens anteriores que se mostraram de sucesso. Essa era a minha filosofia quando preparei a sexta edição. Nessa nova, sétima, tomei algumas liberdades maiores. Os tópicos mais antigos, presentes desde a primeira edição, foram revistos, e alguns poucos foram retirados ou movidos para novas posições. Essas mudanças foram feitas de maneira moderada, uma vez que minha intenção era melhorar o andamento do material enquanto tentava evitar qualquer coisa que comprometesse o apelo clássico e o sucesso do trabalho original de Hayt conforme existe por aproximadamente cinquenta anos.

Nos últimos anos, muitos cursos sobre eletromagnetismo básico mudaram suas ênfases na direção da teoria das linhas de transmissão, de uma maneira consistente com o crescimento da engenharia de computação como um dos componentes principais dentro dos currículos de engenharia elétrica. Isso resultou em um capítulo substancial e independente sobre linhas de transmissão. O antigo Capítulo 13 é agora Capítulo 11, sendo que precede os capítulos sobre ondas eletromagnéticas. No Capítulo 11, as linhas de transmissão são tratadas inteiramente no contexto da teoria de circuitos. Fenômenos de onda são introduzidos e utilizados exclusivamente na forma de tensões e correntes. As perdas nas linhas são agora abordadas, juntamente com um desenvolvimento mais detalhado da equação de onda. Os conceitos de indutância e de capacitância são tratados como parâmetros conhecidos, e assim não há dependência com qualquer outro capítulo. Isso permite que as linhas de transmissão sejam abordadas como o tópico inicial do curso, caso assim desejado. Os conceitos de campo e o cálculo dos parâmetros em linhas ainda estão presentes, mas agora aparecem na parte inicial do Capítulo 14, onde possuem a função adicional de ajudar a introduzir os conceitos de guiamento de ondas enquanto acrescentam perspectiva aos problemas associados. Os casos específicos de linhas coplanares, coaxiais e bifásicas dentro de diferentes regimes de frequência são tratados como nas edições anteriores, e uma nova seção sobre linha microfita foi adicionada. Esse material pode ser abordado após o Capítulo 12 e não requer o Capítulo 13.

Os capítulos referentes a ondas eletromagnéticas, agora 12 e 13 (antigos 11 e 12), mantêm suas independências da teoria de linha de transmissão de forma que pode-se progredir do Capítulo 10 diretamente para o Capítulo 12. Dessa maneira, os fenômenos

de onda são introduzidos a partir de seus princípios básicos, mas dentro do contexto da onda plana uniforme. O Capítulo 12 faz referências ao Capítulo 11 em locais nos quais esse último pode apresentar perspectivas adicionais, juntamente com mais detalhes. Entretanto, todo o material necessário para se aprender sobre ondas planas sem que se estude primeiramente linhas de transmissão está presente no Capítulo 12, caso o professor ou o aluno desejem proceder nessa ordem.

A discussão sobre reflexão e dispersão de ondas planas no Capítulo 13 foi movido diretamente para o Capítulo 14, no qual os fundamentos do guiamento de ondas são abordados sob a luz de modelos de reflexão de ondas planas, assim como pela solução direta da equação de onda. Esse capítulo agora inclui uma seção expandida sobre fibras óticas em adição a uma sobre estruturas de linhas de transmissão, previamente mencionada. A última parte do Capítulo 14 aborda os conceitos básicos de radiação, retirado das edições anteriores.

A reestruturação dos primeiros capítulos inclui a divisão do antigo Capítulo 5 (Condutores, Dielétricos e Capacitância) em dois capítulos (agora 5 e 6) que lidam separadamente com condutores e capacitores. O antigo Capítulo 6 (que abordava a representação gráfica de campos e técnicas numéricas) foi eliminado, mas parte de seu material foi mantido em outros capítulos. O mapeamento por quadrados curvilíneos e as discussões sobre analogias de correntes são agora parte do novo capítulo sobre capacitância (6) e a antiga seção sobre solução iterativa é agora parte do desenvolvimento das equações de Laplace e Poisson no Capítulo 7.

Aproximadamente 40% dos problemas das edições anteriores foram substituídos. Adicionalmente a muitos novos problemas, incluí vários problemas “clássicos” excelentes de Bill Hayt que apareciam nas primeiras edições. Decidi reviver o que considerei como sendo os melhores e mais relevantes deles. Os exercícios propostos foram revisados e erros, corrigidos.

Fora essas mudanças, o tema do texto é o mesmo que tem sido desde a primeira edição em 1958. Uma abordagem induzida é utilizada, a qual é consistente com os desenvolvimentos históricos. Nela, as leis experimentais são apresentadas como conceitos individuais que são mais tarde unificados nas equações de Maxwell. Após o primeiro capítulo sobre análise vetorial, ferramentas matemáticas adicionais são introduzidas no texto na medida necessária. Em todas as edições, assim como nesta, o objetivo principal foi o de capacitar os estudantes a aprenderem independentemente. Numerosos exemplos, exercícios propostos (que usualmente possuem partes múltiplas) e os problemas no final de cada capítulo são disponibilizados para proporcionar isso. Respostas para os exercícios propostos são dadas após cada problema. Respostas aos problemas ímpares do final de cada capítulo são encontradas no Apêndice E. Um manual de soluções (em inglês) também será disponibilizado para os professores. Esse material, juntamente com outros recursos para ensino estão disponíveis na página do livro na Internet, <http://www.mhhe.com/hayt buck>. Para ter acesso ao site, o professor deve cadastrar-se na editora e solicitar a senha de acesso exclusiva para professores, pelo e-mail [divulgacao\\_brasil@mcgraw-hill.com](mailto:divulgacao_brasil@mcgraw-hill.com). No site para o professor, além do manual de soluções há o **COSMOS** (Sistema de Operação do Manual de Soluções Completo *OnLine*<sup>1</sup>), que contém o conjunto inteiro de problemas do livro, aprimorado para con-

<sup>1</sup> N.T.: Do inglês: *Complete Online Solutions Manual Operating System*.

ter qualquer imagem ou texto referenciado, assim como o conjunto inteiro de soluções para o livro — tudo em inglês. Essa aplicação auxiliará os instrutores a organizar, distribuir e acompanhar os grupos de problemas à medida que forem passados. Devemos agradecer também à ANSOFT e a *Faustus Scientific Corp.*

O livro contém material mais que suficiente para um curso de um semestre. Como é evidente, conceitos sobre estática são enfatizados e aparecem primeiramente na apresentação. Em um curso que coloca mais ênfase na dinâmica, o capítulo sobre linhas de transmissão pode ser abordado primeiramente conforme mencionado, ou em qualquer momento do curso. O material sobre estática pode ser abordado mais rapidamente omitindo-se o Capítulo 1 (que pode ser passado como uma revisão) e saltando as Seções 2.6, 5.5, 5.6, 6.5, 6.6, 7.4 a 7.6, 8.6, 8.7, 9.3 a 9.6, 9.8 e 10.5. Uma apresentação mais rápida de ondas planas pode ser conseguida omitindo-se as Seções 12.5, 13.5 e 13.6. O Capítulo 14 tem a intenção de ser um capítulo de tópicos avançados, no qual o desenvolvimento dos conceitos de guias de ondas e antenas ocorre pela aplicação dos métodos aprendidos nos primeiros capítulos, ajudando assim a solidificar o conhecimento. Pode também servir como uma ponte entre o curso básico e cursos mais avançados seguintes.

Um novo e importante recurso, exclusivo desta edição, é um **CD** contendo demonstrações computacionais e programas interativos, desenvolvido por Natalia Nikolova da McMaster University e Vikram Jandhyala e Indranil Chowdury da University of Washington. Suas excelentes contribuições estão ligadas ao texto. Sempre que existe um exercício associado com a narrativa, você verá um ícone de CD na margem. Figuras coloridas, exercícios interativos e animações (incluindo algumas de minha autoria) serão muito úteis para auxiliar na visualização de alguns dos muitos fenômenos descritos no texto.

## AGRADECIMENTOS

Estou em débito com muitos alunos e colegas que me auxiliaram e me encorajaram antes e durante a preparação desta nova edição. No início do processo de revisão, muitas sugestões cuidadosas e valiosas foram dadas por

Raviraj Sadanand Adve, *University of Toronto*  
Jonathan S. Bagby, *Florida Atlantic University*  
Arun V. Bakshi, *College of Engineering, Pimpri, India*  
Shanker Balasubramaniam, *Michigan State University*  
N. Scott Barker, *University of Virginia*  
Vikran Jandhyala, *University of Washington*  
Brian A. Lail, *University of Central Florida*  
Sharad R. Laxpati, *University of Illinois–Chicago*  
Reinhold Ludwig, *Worcester Polytechnic Institute*  
Masoud Mostafavi, *San Jose State University*  
Natalia K. Nikolova, *McMaster University*  
J. Scott Tyo, *University of New Mexico*  
Kathleen L. Virga, *University of Arizona*  
Clive Woods, *Iowa State University*

Suas observações e sugestões afetaram muitos aspectos do produto final. Erros e inconsistências no texto e em alguns dos problemas foram apontados em detalhes em diversas comunicações por William Thompson, Jr. da Pennsylvania State University. Na Georgia Tech, Shannon Madison me auxiliou nos exercícios propostos e Diana Fouts é responsável pela ilustração e design da capa.

Nos últimos quatro anos depois da publicação da edição anterior, recebi muitos e-mails de um conjunto de pessoas com perguntas e sugestões, frequentemente sobre partes do texto que, numa reflexão mais aprofundada, poderiam ter sido mais claras. Esses atos de me chamar atenção aos detalhes foram, talvez, os mais valiosos no aprimoramento do produto final. Lamento não ter sido capaz de responder todas as mensagens, mas todas foram consideradas e trabalhadas de forma apropriada. Correspondências futuras podem ser enviadas para [john.buck@ece.gatech.edu](mailto:john.buck@ece.gatech.edu).

Finalmente, agradeço o time de projeto da McGraw-Hill, cujo entusiasmo, encorajamento e suporte foram indispensáveis. Agradeço especialmente a Michelle Flomenhoft e Carlise Stenbridge que reuniram todo o material e fizeram tudo isso acontecer. Valorizo minha associação com elas. Assim como na última revisão anterior, o tempo foi muito curto para completar tudo que eu queria. Estou certo que meu entusiasmo continuará se eu tiver a chance de uma oitava edição, após um longo descanso, é claro, e com a paciência da minha esposa e das minhas filhas renovada. Tomara que as meninas, muito jovens para entender porque papai fica preso ao computador por todo o final de semana, não tenham crescido demais para querê-lo de volta. Dedico este livro a elas.

**John A. Buck**  
*Marietta, GA*  
*Setembro 2004*

# VISÃO GERAL DO LIVRO

O principal objetivo deste livro é apresentar o eletromagnetismo de maneira que seja clara, mas interessante e mais fácil de compreender. Para você, estudante, aqui vão algumas características que lhe ajudarão a estudar e ser bem-sucedido no curso.

**Exemplos:** Numerosos exemplos fáceis de serem identificados, os quais ajudam a reforçar os conceitos apresentados, estão integrados ao longo de cada capítulo.

**EXEMPLO 11.4**

Uma linha de transmissão de 20 m é conhecida por produzir uma queda de 2,0 dB na potência de um terminal ao outro. (a) Qual fração da potência de entrada chega até a saída? (b) Qual fração da potência de entrada chega até o ponto central da linha? (c) Qual coeficiente atenuação exponencial  $\alpha$  isso representa?

**Solução.** (a) A fração de potência será

$$\frac{P(20)}{P(0)} = 10^{-0,2} = 0,63$$

(b) 2 dB em 20 m implica uma taxa de perdas de 0,2 dB/m. Desta forma, em uma distância de 10 metros, as perdas serão de 1,0 dB. Isso representa a fração da potência  $10^{-0,1} = 0,79$ .

(c) O coeficiente de atenuação exponencial é encontrado por

$$\alpha = \frac{2,0 \text{ dB}}{(8,69 \text{ dB/Np})(20 \text{ m})} = 0,012 \text{ [Np/m]}$$

Um ponto final discute a questão: Por que utilizar decibéis? A razão mais forte é que quando calculamos perdas acumuladas para várias linhas e dispositivos que estão

**Exercícios Propostos:** Muitos exercícios propostos também estão integrados ao longo de cada capítulo. Esses problemas, nos quais estão incluídas as respostas, são uma maneira rápida para você checar sua compreensão sobre o assunto discutido.

**E14.3.** Cada condutor de uma linha de transmissão bifilar tem um raio de 0,8 mm e uma condutividade de  $3 \times 10^7$  S/m. Eles são separados por uma distância de centro a centro de 0,8 cm em um meio para o qual  $\epsilon'_r = 2,5$ ,  $\mu_r = 1$  e  $\sigma = 4 \times 10^{-9}$  S/m. Se a linha opera a 60 Hz, calcule: (a)  $\delta$ ; (b)  $C$ ; (c)  $G$ ; (d)  $L$ ; (e)  $R$ .

**Resp.** 1,2 cm; 30 pF/m; 5,5 nS/m; 1,02  $\mu$ H/m; 0,033  $\Omega$ /m

**Problemas de Fim de Capítulo:** Cada capítulo apresenta uma ampla seleção de problemas, com respostas para alguns, selecionados pelos autores, no Apêndice E. Com isso você tem a chance de praticar o que está aprendendo.

- 14.17** Um guia de ondas retangular tem dimensões  $a = 6$  cm e  $b = 4$  cm. (a) Em qual faixa de frequências o guia irá operar em modo único? (b) Em qual faixa de frequências o guia irá suportar *ambos* os modos  $TE_{10}$  e  $TE_{01}$  e nenhum outro mais?
- 14.18** Dois guias de onda retangulares estão unidos ponta com ponta. Os guias possuem dimensões idênticas, onde  $a = 2b$ . Um guia está preenchido com ar. O outro está preenchido com um dielétrico sem perdas caracterizado por  $\epsilon'_r$ . (a) Determine o valor máximo permitido para  $\epsilon'_r$  de forma que uma operação em modo único possa ser assegurada simultaneamente em *ambos* os guias em alguma frequência. (b) Escreva uma expressão para a faixa de frequências na qual uma operação monomodo ocorrerá em ambos os guias. Sua resposta deve ser em termos de  $\epsilon'_r$ , das dimensões do guia conforme necessário, e de outras constantes conhecidas.

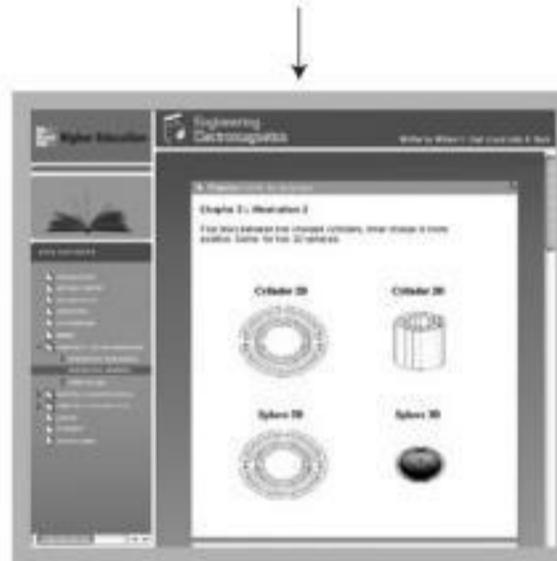
**CD de Conteúdo para o Estudante:** Seu livro vem com um CD-ROM com o objetivo de aprimorar ainda mais sua compreensão de eletromagnetismo. (Detalhes do conteúdo do CD-ROM aparecem nas duas próximas páginas). Ícones de CD aparecem nas margens do texto ao longo do livro para indicar quando você pode usar o CD para uma ajuda adicional com o texto.

#### 2.4 CAMPO DE UMA LINHA DE CARGAS

Até aqui consideramos dois tipos de distribuição de cargas: a carga pontual e a carga distribuída por um volume com uma densidade  $\rho$ , C/m<sup>3</sup>. Se agora considerarmos uma densidade de carga volumétrica distribuída na forma de um filamento, como em um feixe muito fino em um tubo de raios catódicos ou um condutor carregado de raio muito pequeno, torna-se conveniente tratar a carga como uma linha de cargas de densidade  $\rho_L$ , C/m. No caso do feixe de elétrons, as cargas estão em movimento e é verdade que não temos um problema de eletrostática. Entretanto, se o movimento de elétrons é

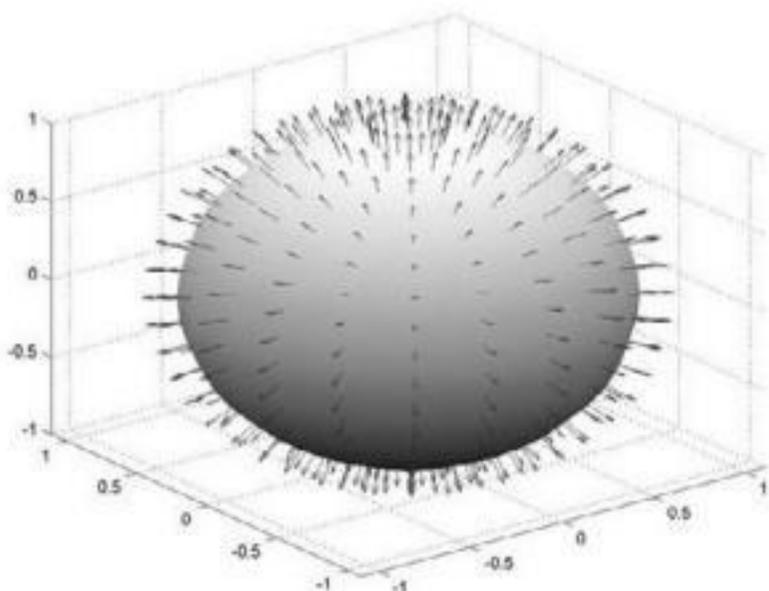


#### CD de Conteúdo para o Estudante



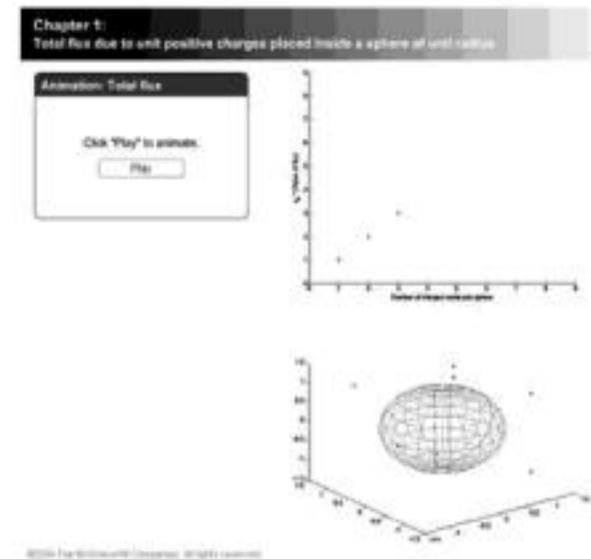
O material do CD-ROM foi criado para proporcionar a você recursos adicionais de aprendizagem para os conceitos de eletromagnetismo mais difíceis. Essa ferramenta para auto-aprendizado possui uma interface fácil de navegar e que lhe permite procurar o material por capítulo.

Esfera

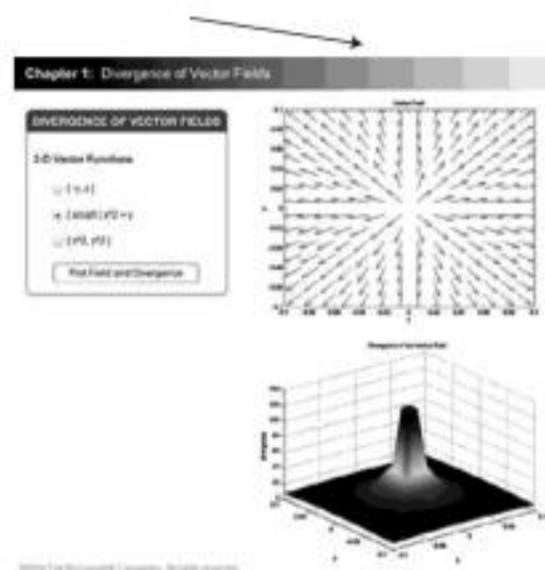


**Recurso de Aprendizagem nº 1 – Ilustrações:** Com o objetivo de ajudar a visualizar melhor os conceitos, incluindo ilustrações adicionais em quatro cores.

**Recurso de Aprendizagem nº 2 – Animações:** Numerosas animações vão um passo adiante, apresentando uma demonstração de fenômenos eletromagnéticos com animação em Flash.



**Recurso de Aprendizagem nº 3 – Interações:** As interações não apenas permitem compreender melhor os conceitos, mas também permitem que você fisicamente ajuste as variáveis ou a própria figura para ver os conceitos em ação.



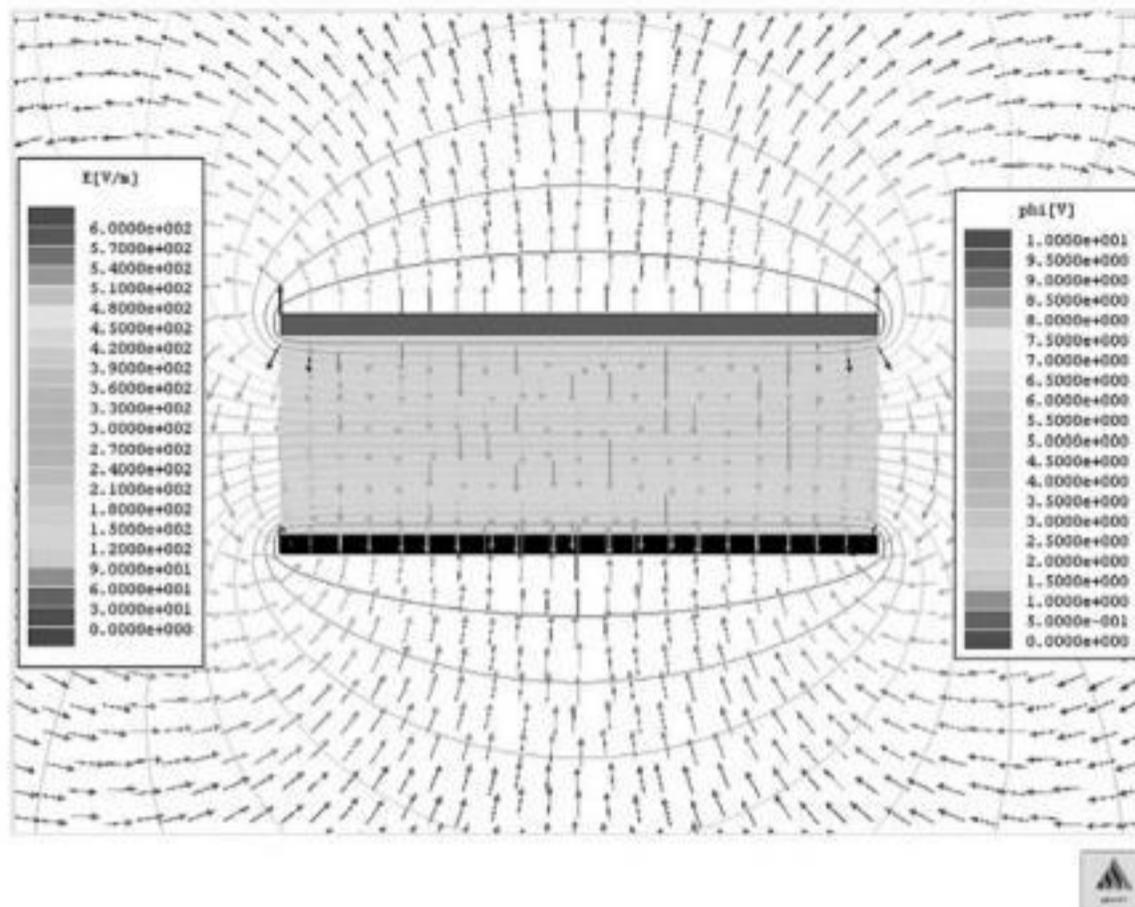
**Recurso de Aprendizagem nº 4 – Testes:** Os autores elaboraram, em inglês, para ajudar a testar ainda mais sua compreensão, um teste rápido para cada capítulo. Uma resposta imediata é dada para que você saiba se respondeu ao teste corretamente.



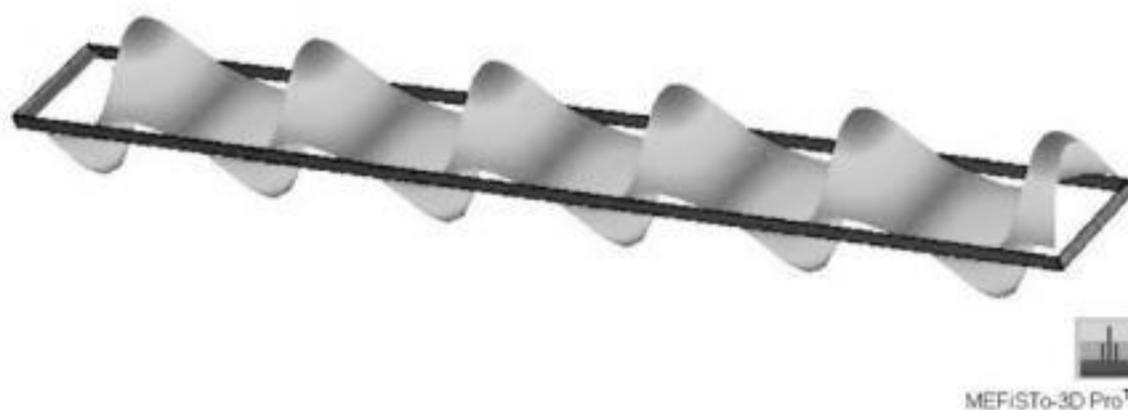
## QUIZ – CHAPTER 1 (Vector Analysis)

1. The cross product of  $8\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y$  (first vector) and  $9\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y$  (second vector) is

- $72\mathbf{a}_z - 24\mathbf{a}_z$
- $-24\mathbf{a}_x + 32\mathbf{a}_y - 54\mathbf{a}_z$
- $72\mathbf{a}_x + 24\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z$
- $24\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 54\mathbf{a}_z$



Mapa de campo na seção reta de uma linha de placas paralelas: linhas equipotenciais e linhas de força do campo E.



Onda de campo elétrico ao longo de um guia de ondas metálico: o modo  $TE_{10}$  dominante.

Se você gostaria de ver mais conteúdo sobre eletromagnetismo, como essas ilustrações, não deixe de examinar o CD-ROM que veio junto com seu livro (ou visite a página do livro na Internet em <http://www.mhhe.com/hayt buck>. Você encontrará **ilustrações, animações, material interativo e testes** criados para lhe dar uma experiência interativa com os conceitos-chave em eletromagnetismo. Ícones relativos ao CD-ROM encontram-se espalhados ao longo do livro para indicar onde essas fontes estão disponíveis no CD-ROM de conteúdo. Esperamos que você utilize o CD de conteúdo e que isso aprimore seu aprendizado em eletromagnetismo!

# Análise Vetorial

**A** análise vetorial é um tema matemático que é muito mais bem ensinado por matemáticos do que por engenheiros. A maioria dos estudantes iniciantes e avançados em engenharia, entretanto, não tem tido tempo (ou talvez a inclinação) para freqüentar um curso em análise vetorial, apesar de ser provável que muitos conceitos e operações elementares com vetores tenham sido introduzidos nas disciplinas de cálculo. Esses conceitos e operações fundamentais são abordados neste capítulo, sendo que o tempo dedicado a eles agora deve depender do grau de conhecimento que cada leitor apresenta no tema.

O ponto de vista aqui é também aquele do engenheiro ou físico, e não do matemático, na medida em que as provas são indicadas em vez de rigorosamente apresentadas e a interpretação física é enfatizada. Fica mais fácil para os engenheiros seguirem um curso mais rigoroso e completo no departamento de matemática após serem apresentados a alguns cenários físicos e aplicações.

A análise vetorial se compara a uma taquigrafia<sup>1</sup> matemática. Ela tem alguns símbolos novos, algumas regras novas e uma armadilha aqui outra ali, assim como todos novos campos. Ela demanda concentração, atenção e prática. Os exercícios propostos, no final da Seção 1.4, devem ser considerados parte integral do texto e precisam todos ser resolvidos. Não se espera que esses exercícios representem dificuldade se o material na seção do texto que o acompanha foi inteiramente entendido. Leva um pouco mais de tempo “ler” o capítulo dessa maneira, mas o investimento no tempo produzirá um ganho surpreendente. ■

## 1.1 ESCALARES E VETORES

O termo *escalar* se refere a uma grandeza cujo valor pode ser representado por um número (positivo ou negativo) real único. O  $x$ , o  $y$  e o  $z$  que usamos na álgebra básica são escalares, assim como as grandezas que eles representam. Se falarmos de um corpo que cai de uma distância  $L$  em um tempo  $t$ , ou a temperatura  $T$  em qualquer ponto de uma tigela de sopa cujas coordenadas são  $x$ ,  $y$  e  $z$ , então  $L$ ,  $t$ ,  $T$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são todos escalares. Outras grandezas escalares são massa, densidade, pressão (mas não força), volume e resistividade volumétrica. A tensão elétrica também é uma grandeza escalar, apesar da representação complexa de uma tensão senoidal, o que é um procedimento artificial, produzir um *escalar complexo*, ou *fasor*, o qual requer dois números reais para a sua representação, tais

<sup>1</sup> N.T.: Taquigrafia é a escrita por meio de símbolos e abreviaturas.

como amplitude e ângulo de fase, ou parte real e parte imaginária.

Uma grandeza *vetorial* possui intensidade,<sup>2</sup> direção e sentido no espaço. Trabalharemos apenas com espaços bi e tridimensionais, mas os vetores podem ser definidos em espaços  $n$ -dimensionais em aplicações mais avançadas. Força, velocidade, aceleração e uma linha reta do terminal positivo para o terminal negativo de uma bateria são exemplos de vetores. Cada grandeza é caracterizada por uma intensidade, uma direção e um sentido.

Devemos nos interessar principalmente por *campos* escalares e vetoriais. Um campo (escalar ou vetorial) pode ser definido matematicamente como alguma função do vetor que conecta uma origem arbitrária a um ponto genérico no espaço. Usualmente, conseguimos associar algum efeito físico com um campo, tal como a força numa agulha de bússola exercida pelo campo magnético da Terra, ou o movimento de partículas de fumaça no campo definido pelo vetor velocidade do ar em alguma região do espaço. Note que o conceito de campo invariavelmente está relacionado a uma região. Alguma grandeza é definida em cada ponto, em uma região. Existe tanto o campo *escalar* como o campo *vetorial*. A temperatura na tigela de sopa e a densidade em qualquer ponto na Terra são exemplos de campos escalares. Os campos gravitacional e magnético na Terra, o gradiente de potencial em um cabo e o gradiente de temperatura na ponta de um ferro de soldar são exemplos de campos vetoriais. O valor de um campo varia, em geral, tanto com a posição quanto com o tempo.

Neste livro, assim como na maioria dos outros que utilizam notação vetorial, vetores serão indicados por tipos em negrito, por exemplo, **A**. Escalares são impressos em tipo itálico, por exemplo, *A*. Quando se escreve à mão ou se usa uma máquina de escrever, é costume desenhar uma linha ou uma seta sobre uma grandeza vetorial, de modo que se mostre seu caráter vetorial (CUIDADO: Essa é a primeira armadilha. Notação pouco cuidadosa, como a omissão do símbolo da linha ou da seta para um vetor, é a principal causa de erros em análise vetorial).

## 1.2 ÁLGEBRA VETORIAL

Com a definição de vetores e de campos vetoriais já realizada, podemos proceder à definição das regras da aritmética vetorial, da álgebra vetorial e (mais tarde) do cálculo vetorial. Algumas regras serão similares àquelas da álgebra escalar, algumas vão diferir ligeiramente, enquanto outras serão inteiramente novas e estranhas. Isso é de esperar, pois um vetor representa mais informação que um escalar, e a multiplicação de dois vetores, por exemplo, será mais complexa que a multiplicação de dois escalares.

As regras são as de um ramo da matemática que está firmemente estabelecido. Todos “seguem as mesmas regras”, e nós, naturalmente, vamos apenas tomar contato com essas regras e interpretá-las. Entretanto, seria esclarecedor se tomássemos a atitude de considerarmos a nós mesmos pioneiros no campo. Estamos criando nossas próprias regras, e podemos criar qualquer regra que desejarmos. A única condição é que as regras sejam autoconsistentes. É claro que seria muito bom se as regras concordassem com aquelas da álgebra escalar sempre que possível, e seria ainda melhor se as regras nos possibilitassem solucionar alguns problemas práticos.

<sup>2</sup> Adotamos a convenção de que “intensidade” se refere ao valor absoluto, ou módulo. Portanto, a intensidade de qualquer grandeza é sempre positiva.



**Figura 1.1** Dois vetores podem ser adicionados graficamente, tanto desenhando ambos a partir de uma origem comum e completando o paralelogramo quanto começando o segundo vetor a partir da ponta do primeiro e completando o triângulo. Qualquer desses métodos pode ser facilmente estendido para o caso de três ou mais vetores.

Para começar, a adição de vetores segue a lei do paralelogramo, o que pode ser realizado facilmente de forma gráfica, apesar de eventualmente inexato. A Figura 1.1 mostra a soma de dois vetores,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Pode ser visto facilmente que  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ , ou que a adição vetorial obedece à propriedade comutativa. A adição vetorial também obedece à propriedade associativa,

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Note que, quando um vetor é desenhado como uma seta de comprimento finito, sua posição é definida como o início da seta.

Vetores *coplanares* são vetores que pertencem a um mesmo plano, como aqueles mostrados na Figura 1.1. Ambos pertencem ao plano do papel e podem ser somados expressando cada vetor em termos de componentes “vertical” e “horizontal” e, então, somando às componentes correspondentes.

Da mesma maneira, vetores em três dimensões podem ser somados expressando os vetores em termos de três componentes e somando as componentes correspondentes. Exemplos desse processo de adição serão dados depois da discussão sobre componentes vetoriais, na Seção 1.4.

A regra para subtração de vetores deriva diretamente daquela da adição, uma vez que podemos sempre expressar  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  como  $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ . O sinal, ou sentido, do segundo vetor é invertido, e este vetor é então somado ao primeiro de acordo com a regra da adição vetorial.

Vetores podem ser multiplicados por escalares. A intensidade do vetor muda, mas sua direção e seu sentido não mudam quando o escalar é positivo, apesar de o sentido se inverter quando a multiplicação é por um escalar negativo. A multiplicação de um vetor por um escalar também obedece às propriedades associativa e distributiva da álgebra, de forma que

$$(r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B} + s\mathbf{A} + s\mathbf{B}$$

A divisão de um vetor por um escalar é simplesmente a multiplicação pelo inverso do escalar.

A multiplicação de um vetor por outro vetor será discutida nas Seções 1.6 e 1.7.

Diz-se que dois vetores são iguais se a diferença entre os dois é zero, ou  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  se  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

No uso que fazemos de campos vetoriais, devemos sempre somar e subtrair vetores que estão definidos num mesmo ponto. Como exemplo, será mostrado que o campo magnético *total* próximo a um pequeno ímã em forma de ferradura é a soma dos campos produzidos pela Terra e pelo ímã permanente. O campo total em qualquer ponto é a soma dos campos individuais naquele ponto.

Se não estamos considerando um *campo* vetorial, entretanto, podemos somar ou subtrair vetores que não estão definidos no mesmo ponto. Por exemplo, a soma da força

gravitacional atuando em um homem de  $68,0 \text{ kg}_f$  (quilograma-força) no Pólo Norte com aquela que atua em um homem de  $79,4 \text{ kg}_f$  no Pólo Sul pode ser obtida deslocando-se cada vetor de força até o Pólo Sul antes de se proceder à adição. A resultante é uma força de  $11,4 \text{ kg}_f$  no Pólo Sul, direcionada para o centro da Terra. Se quiséssemos dificultar as coisas, poderíamos, da mesma maneira, descrever a força como  $11,4 \text{ kg}_f$  no Pólo Norte,<sup>3</sup> direcionada no sentido contrário ao do centro da Terra (ou “para cima”).

### 1.3 O SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Com o objetivo de descrever um vetor de forma exata, alguns comprimentos, direções, sentidos, ângulos, projeções ou componentes específicos devem ser dados. Existem três métodos simples para fazer isso, e aproximadamente outros oito ou dez, os quais são úteis em casos muito especiais. Vamos utilizar apenas os três métodos simples, e o mais simples deles é o sistema de coordenadas *cartesianas* ou sistema de coordenadas *cartesianas retangulares*.

No sistema de coordenadas cartesianas, estabelecemos três eixos coordenados que formam ângulos retos uns em relação aos outros e os chamamos de eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . É costume escolher um sistema de coordenadas do tipo *triedro direto*, no qual a rotação do eixo  $x$  em direção ao eixo  $y$  (pelo menor ângulo) faz um parafuso dextrogiro avançar na direção indicada pelo eixo  $z$ . Se a mão direita for utilizada, então os dedos polegar, indicador e médio podem ser identificados respectivamente com os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A Figura 1.2a apresenta um sistema de coordenadas cartesianas do tipo triedro direto.

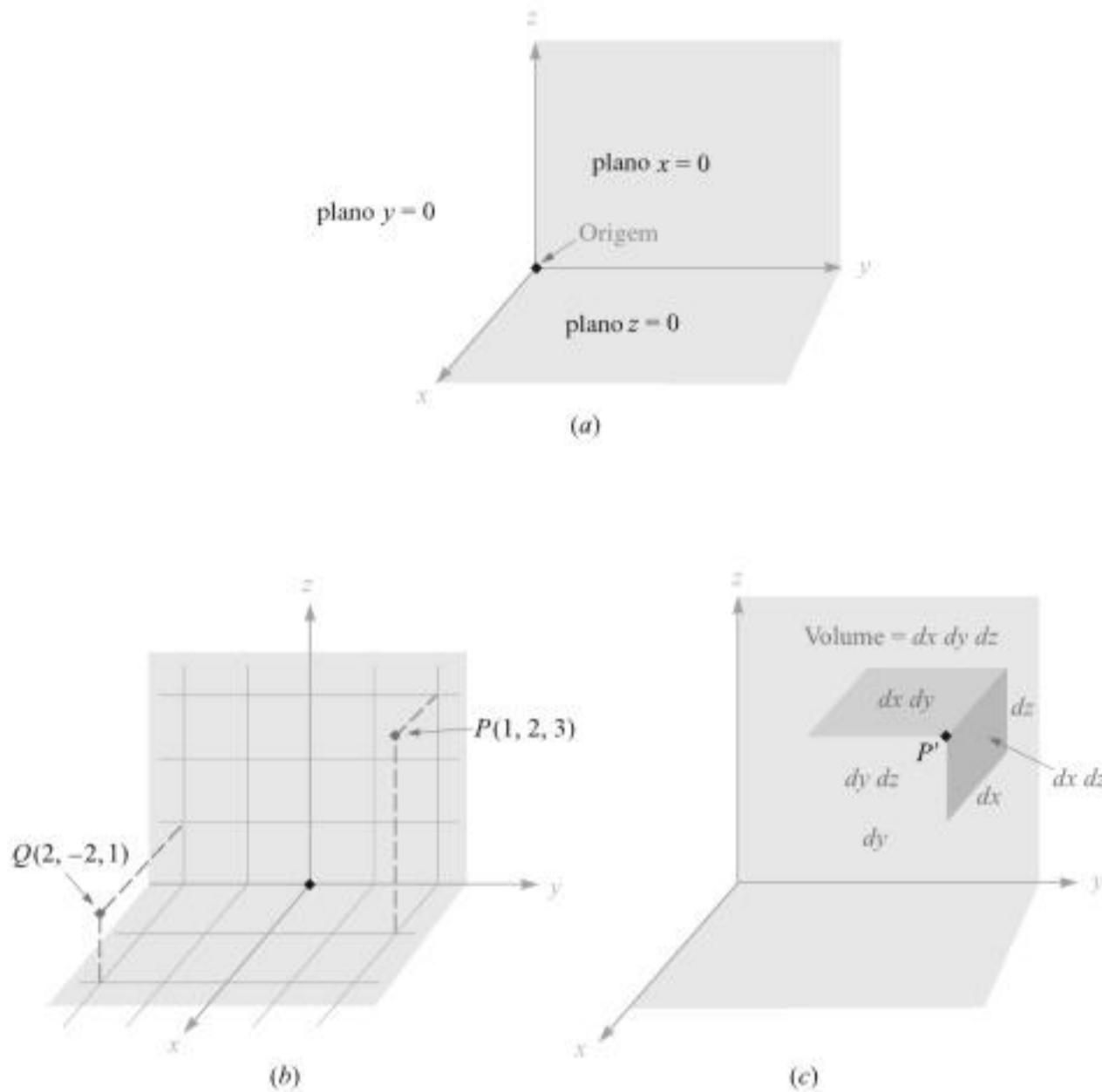
Um ponto é localizado dadas as suas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Estas são, respectivamente, as distâncias da origem até a interseção de perpendiculares desenhadas do ponto até os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Uma maneira alternativa de interpretar os valores coordenados, que é um método correspondente àquele que *deve ser* utilizado em todos os outros sistemas de coordenadas, é considerar o ponto como na interseção comum de três superfícies, os planos  $x = \text{constante}$ ,  $y = \text{constante}$  e  $z = \text{constante}$ , sendo as constantes os valores das coordenadas do ponto.

A Figura 1.2b mostra os pontos  $P$  e  $Q$  cujas coordenadas são  $(1, 2, 3)$  e  $(2, -2, 1)$ , respectivamente. O ponto  $P$  está, dessa forma, posicionado no ponto de interseção comum dos planos  $x = 1$ ,  $y = 2$  e  $z = 3$ , enquanto o ponto  $Q$  se localiza na interseção dos planos  $x = 2$ ,  $y = -2$  e  $z = 1$ .

Na medida em que encontrarmos outros sistemas de coordenadas nas Seções 1.8 e 1.9, devemos esperar que os pontos se localizem na interseção comum de três superfícies, não necessariamente planas, mas ainda assim perpendiculares entre si no ponto de interseção.

Se visualizarmos três planos que se interceptam no ponto genérico  $P$ , cujas coordenadas são  $x$ ,  $y$  e  $z$ , podemos incrementar cada valor coordenado de uma quantidade diferencial e obter três planos ligeiramente deslocados que se interceptam no ponto  $P'$ , cujas coordenadas são  $x + dx$ ,  $y + dy$  e  $z + dz$ . Os seis planos definem um paralelepípedo retângulo cujo volume é  $dv = dx dy dz$ . As superfícies possuem áreas diferenciais  $dS$  iguais a  $dx dy$ ,  $dy dz$  e  $dz dx$ . Finalmente, a distância  $dL$  de  $P$  a  $P'$  é a diagonal

<sup>3</sup> Alguns estudantes argumentaram que a força poderia ser descrita como estando no Equador direcionada no sentido Norte. Eles estão certos, mas já basta de discussão.



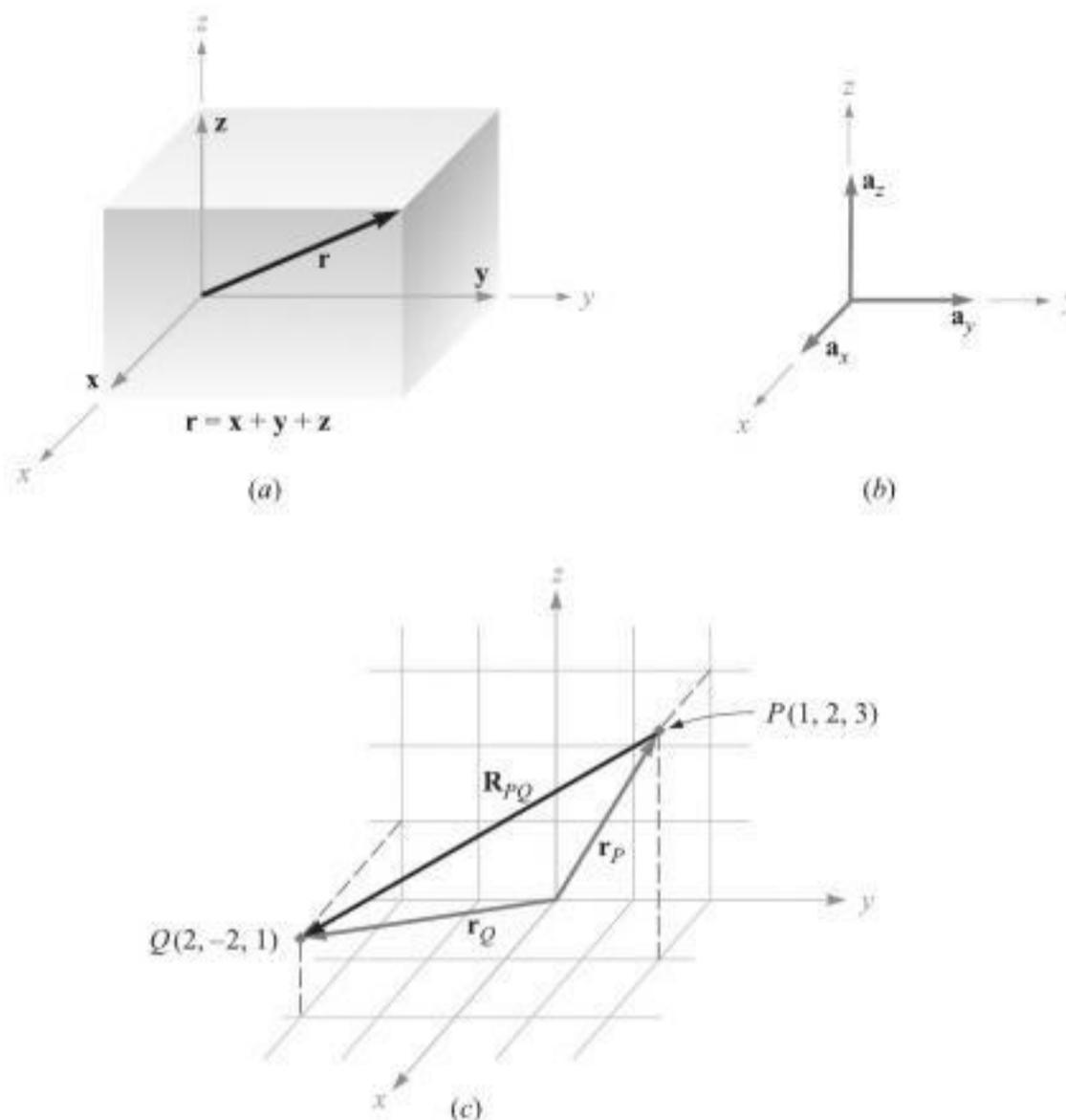
**Figura 1.2** (a) Um sistema de coordenadas cartesianas do tipo triedo direito. Se os dedos curvados da mão direita indicarem a direção e o sentido no qual o eixo  $x$  deve ser girado para coincidir com o eixo  $y$ , o dedo polegar mostrará a direção do eixo  $z$ . (b) A localização dos pontos  $P(1, 2, 3)$  e  $Q(2, -2, 1)$ . (c) O elemento de volume diferencial em coordenadas cartesianas;  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  são, em geral, elementos diferenciais independentes.

do paralelepípedo e tem comprimento de  $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ . O elemento de volume é mostrado na Figura 1.2c, na qual, o ponto  $P'$  é indicado, mas o ponto  $P$  está localizado no único vértice invisível.

Tudo isso é familiar à trigonometria ou à geometria espacial e envolve apenas grandezas escalares. Descreveremos os vetores em termos de um sistema de coordenadas na próxima seção.

## 1.4 COMPONENTES VETORIAIS E VETORES UNITÁRIOS

Para descrever um vetor no sistema de coordenadas cartesianas, vamos primeiro considerar um vetor  $\mathbf{r}$  que parte da origem. Uma maneira lógica de identificar esse vetor é fornecendo as três *componentes vetoriais*, tomadas ao longo dos três eixos



**Figura 1.3** (a) As componentes vetoriais  $x$ ,  $y$  e  $z$  do vetor  $r$ . (b) Os vetores unitários do sistema de coordenadas cartesianas possuem intensidade unitária e estão direcionados no sentido crescente dos valores de suas respectivas variáveis. (c) O vetor  $R_{PQ}$  é igual à diferença vetorial  $r_Q - r_P$ .

coordenados, e cuja soma vetorial deve representar o vetor dado. Se as componentes vetoriais do vetor  $r$  são  $x$ ,  $y$  e  $z$ , então  $r = x + y + z$ . As componentes vetoriais são mostradas na Figura 1.3a. Em vez de apenas um vetor, temos agora três, mas isso representa um ganho, pois os três vetores são de natureza muito simples: cada um está sempre na direção de um dos eixos coordenados.

Em outras palavras, as componentes vetoriais possuem intensidades as quais dependem do vetor dado (como  $r$ ), mas cada uma possui direção conhecida e constante. Tal fato sugere a utilização de *vetores unitários* possuindo intensidade unitária, por definição, e direção e sentido coincidentes com os dos eixos coordenados. Devemos reservar o símbolo  $a$  para um vetor unitário e identificar a direção e o sentido deste por um subscrito adequado. Logo,  $a_x$ ,  $a_y$  e  $a_z$  são os vetores unitários no sistema de coordenadas cartesianas.<sup>4</sup> Eles estão direcionados ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, conforme mostra a Figura 1.3b.

<sup>4</sup> Os símbolos  $i$ ,  $j$  e  $k$  são também usualmente utilizados para os vetores unitários em coordenadas cartesianas.

Se a componente vetorial  $\mathbf{y}$  tiver duas unidades de intensidade e estiver direcionada no sentido crescente dos valores de  $y$ , devemos então escrever  $\mathbf{y} = 2\mathbf{a}_y$ . Um vetor  $\mathbf{r}_P$  apontando da origem em direção ao ponto  $P(1, 2, 3)$  é escrito como  $\mathbf{r}_P = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ . O vetor de  $P$  a  $Q$  pode ser obtido pela aplicação da regra de adição vetorial. Essa regra mostra que o vetor que vai da origem até  $P$  mais o vetor de  $P$  a  $Q$  é igual ao vetor da origem até  $Q$ . O vetor desejado de  $P(1, 2, 3)$  até  $Q(2, -2, 1)$  é, desse modo,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{PQ} &= \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (2 - 1)\mathbf{a}_x + (-2 - 2)\mathbf{a}_y + (1 - 3)\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Os vetores  $\mathbf{r}_P$ ,  $\mathbf{r}_Q$  e  $\mathbf{R}_{PQ}$  são mostrados na Figura 1.3c.

Este último vetor não parte da origem, como foi o caso do vetor  $\mathbf{r}$  inicialmente considerado. Entretanto, já aprendemos que vetores que possuem a mesma intensidade, direção e sentido são iguais, de forma que, para auxiliar nossos processos de visualização, temos a liberdade de deslocar qualquer vetor até a origem antes de determinarmos suas componentes vetoriais. O paralelismo deve, é claro, ser mantido durante o processo de deslocamento.

Se nos referirmos a um vetor de força  $\mathbf{F}$  ou, na verdade, qualquer outro vetor que não seja referente a posicionamento, como  $\mathbf{r}$ , surge um problema para designar letras adequadas para as três componentes vetoriais. Não seria apropriado chamá-las de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ , pois estas são letras associadas a deslocamentos, ou distâncias orientadas, e são medidas em metros (abreviadas por m) ou por alguma outra unidade de comprimento. Esse problema é freqüentemente evitado pelo uso de *componentes escalares*, simplesmente chamadas de *componentes*  $F_x, F_y$  e  $F_z$ . As componentes são as intensidades (módulos) das componentes vetoriais, mas incluindo o sinal. Podemos então escrever  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{a}_x + F_y\mathbf{a}_y + F_z\mathbf{a}_z$ . As componentes vetoriais são  $F_x\mathbf{a}_x, F_y\mathbf{a}_y$  e  $F_z\mathbf{a}_z$ .

Qualquer vetor  $\mathbf{B}$  pode então ser descrito como  $\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$ . A intensidade de  $\mathbf{B}$ , escrita como  $|\mathbf{B}|$  ou simplesmente  $B$ , é dada por

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (1)$$

Cada um dos três sistemas de coordenadas que discutiremos terão seus três vetores unitários fundamentais e perpendiculares entre si, os quais são usados para decompor qualquer vetor em suas componentes vetoriais. Entretanto, o uso de vetores unitários não se limita apenas a essa aplicação. É sempre útil ser capaz de escrever um vetor unitário que possua direção e sentido especificados. Isso pode ser facilmente conseguido, uma vez que o vetor unitário em uma dada direção e sentido é simplesmente um vetor naquela direção e sentido dividido por sua intensidade. Um vetor unitário na direção  $\mathbf{r}$  é  $\mathbf{r}/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , e um vetor unitário na direção de  $\mathbf{B}$  é

$$\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad (2)$$

**EXEMPLO 1.1**

Especifique o vetor unitário que parte da origem em direção ao ponto  $G(2, -2, -1)$ .

**Solução.** Primeiro construímos o vetor que parte da origem e vai até o ponto  $G$ ,

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

Continuamos então encontrando a intensidade de  $\mathbf{G}$ ,

$$|\mathbf{G}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

e finalmente expressando o vetor unitário desejado como o quociente

$$\mathbf{a}_G = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|} = \frac{2}{3}\mathbf{a}_x - \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z = 0,667\mathbf{a}_x - 0,667\mathbf{a}_y - 0,333\mathbf{a}_z$$

Um símbolo identificador especial é desejável para um vetor unitário, de forma que seu caráter unitário se mostre imediatamente aparente. Símbolos que têm sido usados são  $\mathbf{u}_B$ ,  $\mathbf{a}_B$ ,  $\mathbf{1}_B$  ou mesmo  $\mathbf{b}$ . Devemos utilizar consistentemente a letra minúscula  $\mathbf{a}$  com o subscrito apropriado.

[NOTA: Ao longo do texto, exercícios propostos aparecem em seguida às seções nas quais um novo princípio é introduzido, com o objetivo de permitir aos estudantes testarem o entendimento que adquiriram do conceito. Os problemas são úteis para proporcionar familiaridade com novos termos e idéias e devem todos ser resolvidos. Problemas mais gerais aparecem nos finais dos capítulos. As respostas aos problemas propostos são apresentadas na mesma seqüência das partes do problema.]

**E1.1.** Dados os pontos  $M(-1, 2, 1)$ ,  $N(3, -3, 0)$  e  $P(-2, -3, -4)$ , encontre: (a)  $\mathbf{R}_{MN}$ ; (b)  $\mathbf{R}_{MN} + \mathbf{R}_{MP}$ ; (c)  $|\mathbf{r}_M|$ ; (d)  $\mathbf{a}_{MP}$ ; (e)  $|2\mathbf{r}_P - 3\mathbf{r}_N|$ .

**Resp.**  $4\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ ;  $3\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$ ; 2,45;  $-0,14\mathbf{a}_x - 0,7\mathbf{a}_y - 0,7\mathbf{a}_z$ ; 15,56

## 1.5 O CAMPO VETORIAL

Já definimos o campo vetorial como uma função vetorial de um vetor posição. Em geral, a intensidade, a direção e o sentido da função mudará à medida que nos movemos pela região, e o valor da função vetorial deve ser determinado utilizando os valores das coordenadas do ponto em questão. Uma vez que, até o momento, abordamos apenas o sistema de coordenadas cartesianas, devemos esperar que o vetor seja uma função das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Se novamente representarmos o vetor posição como  $\mathbf{r}$ , então um campo vetorial  $\mathbf{G}$  será expresso em notação funcional como  $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ , enquanto o campo escalar  $T$  será escrito como  $T(\mathbf{r})$ .

Se observássemos a velocidade da água no oceano em alguma região perto da superfície onde marés e correntes marinhas são importantes, poderíamos decidir representá-la por um vetor velocidade que teria qualquer direção e sentido, até mesmo para cima ou para baixo. Se o eixo  $z$  é tomado como apontando para cima, o eixo  $x$  como apontando para o norte, o eixo  $y$  apontando para o oeste, e a origem como estando na superfície, temos um sistema de coordenadas do tipo triado direto e podemos escrever o vetor velocidade como  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{a}_x + v_y\mathbf{a}_y + v_z\mathbf{a}_z$  ou  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r})\mathbf{a}_x + v_y(\mathbf{r})\mathbf{a}_y + v_z(\mathbf{r})\mathbf{a}_z$ . Cada

uma das componentes  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  pode ser função das três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Se o problema for simplificado, assumindo que estamos em alguma parte da Corrente do Golfo onde a água se move apenas no sentido norte, então  $v_y$  e  $v_z$  valem zero. Outras considerações simplificadoras podem ser feitas se a velocidade diminuir com a profundidade e variar muito lentamente à medida que nos movermos para o norte, sul, leste ou oeste. Uma expressão apropriada poderia ser  $\mathbf{v} = 2e^{z/100}\mathbf{a}_x$ . Tem-se uma velocidade de 2 m/s (metros por segundo) na superfície e uma velocidade de  $0,368 \times 2$ , ou 0,736 m/s na profundidade de 100 m ( $z = -100$ ), e a velocidade continuaria a cair com a profundidade. Neste exemplo, o vetor velocidade tem direção e sentido constantes.

O exemplo anterior é consideravelmente simples e representa apenas uma aproximação grosseira para uma situação física, contudo, uma expressão mais exata seria correspondentemente mais complexa e difícil de interpretar. Devemos deparar com diversos campos em nosso estudo de eletricidade e magnetismo, os quais são mais simples do que o exemplo de velocidade, como quando apenas uma componente e uma variável estão envolvidas (a componente  $x$  e a variável  $z$ ). Devemos também estudar campos mais complicados, e os métodos para interpretar fisicamente essas expressões serão discutidos a seguir.

**E1.2.** Um campo vetorial  $\mathbf{S}$  é expresso em coordenadas cartesianas como  $\mathbf{S} = \{125/[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]\}\{(x-1)\mathbf{a}_x + (y-2)\mathbf{a}_y + (z+1)\mathbf{a}_z\}$   
 (a) Calcule  $\mathbf{S}$  em  $P(2, 4, 3)$ . (b) Determine um vetor unitário para a direção e sentido de  $\mathbf{S}$  em  $P$ . (c) Especifique a superfície  $f(x, y, z)$  na qual  $|\mathbf{S}| = 1$ .

**Resp.**  $5,95\mathbf{a}_x + 11,90\mathbf{a}_y + 23,8\mathbf{a}_z$ ;  $0,218\mathbf{a}_x + 0,436\mathbf{a}_y + 0,873\mathbf{a}_z$ ;

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} = 125$$

## 1.6 O PRODUTO ESCALAR

Consideramos agora o primeiro de dois tipos de multiplicação de vetores. O segundo tipo será discutido na seção seguinte.

Dados dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , o *produto escalar* é definido como o produto da intensidade de  $\mathbf{A}$  pela intensidade de  $\mathbf{B}$  e pelo cosseno do menor ângulo entre eles,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} \quad (3)$$

Na notação, o símbolo “ $\cdot$ ” (ponto) aparece entre os dois vetores e deve ser fortemente grafado, para dar ênfase. O resultado de um produto escalar é também um escalar, conforme indica o próprio nome, e obedece à propriedade comutativa,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (4)$$

pois o sinal do ângulo não afeta o termo em cosseno. A expressão  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  deve ser lida como “ $\mathbf{A}$  escalar  $\mathbf{B}$ ”.

Talvez a aplicação mais comum do produto escalar seja em mecânica, onde uma força constante  $\mathbf{F}$  aplicada a longo de um deslocamento retilíneo  $\mathbf{L}$  executa uma quanti-

dade de trabalho  $F L \cos \theta$ , mais facilmente escrita como  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{L}$ . Podemos antecipar um dos resultados do Capítulo 4 ressaltando que, se a força variar ao longo do caminho, uma integração é necessária para encontrar o trabalho total, e o resultado será:

$$\text{Trabalho} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

O outro exemplo pode ser tirado dos campos magnéticos, assunto sobre o qual teremos muito mais a dizer adiante. O fluxo total  $\Phi$  que atravessa uma superfície de área  $S$  é dado por  $B S$ , se a densidade de fluxo magnético  $B$  for perpendicular à superfície e uniforme por sobre ela. Definimos o *vetor superfície*  $\mathbf{S}$  como tendo intensidade igual à área usual e direção *normal* à superfície (evitando, pelo momento, o problema de haver duas normais possíveis de serem tomadas). O fluxo atravessando a superfície vale então  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ . Essa expressão é válida para qualquer direção e sentido da densidade de fluxo magnético uniforme. Contudo, se a densidade de fluxo não é constante por sobre a superfície, o fluxo total vale  $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ . Integrais nessa forma genérica aparecerão no Capítulo 3, quando estudarmos densidade de fluxo elétrico.

Encontrar o ângulo entre dois vetores em um espaço tridimensional é normalmente uma tarefa que preferimos evitar, e por essa razão a definição do produto escalar não é utilizada na sua forma básica. Um resultado mais útil é obtido quando consideramos dois vetores cujas componentes cartesianas são dadas, tal como  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$ . O produto escalar também segue a propriedade distributiva e, com isso,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  leva à soma de nove termos escalares, cada um envolvendo o produto escalar de dois vetores unitários. Uma vez que o ângulo entre dois vetores unitários diferentes no sistema de coordenadas cartesianas é  $90^\circ$ , temos então

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y = 0$$

Os três termos restantes envolvem o produto escalar de um vetor unitário com ele mesmo, que é igual à unidade, resultando finalmente em

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (5)$$

uma expressão que não envolve ângulos.

O produto escalar de um vetor com ele mesmo resulta no quadrado da sua intensidade, ou

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2 \quad (6)$$

e o produto escalar de qualquer vetor unitário com ele mesmo leva à unidade

$$\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_A = 1$$

Uma das mais importantes aplicações do produto escalar é a de encontrar a componente de um vetor em uma dada direção. Como mostra a Figura 1.4a, podemos obter a componente (escalar) de  $\mathbf{B}$  na direção especificada pelo vetor unitário  $\mathbf{a}$  por meio de

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}| |\mathbf{a}| \cos \theta_{Ba} = |\mathbf{B}| \cos \theta_{Ba}$$

O sinal da componente é positivo se  $0 \leq \theta_{Ba} \leq 90^\circ$  e negativo caso  $90^\circ \leq \theta_{Ba} \leq 180^\circ$ .

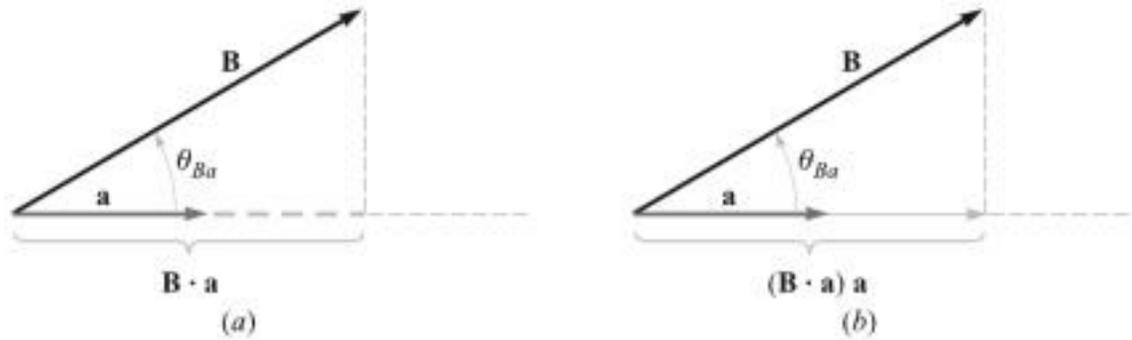


Figura 1.4 (a) A componente escalar de  $\mathbf{B}$  na direção do vetor unitário  $\mathbf{a}$  é  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ . (b) A componente vetorial de  $\mathbf{B}$  na direção do vetor unitário  $\mathbf{a}$  é  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$ .

Com o objetivo de obter a componente *vetorial* de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{a}$ , nós simplesmente multiplicamos a componente (escalar) por  $\mathbf{a}$ , conforme ilustra a Figura 1.4b. Por exemplo, a componente de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{a}_x$  é  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x = B_x$ , e a componente vetorial é  $B_x \mathbf{a}_x$ , ou  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x)\mathbf{a}_x$ . Com isso, o problema de encontrar a componente de um vetor em qualquer direção desejada se torna o problema de encontrar um vetor unitário naquela direção, e isso podemos fazer.

O termo geométrico *projeção* é também usado com o produto vetorial. Logo,  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$  é a projeção de  $\mathbf{B}$  na direção de  $\mathbf{a}$ .

### EXEMPLO 1.2

Com o objetivo de ilustrar essas definições e operações, consideremos um campo vetorial  $\mathbf{G} = y\mathbf{a}_x - 2,5x\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$  e o ponto  $Q(4, 5, 2)$ . Desejamos encontrar:  $\mathbf{G}$  em  $Q$ ; a componente escalar de  $\mathbf{G}$  em  $Q$  na direção de  $\mathbf{a}_N = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z)$ ; a componente vetorial de  $\mathbf{G}$  em  $Q$  na direção  $\mathbf{a}_N$ ; finalmente, o ângulo  $\theta_{Ga}$  entre  $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q)$  e  $\mathbf{a}_N$ .

**Solução.** Substituindo as coordenadas do ponto  $Q$  na expressão de  $\mathbf{G}$ , temos

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q) = 5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

Em seguida, encontramos a componente escalar. Utilizando o produto escalar, temos

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N = (5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = \frac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

A componente vetorial é obtida pela multiplicação da componente escalar pelo vetor unitário na direção de  $\mathbf{a}_N$ ,

$$(\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N = -\left(\frac{2}{3}\right)(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = -1,333\mathbf{a}_x - 0,667\mathbf{a}_y + 1,333\mathbf{a}_z$$

O ângulo entre  $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q)$  e  $\mathbf{a}_N$  é encontrado de

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N &= |\mathbf{G}| \cos \theta_{Ga} \\ -2 &= \sqrt{25 + 100 + 9} \cos \theta_{Ga} \end{aligned}$$

e

$$\theta_{Ga} = \cos^{-1} \frac{-2}{\sqrt{134}} = 99,9^\circ$$

**E1.3.** Os três vértices de um triângulo localizam-se em  $A(6, -1, 2)$ ,  $B(-2, 3, -4)$  e  $C(-3, 1, 5)$ . Encontre: (a)  $\mathbf{R}_{AB}$ ; (b)  $\mathbf{R}_{AC}$ ; (c) o ângulo  $\theta_{BAC}$  no vértice  $A$ ; (d) a projeção (vetorial) de  $\mathbf{R}_{AB}$  em  $\mathbf{R}_{AC}$ .

**Resp.**  $-8\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$ ;  $-9\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ ;  $53,6^\circ$ ;  $-5,94\mathbf{a}_x + 1,319\mathbf{a}_y + 1,979\mathbf{a}_z$

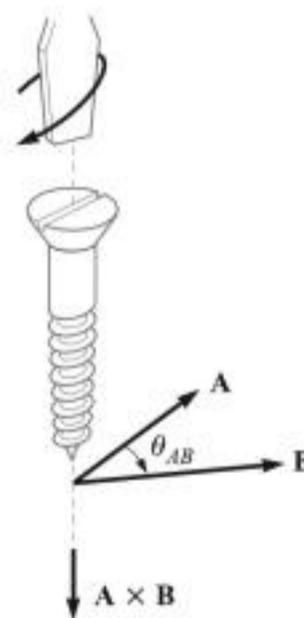
## 1.7 O PRODUTO VETORIAL

Dados dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , podemos agora definir o *produto vetorial* de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , que é escrito com um sinal “de cruz” entre os dois vetores, como  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , e é lido como “ $\mathbf{A}$  vec  $\mathbf{B}$ ”. O resultado do produto vetorial  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  é um vetor. A intensidade de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  é igual ao produto das intensidades de  $\mathbf{A}$ , de  $\mathbf{B}$  e do seno do menor ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . A direção de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  é perpendicular ao plano que contém  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , e o sentido é aquele relativo ao avanço de um parafuso dextrogiro que é girado de  $\mathbf{A}$  para  $\mathbf{B}$ . Tais direção e sentido são ilustrados na Figura 1.5. Deve-se lembrar que ambos os vetores podem ser movidos à vontade, mantendo sua direção e sentido constantes, até que ambos tenham uma “origem comum”. Tal procedimento determina o plano que os contém. Entretanto, na maioria das nossas aplicações, deveremos lidar com vetores que são definidos no mesmo ponto.

Na forma de equação, podemos escrever

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \text{sen } \theta_{AB} \quad (7)$$

onde uma informação adicional, tal como a dada acima, é ainda necessária para explicar a direção e o sentido do vetor unitário  $\mathbf{a}_N$ . O subscrito significa “normal”.



**Figura 1.5** A direção e o sentido de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  são na direção e no sentido de avanço de um parafuso dextrogiro rotacionado no sentido de  $\mathbf{A}$  para  $\mathbf{B}$ .

Invertendo a ordem dos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  resulta em um vetor unitário na mesma direção mas em sentido oposto, e vemos assim que o produto vetorial não é comutativo, uma vez que  $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ . Se a definição do produto vetorial for aplicada aos vetores unitários  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$ , encontramos  $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ , uma vez que cada vetor é unitário, os dois vetores são perpendiculares entre si e a rotação de  $\mathbf{a}_x$  em direção a  $\mathbf{a}_y$  indica a direção positiva de  $z$  pela definição de um sistema de coordenadas do tipo triedro direto. De maneira semelhante,  $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$ . Note a simetria alfabética. Uma vez que os três vetores  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$  são escritos nessa seqüência (e assumindo que  $\mathbf{a}_x$  vem em seguida a  $\mathbf{a}_z$ , como três elefantes em um círculo, um segurando o rabo do outro, de forma que poderíamos também escrever  $\mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z, \mathbf{a}_x$  ou  $\mathbf{a}_z, \mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ ), então os sinais “de cruz” e de igualdade podem ser colocados em qualquer um dos dois espaços vazios adjacentes. Na verdade, é mais fácil agora definir um sistema de coordenadas cartesianas do tipo triedro direto afirmando que  $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ .

Um exemplo simples do uso do produto vetorial pode ser tirado da geometria ou da trigonometria. Para se encontrar a área de um paralelogramo, o produto do comprimento de dois lados adjacentes é multiplicado pelo seno do ângulo entre eles. Utilizando a notação vetorial para os dois lados, podemos então expressar a área (escalar) como a *intensidade* de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , ou  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ .

O produto vetorial pode ser utilizado para substituir a regra da mão direita, a qual é familiar a todos os engenheiros eletricitas. Considere que estão presentes uma força em um condutor retilíneo de comprimento  $L$ , em que a direção e o sentido associados a  $L$  correspondem à direção e ao sentido de uma corrente contínua  $I$ , e um campo magnético uniforme com densidade de fluxo  $\mathbf{B}$ . Utilizando a notação vetorial, podemos escrever o resultado de forma elegante como  $\mathbf{F} = I L \times \mathbf{B}$ . Essa relação será obtida mais tarde, no Capítulo 9.

O cálculo do produto vetorial com essa definição torna-se mais trabalhoso que o cálculo do produto escalar pela sua definição, não somente porque temos de encontrar o ângulo entre os vetores, mas também porque temos de encontrar uma expressão para o vetor unitário  $\mathbf{a}_N$ . Esse trabalho pode ser evitado, utilizando componentes cartesianas para os dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e expandindo o produto vetorial como uma soma de nove produtos vetoriais mais simples, cada um envolvendo dois vetores unitários,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= A_x B_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Já descobrimos que  $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$ . Os três termos restantes são todos zero, uma vez que o produto vetorial de qualquer vetor por ele mesmo é zero, pois o ângulo envolvido será nulo. Esses resultados podem ser combinados de forma que resulte em

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z \quad (8)$$

ou escritos como um determinante, em uma forma que pode ser mais facilmente lembrada,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (9)$$

Assim, se  $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ , temos

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(5) - (1)(-2)]\mathbf{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)]\mathbf{a}_y + [(2)(-2) - (-3)(-4)]\mathbf{a}_z \\ &= -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

**E1.4.** Os três vértices de um triângulo localizam-se em  $A(6, -1, 2)$ ,  $B(-2, 3, -4)$  e  $C(-3, 1, 5)$ . Encontre: (a)  $\mathbf{R}_{AB} \times \mathbf{R}_{AC}$ ; (b) a área do triângulo; (c) um vetor unitário perpendicular ao plano ao qual o triângulo pertence.

**Resp.**  $24\mathbf{a}_x + 78\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z$ ; 42,0;  $0,286\mathbf{a}_x + 0,928\mathbf{a}_y + 0,238\mathbf{a}_z$

## 1.8 OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS: COORDENADAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

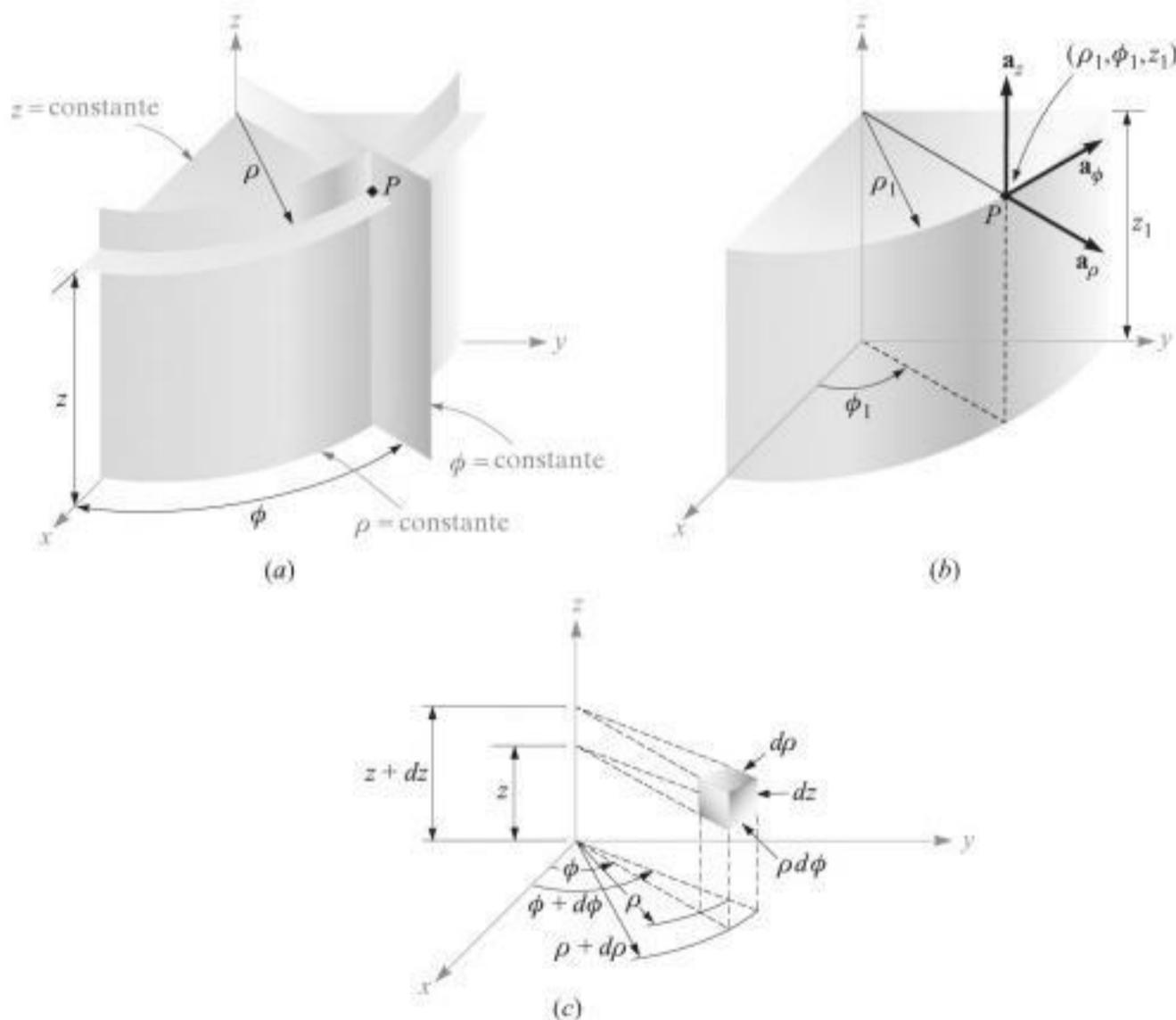
O sistema de coordenadas cartesianas é geralmente aquele que os estudantes preferem utilizar em todos os problemas. Isso freqüentemente resulta em mais trabalho para o estudante, porque muitos problemas possuem um tipo de simetria que pede por um tratamento mais adequado. É mais fácil fazer agora, de uma vez por todas, o esforço necessário para se familiarizar com coordenadas cilíndricas e esféricas, em vez de aplicar futuramente um esforço igual ou superior em todos os problemas que envolvem simetria esférica ou cilíndrica. Tendo em mente essa economia de tempo futuro, devemos dar uma olhada cuidadosa e sem pressa no tema coordenadas cilíndricas e esféricas.

O sistema de coordenadas cilíndricas circulares é a versão tridimensional das coordenadas polares da geometria analítica. Nas coordenadas polares bidimensionais, um ponto era localizado em um plano pela sua distância  $\rho$  em relação à origem e o ângulo  $\phi$  entre a reta que liga o ponto à origem e uma reta radial arbitrária, tomada como  $\phi = 0$ .<sup>5</sup> Um sistema de coordenadas tridimensionais, as coordenadas cilíndricas circulares, é obtido pela especificação adicional da distância  $z$  do ponto em relação a um plano de referência  $z = 0$ , o qual é perpendicular à reta  $\rho = 0$ . Por simplicidade, normalmente nos referimos às coordenadas cilíndricas circulares apenas como coordenadas cilíndricas. Isso não causará nenhuma confusão na leitura deste livro, mas deve-se ressaltar que também existem outros sistemas como coordenadas cilíndricas elípticas, coordenadas cilíndricas hiperbólicas, coordenadas cilíndricas parabólicas, entre outras.

<sup>5</sup> As duas variáveis das coordenadas polares são usualmente denominadas  $r$  e  $\theta$ . Com três coordenadas, entretanto, é mais comum usar  $\rho$  para a variável associada ao raio das coordenadas cilíndricas e  $r$  para a variável relacionada ao raio (que é diferente da anterior) das coordenadas esféricas. Além disso, a variável associada ao ângulo das coordenadas cilíndricas é usualmente chamada de  $\phi$ , porque todos usam  $\theta$  para um outro ângulo em coordenadas esféricas. O ângulo  $\phi$  é comum para ambas as coordenadas cilíndricas e esféricas. É possível perceber isso?

Não mais consideramos três eixos como nas coordenadas cartesianas, mas devemos, em vez disso, considerar qualquer ponto como a interseção de três superfícies mutuamente perpendiculares. Essas superfícies são um cilindro circular ( $\rho = \text{constante}$ ), um plano ( $\phi = \text{constante}$ ) e outro plano ( $z = \text{constante}$ ). Isso corresponde à localização de um ponto em um sistema de coordenadas cartesianas pela interseção de três planos ( $x = \text{constante}$ ,  $y = \text{constante}$  e  $z = \text{constante}$ ). As três superfícies das coordenadas cilíndricas circulares são mostradas na Figura 1.6a. Note que superfícies como essas podem passar por qualquer ponto, a não ser que este esteja sobre o eixo  $z$ , caso no qual um único plano é suficiente.

Três vetores unitários devem também ser definidos, mas já não temos que direcioná-los ao longo dos “eixos coordenados”, pois esses eixos existem apenas nas coordenadas cartesianas. Em vez disso, devemos adotar uma visão mais ampla dos vetores unitários das coordenadas cartesianas e perceber que eles apontam, na verdade, no sentido crescente dos valores das coordenadas e são perpendiculares à superfície na qual o valor da coordenada em questão é constante (i.e., o vetor unitário  $\mathbf{a}_x$  é normal ao plano  $x = \text{constante}$  e aponta no sentido dos valores crescentes de  $x$ ). De maneira correspondente, podemos agora definir os três vetores unitários em coordenadas cilíndricas  $\mathbf{a}_\rho$ ,  $\mathbf{a}_\phi$  e  $\mathbf{a}_z$ .



**Figura 1.6** (a) As três superfícies mutuamente perpendiculares do sistema de coordenadas cilíndricas circulares. (b) Os três vetores unitários do sistema de coordenadas cilíndricas circulares. (c) O elemento de volume diferencial no sistema de coordenadas cilíndricas circulares;  $d\rho$ ,  $\rho d\phi$  e  $dz$  são todos elementos de comprimento.

O vetor unitário  $\mathbf{a}_\rho$  em um ponto  $P(\rho_1, \phi_1, z_1)$  aponta radialmente para fora, e é normal à superfície cilíndrica  $\rho = \rho_1$ . Ele pertence aos planos  $\phi = \phi_1$  e  $z = z_1$ . O vetor unitário  $\mathbf{a}_\phi$  é normal ao plano  $\phi = \phi_1$ , aponta no sentido crescente de  $\phi$ , pertence ao plano  $z = z_1$  e é tangente à superfície cilíndrica  $\rho = \rho_1$ . O vetor unitário  $\mathbf{a}_z$  é o mesmo que o vetor unitário  $\mathbf{a}_z$  do sistema de coordenadas cartesianas. A Figura 1.6b mostra os três vetores em coordenadas cilíndricas.

Em coordenadas cartesianas, os vetores unitários não são funções das coordenadas. Dois dos vetores unitários em coordenadas cilíndricas,  $\mathbf{a}_\rho$  e  $\mathbf{a}_\phi$ , entretanto, *variam* com a coordenada  $\phi$ , uma vez que suas direções variam. Em operações de integração ou diferenciação em relação a  $\phi$ , então,  $\mathbf{a}_\rho$  e  $\mathbf{a}_\phi$  não devem ser tratadas como constantes.

Os vetores unitários são novamente perpendiculares entre si, pois cada um é normal a uma das três superfícies mutuamente perpendiculares, e podemos definir um sistema de coordenadas cilíndricas do tipo triedro direto como aquele no qual  $\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$ , ou (para aqueles que possuem dedos flexíveis) como aquele em que os dedos polegar, indicador e médio apontam respectivamente nas direções crescentes de  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$ .

Um elemento de volume diferencial em coordenadas cilíndricas pode ser obtido aumentando-se  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  de incrementos diferenciais  $d\rho$ ,  $d\phi$  e  $dz$ . Os dois cilindros de raios  $\rho$  e  $\rho + d\rho$ , os dois planos radiais nos ângulos  $\phi$  e  $\phi + d\phi$  e os dois planos “horizontais” nas “elevações”  $z$  e  $z + dz$  agora limitam um volume pequeno, conforme mostra a Figura 1.6c, que tem o formato de uma cunha truncada. À medida que o elemento de volume torna-se muito pequeno, seu formato se aproxima ao de um paralelepípedo retângulo com lados de comprimento  $d\rho$ ,  $\rho d\phi$  e  $dz$ . Note que  $d\rho$  e  $dz$  possuem dimensão de comprimento, mas  $d\phi$ , não  $\rho d\phi$  é que representa o comprimento. As superfícies possuem áreas de  $\rho d\rho d\phi$ ,  $d\rho dz$  e  $\rho d\phi dz$ , e o volume se torna  $\rho d\rho d\phi dz$ .

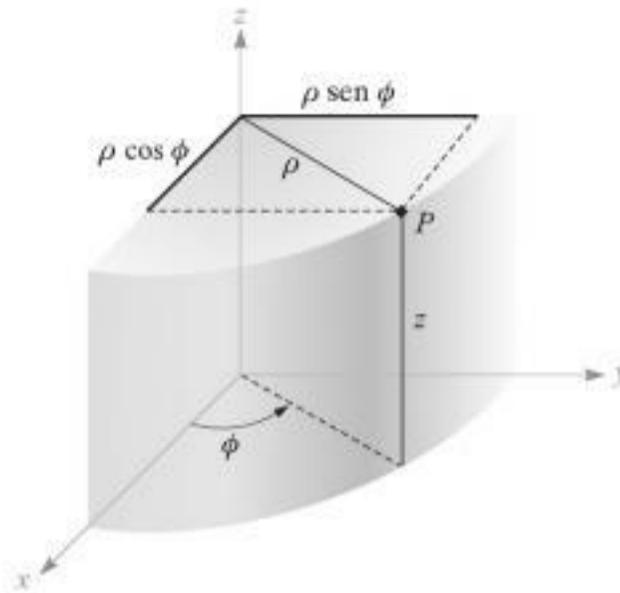
As variáveis dos sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas podem ser facilmente relacionadas umas às outras. Com referência à Figura 1.7, podemos ver que

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}\tag{10}$$

Por outro ponto de vista, podemos expressar as variáveis cilíndricas em termos de  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z\end{aligned}\tag{11}$$

Devemos considerar a variável  $\rho$  como positiva ou zero, usando, para isso, apenas o sinal positivo para a radiciação em (11). O valor correto do ângulo  $\phi$  é determinado observando os sinais de  $x$  e  $y$ . Desse modo, se  $x = -3$  e  $y = 4$ , descobrimos que o ponto se situa no segundo quadrante, de forma que  $\rho = 5$  e  $\phi = 126,9^\circ$ . Para  $x = 3$  e  $y = -4$ , temos  $\phi = -53,1^\circ$  ou  $306,9^\circ$ , o que for mais conveniente.



**Figura 1.7** A relação entre as variáveis cartesianas  $x, y, z$  e as variáveis das coordenadas cilíndricas  $\rho, \phi, z$ . Não há mudança na variável  $z$  entre os dois sistemas.

Usando (10) ou (11), funções escalares dadas em um sistema de coordenadas podem ser facilmente transformadas para o outro sistema.

Uma função vetorial em um sistema de coordenadas, entretanto, requer dois passos para que seja transformada para outro sistema de coordenadas, pois um conjunto diferente de componentes vetoriais é normalmente necessário. Isto é, pode ser apresentado um vetor em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

no qual cada componente é dada como uma função de  $x, y$  e  $z$ , e precisamos de um vetor em coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z$$

no qual cada coordenada é dada como uma função de  $\rho, \phi$  e  $z$ .

Para encontrar qualquer componente vetorial desejada, relembramos a discussão sobre o produto escalar em que a componente em uma direção desejada pode ser obtida tomando-se o produto escalar entre o vetor e o vetor unitário na direção desejada. Logo,

$$A_\rho = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho \quad \text{e} \quad A_\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi$$

Expandindo estes produtos escalares, temos

$$A_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho \quad (12)$$

$$A_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi \quad (13)$$

e

$$A_z = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z = A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = A_z \quad (14)$$

uma vez que  $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho$  e  $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi$  são zero.

**Tabela 1.1** Produtos escalares de vetores unitários nos sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas.

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$\mathbf{a}_z \cdot$	0	0	1

Com o objetivo de completar a transformação das componentes, é necessário conhecer os produtos escalares  $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho$ ,  $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho$ ,  $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi$  e  $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi$ . Aplicando a definição do produto escalar, uma vez que estamos interessados em vetores unitários, percebemos que o resultado é simplesmente o cosseno do ângulo entre os dois vetores unitários em questão. Referindo-se à Figura 1.7, e com um esforço de raciocínio, identificamos o ângulo entre  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_\rho$  como  $\phi$ , com isso,  $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos \phi$ , mas o ângulo entre  $\mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_\rho$  é  $90^\circ - \phi$ , e  $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ . Esses produtos escalares restantes entre os vetores unitários são encontrados de maneira semelhante, e os resultados estão tabulados em função de  $\phi$  na Tabela 1.1.

A transformação de vetores de coordenadas em cartesianas cilíndricas e vice-versa é, portanto, alcançada utilizando (10) ou (11), para mudar as variáveis, e utilizando os produtos escalares entre vetores unitários dados na Tabela 1.1, para mudar as componentes. Esses dois passos devem ser executados em qualquer ordem.

### EXEMPLO 1.3

Transforme o vetor  $\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$  em coordenadas cilíndricas.

**Solução.** As novas componentes são

$$\begin{aligned} B_\rho &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho) \\ &= y \cos \phi - x \sin \phi = \rho \sin \phi \cos \phi - \rho \cos \phi \sin \phi = 0 \\ B_\phi &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi) \\ &= -y \sin \phi - x \cos \phi = -\rho \sin^2 \phi - \rho \cos^2 \phi = -\rho \end{aligned}$$

Com isso,

$$\mathbf{B} = -\rho\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z$$

**E1.5.** (a) Forneça as coordenadas cartesianas do ponto  $C(\rho = 4,4, \phi = -115^\circ, z = 2)$ . (b) Forneça as coordenadas cilíndricas do ponto  $D(x = -3,1, y = 2,6, z = -3)$ . (c) Especifique a distância entre  $C$  e  $D$ .

**Resp.**  $C(x = -1,860, y = -3,99, z = 2)$ ;  $D(\rho = 4,05, \phi = 140,0^\circ, z = -3)$ ; 8,36

**E1.6.** Transforme em coordenadas cilíndricas: (a)  $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$  no ponto  $P(10, -8, 6)$ ; (b)  $\mathbf{G} = (2x + y)\mathbf{a}_x - (y - 4x)\mathbf{a}_y$  no ponto  $Q(\rho, \phi, z)$ . (c) Forneça as componentes cartesianas do vetor  $\mathbf{H} = 20\mathbf{a}_\rho - 10\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$  em  $P(x = 5, y = 2, z = -1)$ .

**Resp.**  $12,81\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_z$ ;  $(2\rho \cos^2 \phi - \rho \sin^2 \phi + 5\rho \sin \phi \cos \phi)\mathbf{a}_\rho + (4\rho \cos^2 \phi - \rho \sin^2 \phi - 3\rho \sin \phi \cos \phi)\mathbf{a}_\phi$ ;  $H_x = 22,3, H_y = -1,857, H_z = 3$

## 1.9 O SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

Não existe um sistema de coordenadas bidimensional para nos auxiliar no entendimento do sistema de coordenadas esféricas tridimensional, conforme ocorre para o sistema de coordenadas cilíndricas circulares. Em certos aspectos, podemos recorrer ao nosso conhecimento do sistema de latitude e longitude de localização na superfície da Terra, mas nesse caso, usualmente, consideramos apenas pontos na superfície e não aqueles abaixo ou acima do solo.

Vamos começar construindo um sistema de coordenadas esféricas nos três eixos cartesianos (Figura 1.8a). Primeiro definimos a distância da origem até um ponto qualquer como  $r$ . A superfície  $r = \text{constante}$  é uma esfera.

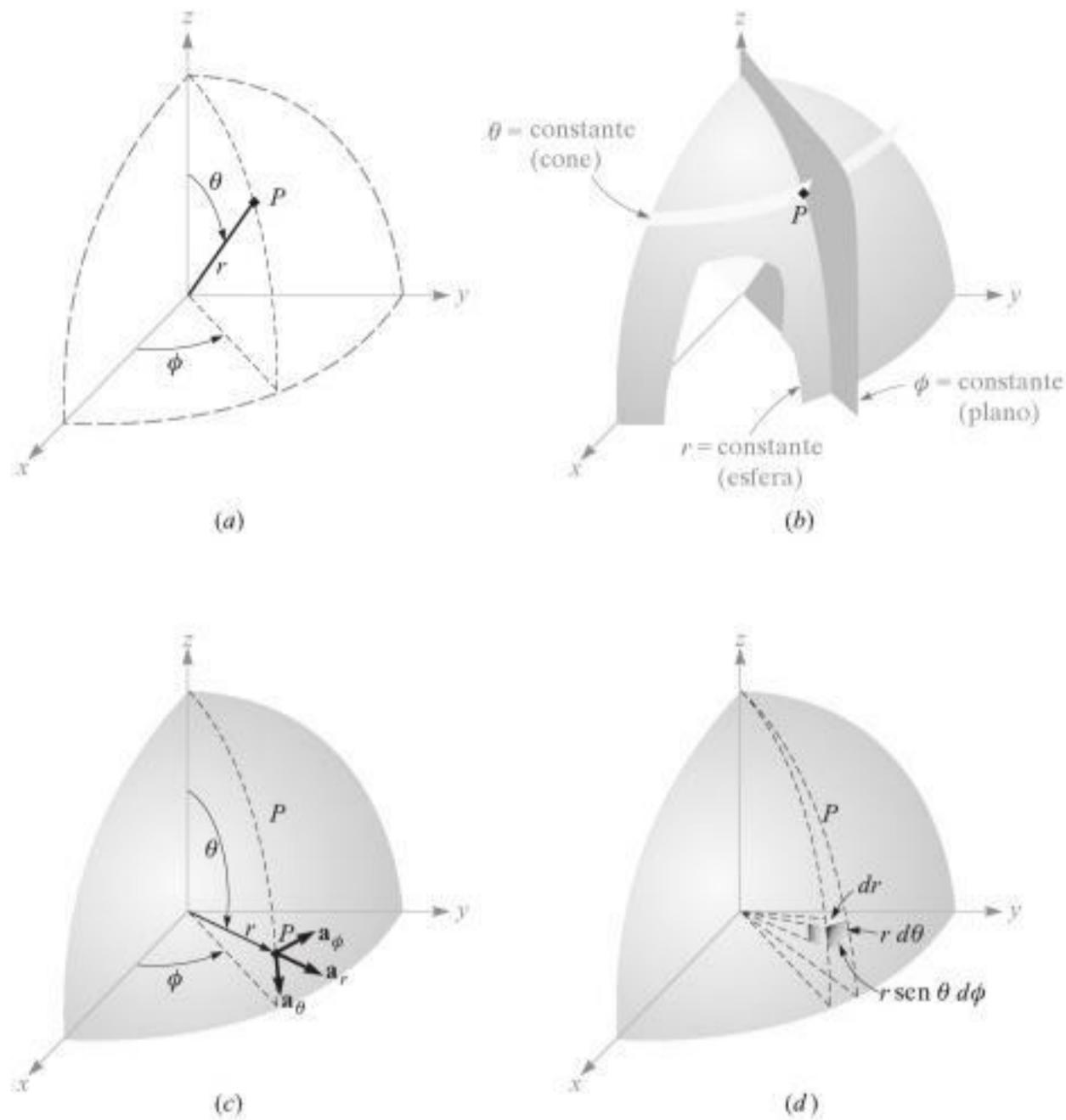
A segunda coordenada é um ângulo  $\theta$  entre o eixo  $z$  e a linha traçada da origem até o ponto em questão. A superfície  $\theta = \text{constante}$  é um cone, e as duas superfícies, cone e esfera, são perpendiculares entre si em qualquer ponto de sua interseção, que é um círculo de raio  $r \sin \theta$ . A coordenada  $\theta$  corresponde à latitude, exceto pelo fato de a latitude ser medida a partir da linha do Equador e  $\theta$  ser medido a partir do Pólo Norte.

A terceira coordenada  $\phi$  é também um ângulo, e é exatamente a mesma do ângulo  $\phi$  das coordenadas cilíndricas. É o ângulo entre o eixo  $x$  e a projeção, no plano  $z = 0$ , da reta traçada da origem até o ponto. Corresponde ao ângulo da longitude, mas o ângulo  $\phi$  aumenta em direção ao “leste”. A superfície  $\phi = \text{constante}$  é um plano que passa pela reta  $\theta = 0$  (ou eixo  $z$ ).

Devemos novamente considerar qualquer ponto como sendo a interseção entre três superfícies mutuamente perpendiculares – uma esfera, um cone e um plano – cada uma orientada exatamente da maneira descrita. As três superfícies são mostradas na Figura 1.8b.

Três vetores unitários podem novamente ser definidos em qualquer ponto. Cada vetor unitário é perpendicular a uma das três superfícies mutuamente perpendiculares e é orientado no sentido crescente da coordenada. O vetor unitário  $\mathbf{a}_r$  direciona-se radialmente no sentido “para fora”, é normal à esfera  $r = \text{constante}$  e pertence ao cone  $\theta = \text{constante}$  e ao plano  $\phi = \text{constante}$ . O vetor unitário  $\mathbf{a}_\theta$  é normal à superfície cônica, pertence ao plano e é tangente à esfera. Direciona-se ao longo da linha de “longitude” apontando no sentido “sul”. O terceiro vetor unitário  $\mathbf{a}_\phi$  é o mesmo das coordenadas cilíndricas, sendo normal ao plano e tangente tanto ao cone quanto à esfera. É direcionado no sentido “leste”.

Os três vetores unitários são mostrados na Figura 1.8c. Eles são, é claro, perpendiculares entre si, e um sistema de coordenadas do tipo triedro direto pode ser definido fazendo-se  $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$ . Nosso sistema é realmente do tipo triedro direto, como uma inspeção na Figura 1.8c pode mostrar, quando da aplicação da definição do produto vetorial. A regra de mão direita serve para identificar os dedos polegar, indicador e médio



**Figura 1.8** (a) As três coordenadas esféricas. (b) As três superfícies mutuamente perpendiculares do sistema de coordenadas esféricas. (c) Os três vetores unitários das coordenadas esféricas:  $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$ . (d) O elemento de volume diferencial no sistema de coordenadas esféricas.

como correspondentes às direções e aos sentidos crescentes de  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , respectivamente. (Note que a identificação em coordenadas cilíndricas foi  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  e em coordenadas cartesianas foi  $x$ ,  $y$  e  $z$ .) Um elemento de volume diferencial pode ser construído em coordenadas esféricas incrementando  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  de  $dr$ ,  $d\theta$  e  $d\phi$ , conforme mostra a Figura 1.8d. A distância entre as duas superfícies esféricas de raio  $r$  e  $r + dr$  é  $dr$ , a distância entre os dois cones cujos ângulos geradores são  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  é  $r d\theta$  e a distância entre os dois planos radiais nos ângulos  $\phi$  e  $\phi + d\phi$  pode ser encontrada como  $r \sin \theta d\phi$ , após alguns momentos de raciocínio trigonométrico. As superfícies possuem áreas de  $r dr d\theta$ ,  $r \sin \theta dr d\phi$  e  $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , e o volume é  $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ .

A transformação de escalares do sistema de coordenadas cartesianas para esféricas é facilmente realizada, utilizando a Figura 1.8a para relacionar os dois conjuntos de variáveis:

$$\begin{aligned}x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (15)$$

A transformação na direção inversa é obtida com o auxílio de

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (r \geq 0) \\ \theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ) \\ \phi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}\end{aligned}\quad (16)$$

A variável  $r$  para o raio é sempre não-negativa, e  $\theta$  é restrito à faixa de variação de  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , inclusive. Os ângulos são colocados nos quadrantes apropriados, observando os sinais de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

A transformação de vetores requer a determinação dos produtos dos vetores unitários em coordenadas cartesianas e esféricas. Podemos calcular esses produtos com o auxílio da Figura 1.8c e um pouco de trigonometria. Uma vez que o produto escalar de qualquer vetor unitário esférico com qualquer vetor unitário cartesiano é a componente do vetor esférico na direção do vetor cartesiano, os produtos vetoriais com  $\mathbf{a}_z$  são calculados como

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r &= \cos \theta \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta &= -\operatorname{sen} \theta \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi &= 0\end{aligned}$$

Os produtos escalares envolvendo  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$  requerem primeiro a projeção do vetor unitário esférico no plano  $xy$  e depois a projeção no eixo desejado. Por exemplo,  $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x$  é obtido pela projeção de  $\mathbf{a}_r$  no plano  $xy$ , resultando em  $\operatorname{sen} \theta$ , e então projetando  $\operatorname{sen} \theta$  no eixo  $x$ , o que leva a  $\operatorname{sen} \theta \cos \phi$ . Os outros produtos escalares são encontrados de maneira similar; e todos são mostrados na Tabela 1.2.

**Tabela 1.2** Produtos escalares de vetores unitários nos sistemas de coordenadas cartesianas e esféricas.

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\operatorname{sen} \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\operatorname{sen} \phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$	$\cos \theta \operatorname{sen} \phi$	$\cos \phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos \theta$	$-\operatorname{sen} \theta$	$0$

**EXEMPLO 1.4**

Ilustramos esse procedimento de transformação convertendo o campo vetorial  $\mathbf{G} = (xz/y)\mathbf{a}_x$  em variáveis e componentes esféricas.

**Solução.** Encontramos as três componentes esféricas calculando o produto escalar entre  $\mathbf{G}$  e os vetores unitários apropriados e mudamos as variáveis durante este procedimento:

$$\begin{aligned} G_r &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_r = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \frac{xz}{y} \sin \theta \cos \phi \\ &= r \sin \theta \cos \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} \\ G_\theta &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y} \cos \theta \cos \phi \\ &= r \cos^2 \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} \\ G_\phi &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y} (-\sin \phi) \\ &= -r \cos \theta \cos \phi \end{aligned}$$

Reunindo esses resultados, temos

$$\mathbf{G} = r \cos \theta \cos \phi (\sin \theta \cot \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \cot \phi \mathbf{a}_\theta - \mathbf{a}_\phi)$$

O Apêndice A descreve o sistema genérico de coordenadas curvilíneas, no qual os sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndrica circular e esférica são casos especiais. Agora seria um bom momento para uma leitura da primeira seção desse apêndice.

**E1.7.** Dados dois pontos,  $C(-3, 2, 1)$  e  $D(r = 5, \theta = 20^\circ, \phi = -70^\circ)$ , encontre: (a) as coordenadas esféricas de  $C$ ; (b) as coordenadas cartesianas de  $D$ ; (c) a distância entre  $C$  e  $D$ .

**Resp.**  $C(r = 3,74, \theta = 74,5^\circ, \phi = 146,3^\circ)$ ;  $D(x = 0,585, y = -1,607, z = 4,70)$ ; 6,29

**E1.8.** Transforme os seguintes vetores em coordenadas esféricas nos pontos dados: (a)  $10\mathbf{a}_x$  em  $P(x = -3, y = 2, z = 4)$ ; (b)  $10\mathbf{a}_y$  em  $Q(\rho = 5, \phi = 30^\circ, z = 4)$ ; (c)  $10\mathbf{a}_z$  em  $M(r = 4, \theta = 110^\circ, \phi = 120^\circ)$ .

**Resp.**  $-5,57\mathbf{a}_r - 6,18\mathbf{a}_\theta - 5,55\mathbf{a}_\phi$ ;  $3,90\mathbf{a}_r + 3,12\mathbf{a}_\theta + 8,66\mathbf{a}_\phi$ ;  $-3,42\mathbf{a}_r - 9,40\mathbf{a}_\theta$

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1. Grossman, S. I. *Calculus*. 3ª ed. Orlando, Fla.: Academic Press and Harcourt Brace Jovanovich, 1984. Álgebra vetorial e coordenadas cilíndricas e esféricas aparecem no Capítulo 17, e cálculo vetorial é introduzido no Capítulo 20.

2. Spiegel, M. R. *Vector Analysis*. Schaum Outline Series. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1959. Um grande número de exemplos e problemas com respostas é disponibilizado neste livro conciso, de preço razoável, e que pertence a uma série de destaque.
3. Swokowski, E. W. *Calculus with Analytic Geometry*. 3ª ed. Boston: Prindle, Weber, & Schmidt, 1984. Álgebra vetorial e os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas são discutidos no Capítulo 14, e cálculo vetorial é abordado no Capítulo 18.
4. Thomas, G. B., Jr., e Finney, R. L. *Calculus and Analytic Geometry*. 6ª ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1984. Álgebra vetorial e os três sistemas de coordenadas que utilizamos são discutidos no Capítulo 13. Outras operações vetoriais são discutidas nos Capítulos 15 e 17.

## PROBLEMAS DO CAPÍTULO 1

- 1.1 Dados os vetores  $\mathbf{M} = -10\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 8\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{N} = 8\mathbf{a}_x + 7\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$ , encontre: (a) um vetor unitário na direção de  $-\mathbf{M} + 2\mathbf{N}$ ; (b) a intensidade de  $5\mathbf{a}_x + \mathbf{N} - 3\mathbf{M}$ ; (c)  $|\mathbf{M}| |2\mathbf{N}| (\mathbf{M} + \mathbf{N})$ .
- 1.2 Os três vértices de um triângulo estão localizados em  $A(-1, 2, 5)$ ,  $B(-4, -2, -3)$  e  $C(1, 3, -2)$ . (a) Encontre o valor do perímetro do triângulo. (b) Encontre um vetor unitário direcionado do ponto médio do lado  $AB$  até o ponto médio do lado  $BC$ . (c) Mostre que esse vetor unitário multiplicado por um escalar é igual ao vetor de  $A$  para  $C$ , e que o vetor unitário é, portanto, paralelo a  $AC$ .
- 1.3 O vetor direcionado da origem até o ponto  $A$  é dado como  $(6, -2, -4)$ , e o vetor unitário posicionado na origem com direção ao ponto  $B$  é  $(2, -2, 1)/3$ . Se os pontos  $A$  e  $B$  estão afastados de 10 unidades, encontre as coordenadas do ponto  $B$ .
- 1.4 Um círculo centrado na origem e com raio de 2 unidades pertence ao plano  $xy$ . Determine o vetor unitário em componentes cartesianas que pertence ao plano  $xy$ , é tangente ao círculo em  $(\sqrt{3}, 1, 0)$  e está na direção e no sentido dos valores crescentes de  $y$ .
- 1.5 Um campo vetorial é especificado como  $\mathbf{G} = 24xy\mathbf{a}_x + 12(x^2 + 2)\mathbf{a}_y + 18z^2\mathbf{a}_z$ . Dados dois pontos  $P(1, 2, -1)$  e  $Q(-2, 1, 3)$ , encontre: (a)  $\mathbf{G}$  em  $P$ ; (b) um vetor unitário, em  $Q$ , direcionado no sentido de  $\mathbf{G}$ ; (c) um vetor unitário direcionado no sentido de  $Q$  para  $P$ ; (d) a equação da superfície na qual  $|\mathbf{G}| = 60$ .
- 1.6 Se  $\mathbf{a}$  é um vetor unitário em uma dada direção,  $B$  é uma constante escalar e  $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ , descreva a superfície  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = B$ . Qual é a relação entre o vetor unitário  $\mathbf{a}$  e o escalar  $B$  para essa superfície? (DICA: Considere primeiro um exemplo simples com  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x$  e  $B = 1$  e, então, considere quaisquer  $\mathbf{a}$  e  $B$ .)
- 1.7 Dado o campo vetorial  $\mathbf{E} = 4zy^2 \cos 2x\mathbf{a}_x + 2zy \sin 2x\mathbf{a}_y + y^2 \sin 2x\mathbf{a}_z$  para a região  $|x|, |y|$  e  $|z|$  menores que 2, encontre: (a) as superfícies nas quais  $E_y = 0$ ; (b) a região na qual  $E_y = E_z$ ; (c) a região na qual  $\mathbf{E} = 0$ .
- 1.8 Demonstre a ambigüidade que surge quando o produto vetorial é utilizado para se calcular o ângulo entre dois vetores, tentando encontrar o ângulo entre  $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$ . Essa ambigüidade também surge quando o produto escalar é utilizado?

- 1.9** Dado um campo  $\mathbf{G} = [25/(x^2 + y^2)](x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$ , encontre: (a) um vetor unitário na direção de  $\mathbf{G}$  no ponto  $P(3, 4, -2)$ ; (b) o ângulo entre  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{a}_x$  em  $P$ ; (c) o valor da integral dupla no plano  $y = 7$ .
- 1.10** Expressando diagonais como vetores e utilizando a definição de produto escalar, encontre o menor ângulo entre quaisquer duas diagonais de um cubo, no qual cada diagonal conecta vértices diametralmente opostos e passa pelo centro do cubo.
- 1.11** Dados os pontos  $M(0,1, -0,2, -0,1)$ ,  $N(-0,2, 0,1, 0,3)$  e  $P(0,4, 0, 0,1)$ , encontre: (a) o vetor  $\mathbf{R}_{MN}$ ; (b) o produto escalar  $\mathbf{R}_{MN} \cdot \mathbf{R}_{MP}$ ; (c) a projeção escalar de  $\mathbf{R}_{MN}$  em  $\mathbf{R}_{MP}$ ; (d) o ângulo entre  $\mathbf{R}_{MN}$  e  $\mathbf{R}_{MP}$ .
- 1.12** Mostre que os campos vetoriais  $\mathbf{A} = \rho \cos \phi \mathbf{a}_\rho + \rho \sin \phi \mathbf{a}_\phi + \rho \mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = \rho \cos \phi \mathbf{a}_\rho + \rho \sin \phi \mathbf{a}_\phi - \rho \mathbf{a}_z$  são perpendiculares entre si em qualquer ponto do espaço.
- 1.13** (a) Encontre a componente vetorial de  $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$  que é paralela a  $\mathbf{G} = 0,1\mathbf{a}_x + 0,2\mathbf{a}_y + 0,3\mathbf{a}_z$ . (b) Encontre a componente vetorial de  $\mathbf{F}$  que é perpendicular a  $\mathbf{G}$ . (c) Encontre a componente vetorial de  $\mathbf{G}$  que é perpendicular a  $\mathbf{F}$ .
- 1.14** Mostre que os campos vetoriais  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r(\sin 2\theta) / r^2 + 2\mathbf{a}_\theta(\sin \theta) / r^2$  e  $\mathbf{B} = r \cos \theta \mathbf{a}_r + r \mathbf{a}_\theta$  são paralelos um em relação ao outro em todos os pontos do espaço.
- 1.15** Três vetores que partem da origem são dados como  $\mathbf{r}_1 = (7, 3, -2)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (-2, 7, -3)$  e  $\mathbf{r}_3 = (0, 2, 3)$ . Encontre: (a) o vetor unitário que é perpendicular a ambos os vetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ ; (b) o vetor unitário perpendicular aos vetores  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$ ; (c) a área do triângulo definido por  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ ; (d) a área do triângulo definido pelas pontas dos vetores  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$ .
- 1.16** O campo vetorial  $\mathbf{E} = (B/\rho)\mathbf{a}_\rho$ , onde  $B$  é constante, deve ser transladado de forma que se origine na reta  $x = 2, y = 0$ . Escreva a forma transladada de  $\mathbf{E}$  em componentes cartesianas.
- 1.17** O ponto  $A(-4, 2, 5)$  e os dois vetores  $\mathbf{R}_{AM} = (20, 18, -10)$  e  $\mathbf{R}_{AN} = (-10, 8, 15)$  definem um triângulo. (a) Encontre um vetor unitário perpendicular ao triângulo. (b) Encontre um vetor unitário no plano do triângulo e perpendicular a  $\mathbf{R}_{AN}$ . (c) Encontre um vetor unitário no plano do triângulo que divide o ângulo interior de  $A$  em duas partes iguais.
- 1.18** Transforme o campo vetorial  $\mathbf{H} = (A/\rho)\mathbf{a}_\rho$ , onde  $A$  é uma constante, de coordenadas cilíndricas para coordenadas esféricas.
- 1.19** (a) Expresse o campo  $\mathbf{D} = (x^2 + y^2)^{-1}(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$  em componentes e variáveis cilíndricas; (b) Calcule  $\mathbf{D}$  no ponto onde  $\rho = 2, \phi = 0,2\pi$  e  $z = 5$ , expressando o resultado em componentes cilíndricas e cartesianas.
- 1.20** Um cilindro de raio  $a$ , centrado no eixo  $z$ , gira em torno do eixo  $z$  numa velocidade angular  $\Omega$  rad/s. A direção de rotação é anti-horária quando se olha na direção positiva de  $z$ . (a) Utilizando componentes cilíndricas, escreva uma expressão para o campo de velocidade  $\mathbf{v}$ , que fornece a velocidade tangencial em qualquer ponto dentro do cilindro; (b) converta o resultado encontrado na parte (a) em componentes esféricas; (c) converta em componentes cartesianas.

- 1.21** Expresse em componentes cilíndricas: (a) o vetor de  $C(3, 2, -7)$  a  $D(-1, -4, 2)$ ; (b) um vetor unitário em  $D$  direcionado no sentido de  $C$ ; (c) um vetor unitário em  $D$  direcionado no sentido da origem.
- 1.22** Uma esfera de raio  $a$ , centrada na origem, gira em torno do eixo  $z$  numa velocidade angular  $\Omega$  rad/s. A direção de rotação é horária quando se olha na direção positiva do eixo  $z$ . (a) Utilizando componentes esféricas, escreva uma expressão para o campo de velocidade  $\mathbf{v}$ , que fornece a velocidade tangencial em qualquer ponto dentro da esfera; (b) converta em componentes cartesianas.
- 1.23** As superfícies  $\rho = 3, \rho = 5, \phi = 100^\circ, \phi = 130^\circ, z = 3$  e  $z = 4,5$  definem uma superfície fechada. (a) Calcule o volume dentro dessa superfície fechada; (b) calcule a área total da superfície fechada; (c) calcule o comprimento total das 12 arestas da superfície; (d) calcule o comprimento da linha reta mais longa que se encontra totalmente dentro do volume.
- 1.24** Expresse o campo  $\mathbf{E} = A\mathbf{a}_r/r^2$  em (a) componentes cartesianas; (b) componentes cilíndricas.
- 1.25** Dado o ponto  $P(r = 0,8, \theta = 30^\circ, \phi = 45^\circ)$  e  $\mathbf{E} = 1/r^2 (\cos \phi \mathbf{a}_r + \sin \phi / \sin \theta \mathbf{a}_\phi)$ ; (a) encontre  $\mathbf{E}$  em  $P$ ; (b) encontre  $|\mathbf{E}|$  em  $P$ ; (c) encontre um vetor unitário na direção de  $\mathbf{E}$  em  $P$ .
- 1.26** Expresse o campo vetorial uniforme  $\mathbf{F} = 5\mathbf{a}_x$  em (a) componentes cilíndricas; (b) componentes esféricas.
- 1.27** As superfícies  $r = 2$  e  $4, \theta = 30^\circ$  e  $50^\circ$  e  $\phi = 20^\circ$  e  $60^\circ$  identificam uma superfície fechada. (a) Calcule o volume dentro dessa superfície fechada; (b) calcule a área total da superfície fechada; (c) calcule o comprimento total das 12 arestas da superfície; (d) calcule o comprimento da linha reta mais longa que se encontra totalmente dentro da superfície fechada.
- 1.28** Expresse o campo vetorial  $\mathbf{G} = 8 \sin \phi \mathbf{a}_\theta$  em (a) componentes cartesianas; (b) componentes cilíndricas.
- 1.29** Expresse o vetor unitário  $\mathbf{a}_x$  em componentes esféricas no ponto (a)  $r = 2, \theta = 1$  rad,  $\phi = 0,8$  rad; (b)  $x = 3, y = 2, z = -1$ ; (c)  $\rho = 2,5, \phi = 0,7$  rad,  $z = 1,5$ .
- 1.30** No ponto  $B(5, 120^\circ, 75^\circ)$  um campo vetorial tem o valor  $\mathbf{A} = -12\mathbf{a}_r - 5\mathbf{a}_\theta + 15\mathbf{a}_\phi$ . Calcule a componente vetorial de  $\mathbf{A}$  que é: (a) normal à superfície  $r = 5$ ; (b) tangente à superfície  $r = 5$ ; (c) tangente ao cone  $\theta = 120^\circ$ . (d) Calcule um vetor unitário que seja perpendicular a  $\mathbf{A}$  e tangente ao cone  $\theta = 120^\circ$ .

## Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico

**A**gora que formulamos uma nova linguagem no primeiro capítulo, vamos estabelecer alguns princípios básicos de eletricidade e tentar descrevê-los. Se tivéssemos utilizado cálculo vetorial por vários anos e tivéssemos algumas idéias concretas sobre eletricidade e magnetismo, poderíamos dar um salto agora com os dois pés e apresentar numerosas equações, incluindo as equações de Maxwell e algumas outras equações auxiliares, e avançar mais ainda descrevendo-as fisicamente por meio de nosso conhecimento em análise vetorial. Este é talvez o caminho ideal, começando pelos resultados mais gerais e, então, mostrando que as leis de Ohm, Gauss, Coulomb, Faraday, Ampère, Biot-Savart, Kirchhoff e algumas outras menos familiares são todas casos especiais dessas equações. Filosoficamente nos traz satisfação ter os resultados mais gerais e sentir que podemos obter os resultados para qualquer caso especial segundo a nossa vontade. Contudo, tal salto levaria a muitos pedidos frenéticos por “socorro” e poucos alunos aprovados.

Em vez disso, vamos apresentar, em intervalos apropriados, as leis experimentais mencionadas acima, expressando cada uma em notação vetorial. E usaremos essas leis para resolver uma série de problemas simples. Dessa maneira, nossa familiaridade tanto com análise vetorial como com campos elétricos e magnéticos crescerá gradualmente e, quando por fim tivermos alcançado nosso conjunto de equações gerais, pouca explicação adicional será necessária. Todo o campo de teoria eletromagnética estará aberto então para nós, e poderemos utilizar as equações de Maxwell para descrever a propagação de ondas, radiação de antenas, efeito pelicular, guias de ondas e linhas de transmissão, fibras ópticas, e até obter uma nova visão sobre o transformador de potência usual.

Neste capítulo deveremos restringir nossa atenção a campos elétricos *estáticos* no *vácuo* ou no *espaço livre*. Para efeitos práticos, nossos resultados serão aplicáveis para o ar e outros gases. Outros materiais serão introduzidos no Capítulo 6 e campos variáveis no tempo serão introduzidos no Capítulo 10.

Devemos começar descrevendo um experimento quantitativo realizado no Século XVII. ■

## 2.1 A LEI EXPERIMENTAL DE COULOMB

Documentos de pelo menos 600 a.C. mostram evidências do conhecimento de eletricidade estática. Os gregos foram os responsáveis pelo termo *eletricidade*, que deriva de sua palavra para âmbar, e eles passaram muitas horas de lazer esfregando um pequeno pedaço de âmbar nas suas roupas e observando como ele atraía pedaços de penugem e similares. Entretanto, seus principais interesses repousavam em filosofia e lógica, e não em ciência experimental, e isso ocorreu muitos séculos antes que o efeito de atração tivesse sido considerado alguma coisa diferente de mágica ou “força vital”.

Dr. Gilbert, físico de Sua Majestade a Rainha da Inglaterra, foi o primeiro a fazer algum trabalho realmente experimental abordando esse efeito. Em 1600, estabeleceu que o vidro, enxofre, âmbar e outros materiais que ele listou “não apenas atraíam para si próprios a palha, mas também todos os metais, madeira, folhas, pedra, terra e até água e óleo”.

Pouco tempo depois, um oficial da Engenharia do Exército Francês, coronel Charles Coulomb, executou uma série elaborada de experimentos utilizando uma balança de torção sensível, inventada por ele mesmo, para determinar quantitativamente a força exercida entre dois objetos, cada um com uma carga estática de eletricidade. Seu resultado publicado é agora conhecido por muitos estudantes secundaristas e guarda uma grande similaridade com a lei gravitacional de Newton (descoberta cerca de 100 anos antes). Coulomb estabeleceu que a força entre dois objetos muito pequenos, separados pelo vácuo ou espaço livre por uma distância grande se comparada com seus tamanhos, é proporcional à carga de cada um deles e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, ou

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

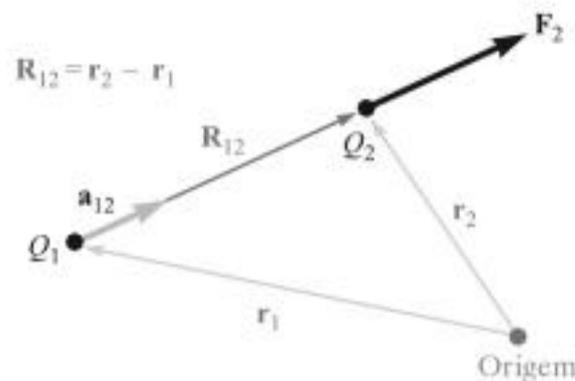
onde  $Q_1$  e  $Q_2$  são as quantidades positivas ou negativas de carga,  $R$  é a separação e  $k$  é uma constante de proporcionalidade. Se o Sistema Internacional de Unidades<sup>1</sup> (SI) for utilizado,  $Q$  é medido em coulombs (C),  $R$  é medido em metros (m) e a força deve ser em newtons (N). Isso será obtido se a constante de proporcionalidade  $k$  for escrita como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

O fator  $4\pi$  aparecerá no denominador da lei de Coulomb, mas não aparecerá em outras equações mais úteis (incluindo as equações de Maxwell), as quais deveremos obter com o auxílio dessa lei. A nova constante  $\epsilon_0$  é chamada de *permissividade do espaço livre* e tem o valor medido em farads por metro (F/m):

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F/m} \quad (1)$$

<sup>1</sup> O Sistema Internacional de Unidades (sistema mks) é descrito no Apêndice B. Abreviações para as unidades são dadas na Tabela B.1. Conversões para outros sistemas de unidades são dadas na Tabela B.2, enquanto os prefixos designando potências de 10 no SI aparecem na Tabela B.3.



**Figura 2.1** Se  $Q_1$  e  $Q_2$  possuem o mesmo sinal, o vetor de força  $F_2$  em  $Q_2$  estará na mesma direção e no mesmo sentido do vetor  $R_{12}$ .

A grandeza  $\epsilon_0$  não é adimensional, pois a lei de Coulomb mostra que ela tem a unidade  $C^2/N \cdot m^2$ . Vamos, mais tarde, definir o farad e mostrar que ele tem as dimensões  $C^2/N \cdot m$ . Antecipamos essa definição utilizando a unidade  $F/m$  na equação (1).

A lei de Coulomb é agora

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2)$$

Nem todas as unidades do SI são familiares, mas elas são padrão em engenharia elétrica e em física. O newton é uma unidade de força igual a  $0,1 \text{ kg}_f$ , que é a força necessária para dar a uma massa de 1 quilograma (kg) uma aceleração de 1 metro por segundo ( $m/s^2$ ). O coulomb é uma unidade de carga extremamente grande, pois a menor quantidade de carga conhecida é a de um elétron (negativa) ou de um próton (positiva), dada como  $1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$  em unidades mks. Com isso, uma carga negativa de 1 coulomb representa aproximadamente  $6 \times 10^{18}$  elétrons.<sup>2</sup> A lei de Coulomb mostra que a força entre duas cargas de 1 coulomb cada, separadas por 1 metro, é  $9 \times 10^9 \text{ N}$ , ou, aproximadamente, 1 milhão de toneladas. O elétron possui uma massa, em repouso, de  $9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$  e um raio da ordem de  $3,8 \times 10^{-15} \text{ m}$ . Isso não significa que o elétron possui uma forma esférica, mas serve apenas para descrever o tamanho da região na qual um elétron que se move lentamente tem a maior probabilidade de ser encontrado. Todas as outras partículas carregadas conhecidas, incluindo o próton, possuem massas e raios maiores e ocupam um volume probabilístico maior que o do elétron.

Com o objetivo de escrever a forma vetorial de (2), precisamos do aspecto adicional (fornecido também pelo coronel Coulomb) de que a força atua ao longo da linha que une as duas cargas: repulsiva se as cargas possuírem o mesmo sinal e atrativa se as cargas forem de sinais opostos. Seja o vetor  $r_1$  que posiciona  $Q_1$  e o vetor  $r_2$  que posiciona  $Q_2$ , então, o vetor  $R_{12} = r_2 - r_1$  representa o segmento de reta orientado de  $Q_1$  para  $Q_2$ , como mostra a Figura 2.1. O vetor  $F_2$  é a força em  $Q_2$  e é indicado para o caso em que  $Q_1$  e  $Q_2$  possuem o mesmo sinal. A forma vetorial para a lei de Coulomb é

<sup>2</sup> A carga e a massa de um elétron, assim como outras constantes físicas, são apresentadas na Tabela C.4 do Apêndice C.

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (3)$$

no qual  $\mathbf{a}_{12}$  = um vetor unitário na direção de  $R_{12}$ , ou

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (4)$$

### EXEMPLO 2.1

Vamos ilustrar o uso da forma vetorial da lei de Coulomb posicionando uma carga  $Q_1 = 3 \times 10^{-4} \text{ C}$  em  $M(1, 2, 3)$  e uma carga  $Q_2 = -10^{-4} \text{ C}$  em  $N(2, 0, 5)$ , no vácuo. Desejamos a força exercida em  $Q_2$  por  $Q_1$ .

**Solução.** Devemos fazer uso de (3) e (4) para obter o vetor de força. O vetor  $\mathbf{R}_{12}$  é

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2 - 1)\mathbf{a}_x + (0 - 2)\mathbf{a}_y + (5 - 3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

o que leva a  $|\mathbf{R}_{12}| = 3$  e ao vetor unitário  $\mathbf{a}_{12} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)$ . Por isso,

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3 \times 10^{-4}(-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9} \times 3^2} \left( \frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) = -30 \left( \frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \text{ N}$$

A intensidade da força é de 30 N (ou aproximadamente 3 kg) e a direção e o sentido são especificados pelo vetor unitário, que foi deixado entre parênteses de modo que destaque a intensidade da força. A força em  $Q_2$  pode também ser abordada por três componentes de força:

$$\mathbf{F}_2 = -10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z$$

A força expressa pela lei de Coulomb é uma força mútua, pois cada uma das duas cargas experimentam uma força de mesma magnitude e direção, apesar de sentidos opostos. Poderíamos também ter escrito, da mesma maneira,

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{21} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (5)$$

A lei de Coulomb é linear, pois se multiplicarmos  $Q_1$  por um fator  $n$ , a força em  $Q_2$  será também multiplicada pelo mesmo fator  $n$ . É também verdade que uma força em uma carga na presença de várias outras cargas será a soma das forças naquela carga, devido a cada uma das outras cargas estarem agindo sozinhas.

**E2.1.** Uma carga  $Q_A = 220 \mu\text{C}$  está posicionada em  $A(26, 4, 7)$  e uma carga  $Q_B = 50 \mu\text{C}$  está em  $B(5, 8, -2)$ , no espaço livre. Se as distâncias são dadas em metros, encontre: (a)  $R_{AB}$ ; (b)  $\hat{R}_{AB}$ . Determine o vetor de força exercido em  $Q_A$  por  $Q_B$  se  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ; (c)  $10^{-9}/(36\pi) \text{ F/m}$ ; (d)  $8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ .

**Resp.**  $11\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 9\mathbf{a}_z \text{ m}$ ;  $14,76 \text{ m}$ ;  $30,76\mathbf{a}_x + 11,184\mathbf{a}_y - 25,16\mathbf{a}_z \text{ mN}$ ;  $30,72\mathbf{a}_x + 11,169\mathbf{a}_y - 25,13\mathbf{a}_z \text{ mN}$

## 2.2 INTENSIDADE DE CAMPO ELÉTRICO

Se agora considerarmos uma carga  $Q_1$ , por exemplo, fixa em uma posição, e movermos uma segunda carga lentamente em volta, notamos que existe em todo lugar uma força atuando nessa segunda carga. Em outras palavras, essa segunda carga está evidenciando a existência de um *campo* de força. Chamemos essa segunda carga de carga de teste  $Q_t$ . A força nessa carga é dada pela lei de Coulomb

$$\mathbf{F}_t = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2} \mathbf{a}_{1t}$$

Escrevendo essa força como uma força por unidade de carga, obtemos

$$\frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2} \mathbf{a}_{1t} \quad (6)$$

A grandeza no lado direito de (6) é função apenas de  $Q_1$  e do segmento de reta orientado de  $Q_1$  até a posição onde se encontra a carga de teste. Isso descreve um campo de força e é chamado de *intensidade do campo elétrico*.<sup>3</sup>

Definimos a intensidade do campo elétrico como o vetor de força em uma carga de teste positiva unitária. Não conseguiríamos *medi-la* experimentalmente encontrando a força em uma carga de teste de 1 C, pois isso provavelmente criaria uma força em  $Q_1$  que causaria uma mudança na sua posição.

A intensidade do campo elétrico deve ser medida pela unidade newtons por coulomb – a força por unidade de carga. Antecipando uma nova grandeza dimensional, o *volt* ( $V$ ), que será apresentado no Capítulo 4, em unidades de joules por coulomb ( $J/C$ ) ou newton-metros por coulomb ( $N \cdot m/C$ ), podemos medir de uma vez a intensidade de campo elétrico nas unidades práticas de volts por metro ( $V/m$ ). Usando uma letra maiúscula  $\mathbf{E}$  para a intensidade de campo elétrico temos, finalmente

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2} \mathbf{a}_{1t} \quad (8)$$

<sup>3</sup> N.T.: O estudante deve ter cuidado para não confundir o termo “intensidade”, aqui utilizado como parte da denominação dada a uma grandeza vetorial, com o termo utilizado no capítulo anterior para indicar o módulo (valor absoluto) de um vetor qualquer.



Interatividade

A Equação (7) é a expressão que define a intensidade de campo elétrico e (8) é a expressão para a intensidade de campo elétrico devido a uma carga pontual  $Q_1$  única, no vácuo. Nas seções seguintes, deveremos obter e interpretar expressões para a intensidade de campo elétrico por causa dos arranjos de cargas mais complicados mas, por enquanto, vejamos que informações podemos obter de (8), o campo de uma carga pontual única.

Primeiro, vamos dispensar a maioria dos subscritos em (8), reservando-nos o direito de utilizá-los novamente em qualquer momento onde houver possibilidade de ocorrer um mal-entendido:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (9)$$

Devemos nos lembrar de que  $R$  é a intensidade do vetor  $\mathbf{R}$ , o segmento de reta orientado do ponto onde a carga pontual  $Q$  está posicionada até o ponto onde  $\mathbf{E}$  é desejado, e  $\mathbf{a}_R$  é o vetor unitário na direção de  $\mathbf{R}$ .<sup>4</sup>

Vamos arbitrariamente posicionar  $Q$  no centro de um sistema de coordenadas esféricas. O vetor unitário  $\mathbf{a}_R$  torna-se o vetor unitário radial  $\mathbf{a}_r$ , e  $R$  é  $r$ . Logo

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (10)$$

ou

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

O campo possui uma componente radial única, e a sua relação com a lei do inverso do quadrado é óbvia.

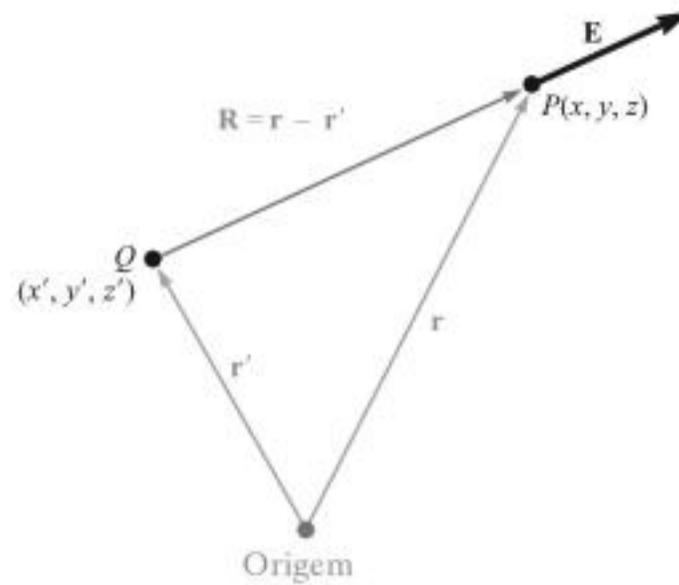
Escrevendo essas expressões em coordenadas cartesianas para uma carga  $Q$  na origem, temos  $\mathbf{R} = \mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_r = (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Logo

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_z \right) \quad (11)$$

Essa expressão não mostra mais de maneira imediata a natureza básica do campo, e sua complexidade é o preço que pagamos por resolver um problema que possui simetria esférica em um sistema de coordenadas com o qual (temporariamente) temos mais familiaridade.

Sem a análise vetorial, a informação contida em (11) teria de ser expressa em três equações, uma para cada componente. E para se obter a equação precisaríamos quebrar o módulo do vetor intensidade de campo elétrico nas três componentes, encontrando a

<sup>4</sup> Pretendemos firmemente evitar confundir  $r$  e  $\mathbf{a}_r$  com  $R$  e  $\mathbf{a}_R$ . Os dois primeiros referem-se especificamente ao sistema de coordenadas esféricas, enquanto  $R$  e  $\mathbf{a}_R$  não se referem a nenhum sistema de coordenadas – a escolha ainda está disponível para nós.



**Figura 2.2** O vetor  $r'$  localiza a carga pontual  $Q$ , o vetor  $r$  identifica no espaço o ponto genérico  $P(x, y, z)$  no espaço, e o vetor  $R$  de  $Q$  para  $P(x, y, z)$  vale, então,  $R = r - r'$ .

projeção em cada eixo coordenado. Utilizando notação vetorial, isso é automaticamente feito quando escrevemos o vetor unitário.

Se considerarmos uma carga que *não* esteja na origem do nosso sistema de coordenadas, o campo já não possui simetria esférica (nem simetria cilíndrica, ao menos que a carga esteja ao longo do eixo  $z$ ), e podemos utilizar, do mesmo modo, coordenadas cartesianas. Para uma carga  $Q$  posicionada no ponto fonte  $\mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + y'\mathbf{a}_y + z'\mathbf{a}_z$ , conforme ilustrado na Figura 2.2, encontramos o campo em um ponto genérico  $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$  expressando  $\mathbf{R}$  como  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , e então

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{Q[(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (12)$$

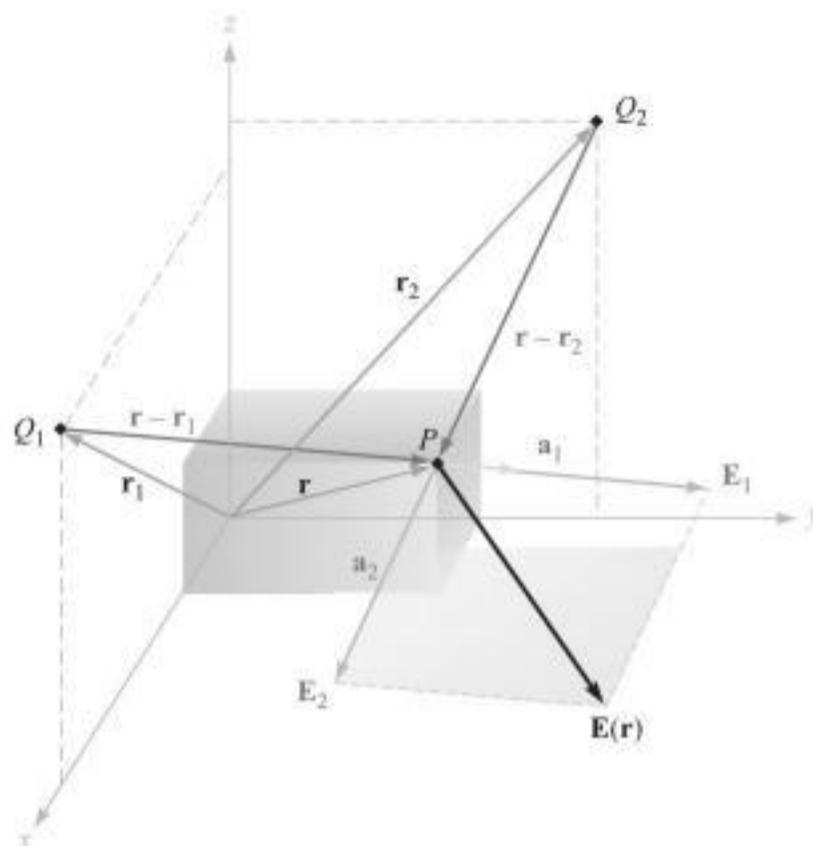
Anteriormente, definimos campo vetorial como uma função vetorial de um vetor posição, e isso é enfatizado fazendo  $\mathbf{E}$  ser simbolizado em uma notação funcional por  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

A Equação (11) é simplesmente um caso especial de (12), onde  $x' = y' = z' = 0$ .

Uma vez que as forças de coulomb são lineares, a intensidade de campo elétrico resultante de duas cargas pontuais,  $Q_1$  em  $\mathbf{r}_1$  e  $Q_2$  em  $\mathbf{r}_2$ , é a soma das forças em  $Q_i$  causadas por  $Q_1$  e  $Q_2$  atuando sozinhas, ou

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{a}_2$$

onde  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  são vetores unitários nas direções e nos sentidos de  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$  e  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$ , respectivamente. Os vetores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  são mostrados na Figura 2.3.



**Figura 2.3** A adição vetorial da intensidade de campo elétrico total em  $P$  devido a  $Q_1$  e  $Q_2$  é possibilitada pela linearidade da lei de Coulomb.

Se somarmos outras cargas em outras posições, o campo devido a  $n$  cargas pontuais é:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{a}_2 + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2} \mathbf{a}_n \quad (13)$$

Essa expressão toma menos espaço quando usamos um sinal de somatória  $\Sigma$  e uma variável  $m$  que recebe todos os valores inteiros de 1 a  $n$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^2} \mathbf{a}_m \quad (14)$$



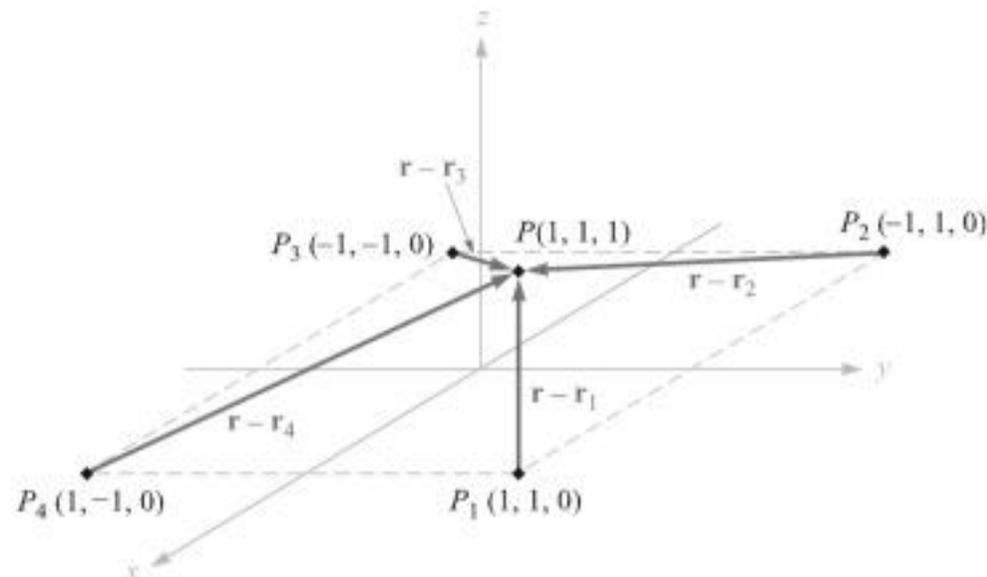
Interatividade

Quando expandida, (14) é idêntica a (13), e os estudantes não familiarizados com sinais de somatória devem checar esse resultado.

### EXEMPLO 2.2

Com o objetivo de ilustrar a aplicação de (13) ou (14), vamos encontrar  $\mathbf{E}$  em  $P(1, 1, 1)$  causado por quatro cargas idênticas de  $3 \text{ nC}$  (nanocoulombs) posicionadas em  $P_1(1, 1, 0)$ ,  $P_2(-1, 1, 0)$ ,  $P_3(-1, -1, 0)$  e  $P_4(1, -1, 0)$ , conforme mostra a Figura 2.4.

**Solução.** Encontramos que  $\mathbf{r} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$  e, portanto,  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_z$ . As intensidades são:  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = 1$ ,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{5}$ ,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = 3$  e  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_4| = \sqrt{5}$ .



**Figura 2.4** Uma distribuição simétrica de quatro cargas pontuais de 3 nC idênticas produz um campo em  $P$ ,  $E = 6,82\mathbf{a}_x + 6,82\mathbf{a}_y + 32,8\mathbf{a}_z$  V/m.

Uma vez que  $Q/4\pi\epsilon_0 = 3 \times 10^{-9} / (4\pi \times 8,854 \times 10^{-12}) = 26,96$  V · m, podemos agora utilizar (13) ou (14) para obter

$$\mathbf{E} = 26,96 \left[ \frac{\mathbf{a}_z}{1^2} + \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}} \frac{1}{(\sqrt{5})^2} + \frac{2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{3} \frac{1}{3^2} + \frac{2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}} \frac{1}{(\sqrt{5})^2} \right]$$

ou

$$\mathbf{E} = 6,82\mathbf{a}_x + 6,82\mathbf{a}_y + 32,8\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

**E2.2.** Uma carga de  $-0,3 \mu\text{C}$  está posicionada em  $A(25, -30, 15)$  (em cm), e uma segunda carga de  $0,5 \mu\text{C}$  está em  $B(-10, 8, 12)$  cm. Calcule  $\mathbf{E}$  em: (a) a origem; (b)  $P(15, 20, 50)$  cm.

**Resp.**  $92,3\mathbf{a}_x - 77,6\mathbf{a}_y - 94,2\mathbf{a}_z$  kV/m;  $11,9\mathbf{a}_x - 0,519\mathbf{a}_y + 12,4\mathbf{a}_z$  kV/m

**E2.3.** Avalie as somas: (a)  $\sum_{m=0}^5 \frac{1 + (-1)^m}{m^2 + 1}$ ; (b)  $\sum_{m=1}^4 \frac{(0,1)^m + 1}{(4 + m^2)^{1,5}}$

**Resp.** 2,52; 0,176

## 2.3 CAMPO DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA CONTÍNUA DE CARGAS

Se visualizarmos agora uma região do espaço preenchida com um número imenso de cargas separadas por distâncias diminutas, tal como o espaço entre a grade de controle e o catodo na montagem de um canhão de elétrons de um tubo de raios catódicos operando com carga espacial, perceberemos que podemos substituir essa distribuição de partículas muito pequenas por uma distribuição contínua e suave descrita por uma *densidade volumétrica de carga*, assim como descrevemos a água com densidade de 1 g/cm<sup>3</sup> (grama por centímetro cúbico), apesar de ela ser constituída por partículas de



Ilustração

tamanho atômico e molecular. Podemos fazer isso somente se não estivermos interessados nas pequenas irregularidades (ou ondulações) no campo, à medida que nos movemos de elétron para elétron, ou se nos importamos pouco com o fato de a massa da água na verdade aumentar em quantidades pequenas mas finitas, à medida que cada nova molécula é adicionada.

Na verdade, isso não se constitui em limitação alguma, porque o resultado final, para engenheiros eletricitistas, é quase sempre em termos de uma corrente em uma antena receptora, uma tensão em um circuito eletrônico ou uma carga em um capacitor ou, em geral, em termos de algum fenômeno *macroscópico* de larga escala. É muito raro necessitarmos saber sobre uma corrente elétron por elétron.<sup>5</sup>

Denotamos densidade volumétrica de carga por  $\rho_v$ , em unidade de coulombs por metro cúbico (C/m<sup>3</sup>).

A pequena quantidade de carga  $\Delta Q$  em um pequeno volume  $\Delta v$  é

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v \quad (15)$$

e podemos definir  $\rho_v$  matematicamente levando (15) ao limite, deste modo:

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad (16)$$

A carga total dentro de um volume finito é obtida integrando esse volume

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv \quad (17)$$

Apenas um sinal de integração é usualmente indicado, mas a diferencial  $dv$  significa integração por um volume e, portanto, uma integração tripla. Felizmente, poderemos nos contentar com nada mais que a integral indicada, na maioria dos casos, pois integrais múltiplas são muito difíceis de serem resolvidas, de modo geral, a não ser na maioria dos problemas com simetria.

### EXEMPLO 2.3

Como um exemplo de solução de uma integral volumétrica, vamos encontrar a carga total contida em um feixe de elétrons de 2 cm de comprimento, mostrado na Figura 2.5.

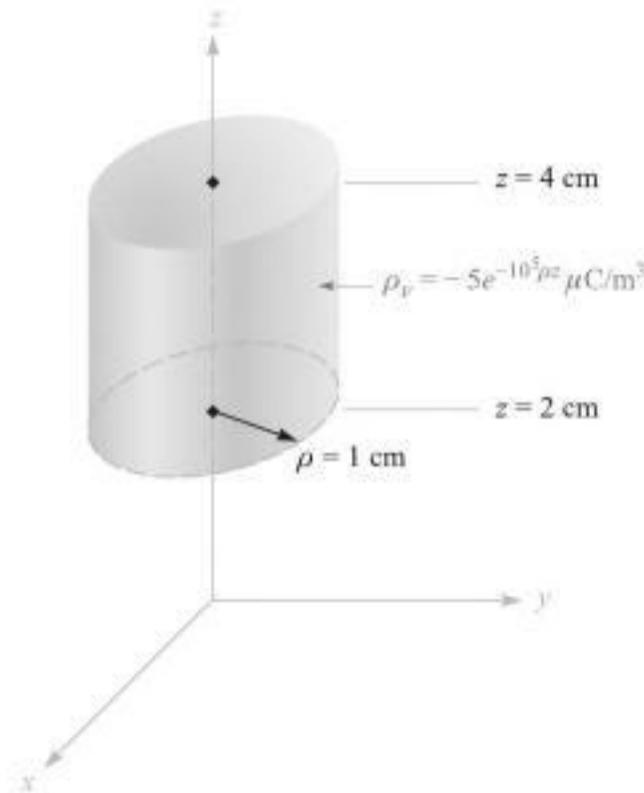
**Solução.** Pela ilustração, vemos que a densidade de carga é

$$\rho_v = -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \text{ C/m}^2$$

O volume diferencial em coordenadas cilíndricas é dado na Seção 1.8. Logo,

$$Q = \int_{0,02}^{0,04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0,01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho d\phi dz$$

<sup>5</sup> Um estudo do ruído gerado por elétrons em semicondutores e resistores, entretanto, requer um exame da carga por meio de análises estatísticas.



**Figura 2.5** A carga total contida dentro do cilindro circular reto pode ser encontrada resolvendo  $Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dV$ .

Integramos primeiro com relação a  $\phi$ , uma vez que é muito fácil,

$$Q = \int_{0,02}^{0,04} \int_0^{0,01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho dz$$

e depois com relação a  $z$ , porque isso simplificará a última integração com relação a  $\rho$

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{0,01} \left( \frac{-10^{-5} \pi}{-10^5 \rho} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho \right)_{z=0,02}^{z=0,04} \\ &= \int_0^{0,01} -10^{-5} \pi (e^{-2000\rho} - e^{-4000\rho}) d\rho \end{aligned}$$

Finalmente,

$$Q = -10^{-10} \pi \left( \frac{e^{-2000\rho}}{-2000} - \frac{e^{-4000\rho}}{-4000} \right)_{0,01}$$

$$Q = -10^{-10} \pi \left( \frac{1}{2000} - \frac{1}{4000} \right) = \frac{-\pi}{40} = 0,0785 \text{ pC}$$

onde pC indica picocoulombs.

Casualmente, podemos utilizar esse resultado para fazer uma estimativa grosseira da corrente do feixe de elétrons. Se assumirmos que esses elétrons estão se movendo a uma velocidade constante de 10% da velocidade da luz, esse pacote de 2 cm de comprimento terá se movido 2 cm em  $\frac{2}{3}$  ns, e a corrente será aproximadamente igual a

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{-(\pi/40)10^{-12}}{(2/3)10^{-9}}$$

ou aproximadamente 118  $\mu\text{A}$ .

A contribuição incremental para a intensidade de campo elétrico em  $\mathbf{r}$  produzida por uma carga incremental  $\Delta Q$  em  $\mathbf{r}'$  é

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\rho_v \Delta v}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Se somarmos as contribuições de todas as cargas volumétricas em uma dada região e fizermos o elemento de volume  $\Delta v$  se aproximar de zero, à medida que o número desses elementos se torna infinito, a somatória se torna uma integral:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')d\mathbf{v}'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (18)$$

Temos novamente uma integral tripla: e (exceto no Exercício Proposto 2.4) faremos o melhor para evitar, na verdade, realizar essa integração.

O significado das várias grandezas sob o sinal de integração, em (18), pode necessitar de uma pequena revisão. O vetor  $\mathbf{r}$  que parte da origem posiciona o ponto de campo onde  $\mathbf{E}$  está sendo determinado, enquanto o vetor  $\mathbf{r}'$  se estende da origem até o ponto da fonte, onde  $\rho_v(\mathbf{r}')d\mathbf{v}'$  está posicionado. A distância escalar entre o ponto de fonte e o ponto de campo é  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , e a fração  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  é um vetor unitário que aponta do ponto de fonte em direção ao ponto de campo. As variáveis de integração são  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , em coordenadas cartesianas.

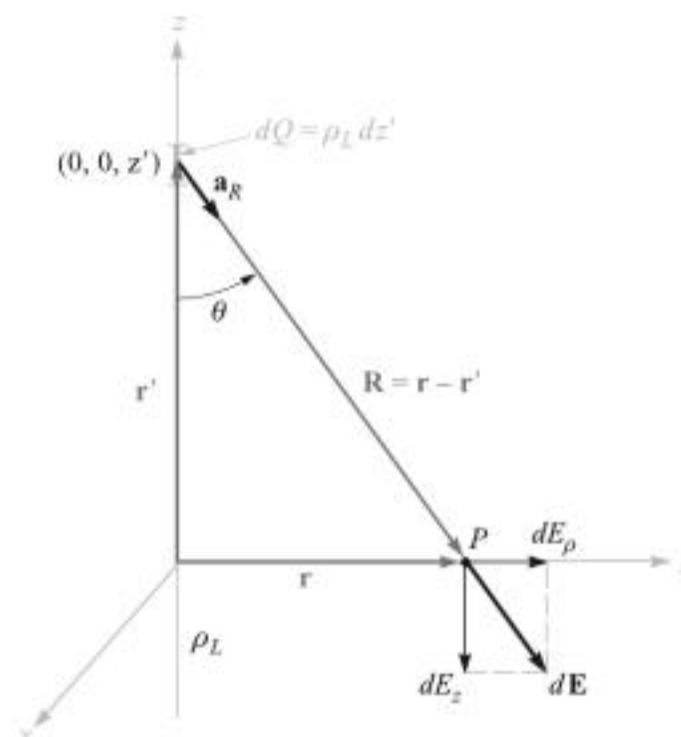
**E2.4.** Calcule a carga total dentro de cada volume indicado: (a)  $0,1 \leq |x|, |y|, |z| \leq 0,2$ ;

$\rho_v = \frac{1}{x^3 y^3 z^3}$ ; (b)  $0 \leq \rho \leq 0,1$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $2 \leq z \leq 4$ ;  $\rho_v = \rho^2 z^2 \sin 0,6\phi$ ; (c) universo:  $\rho_v = e^{-2r/r^2}$ .

**Resp.** 0; 1,018 mC; 6,28 C

## 2.4 CAMPO DE UMA LINHA DE CARGAS

Até aqui consideramos dois tipos de distribuição de cargas: a carga pontual e a carga distribuída por um volume com uma densidade  $\rho_v$  C/m<sup>3</sup>. Se agora considerarmos uma densidade de carga volumétrica distribuída na forma de um filamento, como em um feixe muito fino em um tubo de raios catódicos ou um condutor carregado de raio muito pequeno, torna-se conveniente tratar a carga como uma linha de cargas de densidade  $\rho_L$  C/m. No caso do feixe de elétrons, as cargas estão em movimento e é verdade que não temos um problema de eletrostática. Entretanto, se o movimento de elétrons é



**Figura 2.6** A contribuição  $dE = dE_\rho a_\rho + dE_z a_z$  para a intensidade de campo elétrico produzido por um elemento de carga  $dQ = \rho_L dz'$  posicionado a uma distância  $z'$  da origem. A densidade linear de cargas é uniforme e se estende ao longo do eixo  $z$  inteiro.

contínuo e uniforme (um feixe c.c.), e se ignorarmos por um momento o campo magnético que é produzido, o feixe de elétrons pode ser considerado composto de elétrons estacionários, pois, por pequenos instantes de tempo tomados em qualquer momento, a mesma distribuição de carga será encontrada.

Vamos considerar uma linha reta de cargas que se estende ao longo do eixo  $z$  em um sistema de coordenadas cilíndricas de  $-\infty$  até  $\infty$ , conforme mostra a Figura 2.6. Desejamos a intensidade de campo elétrico  $E$  em todo e qualquer ponto resultante de uma densidade linear de carga *uniforme*  $\rho_L$ .

A simetria deve ser considerada sempre primeiro, com o objetivo de determinar dois fatores específicos: (1) com quais coordenadas o campo *não* varia e (2) quais componentes do campo *não* estão presentes. As respostas a essas questões nos indicam quais componentes estão presentes e com quais coordenadas eles *variam*.

Referindo-se à Figura 2.6, percebemos que à medida que nos movemos pela linha de cargas, variando  $\phi$  enquanto  $\rho$  e  $z$  mantêm-se constantes, a linha de cargas parece ser a mesma vista de qualquer ângulo. Em outras palavras, a simetria azimutal está presente e nenhum componente de campo deve variar com  $\phi$ .

Novamente, se mantivermos  $\rho$  e  $\phi$  constantes, enquanto nos movemos para cima e para baixo ao longo da linha de cargas mudando  $z$ , a linha de cargas ainda prossegue por uma distância infinita em ambas as direções e o problema não se modifica. Essa é a simetria axial e leva a campos que não são funções de  $z$ .

Se mantivermos  $\phi$  e  $z$  constantes e variarmos  $\rho$ , o problema se modifica e a lei de Coulomb nos leva a esperar que o campo se enfraqueça à medida que  $\rho$  aumenta. Logo, por um processo de eliminação, somos levados ao fato de que o campo varia apenas com  $\rho$ .

Agora, quais componentes estão presentes? Cada comprimento incremental da linha de cargas age como uma carga pontual e produz uma contribuição incremental para a intensidade de campo elétrico que se direciona “para fora” em relação ao incremento de carga (assumindo uma linha de cargas positiva). Nenhum elemento de carga produz uma componente em  $\phi$  de intensidade elétrica.  $E_\phi$  é zero. Contudo, cada elemento produz uma componente em  $E_\rho$  e uma em  $E_z$ , mas a contribuição com  $E_z$  de elementos de carga que estão em iguais distâncias acima e abaixo do ponto no qual estamos determinando o campo se cancelará.

Portanto, descobrimos que temos apenas uma componente  $E_\rho$ , e ela varia apenas com  $\rho$ . Agora devemos encontrar essa componente.

Escolhemos um ponto  $P(0, y, 0)$  no eixo  $y$  para determinarmos o campo. Esse é um ponto perfeitamente genérico em vista da falta de variação do campo com  $\phi$  e  $z$ . Aplicando (12) para encontrar o campo incremental em  $P$  devido à carga incremental  $dQ = \rho_L dz'$ , temos

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

em que

$$\mathbf{r} = y\mathbf{a}_y = \rho\mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$$

e

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z$$

Logo,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz' (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Uma vez que apenas a componente em  $\mathbf{E}_\rho$  está presente, podemos simplificar:

$$dE_\rho = \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

e

$$E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Integrando com o auxílio de tabelas de integração ou por mudança de variável  $z' = \rho \cot \theta$ , temos

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \rho \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right)_{-\infty}^{\infty}$$

e

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

(19)

Essa é a resposta desejada, mas existem várias outras maneiras de obtê-la. Poderíamos ter usado o ângulo  $\theta$  como nossa variável de integração, pois  $z' = \rho \cotg \theta$  pela Figura 2.6 e  $dz' = -\rho \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta$ . Uma vez que  $R = \rho \operatorname{cosec} \theta$ , nossa integral se torna, simplesmente,

$$\begin{aligned} dE_\rho &= \frac{\rho_L dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \operatorname{sen} \theta = -\frac{\rho_L \operatorname{sen} \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho} \\ E_\rho &= -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_\pi^0 \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos \theta \Big|_\pi^0 \\ &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \end{aligned}$$

Aqui a integração foi mais simples, mas alguma experiência com problemas desse tipo é necessária antes de podermos, com certeza, escolher a variável de integração mais simples no início do problema.

Poderíamos também ter considerado (18) como nosso ponto de partida,

$$\mathbf{E} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

fazendo  $\rho_v dv' = \rho_L dz'$  e integrando ao longo da reta que é agora nosso “volume” que contém toda a carga. Vamos supor fazer isso ignorando tudo o que aprendemos relativo à simetria do problema. Escolha o ponto  $P$  agora em uma posição genérica  $(\rho, \phi, z)$  (Figura 2.7) e escreva:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{a}_\rho + z \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}' = z' \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L dz' [\rho \mathbf{a}_\rho + (z - z') \mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz' \mathbf{a}_\rho}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z') dz' \mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

Antes de integrar uma expressão vetorial, devemos saber se o vetor sob o sinal de integração (aqui os vetores unitários  $\mathbf{a}_\rho$  e  $\mathbf{a}_z$ ) varia ou não com a variável de integração (aqui  $dz'$ ). Se não varia, então ele é uma constante e pode ser removido da integral, deixando um escalar que pode ser integrado por métodos normais. Nossos vetores unitários, é claro, não podem mudar em intensidade, mas uma mudança na direção ou no sentido é da mesma maneira preocupante. Felizmente, a direção e o sentido de  $\mathbf{a}_\rho$  não mudam com  $z'$  (nem com  $\rho$ , mas mudam com  $\phi$ ), e  $\mathbf{a}_z$  é sempre constante.

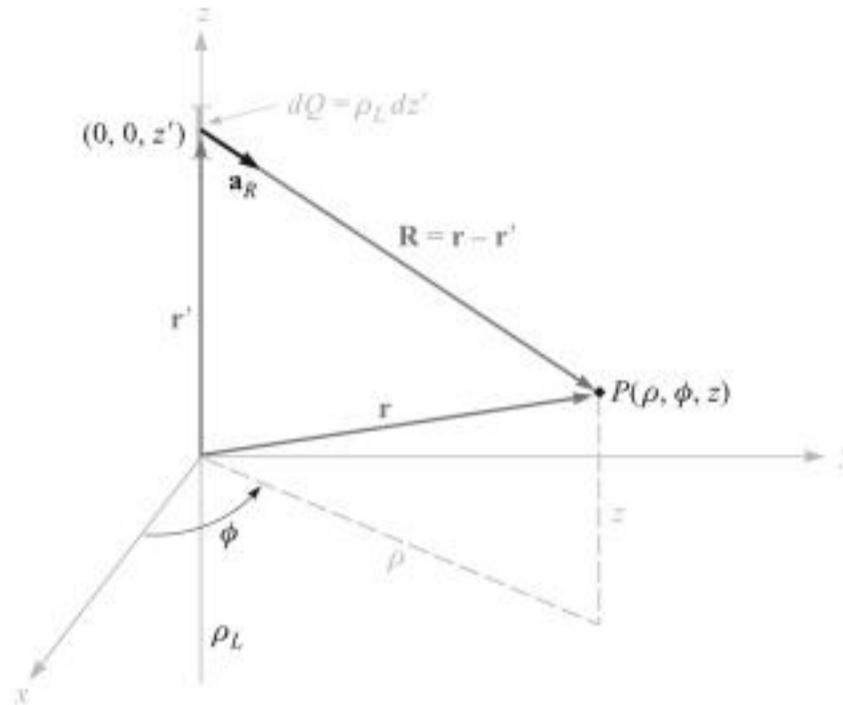


Figura 2.7 A geometria do problema para o campo em volta de uma linha de cargas infinita leva a integrações mais difíceis quando a simetria é ignorada.

Logo, removemos os vetores unitários das integrais e novamente integramos com tabelas ou por substituição de variáveis

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \mathbf{a}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} + \mathbf{a}_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z') dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \mathbf{a}_\rho \rho \frac{1}{\rho^2} \frac{-(z - z')}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \left[ \mathbf{a}_z \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \right\} \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \mathbf{a}_\rho \frac{2}{\rho} + \mathbf{a}_z(0) \right] \right\} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho \end{aligned}$$

Novamente obtemos a mesma resposta, como deveríamos, pois não há nada de errado com o método, exceto pelo fato de a integração ser mais difícil e haver duas integrações para resolver. Esse é o preço que pagamos por desprezar a consideração de simetria e mergulhar de cabeça na matemática. Observe antes de integrar.

Outros métodos para resolver esse problema básico serão discutidos posteriormente, após introduzirmos a lei de Gauss e o conceito de potencial.

Agora, vamos considerar a resposta propriamente dita,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho \tag{20}$$



Notamos que o campo cai inversamente com a distância em relação à linha de cargas, quando comparado com a carga pontual, na qual o campo decai com o *quadrado* da distância. Afastando-se dez vezes mais de uma carga pontual leva a um campo com apenas 1% da força inicial, mas afastando-se dez vezes mais de uma linha de carga apenas reduz o campo para 10% do que era antes. Uma analogia pode ser feita com uma fonte

de iluminação, pois a intensidade da luz a partir de uma fonte de luz pontual também cai com o quadrado da distância em relação à fonte. O campo produzido por uma lâmpada tubular fluorescente infinitamente longa decai inversamente com a primeira potência da distância radial em relação à lâmpada, e devemos esperar que a intensidade luminosa em volta de uma lâmpada tubular de comprimento finito obedeça a essa lei na região perto da lâmpada. À medida que nosso ponto se afasta para mais e mais longe da lâmpada tubular de comprimento finito, entretanto, ela eventualmente se parecerá com uma fonte pontual, e o campo obedece à relação com o inverso do quadrado da distância.

Antes de deixar essa visão introdutória do campo de uma linha infinita de cargas, temos de reconhecer o fato de que nem todas as linhas de cargas estão posicionadas ao longo do eixo  $z$ . Como exemplo, vamos considerar uma linha de cargas infinita paralela ao eixo  $z$  em  $x = 6, y = 8$ , Figura 2.8. Desejamos encontrar  $\mathbf{E}$  no ponto de campo genérico  $P(x, y, z)$ .

Substituímos  $\rho$  em (20) pela distância radial entre a linha de cargas e o ponto  $P$ ,  $R = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}$ , e fazemos  $\mathbf{a}_\rho$  ser  $\mathbf{a}_R$ . Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}} \mathbf{a}_R$$

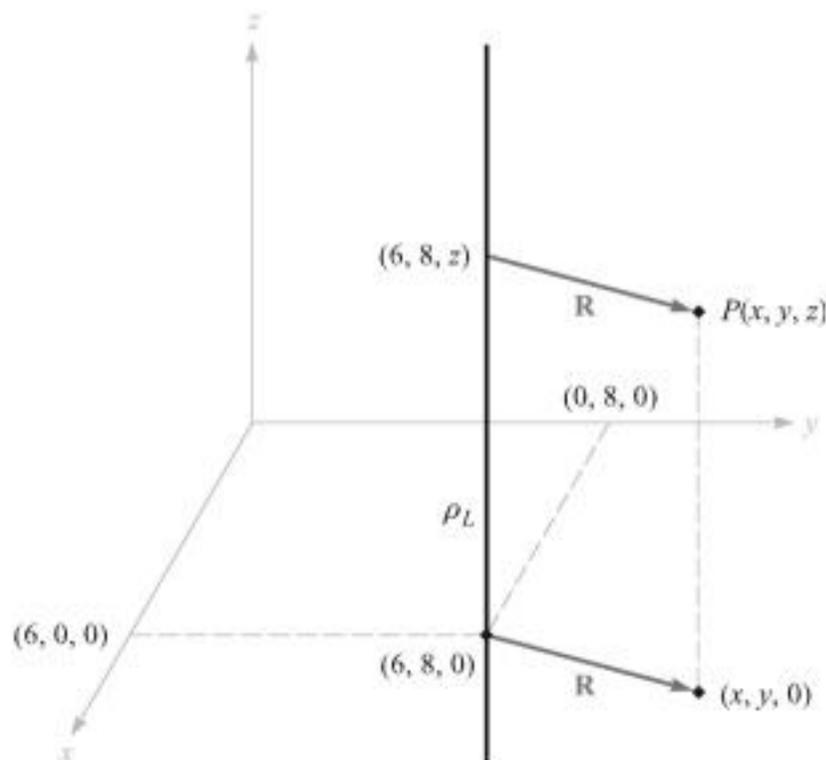
onde

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{(x - 6)\mathbf{a}_x + (y - 8)\mathbf{a}_y}{\sqrt{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}}$$

Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x - 6)\mathbf{a}_x + (y - 8)\mathbf{a}_y}{(x - 6)^2 + (y - 8)^2}$$

Novamente notamos que o campo não é uma função de  $z$ .



**Figura 2.8** Um ponto  $P(x, y, z)$  é identificado perto de uma linha infinita e uniforme de cargas posicionada em  $x = 6, y = 8$ .

Na Seção 2.6 descreveremos como os campos podem ser esboçados, e usaremos o campo de uma linha de cargas como exemplo.

**E2.5.** Linhas uniformes e infinitas de cargas de  $5 \text{ nC/m}$  posicionam-se sobre os eixos (positivo e negativo)  $x$  e  $y$  no espaço livre. Calcule  $\mathbf{E}$  em: (a)  $P_A(0, 0, 4)$ ; (b)  $P_B(0, 3, 4)$ .

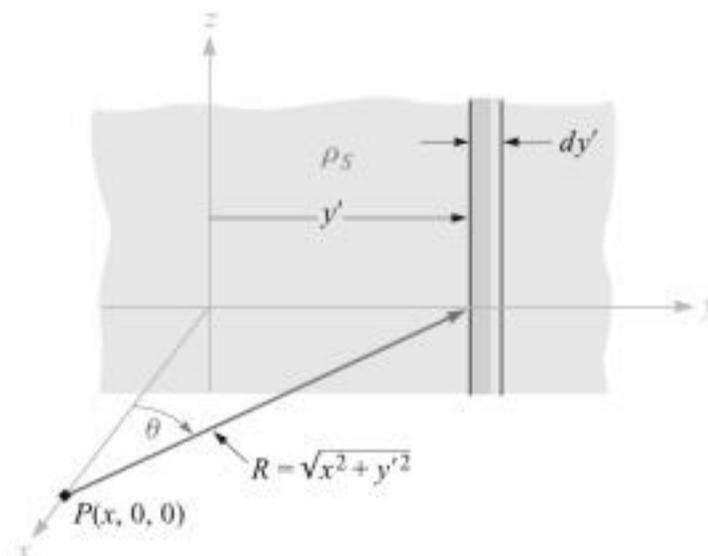
**Resp.**  $45\mathbf{a}_z \text{ V/m}$ ;  $10,8\mathbf{a}_y + 36,9\mathbf{a}_z \text{ V/m}$

## 2.5 CAMPO DE UMA LÂMINA DE CARGAS

Outra configuração básica de cargas é a lâmina infinita de cargas que tem uma densidade uniforme de  $\rho_s \text{ C/m}^2$ . Tal distribuição de cargas pode ser utilizada frequentemente para aproximar aquela encontrada nos condutores de uma linha de transmissão de fita ou em um capacitor de placas paralelas. Como veremos no Capítulo 5, cargas estáticas posicionam-se na superfície dos condutores e não em seu interior. Por essa razão,  $\rho_s$  é comumente conhecida como *densidade superficial de carga*. A família de distribuição de cargas está agora completa – pontual, linear, superficial e volumétrica, ou  $Q$ ,  $\rho_L$ ,  $\rho_S$  e  $\rho_V$ .

Vamos posicionar uma lâmina de cargas no plano  $yz$  e novamente considerar a simetria (Figura 2.9). Vemos primeiro que o campo não pode variar com  $y$  ou com  $z$ , e as componentes  $y$  e  $z$ , originadas dos elementos de carga simetricamente posicionados em relação ao ponto no qual desejamos calcular o campo, se cancelam. Logo, apenas  $E_x$  está presente, e essa componente é função de  $x$  somente. Estamos novamente diante de uma escolha entre vários métodos para avaliar essa componente, mas, dessa vez, utilizaremos apenas um método, deixando os outros para uma tranqüila tarde de domingo.

Vamos utilizar o campo de uma linha de cargas infinita (19) dividindo a lâmina infinita em faixas de largura diferencial. Uma dessas faixas é mostrada na Figura 2.9. A densidade linear de carga, ou carga por unidade de comprimento, é  $\rho_L = \rho_s dy'$ , e a distância



**Figura 2.9** Uma lâmina infinita de cargas no plano  $yz$ , um ponto genérico  $P$  no eixo  $x$ , e a linha de cargas de largura diferencial utilizada como o elemento na determinação do campo em  $P$  por  $dE = \rho_s dy' \mathbf{a}_R / (2\pi\epsilon_0 R)$ .

dessa linha de cargas até nosso ponto genérico  $P$  no eixo  $x$  é  $R = \sqrt{x^2 + y'^2}$ . A contribuição para  $E_x$  em  $P$  dessa faixa de largura diferencial é, então,

$$dE_x = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y'^2}} \cos \theta = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \frac{x dy'}{x^2 + y'^2}$$

Adicionando-se o efeito de todas as fitas,

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dy'}{x^2 + y'^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left[ \tan^{-1} \frac{y'}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

Se o ponto  $P$  tivesse sido escolhido no lado negativo do eixo  $x$ , então

$$E_x = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

pois o campo está sempre direcionado de modo que saia da carga positiva. Essa dificuldade no sinal é usualmente superada pela especificação de um vetor unitário  $\mathbf{a}_N$ , que é normal à lâmina e direcionado para fora, ou para longe dela. Então

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_N \quad (21)$$

Esse é um resultado surpreendente, pois o campo é constante em intensidade, direção e sentido. É tão forte a 1 milhão de quilômetros distante da lâmina quanto junto à superfície. Retornando para nossa analogia com a luz, vemos que uma fonte uniforme de luz no teto de um quarto muito amplo causa tanta iluminação em um metro quadrado no chão quanto em um metro quadrado a poucos centímetros do teto. Se você desejar maior clareza nesse assunto, não vai adiantar segurar o livro mais perto de uma fonte de iluminação desse tipo.

Se uma segunda lâmina de cargas infinita que possui uma densidade de carga *negativa*  $-\rho_s$  está posicionada no plano  $x = a$ , podemos encontrar o campo total somando a contribuição de cada lâmina. Na região  $x > a$ ,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

e para  $x < 0$ ,

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

e quando  $0 < x < a$ ,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

e

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x \quad (22)$$

Esse é um resultado prático importante, pois é o campo entre as placas paralelas de um capacitor separadas pelo ar, caso as dimensões lineares das placas sejam muito maiores que a separação entre elas, e também estejamos considerando um ponto bem afasta-

do das bordas. O campo no lado de fora do capacitor, quando não é zero, conforme encontramos para o caso ideal anterior, usualmente é desprezível.

**E2.6.** Três lâminas de cargas infinitas e uniformes estão posicionadas no espaço livre da seguinte maneira:  $3 \text{ nC/m}^2$  em  $z = -4$ ,  $6 \text{ nC/m}^2$  em  $z = 1$  e  $-8 \text{ nC/m}^2$  em  $z = 4$ . Calcule  $\mathbf{E}$  nos pontos: (a)  $P_A(2, 5, -5)$ ; (b)  $P_B(4, 2, -3)$ ; (c)  $P_C(-1, -5, 2)$ ; (d)  $P_D(-2, 4, 5)$ .

**Resp.**  $-56,5\mathbf{a}_z$ ;  $283\mathbf{a}_z$ ;  $961\mathbf{a}_z$ ;  $56,5\mathbf{a}_z$ , todos V/m

## 2.6 LINHAS DE FORÇA E ESBOÇOS DE CAMPOS

Temos agora equações vetoriais para a intensidade de campo elétrico resultante de várias configurações de cargas diferentes, e tivemos um pouco de dificuldade para interpretar a intensidade, a direção e o sentido do campo pelas equações. Infelizmente, essa simplicidade não pode durar por muito mais tempo, pois resolvemos a maioria dos casos simples e nossas novas distribuições de carga devem levar a expressões mais complicadas para os campos e maior dificuldade em visualizá-los pelas equações. Entretanto, é verdade que um desenho vale mil palavras, se soubermos qual desenho fazer.

Considere o campo em torno de uma linha de cargas,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

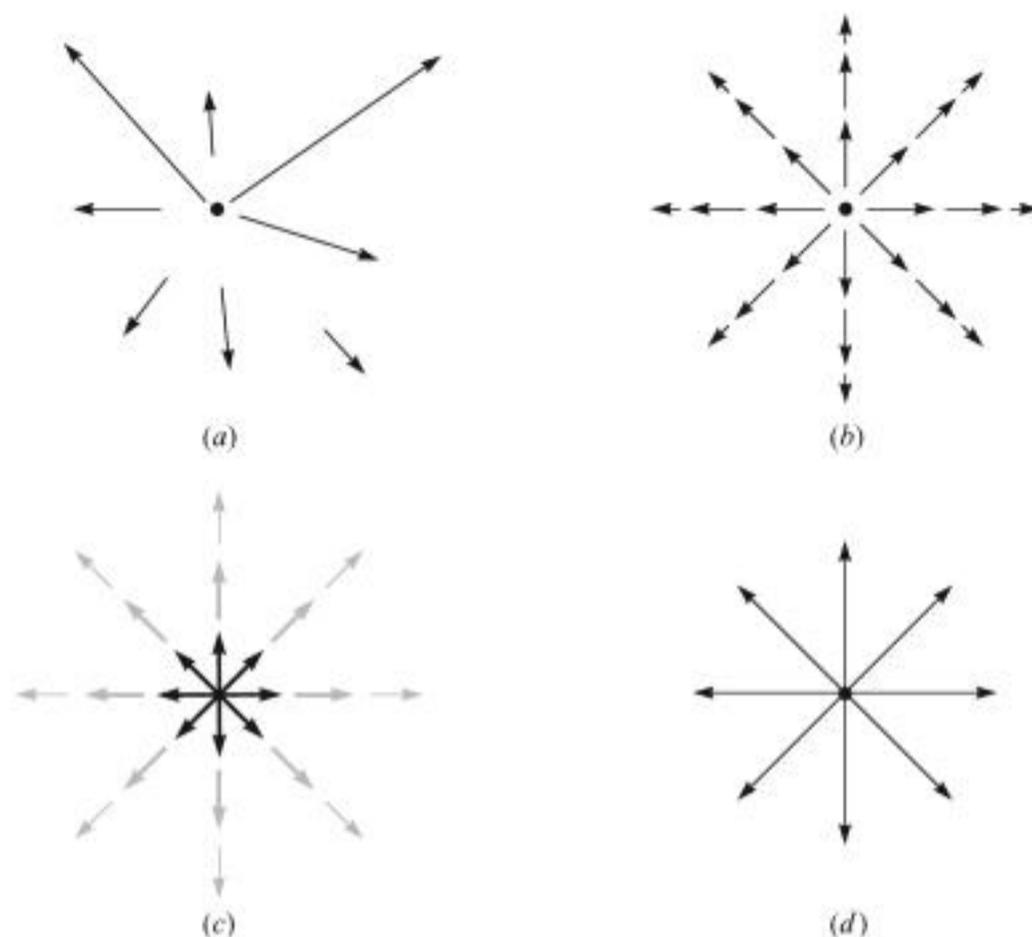
A Figura 2.10a mostra uma visão da seção reta da linha de cargas e apresenta o que seria o nosso primeiro esforço de desenhar o campo – curtos segmentos de reta desenhados aqui e ali possuindo comprimentos proporcionais à intensidade de  $\mathbf{E}$  e apontando na direção e no sentido de  $\mathbf{E}$ . A figura falha em mostrar a simetria com relação a  $\phi$ , de forma que tentamos então novamente na Figura 2.10b com um posicionamento simétrico dos segmentos de reta. O problema real agora aparece – as retas mais longas precisam ser desenhadas na região mais densa, e isso também ocorreria caso utilizássemos segmentos de reta de mesmo comprimento, mas espessura proporcional a  $\mathbf{E}$  (Figura 2.10c). Outros esquemas incluem desenhar linhas mais curtas para representar campos mais fortes (o que intrinsecamente leva ao erro) e utilizar intensidades de cores ou cores diferentes para representar campos mais fortes.

Pelo momento, vamos nos contentar em mostrar apenas a *direção* e o *sentido* de  $\mathbf{E}$  desenhando retas contínuas saindo da carga e que são, em todos os pontos, tangentes a  $\mathbf{E}$ . A Figura 2.10d mostra esse compromisso. Uma distribuição simétrica de linhas (uma a cada  $45^\circ$ ) indica simetria azimutal, e as pontas das setas devem ser utilizadas para indicar o sentido.

Essas linhas são usualmente chamadas de *linhas de força*, apesar de outras expressões como linhas de fluxo e linhas de direção serem também utilizadas. Uma pequena carga de teste positiva posicionada em qualquer ponto nesse campo e livre para se mover aceleraria na direção das linhas de força que passam pelo ponto em questão. Se o campo representasse a velocidade de um líquido ou de um gás (que, conseqüentemente, precisaria ter uma fonte em  $\rho = 0$ ), pequenas partículas suspensas no líquido ou no gás seguiriam as linhas de força.



Ilustração



**Figura 2.10** (a) Um esboço muito pobre, (b) e (c) dois esboços mais razoáveis, e (d) a forma usual de um esboço de linhas de força. Na última forma, as setas mostram a direção e o sentido do campo em todos os pontos ao longo da reta, e o espaçamento das retas é inversamente proporcional à força do campo.

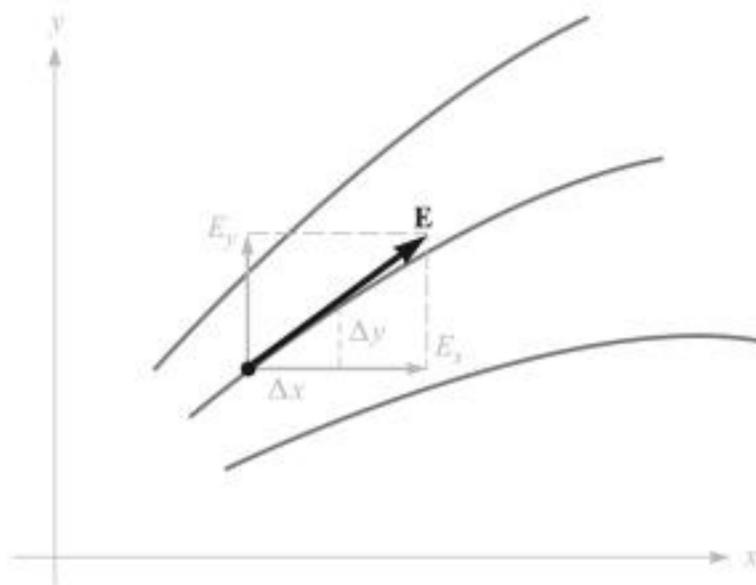
Vamos descobrir mais tarde que um bônus acompanha esse esboço de linhas de força, pois pode-se mostrar que a intensidade do campo é inversamente proporcional ao espaçamento das linhas de força para alguns casos especiais importantes. Quanto mais próximas estão umas das outras, mais forte é o campo. Poderemos, então, encontrar um método mais fácil e mais exato para se fazer esse tipo de esboço de linha de força.

Se tentássemos esboçar o campo da carga pontual, a variação do campo para dentro e para fora da página causaria problemas essencialmente insuperáveis. Por essa razão, esboços são usualmente restritos a campos bidimensionais.

No caso do campo bidimensional, vamos assumir arbitrariamente  $E_z = 0$ . As linhas de força ficam confinadas em planos nos quais  $z$  é constante, e o esboço é o mesmo para qualquer plano desse tipo. Várias linhas de força são mostradas na Figura 2.11, e as componentes  $E_x$  e  $E_y$  são indicadas em um ponto genérico. Uma vez que é aparente, pela geometria, que

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx} \quad (23)$$

um conhecimento da forma funcional de  $E_x$  e  $E_y$  (e a habilidade para resolver a equação diferencial resultante) nos proporciona obter as equações das linhas de força.



**Figura 2.11** A equação de uma linha de força é obtida resolvendo-se a equação diferencial  $E_y/E_x = dy/dx$ .

Como uma ilustração desse método, considere o campo da linha uniforme de cargas com  $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ ,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{a}_\rho$$

Em coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{E} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{a}_x + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{a}_y$$

Logo, formamos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Com isso,

$$\ln y = \ln x + C_1 \quad \text{ou} \quad \ln y = \ln x + \ln C$$

das quais as equações das linhas de força são obtidas,

$$y = Cx$$

Se quisermos encontrar a equação de uma linha de força em particular, digamos, uma passando por  $P(-2, 7, 10)$ , simplesmente substituímos as coordenadas desse ponto na equação e avaliamos o valor de  $C$ . No caso em questão,  $7 = C(-2)$  e  $C = -3,5$ , de forma que  $y = -3,5x$ .

Cada linha de força está associada a um valor específico de  $C$ , e as linhas radiais mostradas na Figura 2.10d são obtidas quando  $C = 0, 1, -1$  e  $1/C = 0$ .

As equações de linhas de força podem também ser obtidas diretamente em coordenadas cilíndricas ou esféricas. Um exemplo envolvendo coordenadas esféricas será examinado na Seção 4.7.

**E2.7.** Encontre a equação da linha de força que passa pelo ponto  $P(1, 4, -2)$  no campo  $\mathbf{E} =: (a) \frac{-8x}{y} \mathbf{a}_x + \frac{4x^2}{y^2} \mathbf{a}_y; (b) 2e^{5x}[y(5x + 1)\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y]$ .

**Resp.**  $x^2 + 2y^2 = 33; y^2 = 15,7 + 0,4x - 0,08 \ln(5x + 1)$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Boast, W. B. *Vector Fields*. Nova Iorque: Harper and Row, 1964. Esse livro contém numerosos exemplos e esboços de campos.
2. Della Torre, E. e Longo, C. L. *The Electromagnetic Field*. Boston: Allyn and Bacon, 1969. Os autores introduzem tudo sobre teoria eletromagnética com um desenvolvimento cuidadoso e rigoroso com base em uma única lei experimental – a de Coulomb. Isso começa no Capítulo 1.
3. Schelkunoff, S. A. *Electromagnetic Fields*. Nova Iorque: Blaisdell Publishing Company, 1963. Muitos dos aspectos físicos dos campos são discutidos mais cedo neste texto sem matemática avançada.

## PROBLEMAS DO CAPÍTULO 2

- 2.1 Quatro cargas positivas de 10 nC estão posicionadas no plano  $z = 0$ , nos vértices de um quadrado de 8 cm de lado. Uma quinta carga positiva de 10 nC está posicionada em um ponto a 8 cm de distância das outras cargas. Calcule a intensidade da força total sobre essa quinta carga para  $\epsilon = \epsilon_0$ .
- 2.2 Duas cargas pontuais de  $Q_1$  coulombs cada estão posicionadas em  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$ . Determine o lugar geométrico das posições possíveis de uma terceira carga  $Q_2$ , onde  $Q_2$  pode ser qualquer valor positivo ou negativo, de forma que o campo total  $\mathbf{E} = 0$  em  $(0, 1, 0)$ . Qual seria o lugar geométrico se as duas cargas originais fossem  $Q_1$  e  $-Q_1$ ?
- 2.3 Cargas pontuais de 50 nC cada estão posicionadas em  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(-1, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$  e  $D(0, -1, 0)$ , no espaço livre. Encontre a força total na carga em  $A$ .
- 2.4 Oito cargas pontuais idênticas de  $Q$  C cada estão posicionadas nos vértices de um cubo com lado de comprimento  $a$ , com uma carga na origem e com as três cargas mais próximas em  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, a, 0)$  e  $(0, 0, a)$ . Encontre uma expressão para o vetor da força total na carga em  $P(a, a, a)$ , assumindo espaço livre.
- 2.5 Seja uma carga pontual  $Q_1 = 25$  nC posicionada em  $P_1(4, -2, 7)$  e uma carga  $Q_2 = 60$  nC que está em  $P_2(-3, 4, -2)$ . (a) Se  $\epsilon = \epsilon_0$ , encontre  $\mathbf{E}$  em  $P_3(1, 2, 3)$ . (b) Em qual ponto no eixo  $y$  tem-se  $E_x = 0$ ?
- 2.6 Três cargas pontuais,  $5 \times 10^{-9}$  C cada, estão posicionadas no eixo  $x$  em  $x = -1, 0$  e  $1$ , no espaço livre. (a) Encontre  $\mathbf{E}$  em  $x = 5$ . (b) Determine o valor e a localização da carga pontual única equivalente que produziria o mesmo campo em distâncias muito grandes. (c) Determine  $\mathbf{E}$  em  $x = 5$  usando a aproximação de (b).
- 2.7 Uma carga pontual de  $2 \mu\text{C}$  está posicionada em  $A(4, 3, 5)$  no espaço livre. Encontre  $E_\rho$ ,  $E_\phi$  e  $E_z$  em  $P(8, 12, 2)$ .
- 2.8 Um dispositivo rudimentar para medir cargas consiste em duas pequenas esferas isolantes de raio  $a$ , uma das quais mantém uma posição fixa. A outra pode se



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

No espaço livre, portanto,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{apenas para espaço livre}) \quad (2)$$

Apesar de (2) ser aplicável apenas para o vácuo, não é restrita somente ao campo de uma carga pontual. Para uma distribuição volumétrica de cargas genérica, no espaço livre,

$$\mathbf{E} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (\text{apenas para espaço livre}) \quad (3)$$

onde essa relação foi desenvolvida do campo de uma carga pontual única. De uma forma similar, (1) leva a

$$\mathbf{D} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R \quad (4)$$

e (2) é, portanto, verdadeira para qualquer configuração de cargas no espaço livre. Devemos considerar que (2) define  $\mathbf{D}$  no espaço livre.

Como uma preparação para o estudo de dielétricos mais tarde, seria bom ressaltar agora que, para uma carga pontual imersa em um meio dielétrico ideal infinito, os resultados de Faraday mostram que (1) é ainda aplicável e, assim, também o é (4). Contudo, a Equação (3) não é aplicável, e então a relação entre  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  será ligeiramente mais complicada que (2).

Uma vez que  $\mathbf{D}$  é diretamente proporcional a  $\mathbf{E}$  no espaço livre, não parece ser realmente necessário introduzir um novo símbolo. Fazemos isso por diversas razões. Primeiro, porque  $\mathbf{D}$  está associado com o conceito de fluxo, que é uma idéia nova importante. Segundo, porque os campos  $\mathbf{D}$  que obteremos serão um pouco mais simples que os campos  $\mathbf{E}$  correspondentes, uma vez que  $\epsilon_0$  não aparecerá. E, finalmente, é útil familiarizar-se um pouco com  $\mathbf{D}$  antes de ser aplicado a materiais dielétricos, no Capítulo 6.

Vamos considerar um exemplo numérico simples para ilustrar essas novas grandezas e unidades.

### EXEMPLO 3.1

Desejamos encontrar  $\mathbf{D}$  na região em volta de uma linha de cargas uniforme de 8 nC/m que se estende ao longo do eixo  $z$ , no espaço livre.

**Solução.** O campo  $\mathbf{E}$  é

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{8 \times 10^{-9}}{2\pi(8,854 \times 10^{-12})\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{143,8}{\rho} \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$$

Em  $\rho = 3\text{m}$ ,  $\mathbf{E} = 47,9\mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$ .

Associado ao campo  $\mathbf{E}$ , encontramos

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{8 \times 10^{-9}}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{1,273 \times 10^{-9}}{\rho} \mathbf{a}_\rho \text{ C/m}^2$$

O valor em  $\rho = 3\text{ m}$  é  $\mathbf{D} = 0,424\mathbf{a}_\rho \text{ nC/m}$ .

O fluxo total que deixa uma linha de cargas de 5 m de comprimento é igual à carga total neste comprimento, ou  $\Psi = 40 \text{ nC}$ .

**E3.1.** Dada uma carga pontual de  $60 \mu\text{C}$  posicionada na origem, calcule o fluxo elétrico total que passa por: (a) a porção da esfera  $r = 26 \text{ cm}$  limitada por  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  e  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ ; (b) a superfície fechada definida por  $\rho = 26 \text{ cm}$  e  $z = \pm 26 \text{ cm}$ ; (c) o plano  $z = 26 \text{ cm}$ .

**Resp.**  $7,5 \mu\text{C}$ ;  $60 \mu\text{C}$ ;  $30 \mu\text{C}$

**E3.2.** Calcule  $\mathbf{D}$  em coordenadas cartesianas no ponto  $P(2, -3, 6)$  produzido por: (a) uma carga pontual  $Q_A = 55 \text{ mC}$  em  $Q(-2, 3, -6)$ ; (b) uma linha uniforme de cargas  $\rho_{LB} = 20 \text{ mC/m}$  sobre o eixo  $x$ ; (c) uma densidade superficial uniforme de cargas  $\rho_{SC} = 120 \mu\text{C/m}^2$  sobre o plano  $z = -5 \text{ m}$ .

**Resp.**  $6,38 \mathbf{a}_x - 9,57 \mathbf{a}_y + 19,14 \mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$ ;  $-212 \mathbf{a}_y + 424 \mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$ ;  $60 \mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$

## 3.2 A LEI DE GAUSS

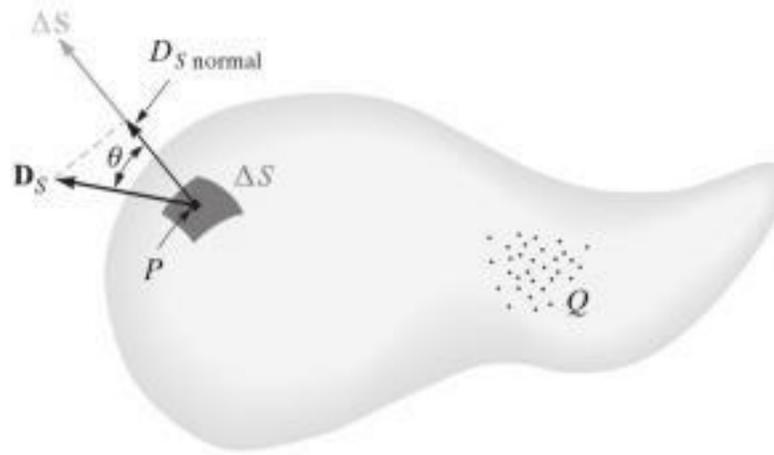
Os resultados dos experimentos de Faraday com as esferas concêntricas poderiam ser resumidos como uma lei experimental estabelecendo que o fluxo elétrico que passa por uma superfície esférica imaginária localizada entre as duas esferas condutoras é igual à carga contida dentro da própria superfície imaginária. Essa carga contida estará distribuída na superfície da esfera interna, ou poderá estar concentrada como uma carga pontual no centro da esfera imaginária. Entretanto, como um coulomb de fluxo elétrico é produzido por um coulomb de carga, o condutor interno poderia ser, da mesma maneira, um cubo ou uma chave de metal, e a carga induzida total na esfera externa continuaria a mesma. Certamente a densidade de fluxo mudaria da sua distribuição simétrica anterior para alguma configuração desconhecida, mas  $+Q$  coulombs em qualquer condutor interno produziria uma carga induzida de  $-Q$  coulombs na esfera externa. Dando mais um passo adiante, poderíamos agora substituir os dois hemisférios externos por uma vasilha de sopa vazia (mas completamente fechada).  $Q$  coulombs na chave de metal produziria  $\Psi = Q$  linhas de fluxo elétrico e induziria  $-Q$  coulombs na vasilha de estanho.<sup>1</sup>

Essas generalizações do experimento de Faraday levaram ao seguinte enunciado, conhecido como *Lei de Gauss*.

O fluxo elétrico que passa por qualquer superfície fechada é igual à carga total que está contida dentro dessa superfície.

A contribuição de Gauss, um dos maiores matemáticos que o mundo já produziu, foi, na verdade, não em enunciar a lei conforme conhecemos, mas em proporcionar uma forma matemática para seu enunciado, que devemos obter agora.

<sup>1</sup> Se fosse um isolante perfeito, a sopa poderia ainda ser deixada na vasilha, sem nenhuma diferença nos resultados.



**Figura 3.2** A densidade de fluxo elétrico  $D_S$  em  $P$  devida à carga  $Q$ . O fluxo total passando por  $\Delta S$  é  $D_S \cdot \Delta S$ .

Vamos imaginar uma distribuição de cargas, mostrada como uma nuvem de cargas pontuais na Figura 3.2, cercada por uma superfície fechada de qualquer formato. A superfície fechada pode ser a superfície de algum material real, mas de forma mais genérica é qualquer superfície fechada que desejarmos visualizar. Se a carga total é  $Q$ , então  $Q$  coulombs de fluxo elétrico passará pela superfície circundante. Em todos os pontos na superfície o vetor densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$  terá algum valor  $\mathbf{D}_S$ , onde o subscrito  $S$  simplesmente nos lembra de que  $\mathbf{D}$  deve ser calculado na superfície, e  $\mathbf{D}_S$ , de uma forma geral, variará em intensidade, direção e sentido de um ponto para outro na superfície.

Devemos agora considerar a natureza de um elemento incremental da superfície. Um elemento incremental de área  $\Delta S$  é quase uma porção de uma superfície plana, e a descrição completa desse elemento de superfície requer não apenas uma definição de sua área  $\Delta S$ , mas também de sua orientação no espaço. Em outras palavras, o elemento incremental de superfície é uma grandeza vetorial. A única direção que pode ser associada a  $\Delta S$  é a direção da normal ao plano que é tangente à superfície no ponto em questão. Existem, naturalmente, duas normais possíveis, mas tal ambigüidade é eliminada escolhendo-se a normal que está no sentido “para fora”, sempre que a superfície for fechada e o termo “para fora” tiver um significado específico.

Considere um elemento incremental de superfície  $\Delta S$  em qualquer ponto  $P$  e suponha que  $\mathbf{D}_S$  faça um ângulo  $\theta$  com  $\Delta S$ , como mostra a Figura 3.2. O fluxo que atravessa  $\Delta S$  é o produto da componente normal de  $\mathbf{D}_S$  com  $\Delta S$ ,

$$\Delta\Psi = \text{fluxo que atravessa } \Delta S = D_{S, \text{norm}} \Delta S = D_S \cos \theta \Delta S = \mathbf{D}_S \cdot \Delta \mathbf{S}$$

onde somos capazes de aplicar a definição do produto escalar desenvolvido no Capítulo 1.

O fluxo *total* que passa pela superfície fechada é obtido somando-se as contribuições diferenciais que atravessam cada elemento de superfície  $\Delta S$ ,

$$\Psi = \int d\Psi = \oint_{\text{superfície fechada}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

A integral resultante é uma *integral de superfície fechada* e, uma vez que o elemento de superfície  $d\mathbf{S}$  sempre envolve as diferenciais de duas coordenadas, tais como  $dx dy$ ,



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

O uso de  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  é muito mais usual que  $\text{div } \mathbf{D}$ , apesar de ambas as formas terem suas vantagens. Escrevendo  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  nos permite obter, de forma simples e rápida, as derivadas parciais corretas, mas apenas em coordenadas cartesianas, conforme veremos. Por outro lado,  $\text{div } \mathbf{D}$  é ótimo para nos lembrar da interpretação física de divergência. Deveremos utilizar a notação de operador  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  de agora em diante, para indicar a operação de divergência.

O operador vetorial  $\nabla$  não é utilizado apenas com divergência, mas também para diversas outras operações que aparecerão depois. Uma delas é  $\nabla u$ , onde  $u$  é qualquer campo escalar, o que leva a

$$\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

O operador  $\nabla$  não tem uma forma específica em outros sistemas de coordenadas. Se estivermos considerando  $\mathbf{D}$  em coordenadas cilíndricas, então  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  ainda indica a divergência de  $\mathbf{D}$ , ou

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

e essa expressão foi retirada da Seção 3.5. Não temos forma própria para  $\nabla$  nos auxiliar a obter essa soma de derivadas parciais. Isso significa que  $\nabla u$ , ainda não definido mas facilmente escrito em coordenadas cartesianas, não pode ser expresso por nós nesse momento em coordenadas cilíndricas. Tal expressão será obtida quando  $\nabla u$  for definido no Capítulo 4.

Devemos concluir nossa discussão de divergência apresentando um teorema que será necessário diversas vezes nos próximos capítulos, o *teorema da divergência*. Esse teorema se aplica a qualquer campo vetorial para o qual a derivada parcial apropriada exista, apesar de ser mais fácil, neste caso, desenvolvê-lo para a densidade de fluxo elétrico. Na realidade, já o obtivemos e temos agora pouco mais para acrescentar do que mostrá-lo e nomeá-lo, pois, começando da lei de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

e fazendo

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv$$

e então substituindo  $\rho_v$  pela igualdade

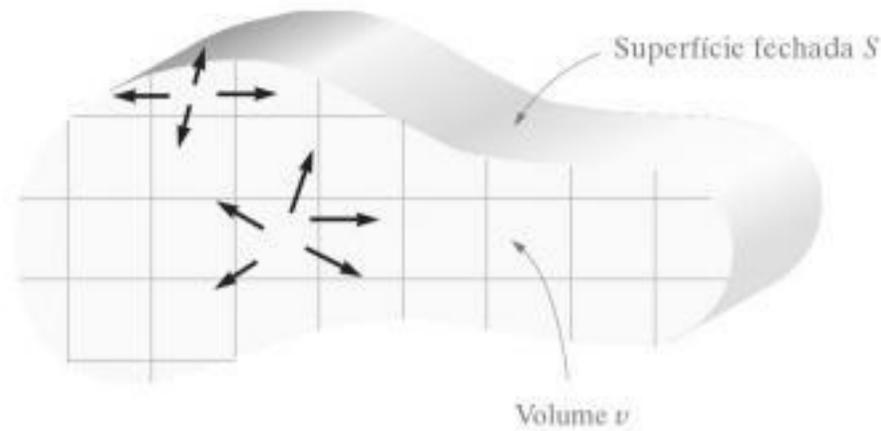
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

temos

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

A primeira e última expressões constituem o teorema da divergência

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv} \quad (22)$$



**Figura 3.7** O teorema da divergência define que o fluxo total que atravessa a superfície fechada é igual à integral da divergência da densidade de fluxo dentro do volume envolvido. Uma seção reta do volume é aqui mostrada.

que pode ser enunciado como:

A integral da componente normal de qualquer campo vetorial sobre uma superfície fechada é igual à integral da divergência desse campo vetorial no volume delimitado pela superfície fechada.

Novamente, enfatizamos que o teorema da divergência é verdadeiro para qualquer campo vetorial, apesar de o termos obtido especificamente para a densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$ ; mais tarde teremos oportunidade de aplicá-lo a diversos campos. Seus benefícios derivam do fato de ele relacionar uma integral tripla *em algum volume* com uma integral dupla *na superfície* que delimita tal volume. Como exemplo, é muito mais fácil procurar por vazamentos em uma garrafa cheia de líquido agitado, pela inspeção da sua superfície, do que pelo cálculo da velocidade em cada ponto interno.

O teorema da divergência se torna fisicamente óbvio se consideramos um volume  $v$ , cuja seção reta é mostrada na Figura 3.7, que é delimitado pela superfície fechada  $S$ . A divisão do volume em um grande número de pequenos compartimentos de tamanho diferencial e a consideração de uma célula mostram que o fluxo que diverge de tal célula *entra*, ou *converge* para, a célula adjacente, a menos que a célula contenha uma porção da superfície externa. Resumindo, a divergência da densidade de fluxo por um volume leva, portanto, ao mesmo resultado que determinar o fluxo líquido que atravessa a superfície delimitadora.

Vamos considerar este exemplo, para ilustrar o teorema da divergência.

### EXEMPLO 3.5

Calcule ambos os lados do teorema da divergência para o campo  $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$  C/m<sup>2</sup> e o paralelepípedo retângulo formado pelos planos  $x = 0$  e  $1$ ,  $y = 0$  e  $2$ , e  $z = 0$  e  $3$ .

**Solução.** Calculando primeiro a integral na superfície, notamos que  $\mathbf{D}$  é paralelo às superfícies  $z = 0$  e  $z = 3$ , de forma que  $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ . Para as quatro superfícies restantes, temos

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0} \cdot (-dy dz \mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1} \cdot (dy dz \mathbf{a}_x) \\ &\quad + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0} \cdot (-dx dz \mathbf{a}_y) + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2} \cdot (dx dz \mathbf{a}_y) \\ &= -\int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=0} dy dz + \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy dz \\ &\quad - \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=0} dx dz + \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=2} dx dz \end{aligned}$$

Entretanto,  $(D_x)_{x=0} = 0$  e  $(D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2}$ , o que deixa apenas

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy dz = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz \\ &= \int_0^3 4 dz = 12 \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2) = 2y$$

a integral volumétrica se torna

$$\begin{aligned} \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y dx dy dz = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz \\ &= \int_0^3 4 dz = 12 \end{aligned}$$

e a prova está completa. Lembrando da lei de Gauss, percebemos que também determinamos que uma carga total de 12 C encontra-se dentro desse paralelepípedo.

**E3.9.** Dado o campo  $\mathbf{D} = 6\rho \sin \frac{1}{2}\phi \mathbf{a}_\rho + 1,5\rho \cos \frac{1}{2}\phi \mathbf{a}_\phi$  C/m<sup>2</sup>, calcule ambos os lados do teorema da divergência para a região delimitada por  $\rho = 2$ ,  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi$ ,  $z = 0$  e  $z = 5$ .

**Resp.** 225; 225

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Kraus, J. D. e Fleisch, D. A. *Electromagnetics*, 5ª ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1999. O campo elétrico estático no espaço livre é introduzido no Capítulo 2.
2. Plonsey, R. e Collin, R. E. *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1961. O nível desse texto é mais elevado do que o que estamos lendo agora, mas é um excelente texto para ler em seguida. A lei de Gauss é apresentada no Capítulo 2.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Continuando a adicionar cargas, encontramos que o potencial resultante de  $n$  cargas pontuais é

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

ou

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \quad (17)$$

Se cada carga pontual for agora representada como um pequeno elemento de uma distribuição volumétrica contínua de carga  $\rho_v \Delta v$ , então

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_v(\mathbf{r}_1)\Delta v_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_2)\Delta v_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_n)\Delta v_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

À medida que permitimos que o número de elementos se torne infinito, obtemos a expressão integral

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (18)$$

Andamos uma boa distância do campo potencial de uma carga pontual única, e seria útil examinar (18) e refrescar nossa memória em relação ao significado de cada termo. O potencial  $V(\mathbf{r})$  é determinado em relação a um potencial zero de referência no infinito e é uma medida exata do trabalho executado para se trazer uma carga unitária do infinito para o ponto de campo em  $\mathbf{r}$  no qual estamos calculando o potencial. A densidade volumétrica de carga  $\rho_v(\mathbf{r}')$  e o elemento diferencial de volume  $dv'$  combinam-se para representar uma quantidade diferencial de carga  $\rho_v(\mathbf{r}')dv'$  posicionada em  $\mathbf{r}'$ . A distância  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  é a distância do ponto de fonte ao ponto de campo. A integral é uma integral (volumétrica) múltipla.

Se a distribuição de cargas toma a forma de uma linha de cargas ou de uma lâmina de cargas, a integração é ao longo da linha ou sobre a superfície.

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')dL'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (19)$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')dS'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (20)$$

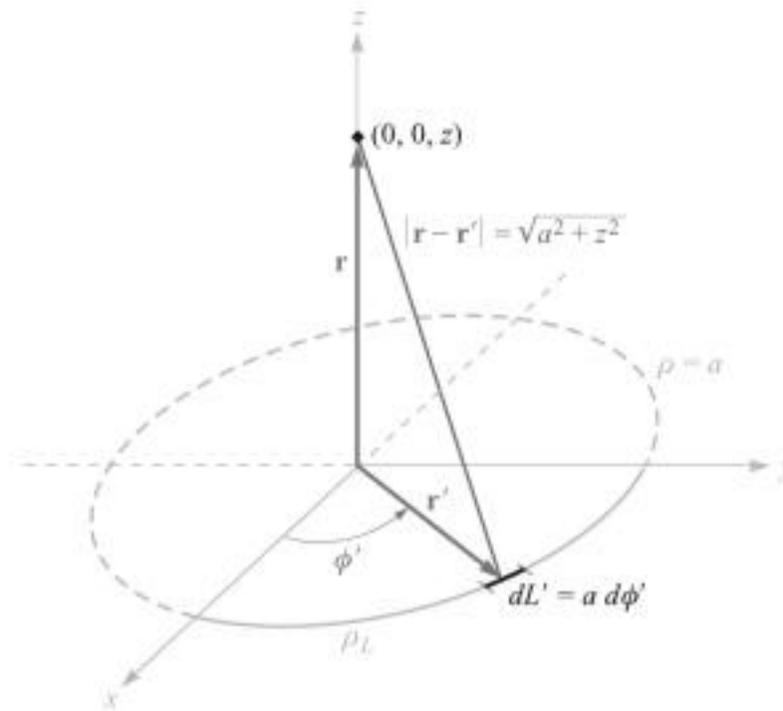
A expressão mais genérica para o potencial é obtida combinando (17), (18), (19) e (20).

Essas expressões de integrais para o potencial em termos da distribuição de cargas devem ser comparadas a expressões similares para a intensidade de campo elétrico, tal como (18) na Seção 2.3:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

O potencial novamente varia com o inverso da distância, e a intensidade de campo elétrico varia com o inverso do quadrado da distância. A última, é claro, é um campo vetorial.

Para ilustrar o uso de uma dessas integrais do potencial, vamos calcular  $V$  no eixo  $z$  para uma linha de cargas uniforme  $\rho_L$  na forma de um anel,  $\rho = a$ , no plano  $z = 0$ ,



**Figura 4.4** O campo potencial de um anel de densidade linear uniforme de carga é facilmente obtido por  $V = \int \rho_L(r') dL' / (4\pi\epsilon_0 |r - r'|)$ .

conforme mostra a Figura 4.4. Trabalhando com (19), temos  $dL' = a d\phi'$ ,  $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$ ,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$ , e

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a d\phi'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

Para um zero de referência no infinito, então:

1. O potencial devido a uma carga pontual única é o trabalho realizado para deslocar uma carga unitária positiva do infinito até o ponto no qual desejamos o potencial, e o trabalho é independente do caminho escolhido entre os dois pontos.
2. O campo potencial na presença de certo número de cargas pontuais é a soma dos campos potenciais individuais devidos a cada carga.
3. O potencial devido a certo número de cargas pontuais ou qualquer distribuição contínua de cargas pode assim ser calculado deslocando uma carga unitária do infinito até o ponto em questão ao longo de qualquer caminho que escolhermos.

Em outras palavras, a expressão para o potencial (zero de referência no infinito),

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

ou diferença de potencial

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

não é dependente do caminho escolhido para a integral de linha, não importando a fonte do campo  $\mathbf{E}$ .

Esse resultado é freqüentemente enunciado de forma concisa, lembrando-se de que nenhum trabalho é realizado ao se deslocar a carga unitária por qualquer *caminho fechado*, ou

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (21)$$

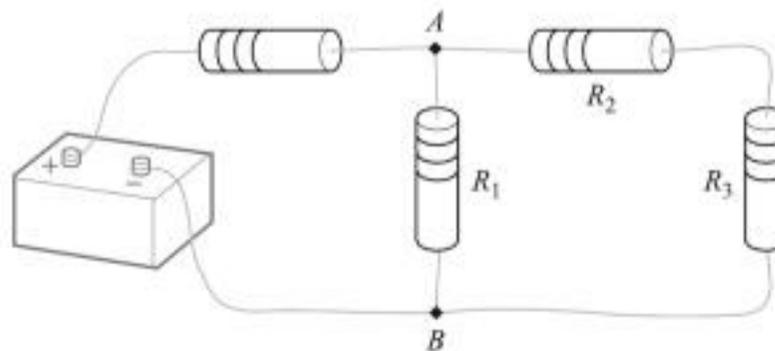
Um pequeno círculo é colocado no sinal de integração para indicar a natureza fechada do caminho. Esse círculo também apareceu na formulação da lei de Gauss, em que uma integral de *superfície* fechada foi utilizada.

A Equação (21) é verdadeira para campos *estáticos*, mas veremos no Capítulo 10 que Faraday demonstrou ser incompleta quando campos magnéticos variantes no tempo estavam presentes. Uma das grandes contribuições de Maxwell para a teoria eletromagnética foi mostrar que um campo elétrico variante no tempo produz um campo magnético e, com isso, devemos esperar encontrar mais tarde que (21) não é correta quando  $\mathbf{E}$  ou o campo magnético varia com o tempo.

Restringindo nossa atenção para o caso estático no qual  $\mathbf{E}$  não muda com o tempo, considere o circuito c.c. mostrado na Figura 4.5. Dois pontos,  $A$  e  $B$ , estão marcados, e (21) determina que um trabalho nulo está envolvido no deslocamento de uma carga unitária de  $A$  até  $B$  por  $R_2$  e por  $R_3$ , e depois de volta para  $A$  por  $R_1$ , ou que a soma das diferenças de potencial ao longo de qualquer caminho fechado é zero.

A Equação (21) é, então, apenas uma forma mais genérica da lei circuital de Kirchhoff para tensões, mais geral na medida em que podemos aplicá-la a qualquer região na qual um campo elétrico exista e não estamos restritos a um circuito convencional composto de fios, resistências e baterias. A Equação (21) deve ser corrigida antes de aplicá-la a campos variantes no tempo. Veremos isso no Capítulo 10 e, no Capítulo 13, seremos capazes de estabelecer a forma geral da lei de tensões de Kirchhoff para circuitos nos quais tensões e correntes variem no tempo.

Qualquer campo que satisfaça a uma equação do tipo de (21), isto é, em que a integral de linha fechada do campo é zero, é um *campo conservativo*. O nome vem do fato de que nenhum trabalho é realizado (ou que a energia é *conservada*) ao longo de um caminho fechado. O campo gravitacional também é conservativo, pois qualquer energia despendida na movimentação (levantando) de um objeto contra o campo é recuperada exatamente quando o objeto é retornado (abaixado) para sua posição original. Um campo gravitacional não conservativo poderia resolver nosso problema de energia para sempre.



**Figura 4.5** Um problema de circuito c.c. simples que deve ser solucionado pela aplicação de  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$  na forma da lei das tensões de Kirchhoff.

Dado um campo *não conservativo*, evidentemente é possível que a integral de linha seja zero para determinados caminhos fechados. Como exemplo, considere o campo de força  $\mathbf{F} = \text{sen } \pi \rho \mathbf{a}_\phi$ . Ao redor de um caminho circular de raio  $\rho = \rho_1$ , temos  $d\mathbf{L} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$ , e

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} \text{sen } \pi \rho_1 \mathbf{a}_\phi \cdot \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi = \int_0^{2\pi} \rho_1 \text{sen } \pi \rho_1 d\phi = 2\pi \rho_1 \text{sen } \pi \rho_1$$

A integral é zero se  $\rho_1 = 1, 2, 3, \dots$ , etc., mas não é zero para outros valores de  $\rho_1$ , ou para a maioria dos outros caminhos fechados, e o campo dado não é conservativo. Um campo conservativo deve levar a um campo nulo para a integral de linha ao redor de todos caminhos fechados possíveis.

**E4.6.** Se tomarmos o zero de referência para o potencial no infinito, calcule o potencial em  $(0, 2, 2)$  causado por essa configuração de cargas no espaço livre: (a) 12 nC/m na linha  $\rho = 2,5$  m,  $z = 0$ ; (b) carga pontual de 18 nC em  $(1, 2, -1)$ ; (c) 12 nC/m na linha  $y = 2,5$ ,  $z = 0$ .

**Resp.** 529 V; 43,2 V; 67,4 V

## 4.6 GRADIENTE DO POTENCIAL

Temos agora dois métodos para determinar o potencial: um diretamente da intensidade de campo elétrico por meio de uma integral de linha e outro pela própria distribuição básica de cargas por meio de uma integral volumétrica. Nenhum dos dois métodos é muito útil na determinação dos campos na maioria dos problemas práticos, pois, como veremos, nem a intensidade de campo elétrico nem a distribuição de cargas são frequentemente conhecidas. A informação preliminar é muito mais provável que consista em uma descrição de duas superfícies equipotenciais, tal como a situação de termos dois condutores paralelos de seções retas circulares em potenciais de 100 V e  $-100$  V. Talvez desejemos encontrar a capacitância entre os condutores, ou as distribuições de carga e de corrente nos condutores das quais as perdas possam ser calculadas.

Essas grandezas podem ser facilmente obtidas pelo campo potencial, e nosso objetivo imediato será utilizar um método simples para encontrar a intensidade de campo elétrico por meio do potencial. Já temos a relação genérica entre essas duas grandezas, que é uma integral de linha,

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (22)$$

mas é muito mais fácil utilizar na direção inversa: dado  $\mathbf{E}$ , encontrar  $V$ .

Entretanto, (22) pode ser aplicada a um elemento de comprimento muito curto  $\Delta\mathbf{L}$  ao longo do qual  $\mathbf{E}$  é essencialmente constante, levando a uma diferença de potencial incremental  $\Delta V$ ,

$$\Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} \quad (23)$$



Interatividade



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



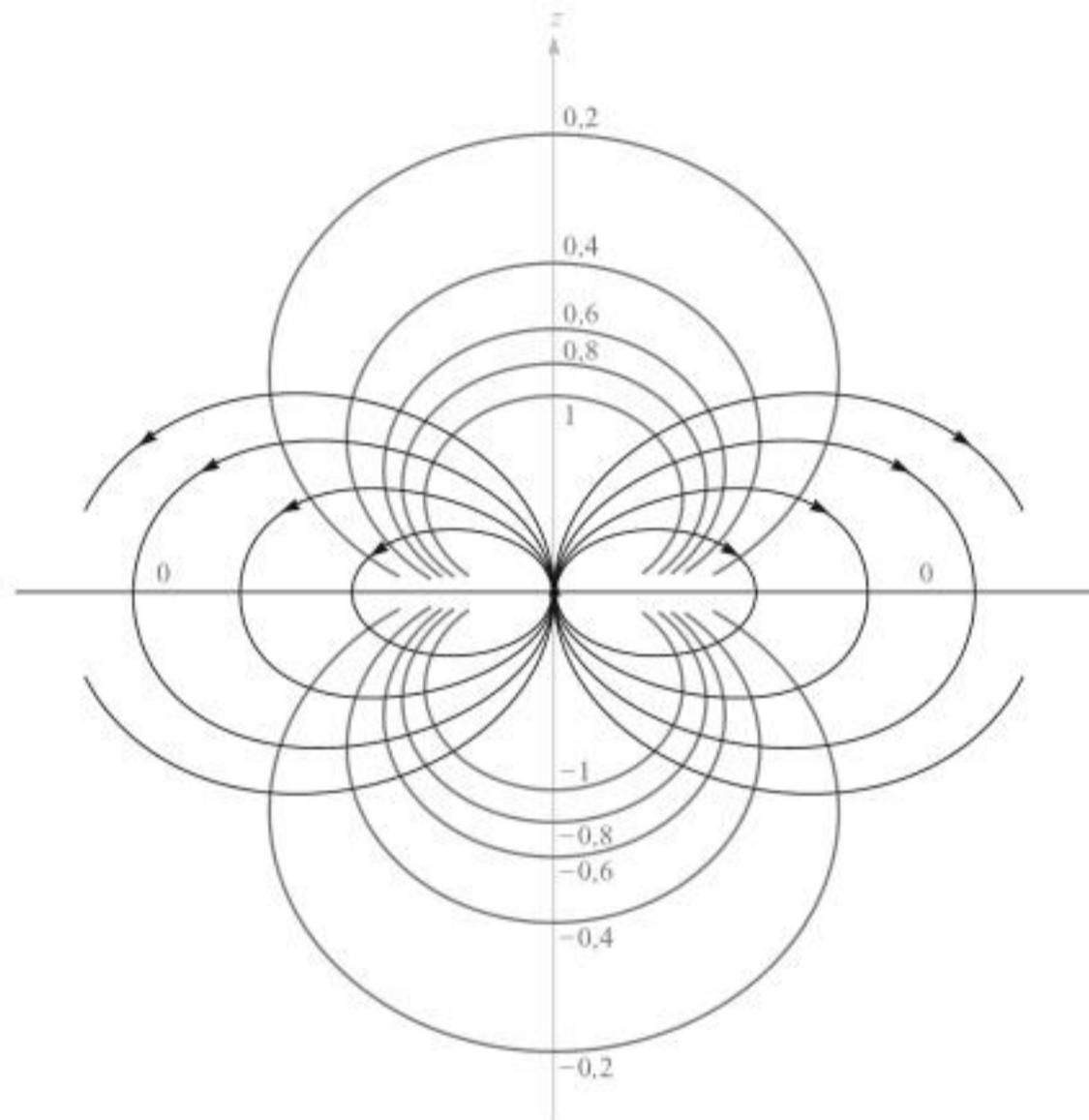
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



**Figura 4.10** O campo eletrostático de um dipolo pontual com seu momento na direção  $a_z$ . Seis superfícies equipotenciais são identificadas com valores relativos de  $V$ .

Para obter um gráfico do campo potencial, podemos escolher um dipolo em que  $Qd/(4\pi\epsilon_0) = 1$ , e então  $\cos\theta = Vr^2$ . As linhas superiores e inferiores na Figura 4.10 indicam equipotenciais para as quais  $V = 0, +0,2, +0,4, +0,6, +0,8$  e  $+1$ , conforme indicado. O eixo do dipolo é vertical, com a carga positiva no topo. As linhas de força para o campo elétrico são obtidas pela aplicação dos métodos da Seção 2.6 em coordenadas esféricas,

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{r d\theta}{dr} = \frac{\text{sen } \theta}{2 \cos \theta}$$

ou

$$\frac{dr}{r} = 2 \cotg \theta d\theta$$

da qual obtemos

$$r = C_1 \text{sen}^2 \theta$$

As linhas de força, à direita e à esquerda, mostradas na Figura 4.10 são para  $C_1 = 1, 1,5, 2$  e  $2,5$ .

O campo potencial do dipolo, Equação (34), pode ser simplificado usando o momento do dipolo. Vamos primeiro identificar o vetor comprimento direcionado de  $-Q$  para  $+Q$  como  $\mathbf{d}$  e definir o *momento de dipolo* como  $Q\mathbf{d}$  e associá-lo ao símbolo  $\mathbf{p}$ . Logo,

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad (37)$$

As unidades de  $\mathbf{p}$  são  $C \cdot m$ .

Uma vez que  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r = d \cos\theta$ , temos

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (38)$$

Este resultado pode ser generalizado como

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (39)$$

onde  $\mathbf{r}$  posiciona o ponto de campo  $P$  e  $\mathbf{r}'$  determina o centro do dipolo. A Equação (39) é independente de qualquer sistema de coordenadas.

O momento de dipolo  $\mathbf{p}$  aparecerá novamente quando discutirmos materiais dielétricos. Uma vez que ele é igual ao produto da carga pela separação, nem o momento de dipolo nem o potencial mudarão à medida que  $Q$  aumentar e  $\mathbf{d}$  diminuir, desde que o produto se mantenha constante. O caso limite de um *dipolo pontual* é atingido quando fazemos  $\mathbf{d}$  se aproximar de zero e  $Q$  se aproximar de infinito, de modo que o produto  $\mathbf{p}$  seja finito.

Voltando nossa atenção para os campos resultantes, é interessante notar que o campo potencial é agora proporcional ao inverso do *quadrado* da distância, e a intensidade de campo elétrico é proporcional ao inverso do *cuvo* da distância em relação ao dipolo. Cada campo cai mais rápido que o campo correspondente para a carga pontual, mas isso não é mais do que deveríamos esperar, pois as cargas opostas parecem estar mais próximas entre si em distâncias maiores e atuam mais como se fossem uma carga pontual de  $0\text{ C}$ .

Arranjos simétricos de maiores números de cargas pontuais produzem campos proporcionais ao inverso de potências mais e mais altas de  $r$ . Essas distribuições de cargas são chamadas de *multipolos*, e são utilizadas em séries infinitas para aproximar configurações de cargas mais complexas.

**E4.9.** Um dipolo elétrico posicionado na origem no espaço livre tem um momento  $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \text{ nC} \cdot \text{m}$ . (a) Calcule  $V$  em  $P_A(2, 3, 4)$ . (b) Calcule  $V$  em  $r = 2,5$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\phi = 40^\circ$ .

**Resp.** 0,23 V; 1,97 V

**E4.10.** Um dipolo de momento  $\mathbf{p} = 6\mathbf{a}_z \text{ nC} \cdot \text{m}$  está posicionado na origem no espaço livre. (a) Calcule  $V$  em  $P(r = 4, \theta = 20^\circ, \phi = 0^\circ)$ . (b) Calcule  $\mathbf{E}$  em  $P$ .

**Resp.** 3,17 V;  $1,58\mathbf{a}_r + 0,29\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$

## 4.8 DENSIDADE DE ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

Introduzimos o conceito de potencial pela consideração do trabalho realizado, ou energia despendida, no deslocamento de uma carga pontual por um campo elétrico, e agora precisamos solucionar as pendências daquela discussão, dando um passo adiante na investigação do fluxo de energia.

Trazer uma carga positiva do infinito até o campo de uma outra carga positiva requer trabalho, e esse trabalho é realizado pela fonte externa que move a carga. Vamos imaginar que a fonte externa desloca a carga até um ponto próximo da carga fixa e a mantenha lá. A energia deve ser conservada, e a energia gasta trazendo essa carga para a posição representa agora uma energia potencial, pois se a fonte externa soltasse a carga, esta última aceleraria, afastando-se da carga fixa, e adquiriria sozinha energia cinética e capacidade de realizar trabalho.

Com o objetivo de encontrar a energia potencial presente em um sistema de cargas, temos de encontrar o trabalho realizado por uma fonte externa no posicionamento das cargas.

Vamos começar visualizando um universo vazio. Trazer uma carga  $Q_1$  do infinito até qualquer posição não requer trabalho, pois não há campo presente.<sup>3</sup> O posicionamento de  $Q_2$  em um ponto no campo de  $Q_1$  requer uma quantidade de trabalho dado pelo produto da carga  $Q_2$  pelo potencial naquele ponto gerado por  $Q_1$ . Representamos esse potencial por  $V_{2,1}$ , onde o primeiro subscrito indica a posição e o segundo subscrito, a fonte. Ou seja,  $V_{2,1}$  é o potencial na posição de  $Q_2$  devido a  $Q_1$ . Logo,

$$\text{Trabalho para posicionar } Q_2 = Q_2 V_{2,1}$$

Similarmente, vamos expressar o trabalho necessário para posicionar cada carga adicional no campo de todas as outras já presentes:

$$\text{Trabalho para posicionar } Q_3 = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$$

$$\text{Trabalho para posicionar } Q_4 = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$$

e assim em diante. O trabalho total é obtido somando-se cada contribuição:

$$\text{Trabalho total de posicionamento} = \text{energia potencial do campo}$$

$$= W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots \quad (40)$$

Notando a forma de um termo representativo na equação anterior,

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}}$$

onde  $R_{13}$  e  $R_{31}$  representam, cada um, a distância escalar entre  $Q_1$  e  $Q_3$ . Vemos que poderia bem ter sido escrito, igualmente,  $Q_1 V_{1,3}$ . Se cada termo da expressão para a energia total é substituído pelo seu equivalente, temos

$$W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots \quad (41)$$

<sup>3</sup> Contudo, alguém em uma fábrica no infinito precisaria, em primeiro lugar, realizar uma quantidade infinita de trabalho para criar a carga pontual! Quanta energia é necessária para juntar duas meias cargas para fazer uma carga unitária?



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

**E4.11.** Calcule a energia armazenada no espaço livre para a região  $2 \text{ mm} < r < 3 \text{ mm}$ ,  $0 < \theta < 90^\circ$ ,  $0 < \phi < 90^\circ$ , dado o campo de potencial  $V =: (a) \frac{200}{r} \text{ V}; (b) \frac{300 \cos \theta}{r^2} \text{ V}$ .

**Resp.**  $46,4 \mu\text{J}; 36,7 \text{ J}$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Attwood, S. S. *Electric and Magnetic Fields*. 3ª ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1949. Existe um grande número de mapas de campos bem desenhados de várias distribuições de cargas, incluindo o campo do dipolo. A análise vetorial não é utilizada.
2. Skilling, H. H. (Veja as referências bibliográficas sugeridas para o Capítulo 3.) O gradiente é descrito nas páginas 19-21.
3. Thomas, G. B., Jr., e Finney, R. L. (Veja as referências bibliográficas sugeridas para o Capítulo 1.) A derivada direcional e o gradiente são apresentados nas páginas 823-830.

## PROBLEMAS DO CAPÍTULO 4

- 4.1 O valor de  $\mathbf{E}$  em  $P(\rho = 2, \phi = 40^\circ, z = 3)$  é dado como  $\mathbf{E} = 100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$  V/m. Determine o trabalho incremental necessário para deslocar uma carga de  $20 \mu\text{C}$  por uma distância de  $6 \mu\text{m}$ : (a) na direção de  $\mathbf{a}_\rho$ ; (b) na direção de  $\mathbf{a}_\phi$ ; (c) na direção de  $\mathbf{a}_z$ ; (d) na direção de  $\mathbf{E}$ ; (e) na direção de  $\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ .
- 4.2 Um campo elétrico é dado como  $\mathbf{E} = -10e^x(\sin 2z\mathbf{a}_x + x \sin 2z\mathbf{a}_y + 2x \cos 2z\mathbf{a}_z)$  V/m. (a) Calcule  $\mathbf{E}$  em  $P(5, 0, \pi/12)$ . (b) Quanto trabalho é realizado para se mover uma carga de  $2 \text{ nC}$  por uma distância incremental de  $1 \text{ mm}$  a partir de  $P$  pela direção de  $\mathbf{a}_x$ ? (c) De  $\mathbf{a}_y$ ? (d) De  $\mathbf{a}_z$ ? (e) De  $(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$ ?
- 4.3 Se  $\mathbf{E} = 120\mathbf{a}_\rho$  V/m, calcule a quantidade incremental de trabalho realizado na movimentação de uma carga de  $50 \mu\text{C}$  por uma distância de  $2 \text{ mm}$  de: (a)  $P(1, 2, 3)$  em direção a  $Q(2, 1, 4)$ ; (b)  $Q(2, 1, 4)$  na direção de  $P(1, 2, 3)$ .
- 4.4 A energia despendida ao se deslocar uma carga de  $4 \mu\text{C}$  da origem até  $(x, 0, 0)$  ao longo do eixo  $x$  é diretamente proporcional ao quadrado do comprimento do caminho. Se  $E_x = 7 \text{ V/m}$  em  $(1, 0, 0)$ , determine  $E_x$  no eixo  $x$  como uma função de  $x$ .
- 4.5 Calcule o valor de  $\int_A^P \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$  para  $\mathbf{G} = 2y\mathbf{a}_x$  com  $A(1, -1, 2)$  e  $P(2, 1, 2)$  usando o caminho: (a) segmentos de linha reta  $A(1, -1, 2)$  para  $B(1, 1, 2)$  para  $P(2, 1, 2)$ ; (b) segmentos de linha reta  $A(1, -1, 2)$  para  $C(2, -1, 2)$  para  $P(2, 1, 2)$ .
- 4.6 Determine o trabalho realizado no deslocamento de uma carga de  $2 \mu\text{C}$  de  $(2, 1, -1)$  até  $(8, 2, -1)$  pelo campo  $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y$  ao longo da (a) parábola  $x = 2y^2$ , (b) hipérbole  $x = 8/(7 - 3y)$ ; (c) linha reta  $x = 6y - 4$ .
- 4.7 Seja  $\mathbf{G} = 3xy^2\mathbf{a}_x + 2z\mathbf{a}_y$ . Dado o ponto inicial  $P(2, 1, 1)$  e o ponto final  $Q(4, 3, 1)$ , calcule  $\int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$  usando o caminho: (a) linha reta:  $y = x - 1, z = 1$ ; (b) parábola:  $6y = x^2 + 2, z = 1$ .

- 4.8** Dado  $\mathbf{E} = -x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$ , calcule o trabalho envolvido no deslocamento de uma carga unitária positiva por um arco circular do círculo centrado na origem, de  $x = a$  até  $x = y = a/\sqrt{2}$ .
- 4.9** Uma densidade superficial de carga uniforme de  $20 \text{ nC/m}^2$  está presente na superfície esférica  $r = 0,6 \text{ cm}$  no espaço livre. (a) Calcule o potencial absoluto em  $P(r = 1 \text{ cm}, \theta = 25^\circ, \phi = 50^\circ)$ . (b) Calcule  $V_{AB}$  dados os pontos  $A(r = 2 \text{ cm}, \theta = 30^\circ, \phi = 60^\circ)$  e  $B(r = 3 \text{ cm}, \theta = 45^\circ, \phi = 90^\circ)$ .
- 4.10** Expresse o campo potencial de uma linha de cargas infinita (a) com zero de referência em  $\rho = \rho_0$ ; (b) com  $V = V_0$  em  $\rho = \rho_0$ . (c) O zero de referência pode ser colocado no infinito? Por quê?
- 4.11** Seja uma densidade superficial de carga uniforme de  $5 \text{ nC/m}^2$  presente no plano  $z = 0$ , uma densidade linear de carga uniforme de  $8 \text{ nC/m}$  posicionada em  $x = 0$ ,  $z = 4$ , e uma carga pontual de  $2 \text{ } \mu\text{C}$  presente em  $P(2, 0, 0)$ . Se  $V = 0$  em  $M(0, 0, 5)$ , calcule  $V$  em  $N(1, 2, 3)$ .
- 4.12** Em coordenadas esféricas,  $\mathbf{E} = 2r/(r^2 + a^2)^2\mathbf{a}_r$ , V/m. Calcule o potencial em qualquer ponto, usando a referência (a)  $V = 0$  no infinito; (b)  $V = 0$  em  $r = 0$ ; (c)  $V = 100 \text{ V}$  em  $r = a$ .
- 4.13** Três cargas pontuais idênticas, de  $4 \text{ pC}$  cada, estão posicionadas nos vértices de um triângulo equilátero de  $0,5 \text{ mm}$  de lado, no espaço livre. Quanto trabalho deve ser realizado para mover uma carga para um ponto equidistante das outras duas e na linha que as une?
- 4.14** Dado o campo elétrico  $\mathbf{E} = (y + 1)\mathbf{a}_x + (x - 1)\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ , calcule a diferença de potencial entre os pontos (a)  $(2, -2, -1)$  e  $(0, 0, 0)$ ; (b)  $(3, 2, -1)$  e  $(-2, -3, 4)$ .
- 4.15** Duas linhas de cargas uniformes de  $8 \text{ nC/m}$  cada estão posicionadas em  $x = 1$ ,  $z = 2$ , e em  $x = -1$ ,  $y = 2$ , no espaço livre. Se o potencial na origem vale  $100 \text{ V}$ , calcule  $V$  em  $P(4, 1, 3)$ .
- 4.16** O potencial em qualquer ponto do espaço é dado, em coordenadas cilíndricas, por  $V = (k/\rho^2) \cos(b\phi)$  V/m, onde  $k$  e  $b$  são constantes. (a) Onde está o zero de referência para o potencial? (b) Calcule o vetor intensidade de campo elétrico em qualquer ponto  $(\rho, \phi, z)$ .
- 4.17** Densidades superficiais de carga uniformes de  $6$  e  $2 \text{ nC/m}^2$  estão presentes em  $\rho = 2$  e  $6 \text{ cm}$ , respectivamente, no espaço livre. Considere que  $V = 0$  em  $\rho = 4 \text{ cm}$  e calcule  $V$  em: (a)  $\rho = 5 \text{ cm}$ ; (b)  $\rho = 7 \text{ cm}$ .
- 4.18** Calcule o potencial na origem produzido por uma linha de cargas  $\rho_L = kx/(x^2 + a^2)$  que se estende ao longo do eixo  $x$  de  $x = a$  até  $+\infty$ , onde  $a > 0$ . Assuma o zero de referência no infinito.
- 4.19** A superfície anelar  $1 \text{ cm} < \rho < 3 \text{ cm}$ ,  $z = 0$ , está carregada com a densidade superficial não uniforme de carga  $\rho_s = 5\rho \text{ nC/m}^2$ . Calcule  $V$  em  $P(0, 0, 2 \text{ cm})$  se  $V = 0$  no infinito.

- 4.20** Uma carga pontual  $Q$  está posicionada na origem. Expresse o potencial em ambas as coordenadas cartesianas e cilíndricas, e utilize a operação de gradiente em cada sistema de coordenadas para calcular a intensidade de campo elétrico. O resultado deve ser conferido, convertendo-o em coordenadas esféricas.
- 4.21** Seja  $V = 2xy^2z^3 + 3 \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$  V no espaço livre. Calcule cada uma das seguintes grandezas em  $P(3, 2, -1)$ : (a)  $V$ ; (b)  $|V|$ ; (c)  $\mathbf{E}$ ; (d)  $|\mathbf{E}|$ ; (e)  $\mathbf{a}_N$ ; (f)  $\mathbf{D}$ .
- 4.22** Um certo campo potencial é dado em coordenadas esféricas por  $V = V_0(r/a) \sin \theta$ . Calcule a carga total contida dentro da região  $r < a$ .
- 4.23** Sabe-se que o potencial é dado como  $V = 80\rho^{0.6}$  V. Assumindo as condições de espaço livre, calcule: (a)  $\mathbf{E}$ ; (b) a densidade volumétrica de carga em  $\rho = 0,5$  m; (c) a carga total presente dentro da superfície fechada  $\rho = 0,6, 0 < z < 1$ .
- 4.24** A superfície definida pela equação  $x^3 + y^2 + z = 1000$ , onde  $x, y$  e  $z$  são positivos, é uma superfície eqüipotencial na qual o potencial vale 200 V. Se  $|\mathbf{E}| = 50$  V/m no ponto  $P(7, 25, 32)$  sobre a superfície, calcule  $\mathbf{E}$ .
- 4.25** Dentro do cilindro  $\rho = 2, 0 < z < 1$ , o potencial é dado por  $V = 100 + 50\rho + 150\rho \sin \phi$  V. (a) Calcule  $V, \mathbf{E}, \mathbf{D}$  e  $\rho_v$  em  $P(1, 60^\circ, 0,5)$  no espaço livre. (b) Quanta carga está presente dentro do cilindro?
- 4.26** Consideremos uma placa muito fina, quadrada e condutora imperfeita, de 2 m de lado, posicionada no plano  $z = 0$  com um vértice na origem, de modo que permaneça totalmente dentro do primeiro quadrante. O potencial em qualquer ponto da placa é dado por  $V = -e^{-x} \sin y$ . (a) Um elétron entra na placa em  $x = 0, y = \pi/3$  com velocidade inicial zero. Em qual direção está seu movimento inicial? (b) Por causa de colisões das partículas na placa, o elétron atinge uma velocidade relativamente baixa e pequena aceleração (o trabalho que o campo exerce nele, em grande parte, é convertido em calor). O elétron se move, portanto, ao longo de uma linha de força. Onde ele deixa a placa e em que direção estará se movimentando nesse instante?
- 4.27** Duas cargas pontuais de 1 nC em  $(0, 0, 0,1)$  e  $-1$  nC em  $(0, 0, -0,1)$  estão no espaço livre. (a) Calcule  $V$  em  $P(0,3, 0, 0,4)$ . (b) Calcule  $|\mathbf{E}|$  em  $P$ . (c) Agora trate as duas cargas como um dipolo na origem e calcule  $V$  em  $P$ .
- 4.28** Use a intensidade de campo elétrico de um dipolo [Seção 4.7, Equação (36)] para calcular a diferença no potencial entre pontos em  $\theta_a$  e  $\theta_b$ , cada ponto tendo as mesmas coordenadas  $r$  e  $\phi$ . Sob quais condições a resposta concorda com a Equação (34), para o potencial em  $\theta_a$ ?
- 4.29** Um dipolo que tem um momento  $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$  nC · m está posicionado em  $Q(1, 2, -4)$  no espaço livre. Calcule  $V$  em  $P(2, 3, 4)$ .
- 4.30** Um dipolo para o qual  $\mathbf{p} = 10\epsilon_0\mathbf{a}_z$  C · m está posicionado na origem. Qual é a equação da superfície na qual  $E_z = 0$  mas  $\mathbf{E} \neq 0$ ?

- 4.31** Um campo de potencial no espaço livre é expresso como  $V = 20/(xyz)$  V. (a) Calcule a energia total armazenada dentro do cubo  $1 < x, y, z < 2$ . (b) Qual valor seria obtido caso fosse assumida uma densidade uniforme de energia igual ao valor no centro do cubo?
- 4.32** (a) Utilizando a Equação (36), calcule a energia armazenada no campo do dipolo na região  $r > a$ . (b) Por que não podemos deixar  $a$  se aproximar de zero, no limite?
- 4.33** Uma esfera de cobre de 4 cm de raio está carregada com uma carga total uniformemente distribuída de  $5 \mu\text{C}$ , no espaço livre. (a) Use a lei de Gauss para achar  $\mathbf{D}$  externo à esfera. (b) Calcule a energia total armazenada no campo eletrostático. (c) Use  $W_E = Q^2/(2C)$  para calcular a capacidade da esfera isolada.
- 4.34** Uma esfera de raio  $a$  contém uma densidade volumétrica de carga uniforme  $\rho_0$  C/m<sup>3</sup>. Encontre a energia total armazenada aplicando (a) Equação (43); (b) Equação (45).
- 4.35** Quatro cargas pontuais de 0,8 nC estão posicionadas, no espaço livre, nos vértices de um quadrado de 4 cm de lado. (a) Calcule a energia potencial total armazenada. (b) Uma quinta carga de 0,8 nC é instalada no centro do quadrado. Novamente calcule a energia total armazenada.

## Corrente e Condutores

**N**este capítulo e no Capítulo 6 aplicaremos as leis e os métodos que aprendemos a alguns dos materiais com os quais um engenheiro deve trabalhar. Após definir corrente e densidade de corrente e desenvolver a equação fundamental da continuidade, vamos considerar um material condutor e apresentar a lei de Ohm tanto na sua forma microscópica quanto na macroscópica. Com esses resultados poderemos calcular valores de resistência para algumas das formas geométricas mais simples que os resistores podem assumir. As condições que devem ser respeitadas nas fronteiras dos condutores serão encontradas em seguida, e esse conhecimento nos possibilita introduzir o uso das imagens. Concluimos o capítulo considerando as propriedades de um semicondutor genérico.

No Capítulo 6 investigaremos a polarização de materiais dielétricos e definiremos a permissividade relativa, ou a constante dielétrica – um importante parâmetro de engenharia. Tendo condutores e dielétricos, poderemos então colocá-los juntos para formar capacitores. A maioria do conhecimento obtido nos capítulos anteriores será necessária para determinar a capacitância das estruturas que serão consideradas.

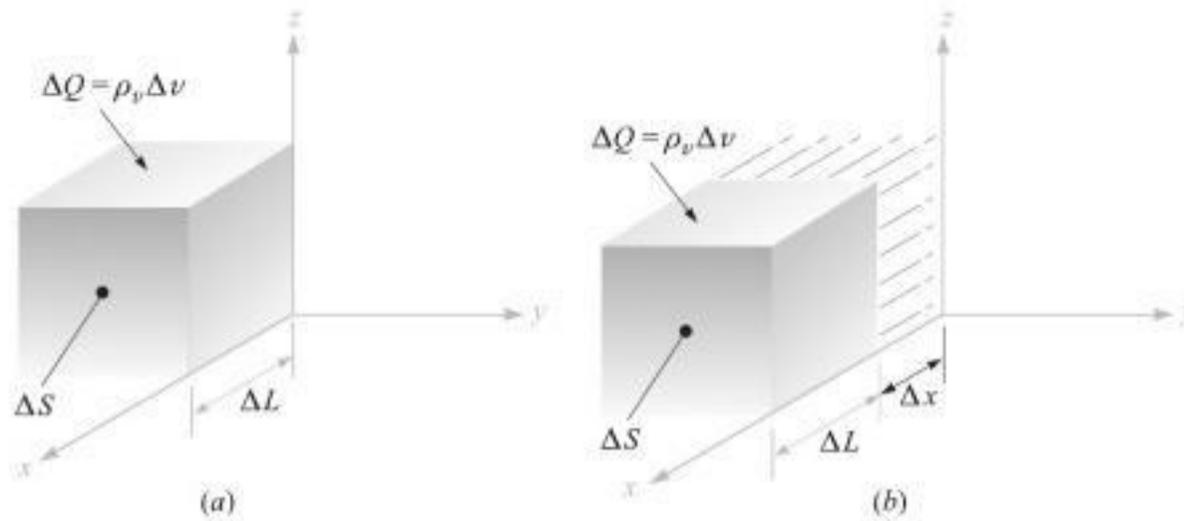
Os princípios eletromagnéticos fundamentais dos quais resistores e capacitores dependem formam o assunto deste capítulo e do Capítulo 6. O indutor será estudado no Capítulo 9. ■

### 5.1 CORRENTE E DENSIDADE DE CORRENTE

Cargas elétricas em movimento constituem uma *corrente*. A unidade de corrente é o ampère (A), definido como a taxa de movimento de cargas que passam por um dado ponto de referência (ou atravessando um dado plano de referência) de um coulomb por segundo. A corrente é simbolizada por  $I$ , portanto,

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

A corrente é, então, definida como o movimento de cargas positivas, apesar de a condução em metais ocorrer pela movimentação de elétrons, conforme veremos em breve.



**Figura 5.1** Um incremento de carga,  $\Delta Q = \rho_v \Delta S \Delta L$ , que se move por uma distância  $\Delta x$  em um tempo  $\Delta t$ , produz uma componente de densidade de corrente no limite de  $J_x = \rho_v v_x$ .

Em teoria de campo, usualmente, estamos interessados em eventos que ocorrem em um ponto, em vez de em alguma região ampla, e acharemos mais útil o conceito de *densidade de corrente*, medida em ampères por metro quadrado ( $A/m^2$ ). A densidade de corrente é um vetor<sup>1</sup> representado por  $\mathbf{J}$ .

O incremento de corrente  $\Delta I$  que atravessa uma superfície incremental  $\Delta S$  normal à densidade de corrente é

$$\Delta I = J_N \Delta S$$

e no caso em que a densidade de corrente não é perpendicular à superfície,

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

A corrente total é obtida por integração

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

A densidade de corrente pode ser relacionada à velocidade da densidade volumétrica de carga em um ponto. Considere o elemento de carga  $\Delta Q = \rho_v \Delta v = \rho_v \Delta S \Delta L$ , conforme mostra a Figura 5.1a. Para simplificar a explicação, vamos assumir que o elemento de carga está orientado com suas arestas paralelas aos eixos coordenados e que possua apenas uma componente  $x$  de velocidade. No intervalo de tempo  $\Delta t$ , o elemento de carga se moveu por uma distância  $\Delta x$ , como indica a Figura 5.1b. Movemos, então, uma carga  $\Delta Q = \rho_v \Delta S \Delta x$  por um plano de referência perpendicular à direção de movimento em um incremento de tempo  $\Delta t$ , e a corrente resultante é

<sup>1</sup> Corrente não é um vetor, pois é fácil visualizar um problema no qual uma corrente total  $I$  em um condutor de seção reta não uniforme (como uma esfera) deve ter direções diferentes em cada ponto de uma dada seção reta. A corrente em um fio extremamente fino, ou uma *corrente filamental*, é ocasionalmente definida como um vetor, mas usualmente preferimos ser consistentes e dar a direção ao filamento, ou caminho, e não à corrente.

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Quando tomamos o limite com relação ao tempo temos

$$\Delta I = \rho_v \Delta S v_x$$

onde  $v_x$  representa a componente em  $x$  da velocidade  $\mathbf{v}$ .<sup>2</sup> Em termos de densidade de corrente encontramos

$$J_x = \rho_v v_x$$

e, de uma forma genérica,

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} \quad (3)$$

Este último resultado mostra de forma muito clara que a carga em movimento se constitui em corrente. Chamamos esse tipo de corrente de *corrente de convecção*, e  $\mathbf{J}$  ou  $\rho_v \mathbf{v}$  é a *densidade de corrente de convecção*. Note que a densidade de corrente de convecção está linearmente relacionada à densidade de carga, assim como à velocidade. A taxa de fluxo de massa de carros (carros por metro quadrado por segundo) no Túnel Holland poderia ser aumentada tanto pelo aumento na densidade de carros por metro cúbico quanto pelo aumento da velocidade dos carros, se os motoristas fossem capazes de assim o fazer.

**E5.1.** Dado o vetor densidade de corrente  $\mathbf{J} = 10\rho^2 z \mathbf{a}_\rho - 4\rho \cos^2 \phi \mathbf{a}_\phi$  mA/m<sup>2</sup>: (a) calcule a densidade de corrente em  $P(\rho = 3, \phi = 30^\circ, z = 2)$ ; (b) determine a corrente total que flui para fora da faixa circular  $\rho = 3, 0 < \phi < 2\pi, 2 < z < 2,8$ .

**Resp.**  $180\mathbf{a}_\rho - 9\mathbf{a}_\phi$  mA/m<sup>2</sup>; 3,26 A

## 5.2 CONTINUIDADE DA CORRENTE

Apesar de supostamente estarmos estudando campos estáticos neste momento, a introdução do conceito de corrente é seguida logicamente por uma discussão sobre a conservação da carga e da equação da continuidade. O princípio da conservação da carga determina simplesmente que cargas não podem ser criadas nem destruídas, apesar de quantidades iguais de cargas positivas e negativas poderem ser *simultaneamente* criadas, obtidas por separação, destruídas ou perdidas por recombinação.

A equação da continuidade vem deste princípio, quando consideramos qualquer região limitada por uma superfície fechada. A corrente pela superfície fechada é

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

e esse *fluxo para fora* de carga positiva deve ser balanceado pelo decréscimo de cargas positivas (ou, talvez, um aumento de carga negativa) dentro da superfície fechada. Se a

<sup>2</sup> A letra  $v$  minúscula é utilizada tanto para volume quanto para velocidade. Note, entretanto, que velocidade sempre aparece como um vetor  $\mathbf{v}$ , uma componente  $v_x$  ou uma intensidade  $|\mathbf{v}|$ , enquanto o volume aparece apenas na forma diferencial como  $dv$  ou  $\Delta v$ .

carga dentro da superfície fechada é denotada por  $Q_i$ , então a taxa de decréscimo é  $-dQ_i/dt$ , e o princípio de conservação de cargas requer

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \quad (4)$$

Seria bom responder aqui a uma pergunta freqüentemente formulada. “Não há um erro no sinal? Pensei que fosse  $I = dQ_i/dt$ .” A presença ou ausência de sinal negativo depende de qual corrente e carga consideramos. Na teoria de circuitos, usualmente, associamos o fluxo de corrente para dentro de um terminal de um capacitor com a taxa temporal de aumento da carga naquela placa. A corrente de (4), entretanto, *flui para fora*.

A Equação (4) é a forma integral da equação da continuidade, e a forma diferencial, ou pontual, é obtida utilizando o teorema da divergência para mudar a integral de superfície em uma integral volumétrica:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv$$

Em seguida, representamos a carga envolvida  $Q_i$  pela integral volumétrica da densidade de carga

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \rho_v dv$$

Se concordamos em manter a superfície constante, a derivada torna-se uma derivada parcial a pode aparecer dentro da integral

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = \int_{\text{vol}} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

Uma vez que a expressão é verdadeira para qualquer volume, desde que pequeno, é verdadeiro para um volume incremental

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) \Delta v = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \Delta v$$

da qual temos nossa forma pontual da equação da continuidade,

$$\boxed{(\nabla \cdot \mathbf{J}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \quad (5)$$

Relembrando o significado físico da divergência, essa equação indica que a corrente, ou carga por segundo, que diverge de um pequeno volume, por unidade de volume, é igual à taxa temporal de decréscimo da carga, por unidade de volume, em cada ponto.

Como um exemplo numérico ilustrando alguns dos conceitos das duas últimas seções, vamos considerar uma densidade de corrente que está direcionada radialmente para fora e decresce exponencialmente com o tempo,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{r} e^{-t} \mathbf{a}_r, \text{ A/m}^2$$

Selecionando um instante de tempo  $t = 1$  s, podemos calcular a corrente total que flui para fora em  $r = 5$  m:

$$I = J_r S = \left(\frac{1}{5} e^{-1}\right) (4\pi 5^2) = 23,1 \text{ A}$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

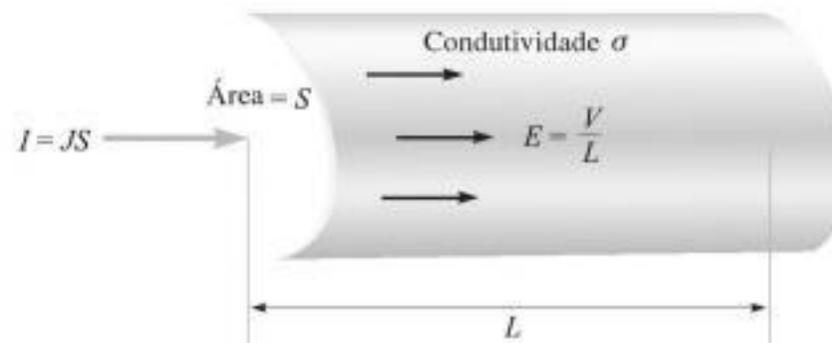


Figura 5.3 Densidade de corrente  $J$  e intensidade de campo elétrico  $E$  uniformes em uma região cilíndrica de comprimento  $L$  e seção reta de área  $S$ . Aqui,  $V = IR$ , onde  $R = L/\sigma S$ .

ou

$$V = EL$$

Logo,

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$$

ou

$$V = \frac{L}{\sigma S} I$$

A razão da diferença de potencial entre as duas extremidades do cilindro pela corrente que entra no terminal mais positivo, contudo, é conhecida da teoria elementar de circuitos como a *resistência* do cilindro e, logo,

$$V = IR \quad (12)$$

na qual

$$R = \frac{L}{\sigma S} \quad (13)$$

A Equação (12) é, naturalmente, conhecida como *lei de Ohm*, e (13) nos permite calcular a resistência  $R$ , medida em ohms (abreviada como  $\Omega$ ), de objetos condutores que possuem campos uniformes. Se os campos não são uniformes, a resistência pode ainda ser definida como a razão de  $V$  por  $I$ , onde  $V$  é a diferença de potencial entre duas superfícies equipotenciais especificadas no material e  $I$  é a corrente total que atravessa a superfície mais positiva no material. Pelas relações integrativas genéricas em (10) e (11), e pela lei de Ohm (8), podemos escrever essa expressão mais genérica para resistência quando os campos não são uniformes,

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad (14)$$

A integral de linha é tomada entre as duas superfícies equipotenciais no condutor, e a integral de superfície é calculada na mais positiva dessas duas equipotenciais. Não pode-

mos resolver esses problemas não-uniformes neste momento, mas deveremos ser capazes de resolver vários deles após passarmos pelos Capítulos 6 e 7.

**EXEMPLO 5.1**

Como um exemplo da determinação da resistência de um cilindro, vamos calcular a resistência de um fio de cobre #16 de 1.609 m de comprimento e, 1,291 mm de diâmetro.

**Solução.** O diâmetro do fio é  $1,291 \times 10^{-3}$  m, a área da seção reta é  $\pi(1,291 \times 10^{-3}/2)^2 = 1,308 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup> e o comprimento é 1.609 m. Utilizando uma condutividade de  $5,80 \times 10^7$  S/m, a resistência do fio é, portanto,

$$R = \frac{1609}{(5,80 \times 10^7)(1,308 \times 10^{-6})} = 21,2 \Omega$$

Esse fio pode seguramente suportar 10 A c.c., correspondendo a uma densidade de corrente de  $10/(1,308 \times 10^{-6}) = 7,65 \times 10^6$  A/m<sup>2</sup>, ou 7,65 A/mm<sup>2</sup>. Com essa corrente, a diferença de potencial entre as duas extremidades do fio é 212 V, a intensidade do campo elétrico é 0,312 V/m, a velocidade de deriva é 0,000422 m/s, ou um pouco mais que 1/4 de quilômetro por semana, e a densidade de carga de elétrons livres é  $-1,81 \times 10^{10}$  C/m<sup>3</sup>, ou aproximadamente um elétron por cubo de dois ângstrons de lado.

**E5.3.** Calcule a magnitude da densidade de corrente em uma amostra de prata para a qual  $\sigma = 6,17 \times 10^7$  S/m e  $\mu_e = 0,0056$  m<sup>2</sup>/V · s se: (a) a velocidade de deriva é 1,5 μm/s; (b) a intensidade de campo elétrico é 1 mV/m; (c) a amostra é um cubo de 2,5 mm de lado e tem uma tensão de 0,4 mV entre faces opostas; (d) a amostra é um cubo de 2,5 mm de lado e por ela passa uma corrente total de 0,5 A.

**Resp.** 16,5 kA/m<sup>2</sup>; 61,7 kA/m<sup>2</sup>; 9,9 MA/m<sup>2</sup>; 80,0 kA/m<sup>2</sup>

**E5.4.** Um condutor de cobre tem 15,24 mm de diâmetro e 365,7 m de comprimento. Considere que por ele circule uma corrente total de 50 A. (a) Calcule a resistência total do condutor. (b) Que valor de densidade de corrente existe nele? (c) Qual é a tensão contínua entre as extremidades do condutor? (d) Quanta potência é dissipada no fio?

**Resp.** 0,035 Ω;  $2,74 \times 10^5$  A/m<sup>2</sup>; 1,73 V; 86,4 W

## 5.4 PROPRIEDADES DOS CONDUTORES E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Mais uma vez devemos temporariamente partir de nossas condições estáticas assumidas e deixar o tempo variar por alguns microssegundos para verificar o que acontece quando a distribuição de cargas é subitamente desbalanceada dentro de um material condutor. Vamos supor, para fins de argumentação, que apareça subitamente uma quantidade de elétrons no interior de um condutor. Os campos elétricos criados por esses elétrons não são contrapostos por nenhuma carga positiva, e os elétrons, portanto, começam a acelerar afas-

tando-se uns dos outros. Isso continua até que os elétrons atinjam a superfície do condutor ou até que uma quantidade de elétrons igual à quantidade injetada atinja a superfície.

Nesse ponto, a progressão dos elétrons afastando-se uns dos outros é interrompida, pois o material que envolve o condutor é um isolante que não possui uma banda de condução conveniente. Nenhuma carga deve permanecer dentro do condutor. Se assim acontecesse, o campo elétrico resultante forçaria as cargas em direção à superfície.

Por isso, o resultado final dentro de um condutor é uma densidade de carga igual a zero, e uma densidade superficial de carga em sua superfície exterior. Essa é uma das duas características de um bom condutor.

A outra característica, enunciada para condições estáticas nas quais nenhuma corrente pode fluir, deriva diretamente da lei de Ohm: a intensidade de um campo elétrico dentro do condutor é zero. Fisicamente, vemos que se um campo elétrico estivesse presente, os elétrons de condução se moveriam e produziriam uma corrente, levando, assim, a uma condição não-estática.

Resumindo, para a eletrostática, nenhuma carga e nenhum campo elétrico podem existir em qualquer ponto *dentro* de um material condutor. Contudo, a carga pode aparecer na superfície, na forma de uma densidade superficial de carga, e nossa próxima investigação vai tratar de campos *externos* ao condutor.

Desejamos relacionar esses campos externos à carga na superfície do condutor. O problema é simples, e vamos primeiro direcionar nosso caminho para uma solução com pouca matemática.

Se a intensidade de campo elétrico externo for decomposta em duas componentes, uma tangencial e outra normal à superfície do condutor, perceberemos que a componente tangencial é zero. Se não fosse zero, uma força tangencial seria aplicada aos elementos de carga superficial, resultando no seu deslocamento e em condições não-estáticas. Uma vez que condições estáticas são assumidas, a intensidade de campo elétrico e a densidade de fluxo elétrico tangenciais são zero.

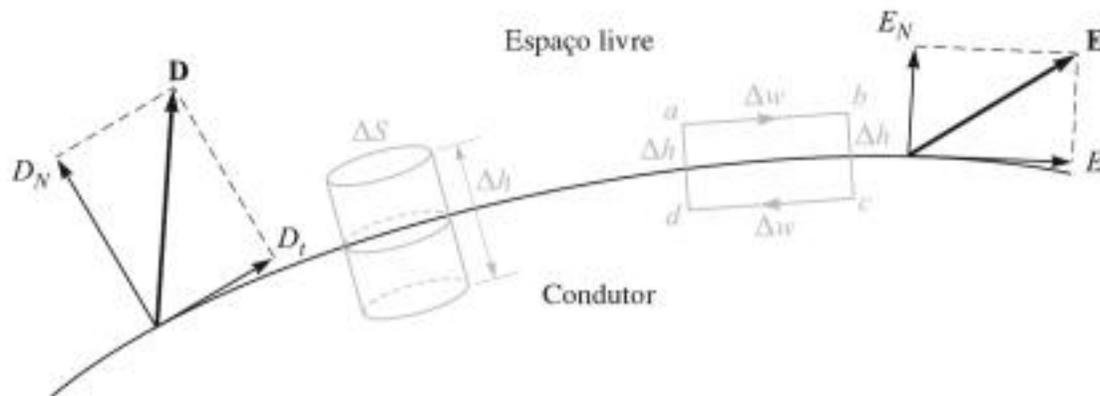
A lei de Gauss responde às nossas perguntas relativas à componente normal. O fluxo elétrico que deixa um pequeno incremento de superfície deve ser igual à carga que reside na superfície incremental. O fluxo não pode penetrar no condutor, pois o campo total é zero, então, deve deixar a superfície normalmente. Quantitativamente, dizemos que a densidade de fluxo elétrico em coulombs por metro quadrado que deixa a superfície, normalmente, é igual à densidade superficial de carga em coulombs por metro quadrado, ou  $D_N = \rho_S$ .

Se utilizarmos alguns dos nossos resultados anteriormente derivados na realização de uma análise mais cuidadosa (e incidentalmente introduzir um método genérico que deveremos utilizar depois), deveremos estabelecer uma fronteira entre um condutor e o espaço livre (Figura 5.4), mostrando as componentes tangencial e normal de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  no lado do espaço livre da fronteira. Ambos os campos são zero no condutor. O campo tangencial pode ser determinado aplicando a Equação (21), Seção 4.5,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

ao redor do pequeno caminho fechado *abcd*. A integral deve ser fragmentado em quatro partes:

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$



**Figura 5.4** Um caminho fechado e uma superfície gaussiana apropriados são utilizados para determinar as condições de fronteira na fronteira entre um condutor e o espaço livre;  $E_t = 0$  e  $D_N = \rho_S$ .

Lembrando que  $\mathbf{E} = 0$  dentro do condutor, fazemos com que o comprimento de  $a$  até  $b$  ou de  $c$  até  $d$  seja  $\Delta w$  e de  $b$  para  $c$  ou de  $d$  para  $a$  seja  $\Delta h$ , e obtemos

$$E_t \Delta w - E_{N \text{ em } b} \frac{1}{2} \Delta h + E_{N \text{ em } a} \frac{1}{2} \Delta h = 0$$

À medida que permitimos  $\Delta h$  se aproximar de zero, mantendo  $\Delta w$  pequeno mas finito, não faz diferença se os campos normais são ou não iguais em  $a$  e  $b$ , pois  $\Delta h$  faz esses produtos ficarem desprezivelmente pequenos. Logo,

$$E_t \Delta w = 0$$

e, assim,

$$E_t = 0$$

A condição relativa ao campo normal é encontrada mais rapidamente considerando  $D_N$  em vez de  $E_N$ , e escolhendo um pequeno cilindro como superfície gaussiana. Seja a altura  $\Delta h$  e sejam as áreas nas faces do topo e da base  $\Delta S$ . Novamente vamos fazer  $\Delta h$  se aproximar de zero. Usando a lei de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

integramos sobre as três superfícies distintas

$$\int_{\text{topo}} + \int_{\text{base}} + \int_{\text{lados}} = Q$$

e verificamos que as duas últimas são zero (por diferentes razões). Então,

$$D_N \Delta S = Q = \rho_S \Delta S$$

ou

$$D_N = \rho_S$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- 5.22** O segmento de reta  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $z = 1$  carrega uma densidade linear de carga  $\rho_L = \pi|y| \mu\text{C}/\text{m}$ . Seja  $z = 0$  um plano condutor determine a densidade superficial de carga em: (a)  $(0, 0, 0)$ ; (b)  $(0, 1, 0)$ .
- 5.23** Um dipolo com  $\mathbf{p} = 0,1\mathbf{a}_z \mu\text{C} \cdot \text{m}$  está posicionado em  $A(1, 0, 0)$  no espaço livre, e o plano  $x = 0$  é perfeitamente condutor. (a) Calcule  $V$  em  $P(2, 0, 1)$ . (b) Encontre a equação da superfície equipotencial de  $200 \text{ V}$  em coordenadas cartesianas.
- 5.24** A uma certa temperatura, as mobilidades dos elétrons e dos buracos no germânio intrínseco são dadas como  $0,43 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$  e  $0,21 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ , respectivamente. Se as concentrações de elétrons e de buracos são ambas de  $2,3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ , calcule a condutividade nessa temperatura.
- 5.25** As concentrações de elétrons e buracos aumentam com a temperatura. Para o silício puro, expressões adequadas são  $\rho_h = -\rho_e = 6200T^{1,5}e^{-7000/T} \text{ C}/\text{m}^3$ . A dependência funcional das mobilidades com a temperatura é dada por  $\mu_h = 2,3 \times 10^5 T^{-2,7} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$  e  $\mu_e = 2,1 \times 10^5 T^{-2,5} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ , onde a temperatura  $T$  é em graus Kelvin. Encontre  $\sigma$  em: (a)  $0^\circ\text{C}$ ; (b)  $40^\circ\text{C}$ ; (c)  $80^\circ\text{C}$ .
- 5.26** Uma amostra de semiconductor tem uma seção reta retangular de  $1,5 \text{ mm}$  por  $2,0 \text{ mm}$ , e um comprimento de  $11,0 \text{ mm}$ . O material tem densidades de elétrons e buracos de  $1,8 \times 10^{18}$  e  $3,0 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ , respectivamente. Se  $\mu_e = 0,082 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{m}$  e  $\mu_h = 0,0021 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{m}$ , calcule a resistência oferecida entre as faces extremas da amostra.

## Dielétricos e Capacitância

**T**endo investigado as propriedades de meios condutores no Capítulo 5, voltamos agora nossa atenção para os materiais isolantes, ou dielétricos. Tais materiais diferem dos condutores no sentido de que, idealmente, não existe carga livre que possa ser transportada em seu interior para produzir corrente de condução. Em vez disso, todas as cargas estão confinadas à estrutura molecular ou cristalina pelas forças de coulomb. Um campo elétrico aplicado tem o efeito de deslocar cargas ligeiramente, levando à formação de um conjunto de dipolos elétricos. A extensão desse efeito é medida pela permissividade relativa, ou constante dielétrica. A polarização do meio pode modificar o campo elétrico, cuja intensidade, direção e sentido podem diferir dos valores que apareceriam em um dielétrico diferente ou no espaço livre. Condições de fronteira para os campos nas interfaces entre dielétricos são investigadas com o objetivo de avaliar essas diferenças.

O princípio do deslocamento das cargas constitui-se em um mecanismo de armazenamento de energia que se torna útil na construção de capacitores. Além disso, a resposta do dielétrico a campos variantes no tempo, particularmente a ondas eletromagnéticas, é extremamente importante para o entendimento de muitos fenômenos físicos e para o desenvolvimento de dispositivos úteis, conforme consideraremos em capítulos mais à frente. Deve-se notar também que a maioria dos materiais possuirá ambas as propriedades dielétrica e condutora, isto é, um material considerado dielétrico pode ser ligeiramente condutivo, e um material que é principalmente condutivo pode ser ligeiramente polarizável. Essas variações dos casos ideais levam a alguns comportamentos interessantes, particularmente com relação aos efeitos na propagação de ondas, conforme será visto posteriormente.

Seguindo a discussão de materiais dielétricos, os capacitores devem ser levados em conta – particularmente com relação a qual capacitância pode ser obtida por uma dada combinação de condutores e dielétricos. O objetivo é apresentar os métodos de cálculo de capacitância para uma quantidade de casos básicos, incluindo geometrias de linhas de transmissão, e ser capaz de fazer julgamentos com relação a como a capacitância será alterada por mudanças nos materiais ou nas suas configurações. Ambos os métodos analítico e gráfico para determinação da capacitância são discutidos. Procedimentos analí-

cos adicionais e métodos numéricos que podem ser aplicados para cômputo da capacitância serão desenvolvidos no Capítulo 7. ■

## 6.1 A NATUREZA DOS MATERIAIS DIELÉTRICOS

Apesar de já termos mencionado materiais isolantes e dielétricos, ainda não possuímos nenhuma relação quantitativa nas quais eles estão envolvidos. Devemos ver brevemente, entretanto, que um dielétrico em um campo elétrico pode ser visto como um arranjo de dipolos elétricos microscópicos no espaço livre, são compostos de cargas positivas e negativas, cujos centros não coincidem exatamente.

Essas não são cargas livres e não podem contribuir para o processo de condução. Ao invés disso, elas são seguras em seus lugares por forças atômicas e moleculares e podem apenas trocar de posição ligeiramente em resposta a campos externos. Elas são chamadas de cargas *ligadas*, em contraste com as cargas livres que determinam a condutividade. As cargas ligadas podem ser tratadas como quaisquer outras fontes de campo eletrostático. Se não desejássemos, portanto, não precisaríamos introduzir a constante dielétrica como um novo parâmetro ou lidar com permissividades diferentes da permissividade do espaço livre. Contudo, a alternativa seria considerar *todas as cargas em um pedaço de material dielétrico*. Esse é um preço muito alto a ser pago para utilizar todas as nossas equações anteriores sem modificá-las, e vamos, portanto, gastar algum tempo teorizando sobre dielétricos de uma maneira qualitativa, introduzindo a polarização  $\mathbf{P}$ , a permissividade  $\epsilon$ , a permissividade relativa  $\epsilon_r$ , e desenvolvendo algumas relações quantitativas envolvendo essas novas grandezas.

A característica que todos os materiais dielétricos possuem em comum — não importando se são sólidos, líquidos ou gasosos, e se são de natureza cristalina ou não — é a sua habilidade de armazenar energia elétrica. Esse armazenamento se dá por meio de um deslocamento nas posições relativas das cargas ligadas internas positivas e negativas em relação às forças moleculares e atômicas normais.

Esse deslocamento contra uma força restringente é análogo a levantar um peso ou esticar uma mola e representa energia potencial. A fonte da energia é o campo externo, e o movimento das cargas que se deslocam causa uma corrente transitória na bateria que está produzindo o campo.

O mecanismo real de deslocamento de carga difere nos vários materiais dielétricos. Algumas moléculas, chamadas de moléculas *polares*, possuem um deslocamento permanente existente entre os centros de “gravidade” das cargas positivas e negativas, e cada par de cargas age como um dipolo. Normalmente os dipolos estão orientados de maneira aleatória no interior do material, e a ação do campo externo é para alinhar essas moléculas, até certo ponto, na mesma direção. Um campo suficientemente forte pode até produzir um deslocamento adicional entre as cargas positivas e negativas.

Uma molécula *apolar* não possui esse arranjo de dipolos até que um campo seja aplicado. As cargas positivas e negativas se deslocam em direções opostas, contra a atração mútua existente, e produzem um dipolo que está alinhado com o campo elétrico.



Interatividade



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

$$C = \frac{N_Q \Delta Q}{N_V \Delta V}$$

e utilizando (43),

$$C = \frac{N_Q}{N_V} \epsilon \frac{\Delta L_r}{\Delta L_N} = \epsilon \frac{N_Q}{N_V} \quad (44)$$

uma vez que  $\Delta L_r / \Delta L_N = 1$ . A determinação da capacitância pelo desenho do fluxo consiste meramente em contar os quadrados em duas direções, entre os condutores e em volta de cada condutor. Pela Figura 6.12 obtemos

$$C = \epsilon_0 \frac{8 \times 3,25}{4} = 57,6 \text{ pF/m}$$

Ramo, Whinnery e Van Duzer apresentam uma discussão excelente com exemplos de construção de mapas de campo por quadrados curvilíneos. Eles oferecem as seguintes sugestões:<sup>3</sup>

1. Planeje fazer alguns esboços grosseiros, levando apenas um minuto ou mais por desenho, antes de começar qualquer desenho mais cuidadoso. A utilização de papel transparente sobre o desenho com a fronteira básica acelerará esses esboços preliminares.
2. Divida as diferenças de potencial entre eletrodos conhecidas em um número igual de divisões, digamos quatro ou oito para começar.
3. Comece o esboço das potenciais na região onde os campos são mais bem conhecidos, por exemplo, em alguma região onde se aproximam de um campo uniforme. Estenda as equipotenciais de acordo com o seu bom senso pelo desenho. Note que elas tendem a se concentrar nos ângulos agudos da fronteira condutora e a se espalhar na vizinhança de ângulos obtusos da fronteira.
4. Desenhe o conjunto de linhas de campo ortogonais. Uma vez que essas são iniciadas, elas devem formar quadrados curvilíneos mas, à medida que eles se estendem, a condição de ortogonalidade deve ser mantida evidente, mesmo que isso resulte em alguns retângulos com razões diferentes da unidade.
5. Olhe para as regiões com razões de lado ruins e tente ver o que estava errado com a primeira tentativa de equipotenciais. Corrija-as e repita o procedimento até que quadrados curvilíneos razoáveis apareçam no desenho.
6. Em regiões de baixa intensidade de campo, haverá figuras grandes, frequentemente de cinco ou seis lados. Para julgar a correção do desenho nessa região, essas grandes unidades devem ser subdivididas. As subdivisões devem ser iniciadas na região que precisa de subdivisão, e cada vez que um tubo de fluxo é dividido ao meio, as divisões de potencial nessa região devem ser divididas pelo mesmo fator.

<sup>3</sup> Com permissão de Ramo, S., Whinnery, J. R. e Van Duzer, T. p. 51-52. Veja as Referências Bibliográficas no final deste capítulo. Mapas curvilíneos são discutidos nas p. 50-52.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Os subscritos servem para identificar os problemas análogos. É evidente que os potenciais  $V_\sigma$  e  $V_\epsilon$ , as intensidades de campo elétrico  $\mathbf{E}_\sigma$  e  $\mathbf{E}_\epsilon$ , a condutividade e a permissividade  $\sigma$  e  $\epsilon$ , e a densidade de corrente e a densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{D}$  são análogos em pares. Referindo-se a um mapa quadrado-curvilíneo, deveríamos interpretar os tubos de fluxo como tubos de corrente, cada um agora levando uma corrente incremental que não pode deixar o tubo.

Finalmente, devemos olhar para as fronteiras. O que é análogo a uma fronteira condutora na qual termina o fluxo elétrico em direção normal e que é uma superfície eqüipotencial? A analogia fornece a resposta, e vemos que na superfície deve terminar a densidade de corrente em direção normal e, de novo, ser uma superfície eqüipotencial. Essa é a superfície de um condutor *perfeito*, apesar de na prática ser necessário apenas utilizar um cuja condutividade seja muitas vezes a do meio condutor.

Com isso, se desejássemos encontrar o campo dentro de um capacitor coaxial que, conforme vimos diversas vezes anteriormente, é uma porção do campo de uma linha infinita de cargas, deveríamos pegar dois cilindros de cobre e preencher a região entre eles com, por conveniência, uma solução eletrolítica. Aplicando uma diferença de potencial entre os cilindros, podemos utilizar uma ponta de prova para estabelecer o potencial em qualquer ponto intermediário, ou para encontrar todos aqueles pontos que possuem o mesmo potencial. Essa é a essência da cuba ou do tanque eletrolítico. A grande vantagem desse método reside no fato de que ele não é limitado a problemas bidimensionais.

A determinação da capacitância a partir dessas medições é fácil. A corrente total que deixa o condutor mais positivo é

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}$$

onde a integral de superfície fechada é tomada ao longo de toda a superfície do condutor. A diferença de potencial é dada pelo negativo da integral de linha da placa menos positiva para a mais positiva,

$$V_{\sigma 0} = - \int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}$$

e a resistência total é, portanto,

$$R = \frac{V_{\sigma 0}}{I} = \frac{- \int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}}{\sigma \oint_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}}$$

A capacitância é dada pela razão da carga total pela diferença de potencial,

$$C = \frac{Q}{V_{\epsilon 0}} = \frac{\epsilon \oint_S \mathbf{E}_\epsilon \cdot d\mathbf{S}}{- \int \mathbf{E}_\epsilon \cdot d\mathbf{L}}$$

Agora invocamos a analogia fazendo  $V_{\epsilon 0} = V_{\sigma 0}$  e  $\mathbf{E}_\epsilon = \mathbf{E}_\sigma$ . O resultado é

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (45)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

e

$$V = Ax + B \quad (12)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração. A Equação (12) contém duas constantes desse tipo, conforme deveríamos esperar de uma equação diferencial de segunda ordem. Essas constantes podem ser determinadas apenas pelas condições de fronteira.

Quais condições de fronteira deveríamos fornecer? Elas são de nossa escolha, uma vez que nenhum problema físico foi especificado ainda, com exceção da hipótese original de que o potencial variava apenas com  $x$ . Devemos agora tentar visualizar tal campo. A maioria de nós provavelmente já tem a resposta, mas ela deve ser obtida por métodos exatos.

Uma vez que o campo varia apenas com  $x$  e não é função de  $y$  e  $z$ , então  $V$  é uma constante se  $x$  for uma constante ou, em outras palavras, as superfícies equipotenciais são descritas mantendo  $x$  constante. Essas superfícies são planos paralelos normais ao eixo  $x$ . O campo é, então, aquele de um capacitor de placas paralelas, e assim que especificarmos o potencial em quaisquer dois planos, poderemos calcular nossas constantes de integração.

Para sermos bastante genéricos, seja  $V = V_1$  em  $x = x_1$  e  $V = V_2$  em  $x = x_2$ . Substituindo-se esses valores em (12), resulta em

$$\begin{aligned} V_1 &= Ax_1 + B & V_2 &= Ax_2 + B \\ A &= \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} & B &= \frac{V_2x_1 - V_1x_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

e

$$V = \frac{V_1(x - x_2) - V_2(x - x_1)}{x_1 - x_2}$$

Uma resposta mais simples teria sido obtida escolhendo-se condições de fronteira mais simples. Se tivéssemos fixado  $V = 0$  em  $x = 0$  e  $V = V_0$  em  $x = d$ , então

$$A = \frac{V_0}{d} \quad B = 0$$

e

$$\boxed{V = \frac{V_0x}{d}} \quad (13)$$

Suponha que nosso objetivo primário seja encontrar a capacitância de um capacitor de placas paralelas. Resolvemos a equação de Laplace, obtendo (12) com as duas constantes,  $A$  e  $B$ . Elas devem ser calculadas ou deixadas de lado? Presumivelmente não estamos interessados no campo potencial em si, mas apenas na capacitância, e devemos continuar com êxito mantendo  $A$  e  $B$  ou podemos simplificar a álgebra com um pouco de perspicácia. A capacitância é dada pela razão entre a carga e a diferença de potencial, então podemos escolher agora a *diferença* de potencial como  $V_0$ , que é equivalente a uma condição de fronteira. Escolher uma segunda condição de fronteira qualquer parece ajudar bastante a forma da equação. Essa é a essência do segundo conjunto de condições de fronteira que produziu (13). A diferença de potencial foi fixada como  $V_0$  fazendo o potencial de uma placa igual a zero e o da outra igual a  $V_0$ . O posicionamento dessas placas foi feito tão simples quanto possível fazendo  $V = 0$  em  $x = 0$ .

Usando (13), precisamos ainda da carga total em uma das placas, antes que a capacitância possa ser calculada. Devemos lembrar que, quando primeiramente resolvemos esse problema do capacitor no Capítulo 5, a lâmina de cargas foi o nosso ponto de partida. Não tivemos de trabalhar de forma muito árdua para encontrar a carga, uma vez que todos os campos estavam expressos em função da mesma. O trabalho foi gasto para se encontrar a diferença de potencial. Agora o problema é inverso (e simplificado).

Os passos necessários são estes, após a escolha das condições de fronteira ter sido feita:

1. Dado  $V$ , use  $\mathbf{E} = -\nabla V$  para encontrar  $\mathbf{E}$ .
2. Use  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  para encontrar  $\mathbf{D}$ .
3. Calcule  $\mathbf{D}$  em uma das placas do capacitor,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_S = D_N\mathbf{a}_N$ .
4. Reconheça que  $\rho_S = D_N$ .
5. Encontre  $Q$  por meio de uma integração de superfície sobre a placa do capacitor,  $Q = \int_S \rho_S dS$ .

Temos, nesse caso,

$$\begin{aligned} V &= V_0 \frac{x}{d} \\ \mathbf{E} &= -\frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{D} &= -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{D}_S &= \mathbf{D}|_{x=0} = -\epsilon \frac{V_0}{d} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_N &= \mathbf{a}_x \\ D_N &= -\epsilon \frac{V_0}{d} = \rho_S \\ Q &= \int_S \frac{-\epsilon V_0}{d} dS = -\epsilon \frac{V_0 S}{d} \end{aligned}$$

e a capacitância é

$$C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d} \quad (14)$$

Deveremos utilizar este procedimento diversas vezes nos exemplos que se seguem.

### EXEMPLO 7.2

Uma vez que nenhum problema novo é resolvido quando escolhemos campos que variam apenas com  $y$  ou  $z$  em coordenadas cartesianas, passamos para coordenadas cilíndricas para o nosso próximo exemplo. Variações com relação a  $z$  novamente não são novidade e, em seguida, assumimos variação com relação a  $\rho$  apenas. A equação de Laplace fica

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

ou

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

Notando o  $\rho$  no denominador, excluimos  $\rho = 0$  da nossa solução, multiplicamos por  $\rho$  e integramos,

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

rearranjamos e integramos novamente,

$$V = A \ln \rho + B \quad (15)$$

As superfícies eqüipotenciais são dadas por  $\rho = \text{constante}$  e são cilindros, e o problema é aquele de um capacitor coaxial ou de uma linha de transmissão coaxial. Escolhemos uma diferença de potencial de  $V_0$ , fazendo  $V = V_0$  em  $\rho = a$ ,  $V = 0$  em  $\rho = b$ ,  $b > a$ , e obtemos

$$V = V_0 \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)} \quad (16)$$

da qual

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln(b/a)} \mathbf{a}_\rho \\ D_{N(\rho-a)} &= \frac{\epsilon V_0}{a \ln(b/a)} \\ Q &= \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln(b/a)} \end{aligned}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)} \quad (17)$$

que está de acordo com nossos resultados no Capítulo 6.

### Exemplo 7.3

Agora vamos assumir que  $V$  é uma função apenas de  $\phi$  em coordenadas cilíndricas. Devemos olhar para o problema físico, em primeiro lugar, para uma mudança e ver quais superfícies eqüipotenciais são dadas por  $\phi = \text{constante}$ . Elas são planos radiais. Condições de fronteira devem ser  $V = 0$  em  $\phi = 0$  e  $V = V_0$  em  $\phi = \alpha$ , levando ao problema físico detalhado na Figura 7.1.

A equação de Laplace é agora

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



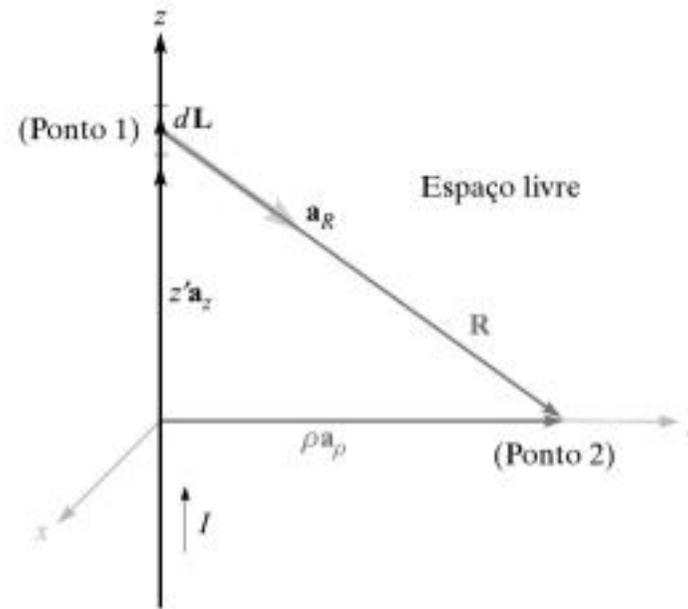
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



**Figura 8.3** Um filamento reto infinitamente longo pelo qual circula uma corrente contínua  $I$ . O campo no ponto 2 é  $\mathbf{H} = (I/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$ .

Podemos ilustrar a aplicação da lei de Biot-Savart considerando um filamento reto infinitamente longo. Vamos aplicar (2) primeiramente e depois integrar. Isso é o mesmo que utilizar a forma integral (3) de uma vez.<sup>2</sup>

Referindo-se à Figura 8.3, devemos reconhecer a simetria do campo. Não pode existir variação com  $z$  ou com  $\phi$ . O ponto 2, no qual deveremos determinar o campo, é desta forma escolhido no plano  $z = 0$ . O ponto de campo  $\mathbf{r}$  é, assim,  $r = \rho\mathbf{a}_\rho$ . O ponto fonte  $\mathbf{r}'$  é dado por  $\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$ , e assim

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z$$

de forma que

$$\mathbf{a}_{R12} = \frac{\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

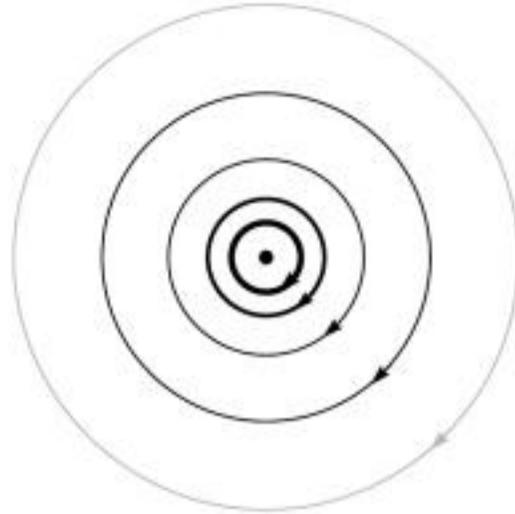
Tomamos  $d\mathbf{L} = dz'\mathbf{a}_z$  e (2) se torna

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I dz'\mathbf{a}_z \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Uma vez que a corrente está orientada na direção de valores crescentes de  $z'$ , os limites são  $-\infty$  e  $\infty$  na integral, e temos

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz'\mathbf{a}_z \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz'\mathbf{a}_\phi}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

<sup>2</sup> O caminho fechado para a corrente pode ser considerado como possuindo um filamento de retorno paralelo ao primeiro filamento e afastado deste de uma distância infinita. Um condutor coaxial externo de raio infinito é outra possibilidade teórica. Na prática, o problema é impossível de ocorrer, mas devemos perceber que nossa resposta será bastante exata perto de um fio reto muito fino que possua um caminho de retorno de corrente muito afastado.



**Figura 8.4** As linhas de força da intensidade de campo magnético em volta de um filamento reto infinitamente longo pelo qual circula uma corrente contínua  $I$ . A direção de  $I$  é para dentro da página.

Neste ponto, o vetor unitário  $\mathbf{a}_\phi$  dentro do sinal de integração deve ser investigado, pois não é sempre constante como são os vetores unitários do sistema de coordenadas cartesianas. Um vetor é constante quando sua intensidade, direção e sentido são todos constantes. O vetor unitário certamente possui uma intensidade constante, mas sua direção e sentido variam. Nesse caso,  $\mathbf{a}_\phi$  muda com a coordenada  $\phi$ , mas não com  $\rho$  ou  $z$ . Felizmente, a integração aqui é com relação a  $z'$ , e  $\mathbf{a}_\phi$  é uma constante e pode ser removida de dentro do sinal de integração.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi} \left. \frac{z'}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

e

$$\boxed{\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi} \quad (8)$$

A intensidade do campo não é função de  $\phi$  ou  $z$ , e varia inversamente com a distância do filamento. A direção do vetor intensidade de campo magnético descreve uma circunferência. As linhas de força são, desse modo, círculos em volta do filamento, e o campo pode ser mapeado pela seção reta, conforme mostra a Figura 8.4.

A separação entre as linhas de força é proporcional ao raio, ou inversamente proporcional à intensidade de  $\mathbf{H}$ . Para ser específico, as linhas de força foram desenhadas com os quadrados curvilíneos em mente. Ainda não temos um nome para a família de linhas<sup>3</sup> que são perpendiculares a essas linhas de força circulares, mas o espaçamento das

<sup>3</sup> Se você não pode esperar, veja a Seção 8.6.



linhas de força foi ajustado de modo que a adição desse segundo conjunto de linhas produzirá um conjunto de quadrados curvilíneos.

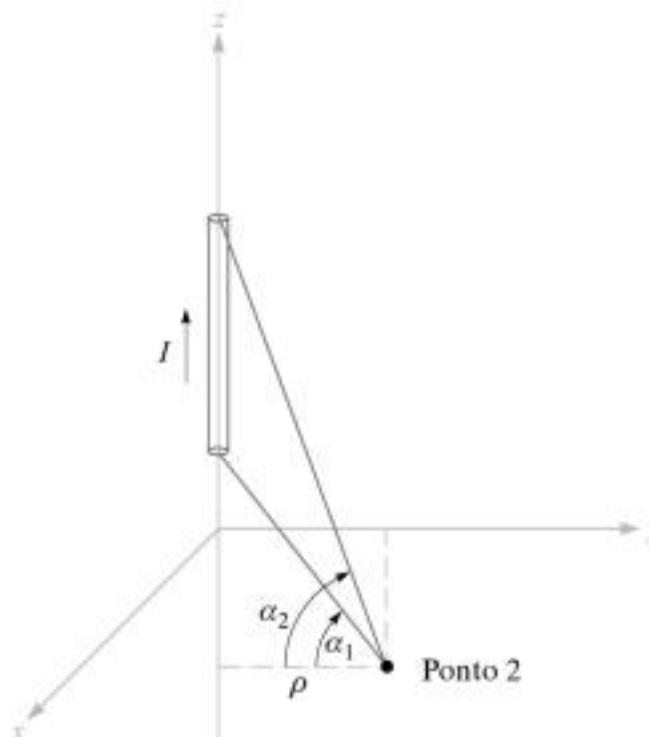
Uma comparação da Figura 8.4 com o mapa do campo *elétrico* ao redor de uma linha de *cargas* infinita mostra que as linhas de força do campo magnético correspondem exatamente às equipotenciais do campo elétrico, e a família de linhas perpendiculares ainda sem nome (e ainda não desenhada), no campo magnético corresponde às linhas de força do campo elétrico. Essa correspondência não é acidental, mas existem vários outros conceitos que devem ser esclarecidos antes que a analogia entre os campos elétrico e magnético possa ser explorada mais profundamente.

Utilizar a lei de Biot-Savart para encontrar  $\mathbf{H}$  é, em muitos aspectos, similar ao uso da lei de Coulomb para encontrar  $\mathbf{E}$ . Cada um requer a determinação de um integrando moderadamente complicado, que contém quantidades vetoriais, seguida de uma integração. Quando estávamos interessados na lei de Coulomb resolvemos um número de exemplos, incluindo os campos devidos a uma carga pontual, uma linha de cargas e uma lâmina de cargas. A lei de Biot-Savart pode ser utilizada para resolver problemas análogos com campos magnéticos, e alguns desses problemas aparecem como exercícios no final do capítulo, e não como exemplos aqui.

Um resultado útil é o campo de um elemento de corrente de comprimento finito, mostrado na Figura 8.5 (veja o Problema 8.8 no final do capítulo).  $\mathbf{H}$  é mais facilmente expresso em termos dos ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , conforme está identificado na figura. O resultado é

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)\mathbf{a}_\phi \quad (9)$$

Se uma ou ambas as extremidades estão abaixo do ponto 2, então  $\alpha_1$  ou ambos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são negativos.



**Figura 8.5** A intensidade de campo magnético causada por um filamento de corrente de comprimento finito no eixo  $z$  é  $(I/4\pi\rho)(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)\mathbf{a}_\phi$ .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



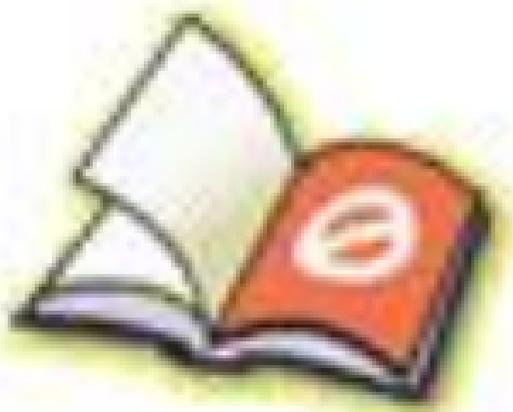
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



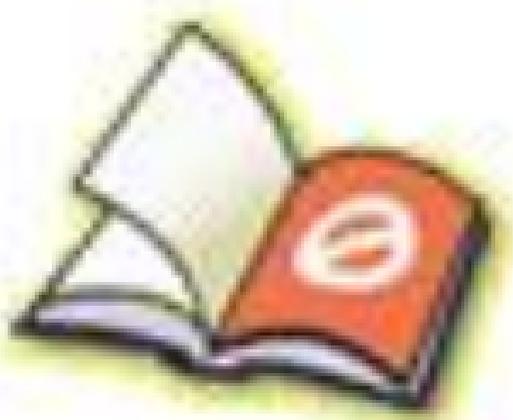
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



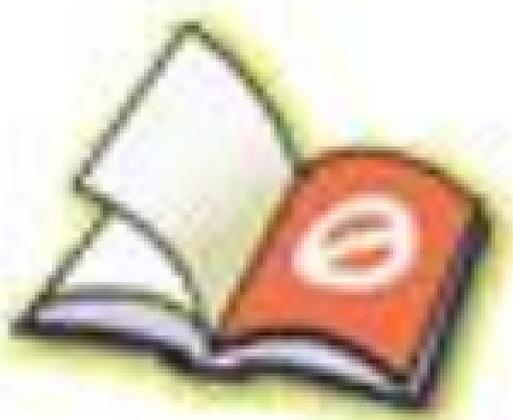
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



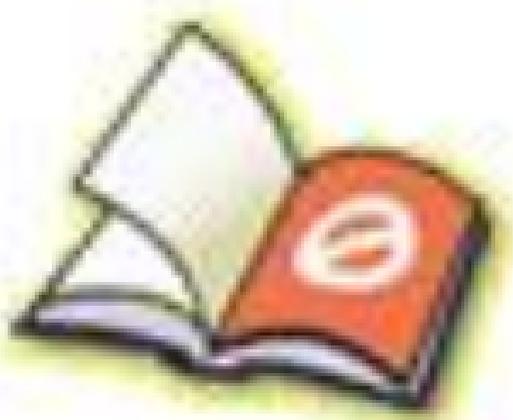
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



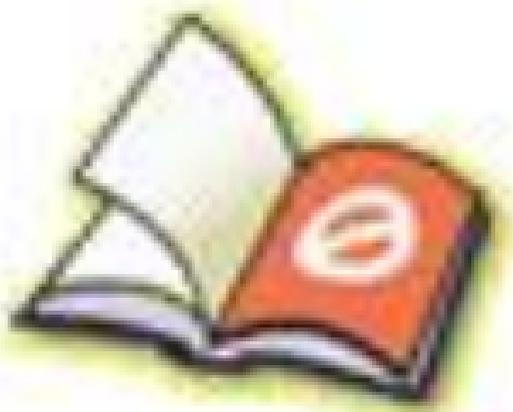
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



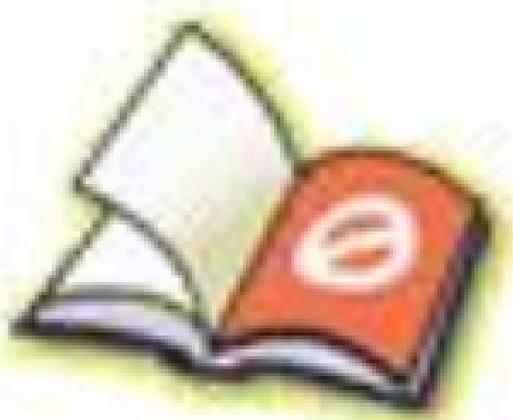
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Com a ajuda do teorema de Stokes, podemos transformar (21), (26) e (22) nas relações de rotacional equivalentes:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_b$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_T$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad (27)$$

Devemos enfatizar apenas (26) e (27), as duas expressões que envolvem cargas livres, no trabalho que se segue.

A relação entre  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  expressa por (25) pode ser simplificada para meios isotrópicos lineares, onde uma susceptibilidade magnética  $\chi_m$  possa ser definida:

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}} \quad (28)$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) \\ &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \end{aligned}$$

onde

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (29)$$

é definida como a *permeabilidade relativa*  $\mu_r$ . Em seguida, definimos a *permeabilidade*  $\mu$ :

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (30)$$

e isso nos permite escrever a relação simples entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ ,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (31)$$

### EXEMPLO 9.5

Dado um material ferrite que vamos especificar como operando de maneira linear com  $B = 0,05$  T, vamos assumir  $\mu_r = 50$  e calcular valores para  $\chi_m$ ,  $M$  e  $H$ .

**Solução.** Uma vez que  $\mu_r = 1 + \chi_m$ , temos

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 49$$

Também,

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

e

$$H = \frac{0,05}{50 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 796 \text{ A/m}$$

A magnetização é  $\chi_m H$ , ou 39.000 A/m. As formas alternativas de relacionar  $B$  e  $H$  são, primeiramente,

$$B = \mu_0(H + M)$$

ou

$$0,05 = 4\pi \times 10^{-7}(796 + 39000)$$

mostrando que as correntes de Ampère produzem 49 vezes mais intensidade de campo magnético que as cargas livres produzem. E, em segundo lugar,

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

ou

$$0,05 = 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 796$$

onde utilizamos uma permeabilidade de 50 e deixamos essa grandeza responder completamente pela noção de cargas ligadas. Devemos enfatizar a última interpretação nos capítulos seguintes.

As primeiras duas leis que investigamos para os campos magnéticos foram a lei de Biot-Savart e a lei circuital de Ampère. Ambas estavam restritas ao espaço livre em suas aplicações. Vamos agora estender seus usos a qualquer material magnético homogêneo, linear e isotrópico que possa ser descrito em termos de uma permeabilidade relativa  $\mu_r$ .

Assim como encontramos para os materiais dielétricos anisotrópicos, a permeabilidade de um material magnético anisotrópico deve ser dada como uma matriz  $3 \times 3$ , enquanto  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  são ambas matrizes  $3 \times 1$ . Temos

$$B_x = \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z$$

$$B_y = \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z$$

$$B_z = \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z$$

Para materiais anisotrópicos, então,  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  é uma equação matricial. Entretanto,  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  permanece válida, apesar de  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  não serem mais paralelos de uma forma geral. O material magnético anisotrópico mais comum é um cristal ferromagnético simples, apesar de filmes magnéticos finos também apresentarem anisotropia. A maioria das aplicações de materiais ferromagnéticos, entretanto, envolvem estruturas policristalinas que são muito mais fáceis de serem feitas.

Nossas definições de susceptibilidade e permeabilidade também dependem da condição de linearidade. Infelizmente, isso é verdade apenas nos materiais paramagnéticos e diamagnéticos, que são menos interessantes, para os quais a permeabilidade relativa raramente difere da unidade por mais que uma parte em mil. Alguns valores típicos de susceptibilidade para materiais diamagnéticos são hidrogênio,  $-2 \times 10^{-5}$ ; cobre,  $-0,9 \times 10^{-5}$ ; germânio,  $-0,8 \times 10^{-5}$ ; silício,  $-0,3 \times 10^{-5}$ ; e grafite,  $-12 \times 10^{-5}$ . Algumas susceptibilidades paramagnéticas representativas são oxigênio,  $2 \times 10^{-6}$ ; tungstênio,  $6,8 \times 10^{-5}$ ; óxido de ferro ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ),  $1,4 \times 10^{-3}$ ; e óxido de ítrio ( $\text{Y}_2\text{O}_3$ ),  $0,53 \times 10^{-6}$ . Se simplesmente tomarmos a razão entre  $B$  e  $\mu_0 H$  como a permeabilidade relativa de um material ferromagné-

tico, valores típicos de  $\mu_r$  variariam de 10 a 100.000. Materiais diamagnéticos, paramagnéticos e antiferromagnéticos são normalmente chamados de não magnéticos.

**E9.6.** Encontre a magnetização em um material magnético onde: (a)  $\mu = 1,8 \times 10^{-5}$  H/m e  $H = 120$  A/m; (b)  $\mu_r = 22$ , existem  $8,3 \times 10^{28}$  átomos/m<sup>3</sup> e cada átomo tem um momento de dipolo de  $4,5 \times 10^{-27}$  A · m<sup>2</sup>; (c)  $B = 300$  μT e  $\chi_m = 15$ .

**Resp.** 1599 A/m; 374 A/m; 224 A/m

**E9.7.** A magnetização em um material magnético para o qual  $\chi_m = 8$  é dada em certa região como  $150z^2 \mathbf{a}_x$  A/m. Em  $z = 4$  cm, calcule a intensidade de: (a)  $\mathbf{J}_T$ ; (b)  $\mathbf{J}$ ; (c)  $\mathbf{J}_b$ .

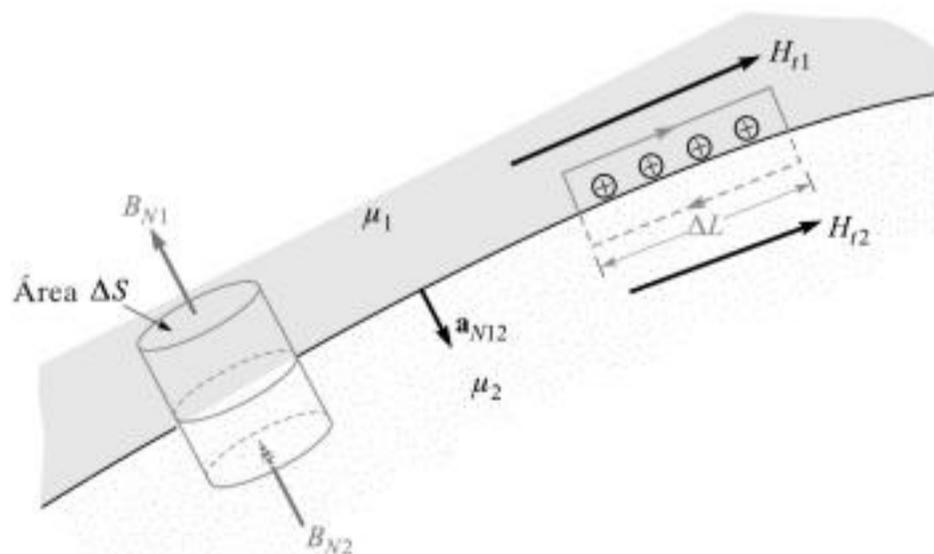
**Resp.** 13,5 A/m<sup>2</sup>; 1,5 A/m<sup>2</sup>; 12 A/m<sup>2</sup>

## 9.7 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA MAGNÉTICAS

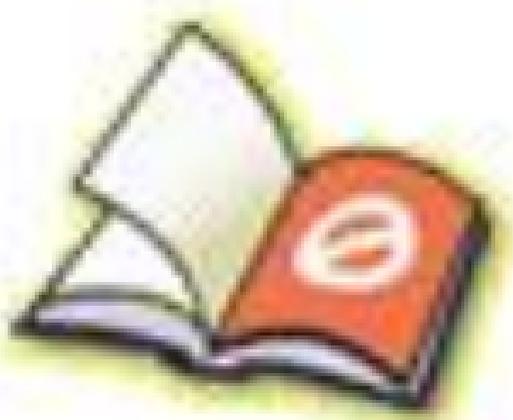
Não deveremos ter dificuldades em alcançar as condições de fronteira corretas a serem aplicadas a  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  na interface entre dois materiais magnéticos diferentes, pois já resolvemos problemas similares tanto para materiais condutores quanto para dielétricos. Não precisamos de novas técnicas.

A Figura 9.10 mostra uma fronteira entre dois materiais lineares homogêneos isotrópicos com permeabilidades  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . A condição de fronteira nas componentes normais é determinada permitindo que a superfície corte uma pequena superfície gaussiana cilíndrica. Aplicando a lei de Gauss para o campo magnético da Seção 8.5,

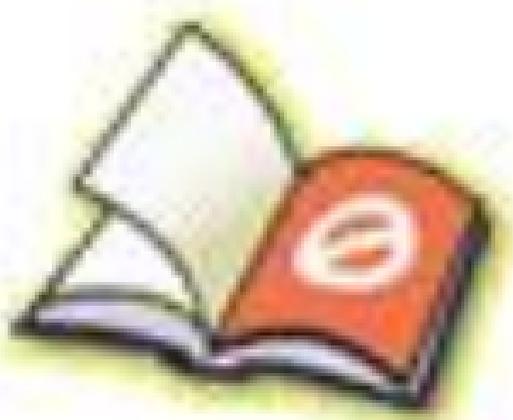
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$



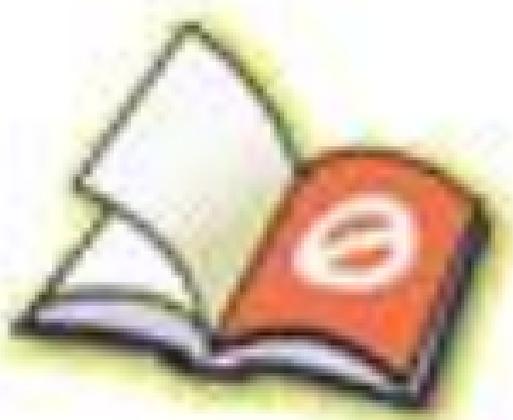
**Figura 9.10** Uma superfície gaussiana e um caminho fechado são construídos na fronteira entre os meios 1 e 2, que possuem permeabilidades  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente. Disso determinamos as condições de fronteira  $B_{N1} = B_{N2}$  e  $H_{t1} - H_{t2} = K$ , a componente da densidade superficial de corrente que está direcionada para dentro da página.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



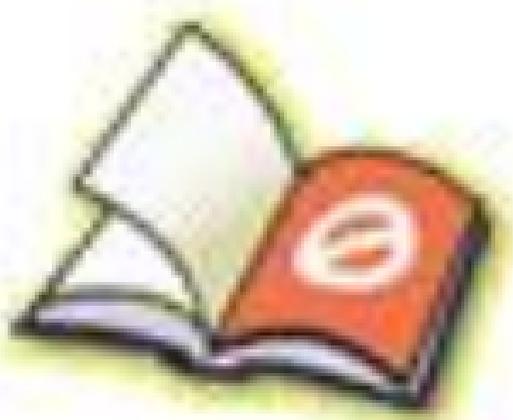
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



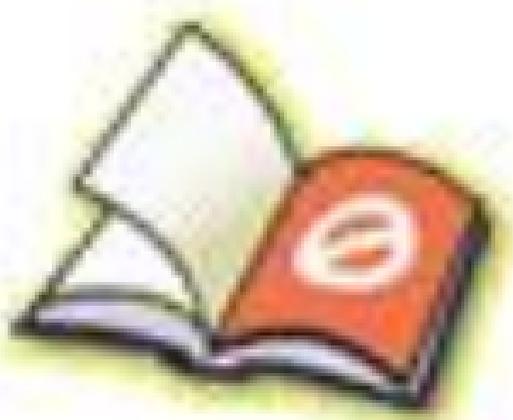
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



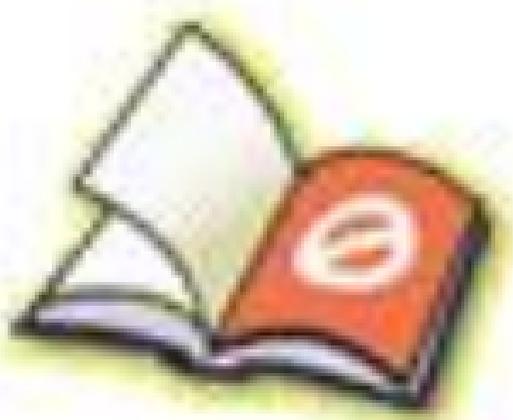
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

A identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (54)$$

pode ser provada por expansão em coordenadas cartesianas. A indutância é, portanto,

$$L = \frac{1}{I^2} \left[ \int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv + \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv \right] \quad (55)$$

Após aplicar o teorema da divergência na primeira integral e fazer  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$  na segunda integral, temos

$$L = \frac{1}{I^2} \left[ \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv \right]$$

A integral de superfície é zero, uma vez que a superfície envolve o volume que contém toda a energia magnética, e isso requer que  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{H}$  sejam zero na superfície da fronteira. A indutância pode então ser escrita como

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dv \quad (56)$$

A Equação (56) expressa a indutância em termos de uma integral dos valores de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{J}$  em todos os pontos. Uma vez que a densidade de corrente exista apenas dentro do condutor, o integrando é zero em todos os pontos *fora* do condutor, e o potencial vetor magnético não precisa ser determinado lá. O potencial vetor é aquele criado pela corrente  $\mathbf{J}$ , e qualquer outra fonte de corrente que contribua para um campo potencial vetor na região da densidade de corrente original deve ser ignorada pelo momento. Mais tarde veremos que isso leva a uma *indutância mútua*.

O potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  devido a  $\mathbf{J}$  é dado pela Equação (51), Capítulo 8,

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dv$$

e a indutância pode ser expressa mais basicamente como uma integral volumétrica dupla mais complexa,

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \left( \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dv \right) \cdot \mathbf{J} dv \quad (57)$$

Uma expressão integral ligeiramente mais simples é obtida se restringirmos nossa atenção a filamentos de corrente de seções retas pequenas para os quais  $\mathbf{J} dv$  pode ser substituído por  $I d\mathbf{L}$  e a integral volumétrica por uma integral de linha fechada ao longo do eixo do filamento,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{I^2} \oint \left( \oint \frac{\mu I d\mathbf{L}}{4\pi R} \right) \cdot I d\mathbf{L} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \oint \left( \oint \frac{d\mathbf{L}}{R} \right) \cdot d\mathbf{L} \end{aligned} \quad (58)$$

Nosso único interesse neste momento nas Equações (57) e (58) reside na implicação destas de que a indutância é uma função da distribuição espacial de corrente ou da geometria da configuração de condutores.

Para obter nossa definição original de indutância (49) vamos considerar, por hipótese, uma distribuição de corrente uniforme em um condutor filamentar de seção reta pequena, de forma que  $\mathbf{J} dv$  em (56) se torna  $I d\mathbf{L}$ ,

$$L = \frac{1}{I} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} \quad (59)$$

Para uma seção reta pequena,  $d\mathbf{L}$  pode ser tomado ao longo do centro do filamento. Agora aplicamos o teorema de Stokes e obtemos

$$L = \frac{1}{I} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

ou

$$L = \frac{1}{I} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

ou

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (60)$$

Reverendo os passos seguidos na obtenção de (60), vemos que o fluxo  $\Phi$  é aquela porção do fluxo total que passa por toda e qualquer superfície cujo perímetro é o caminho filamental de corrente.

Se agora fizermos o filamento dar  $N$  voltas idênticas em volta do fluxo total, uma idealização que pode ser conseguida razoavelmente em alguns tipos de indutores, a integral de linha fechada deve consistir de  $N$  voltas ao redor desse caminho comum, e (60) muda para

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (61)$$

O fluxo  $\Phi$  é agora o fluxo que atravessa qualquer superfície cujo perímetro seja o caminho ocupado por qualquer *uma* das  $N$  espiras. A indutância de uma bobina de  $N$  espiras pode ainda ser obtida de (60), entretanto, se percebermos que o fluxo é aquele que atravessa a superfície complicada<sup>4</sup> cujo perímetro consiste de todas as  $N$  espiras.

A utilização de qualquer uma das expressões de indutância para um condutor filamental real (que possua raio igual a zero) leva a um valor infinito de indutância, independentemente da configuração do filamento. Perto do condutor, a lei circuital de Ampère mostra que a intensidade de campo magnético varia inversamente com a distância ao condutor, e uma integração simples logo mostra que uma quantidade infinita de energia e uma quantidade infinita de fluxo estão contidos dentro de qualquer cilindro finito em torno do filamento. Essa dificuldade é eliminada especificando um pequeno mas finito raio para o filamento.

O interior de qualquer condutor também contém fluxo magnético, e esse fluxo envolve uma fração variável da corrente total, dependendo da sua localização. Esses enlaces de fluxo levam a uma *indutância interna*, que deve ser combinada com a indutância externa para se obter a indutância total. A indutância interna de um fio longo, retilíneo, de seção reta circular de raio  $a$  e com distribuição uniforme de corrente é

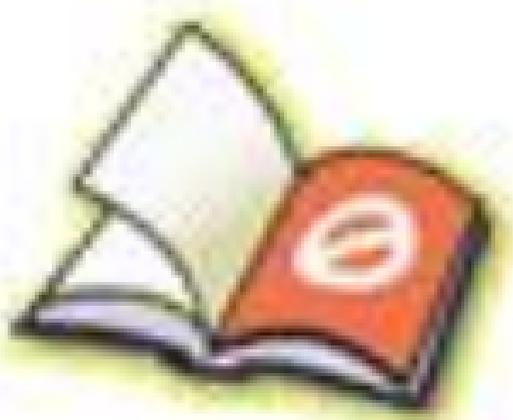
$$L_{a, \text{int}} = \frac{\mu}{8\pi} \quad \text{H/m} \quad (62)$$

um resultado solicitado no Problema 9.43 no final desse capítulo.

<sup>4</sup> Algo semelhante a uma rampa em espiral.



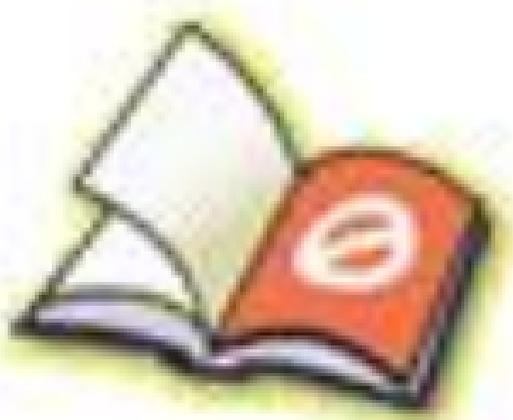
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



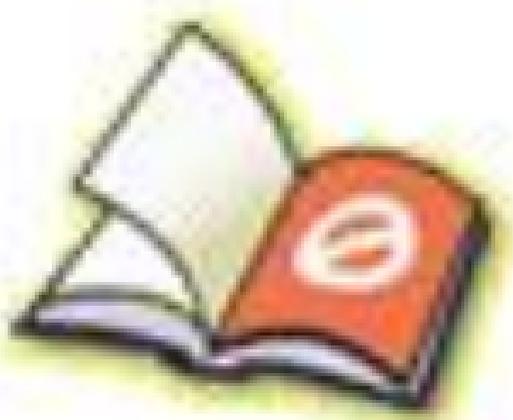
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



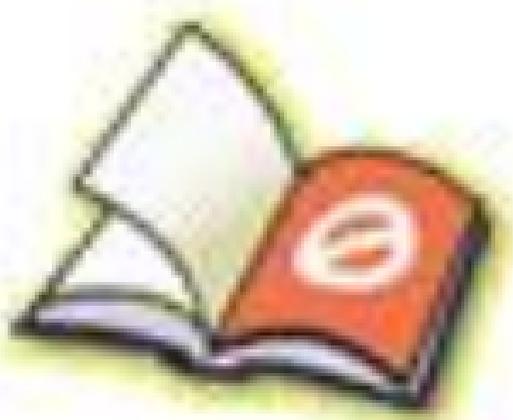
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



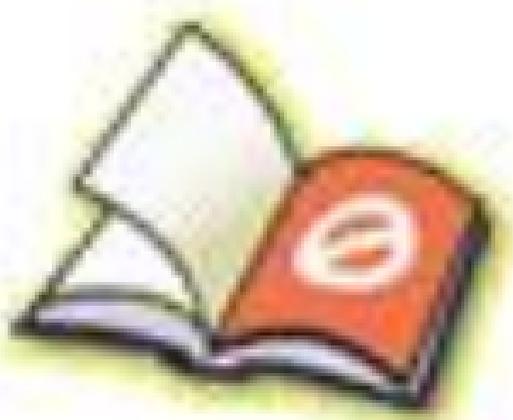
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



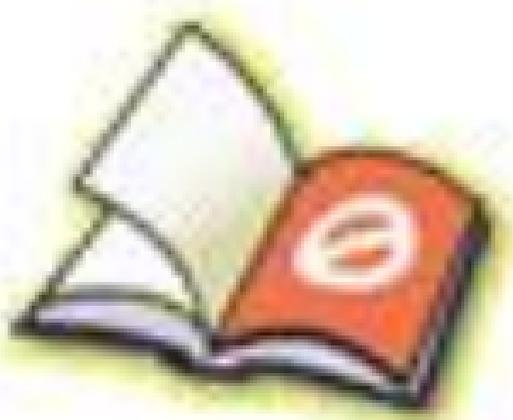
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



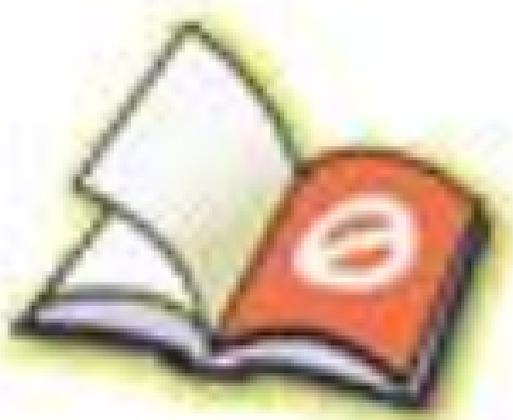
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



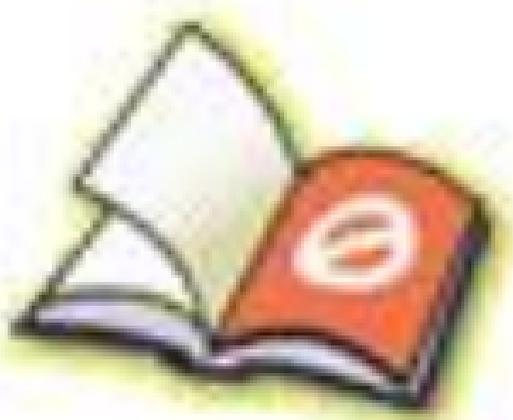
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



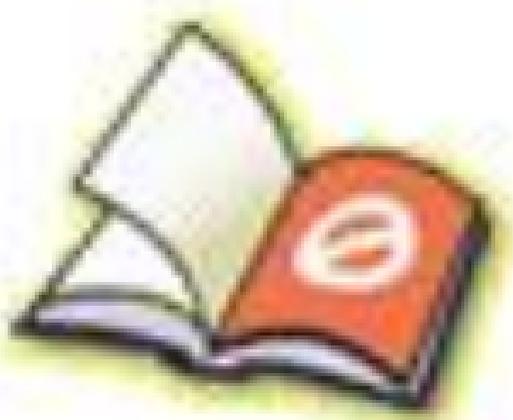
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



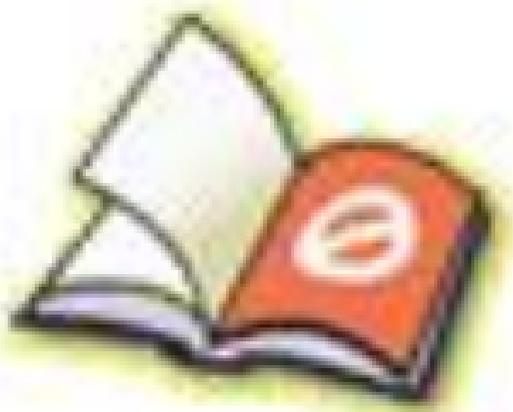
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



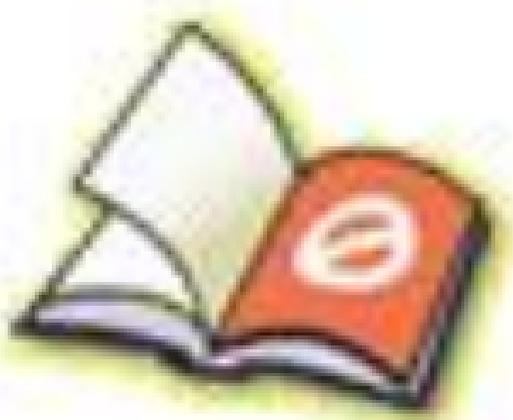
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



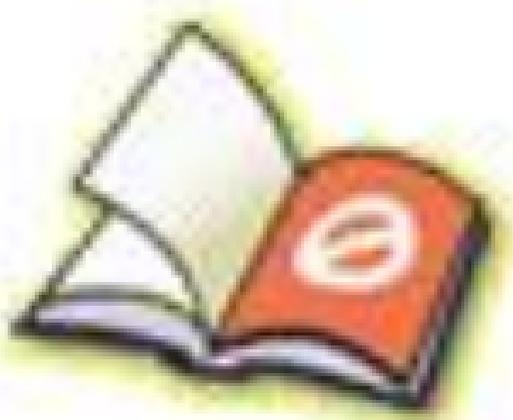
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



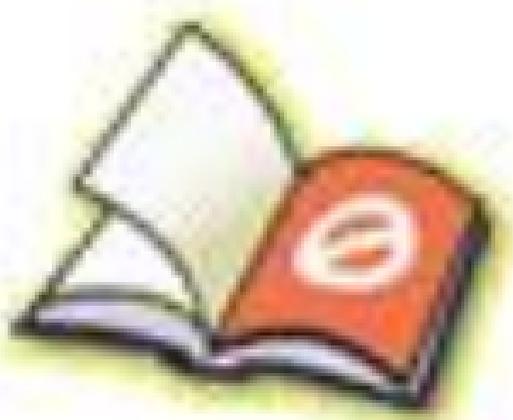
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



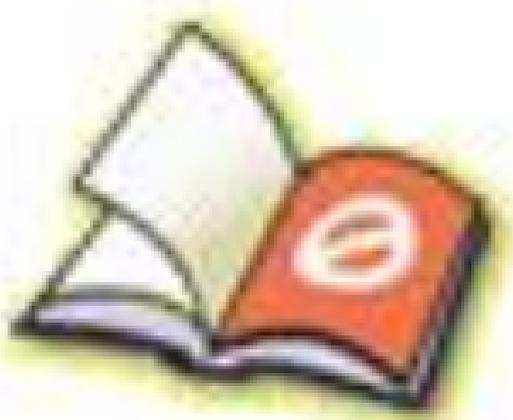
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



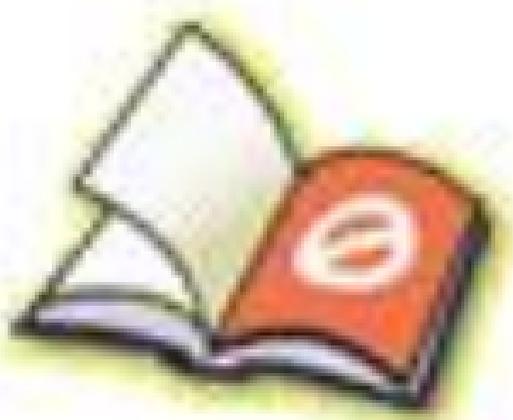
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



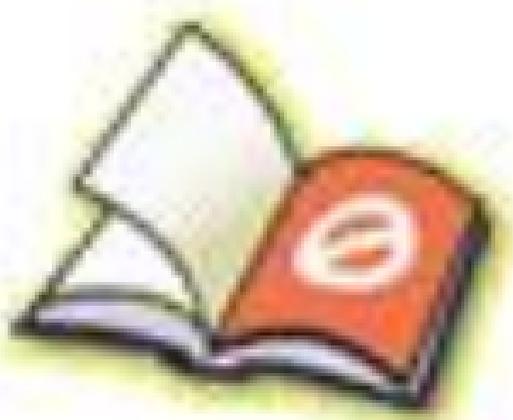
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



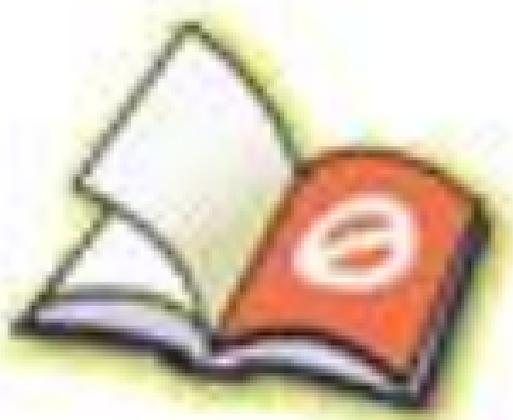
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



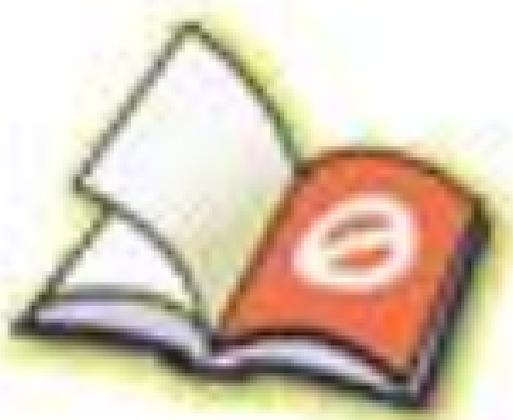
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



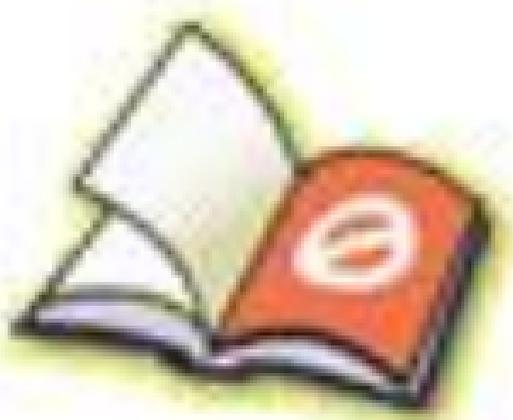
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



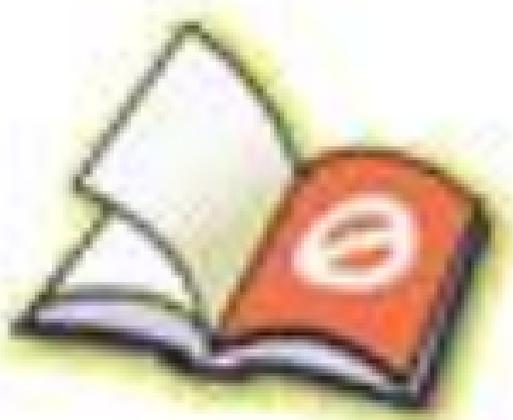
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



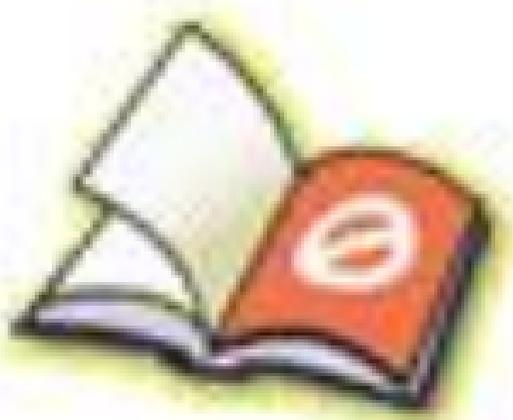
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



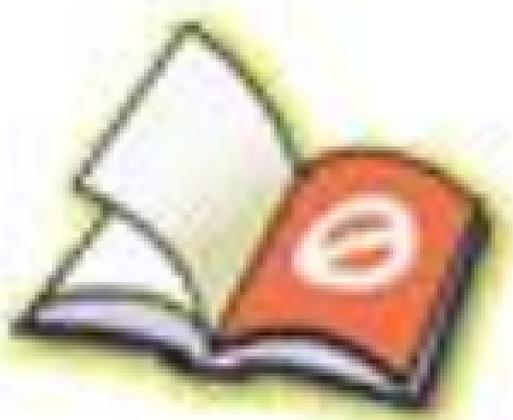
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



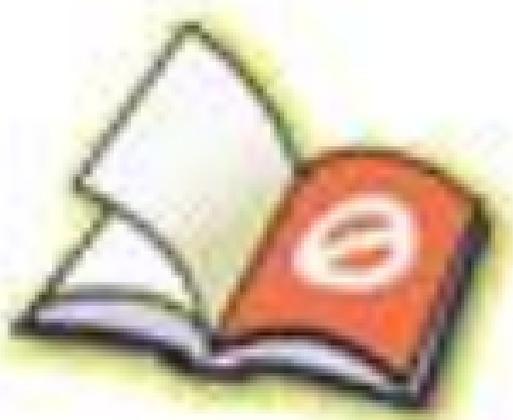
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



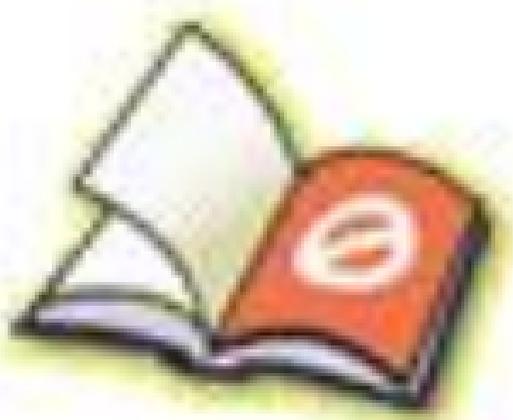
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



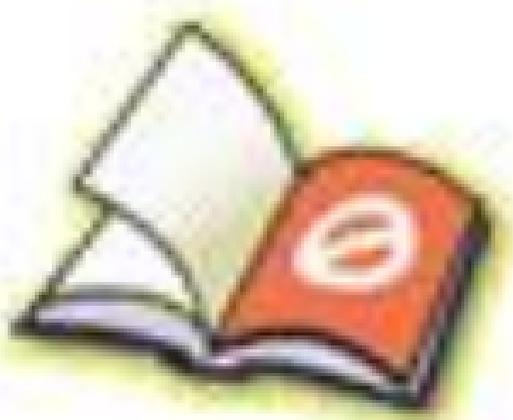
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



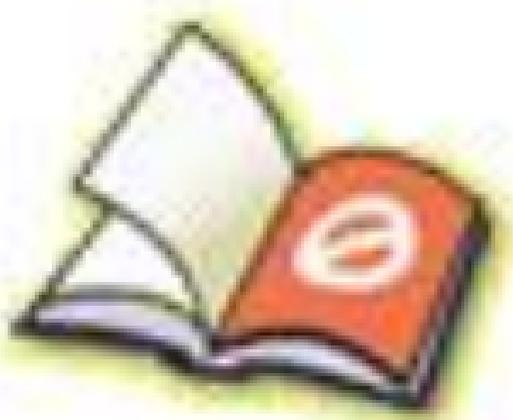
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



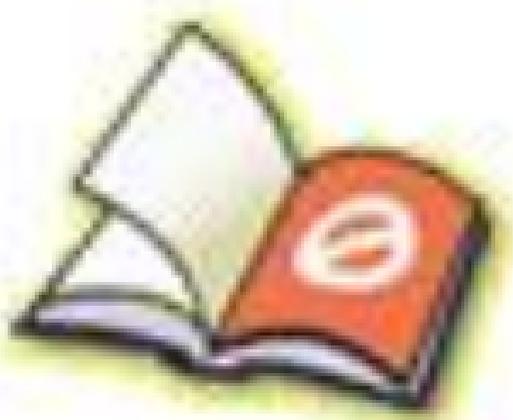
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



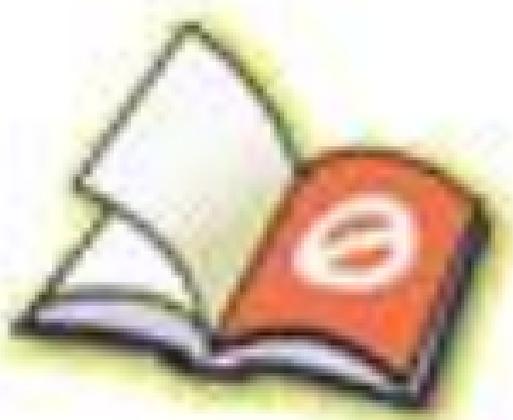
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



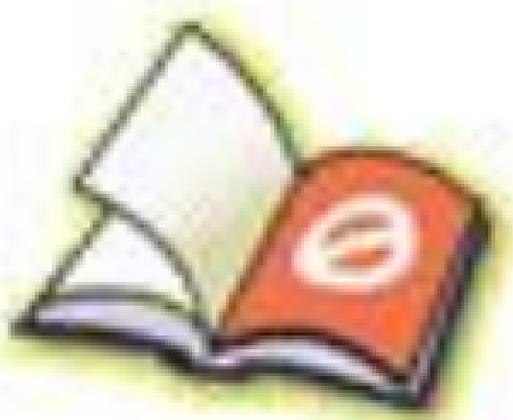
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



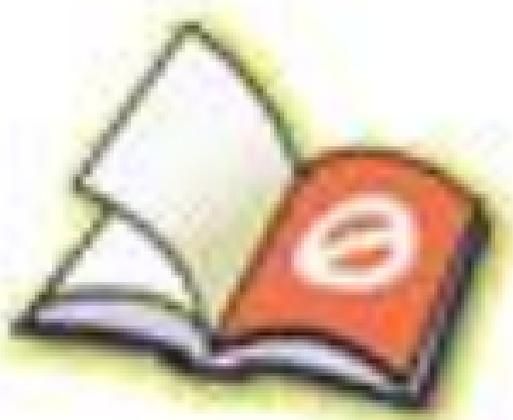
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

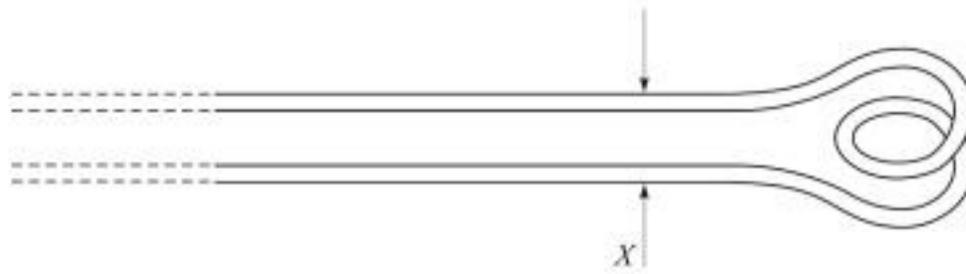


Figura 11.34 Veja o Problema 11.30.

esquerda de  $X$ , e um máximo de tensão é localizado valendo 3 vezes mais que o mínimo de tensão. Use a carta de Smith para calcular: (a)  $f$ ; (b)  $s$ ; (c) a impedância de entrada normalizada da bateadeira de ovos vista olhando-se para a direita a partir do ponto  $X$ .

- 11.31** Com objetivo de comparar o quão pontiagudos são os máximos e mínimos de uma onda estacionária, considere uma carga  $z_L = 4 + j0$  posicionada em  $z = 0$ . Seja  $|V|_{\min} = 1$  e  $\lambda = 1$  m. Determine a largura de: (a) um mínimo onde  $|V| < 1,1$ ; (b) um máximo onde  $|V| > 4/1,1$ .
- 11.32** Uma linha sem perdas está operando com  $Z_0 = 40 \Omega$ ,  $f = 20$  MHz e  $\beta = 7,5\pi$  rad/m. Com um curto-circuito substituindo a carga, um mínimo é encontrado em um ponto da linha, que é marcado com um pequeno ponto de tinta colorida. Com a carga instalada, encontra-se que  $s = 1,5$  e um mínimo de tensão se localiza a 1 m em direção à fonte a partir do ponto colorido. (a) Encontre  $Z_L$ ; (b) Qual carga produziria  $s = 1,5$  com  $|V|_{\max}$  no ponto marcado com tinta?
- 11.33** Na Figura 11.17, seja  $Z_L = 40 - j10 \Omega$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $f = 800$  MHz e  $v = c$ . (a) Encontre a menor distância  $d_1$  de um estubo de curto-circuito, e a distância mais curta  $d$  em que ele pode ser posicionado em relação à carga, de modo a propiciar um casamento perfeito com a linha principal à esquerda do estubo. (b) Repita para um estubo com a terminação em aberto.
- 11.34** A linha sem perdas mostrada na Figura 11.35 está operando com  $\lambda = 100$  cm. Se  $d_1 = 10$  cm,  $d = 25$  cm e a linha está casada à esquerda do estubo, quanto vale  $Z_L$ ?
- 11.35** Uma carga  $Z_L = 25 + j75 \Omega$  está posicionada em  $z = 0$  em uma linha sem perdas a dois fios para a qual  $Z_0 = 50 \Omega$  e  $v = c$ . (a) Se  $f = 300$  MHz, encontre a menor

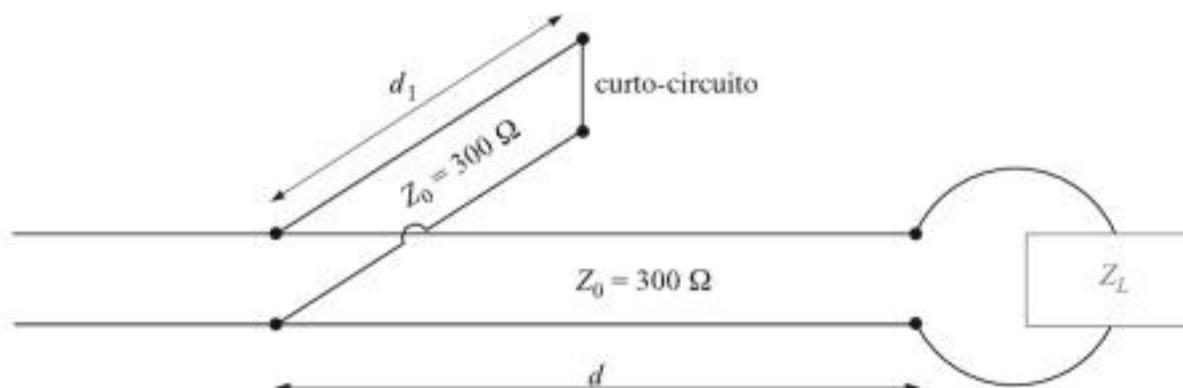


Figura 11.35 Veja o Problema 11.34.

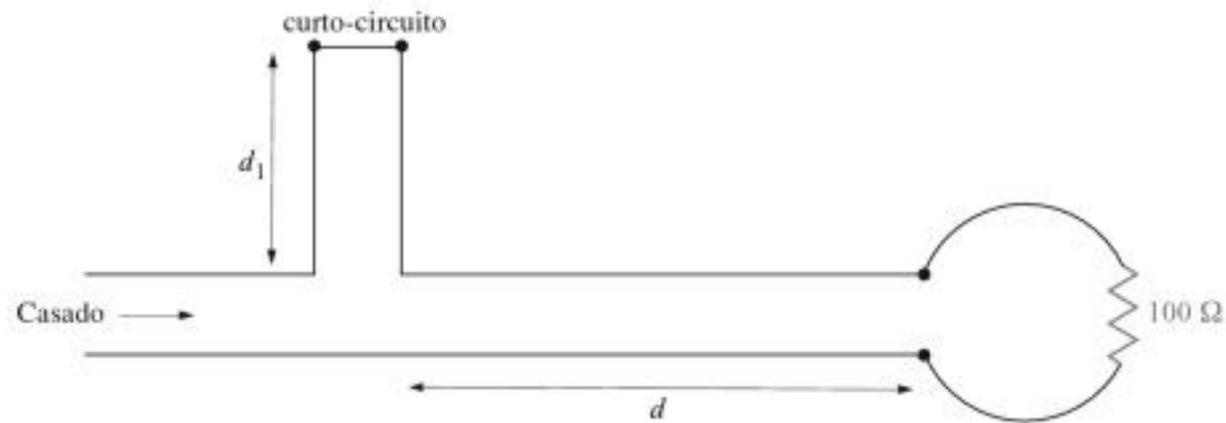


Figura 11.36 Veja o Problema 11.36.

distância  $d$  ( $z = -d$ ) na qual a admitância de entrada tem parte real igual a  $1/Z_0$  e uma parte imaginária negativa. (b) Que valor de capacitância  $C$  deve ser conectada à linha naquele ponto, de modo a proporcionar uma taxa de onda estacionária unitária na porção restante da linha?

- 11.36** As linhas a dois fios mostradas na Figura 11.36 são todas sem perdas e têm  $Z_0 = 200 \Omega$ . Encontre  $d$  e o valor menor possível de  $d_1$  de modo a se ter uma carga casada se  $\lambda = 100$  cm.
- 11.37** Na linha de transmissão da Figura 11.20,  $R_L = Z_0 = 50 \Omega$  e  $R_g = 25 \Omega$ . Determine e faça o gráfico da tensão no resistor de carga e da corrente na bateria em função do tempo, pela construção de diagramas de reflexão de tensão e de corrente apropriados.
- 11.38** Repita o Problema 11.37 com  $Z_0 = 50 \Omega$  e  $R_L = R_g = 25 \Omega$ . Realize a análise para o período de tempo  $0 < t < 8l/v$ .
- 11.39** Na linha de transmissão da Figura 11.20,  $Z_0 = 50 \Omega$  e  $R_L = R_g = 25 \Omega$ . A chave é fechada em  $t = 0$  e é aberta novamente no tempo  $t = l/4v$ , criando assim um pulso retangular de tensão na linha. Construa um diagrama de reflexão de tensão apropriado para esse caso, e utilize-o para fazer um gráfico da tensão no resistor de carga em função do tempo para  $0 < t < 8l/v$  (note que o efeito da abertura da chave é o de iniciar uma segunda onda de tensão, cuja amplitude é tal que deixa uma corrente equivalente igual a zero a partir da sua abertura).
- 11.40** Na linha carregada da Figura 11.25, a impedância característica vale  $Z_0 = 100 \Omega$ , e  $R_g = 300 \Omega$ . A linha está carregada com uma tensão inicial,  $V_0 = 160$  V, e a chave

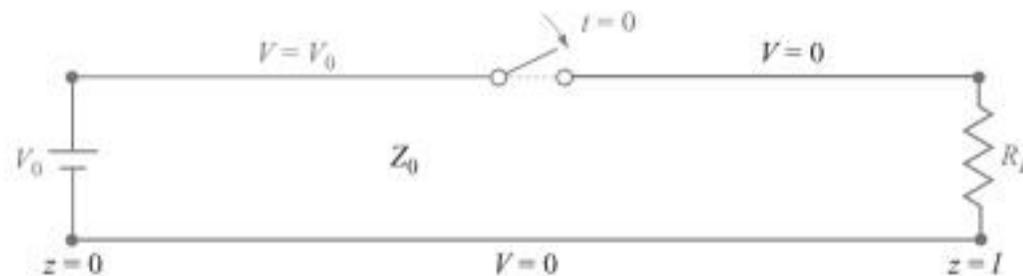


Figura 11.37 Veja o Problema 11.41.

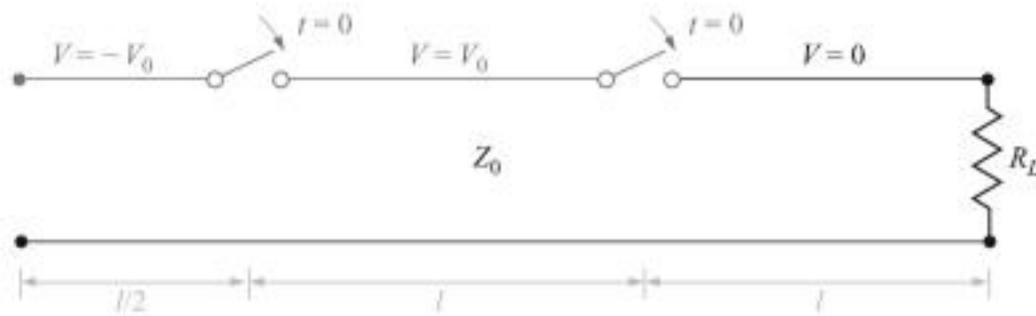
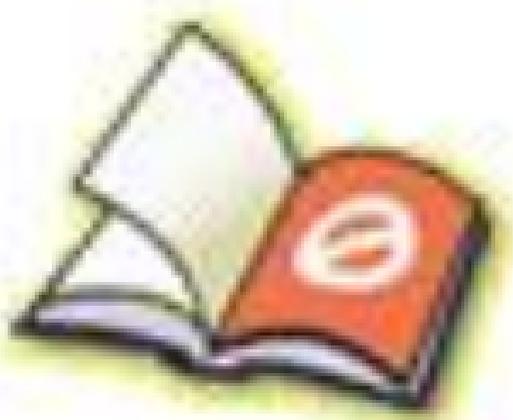


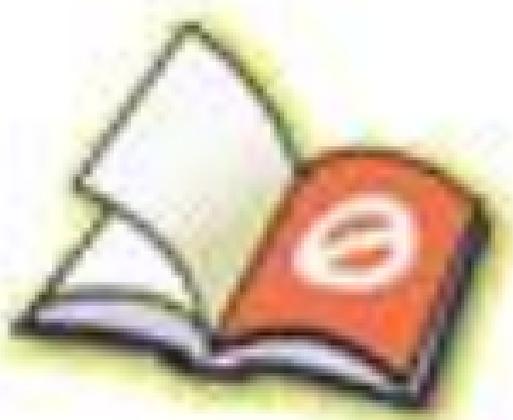
Figura 11.38 Veja o Problema 11.42.

é fechada em  $t = 0$ . Determine e faça o gráfico da tensão e da corrente sobre o resistor para o tempo  $0 < t < 8l/v$  (quatro idas e voltas completas). Este problema acompanha o Exemplo 11.12, sendo o outro caso especial do problema básico de linha carregada no qual, neste caso,  $R_g > Z_0$ .

- 11.41** Na linha de transmissão da Figura 11.37, a chave está posicionada à *meia distância* na linha e é fechada em  $t = 0$ . Construa um diagrama de reflexão de tensão para esse caso, onde  $R_L = Z_0$ . Faça o gráfico da tensão no resistor de carga em função do tempo.
- 11.42** Um *gerador de onda congelada* simples é mostrado na Figura 11.38. Ambas as chaves são fechadas simultaneamente em  $t = 0$ . Construa um diagrama de reflexão de tensão apropriado para o caso no qual  $R_L = Z_0$ . Determine e construa o gráfico da tensão no resistor de carga em função do tempo.



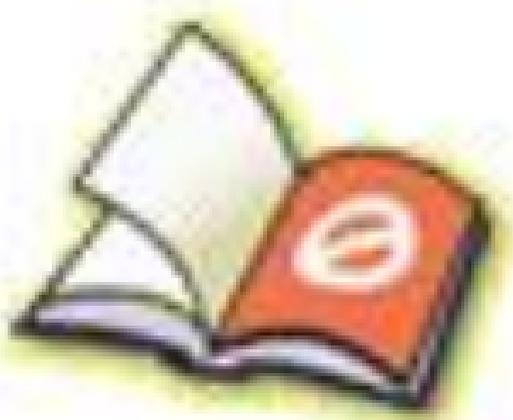
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



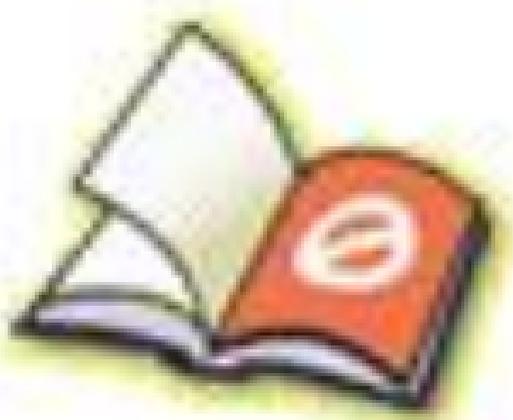
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



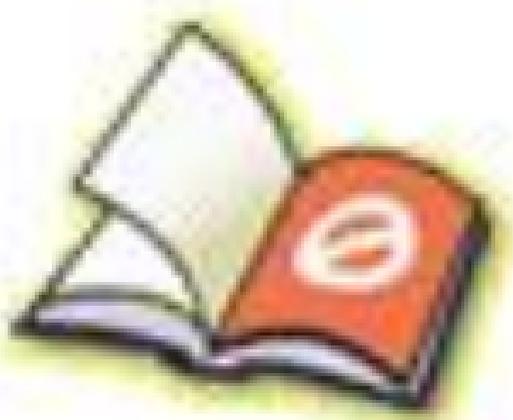
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



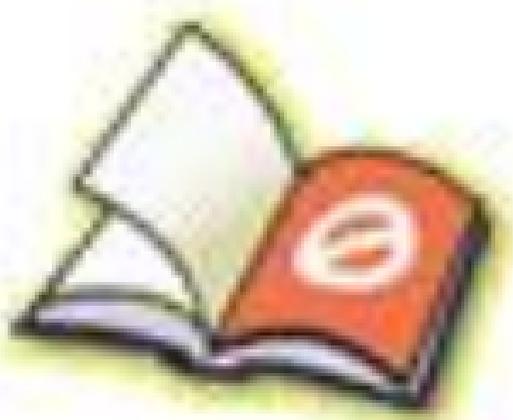
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



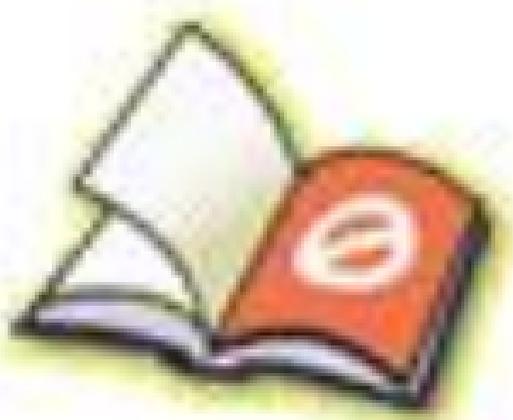
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



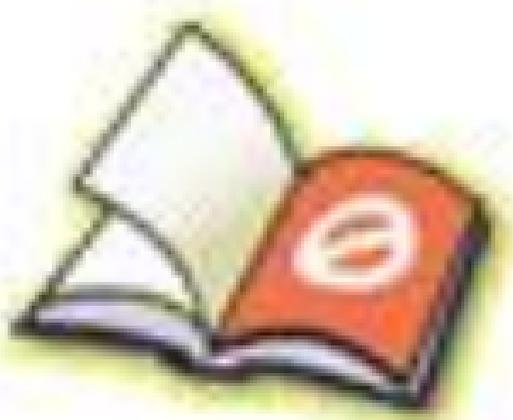
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



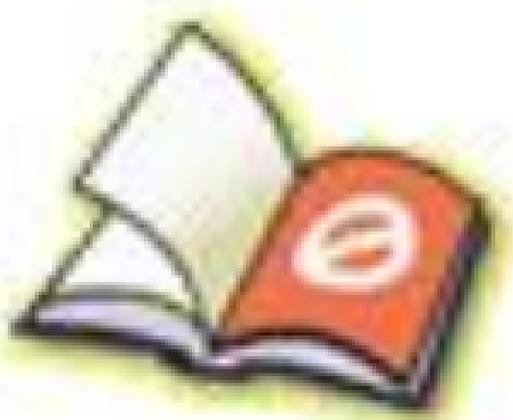
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



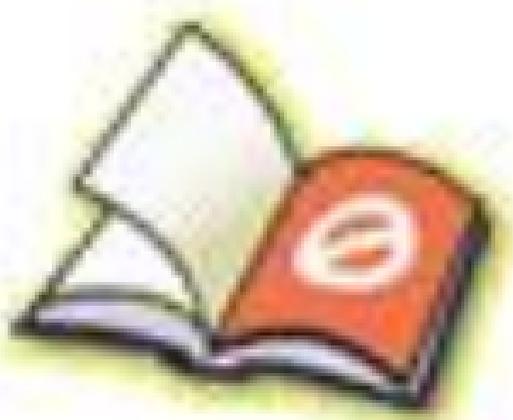
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



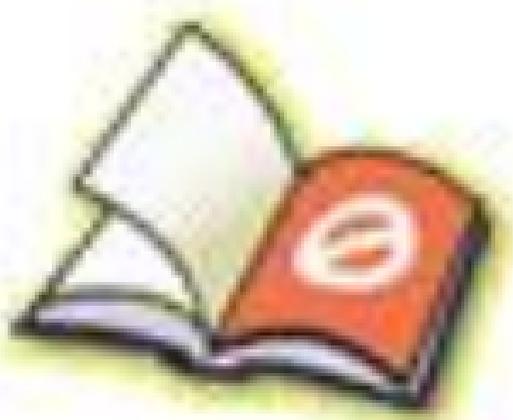
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



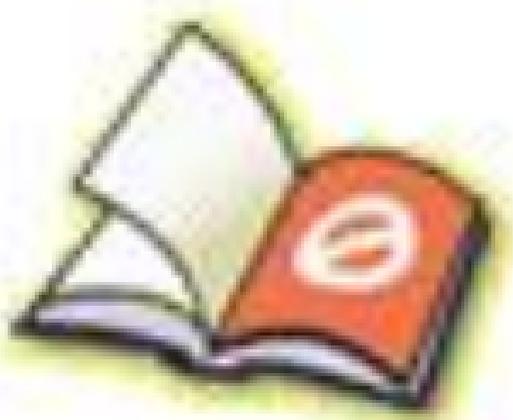
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



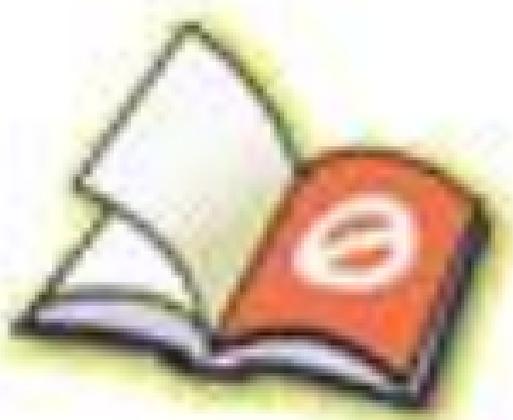
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



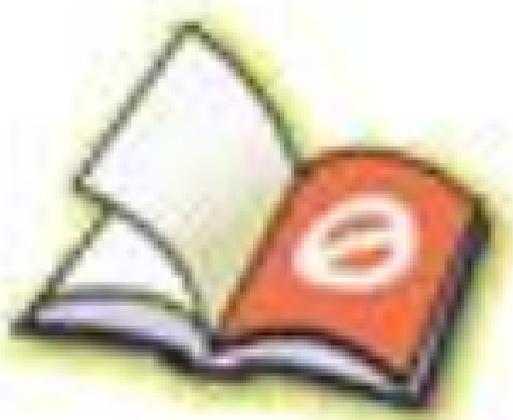
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



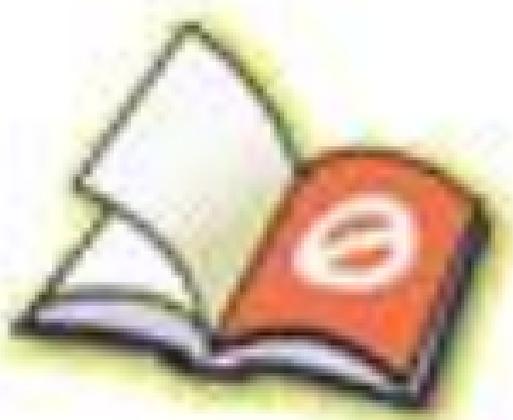
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



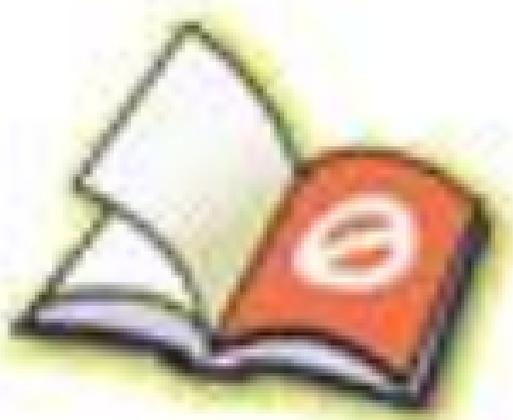
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

$\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  dentro do plano perpendicular a  $\mathbf{a}_z$  podem mudar como funções do tempo e da posição, dependendo de como a onda foi gerada ou em qual tipo de meio ela está se propagando. Com isso, uma descrição completa de uma onda eletromagnética não incluiria apenas parâmetros como comprimento de onda, velocidade de fase e de potência, mas também uma definição da orientação instantânea de seus campos vetoriais. Definimos *polarização da onda* como a orientação do vetor campo elétrico em função do tempo, em um ponto fixo no espaço. Uma caracterização mais completa da polarização de uma onda incluiria, na verdade, a especificação da orientação do campo em *todos* os pontos, pois algumas ondas apresentam variações espaciais em sua polarização. A especificação apenas da direção do campo elétrico é suficiente, uma vez que o campo magnético é prontamente encontrado a partir de  $\mathbf{E}$ , utilizando-se as equações de Maxwell.

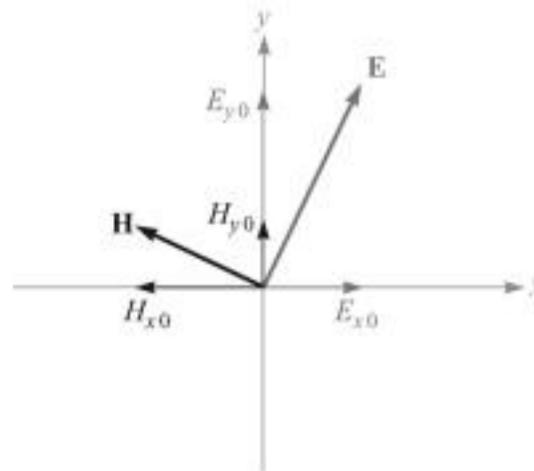
Nas ondas que estudamos anteriormente,  $\mathbf{E}$  permanecia em uma orientação fixa para todos os tempos e todas as posições. Uma onda desse tipo é chamada de *linearmente polarizada*. Consideramos  $\mathbf{E}$  orientado no eixo  $x$ , mas o campo poderia ser orientado em qualquer direção fixa no plano  $xy$  e ser linearmente polarizado. Para a propagação em  $z$  positivo, a onda teria geralmente seu fasor de campo elétrico expresso como

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0} \mathbf{a}_x + E_{y0} \mathbf{a}_y) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (91)$$

onde  $E_{x0}$  e  $E_{y0}$  são amplitudes constantes ao longo de  $x$  e  $y$ . O campo magnético é prontamente encontrado determinando-se suas componentes em  $x$  e  $y$  diretamente daquelas de  $\mathbf{E}_s$ . Especificamente,  $\mathbf{H}_s$  para a onda da Equação (91) é

$$\mathbf{H}_s = [H_{x0} \mathbf{a}_x + H_{y0} \mathbf{a}_y] e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \left[ -\frac{E_{y0}}{\eta} \mathbf{a}_x + \frac{E_{x0}}{\eta} \mathbf{a}_y \right] e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (92)$$

Os dois campos são esboçados na Figura 12.4. A figura demonstra a razão do sinal de menos no termo que envolve  $E_{y0}$  na Equação (92). A direção do fluxo de potência, dada por  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , é no sentido positivo de  $z$ , neste caso. Uma componente de  $\mathbf{E}$  na direção positiva



**Figura 12.4** Configuração do campo elétrico e magnético para uma onda plana linearmente polarizada genérica propagando-se na direção progressiva de  $z$  (para fora da página). As componentes do campo correspondem àquelas das Equações (91) e (92).

de  $y$  necessitaria de uma componente de  $\mathbf{H}$  na direção negativa de  $x$ , logo, o sinal de menos. Usando (91) e (92), a densidade de potência na onda é encontrada utilizando (77):

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}_z \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ E_{x0} H_{y0}^* (\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y) + E_{y0} H_{x0}^* (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x) \} e^{-2\alpha z} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{E_{x0} E_{x0}^*}{\eta^*} + \frac{E_{y0} E_{y0}^*}{\eta^*} \right\} e^{-2\alpha z} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta^*} \right\} (|E_{x0}|^2 + |E_{y0}|^2) e^{-2\alpha z} \mathbf{a}_z \quad \text{W/m}^2\end{aligned}$$

Esse resultado demonstra a idéia de que nossa onda linearmente polarizada pode ser considerada como duas ondas planas distintas que possuem polarizações em  $x$  e em  $y$ , cujos campos elétricos se combinam *em fase* para produzir o  $\mathbf{E}$  total. O mesmo é verdadeiro para as componentes do campo magnético. Esse é um ponto crítico no entendimento da polarização de ondas, na medida em que *qualquer estado de polarização pode ser descrito em termos de componentes mutuamente perpendiculares de campo elétrico e seus defasamentos relativos*.

Em seguida, veremos o efeito de um defasamento  $\phi$  entre  $E_{x0}$  e  $E_{y0}$ , onde,  $\phi < \pi/2$ . Por simplicidade, consideraremos a propagação em um meio sem perdas. O campo total na forma fasorial é

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0} \mathbf{a}_x + E_{y0} e^{j\phi} \mathbf{a}_y) e^{-j\beta z} \quad (93)$$

Novamente, para auxiliar na visualização, convertamos essa onda para a forma instantânea real multiplicando por  $e^{j\omega t}$  e tomando a parte real:

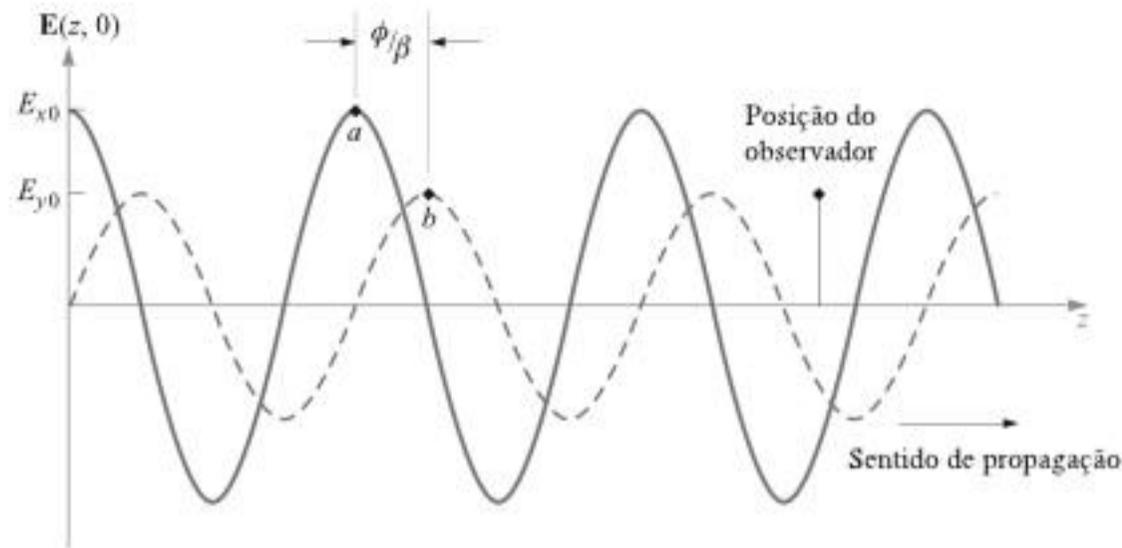
$$\mathbf{E}(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x + E_{y0} \cos(\omega t - \beta z + \phi) \mathbf{a}_y \quad (94)$$

onde assumimos que  $E_{x0}$  e  $E_{y0}$  são reais. Suponha que façamos  $t = 0$ , situação em que (94) se torna [usando  $\cos(-x) = \cos(x)$ ]:

$$\mathbf{E}(z, 0) = E_{x0} \cos(\beta z) \mathbf{a}_x + E_{y0} \cos(\beta z + \phi) \mathbf{a}_y \quad (95)$$

Os gráficos das intensidades das componentes de  $\mathbf{E}(z, 0)$  em função de  $z$  são mostrados na Figura 12.5. Uma vez que o tempo foi fixado em zero, a onda está congelada na posição. Um observador pode se mover ao longo do eixo  $z$ , medindo as intensidades das componentes e assim a orientação do campo elétrico total em cada ponto. Vamos considerar uma crista de  $E_x$ , indicada como o ponto  $a$  na Figura 12.5. Se  $\phi$  for zero,  $E_y$  teria uma crista na mesma posição. Visto que  $\phi$  não é zero (e positivo), a crista de  $E_y$  que ocorreria no primeiro caso em  $a$  está agora deslocada para o ponto  $b$ , mais à frente em  $z$ . Os dois pontos estão separados por uma distância  $\phi/\beta$ .  $E_y$ , então, *está atrasada* de  $E_x$  quando consideramos a dimensão *espacial*.

Agora suponha que o observador pare em algum ponto no eixo  $z$  e que o tempo volte a se mover para frente. Nesse caso, ambos os campos se movem na direção positiva de  $z$ , conforme (94) indica. Mas o ponto  $b$  atinge o observador primeiro, seguido do ponto  $a$ . Dessa forma vemos que  $E_y$  *está à frente* de  $E_x$  quando consideramos a dimensão *temporal*. Em ambos os casos ( $t$  fixo com  $z$  variando, ou vice-versa) o observador nota que o



**Figura 12.5** Gráfico das intensidades das componentes do campo elétrico na Equação (95) como funções de  $z$ . Note que a componente em  $y$  está atrasada da componente em  $x$  no eixo  $z$ . À medida que o tempo avança do zero, as ondas viajam para a direita, conforme a Equação (94). Com isso, para um observador em uma posição fixa, a componente em  $y$  está à frente no tempo.

campo equivalente gira em torno do eixo  $z$  enquanto sua intensidade varia. Considerando um ponto inicial em  $z$  e  $t$ , no qual o campo tem uma dada orientação e intensidade, a onda retornará à mesma orientação e intensidade, em uma distância de um comprimento de onda em  $z$  (para  $t$  fixo), ou em um tempo  $t = 2\pi/\omega$  mais tarde (para  $z$  fixo).

Para fins ilustrativos, se tomarmos o comprimento do campo vetorial como uma medida de sua intensidade, encontramos que em uma posição fixa, a ponta do vetor traça o perfil de uma elipse em um tempo  $t = 2\pi/\omega$ . Diz-se que a onda é *polarizada elípticamente*. A polarização elíptica é, na verdade, o estado de polarização mais geral de uma onda, uma vez que inclui qualquer magnitude e defasamento entre  $E_x$  e  $E_y$ . A polarização linear é um caso especial da polarização elíptica no qual o defasamento é zero.

Um outro caso especial de polarização elíptica ocorre quando  $E_{x0} = E_{y0} = E_0$  e quando  $\phi = \pm\pi/2$ . Nesse caso, a onda exibe *polarização circular*. Para ver isso, incorporamos essas restrições na Equação (94) para obter

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0[\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + \cos(\omega t - \beta z \pm \pi/2)\mathbf{a}_y] \\ &= E_0[\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \mp \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y] \end{aligned} \quad (96)$$

Se considerarmos uma posição fixa ao longo de  $z$  (tal como  $z = 0$ ) e permitirmos que o tempo varie, (96), com  $\phi = +\pi/2$ , se torna

$$\mathbf{E}(0, t) = E_0[\cos(\omega t)\mathbf{a}_x - \sin(\omega t)\mathbf{a}_y] \quad (97)$$

Se escolhermos  $-\pi/2$  em (96), obtemos

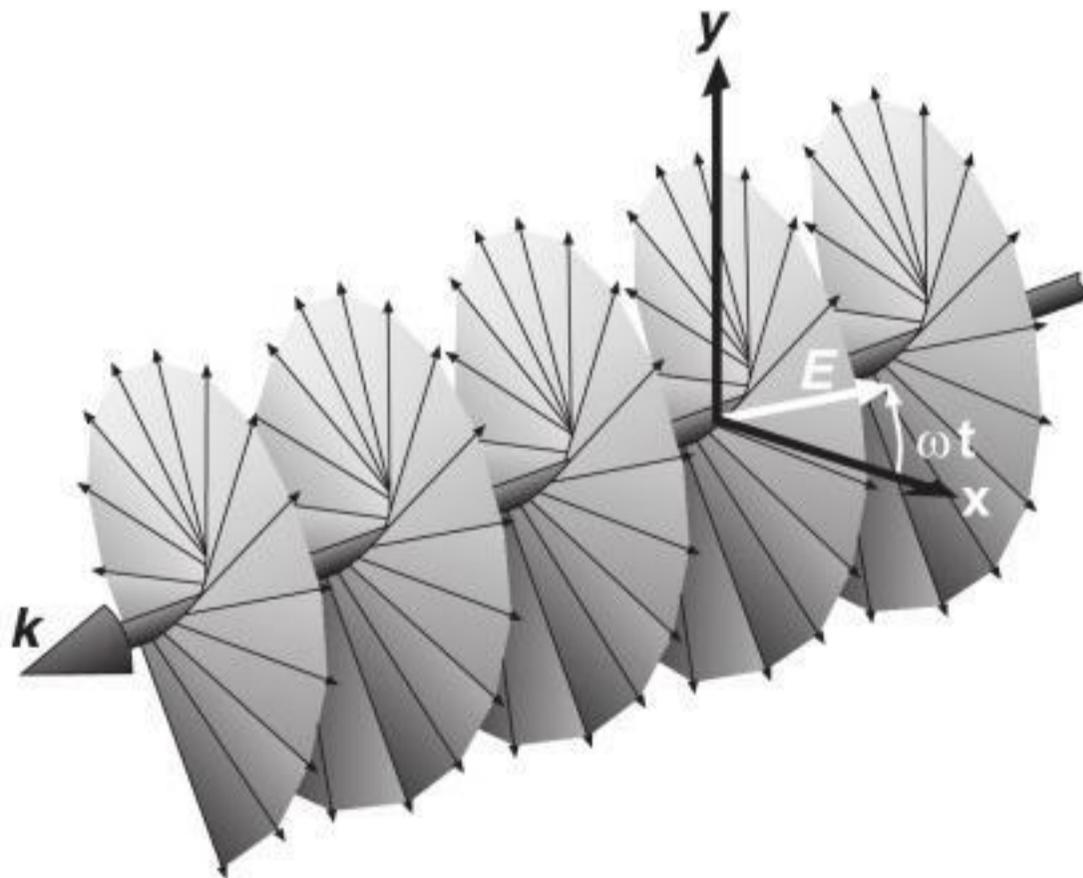
$$\mathbf{E}(0, t) = E_0[\cos(\omega t)\mathbf{a}_x + \sin(\omega t)\mathbf{a}_y] \quad (98)$$

O campo vetorial da Equação (98) gira no sentido anti-horário no plano  $xy$ , enquanto mantém amplitude constante  $E_0$ , e a ponta do vetor traça um círculo. A Figura 12.6 mostra esse comportamento.

simplesmente  $\omega t$ , e atinge  $2\pi$  (um giro completo) no tempo  $t = 2\pi/\omega$ . Se escolhermos  $t = 0$  e permitirmos que  $z$  varie, formamos um padrão de campo com aspecto de um saca-rolhas. Uma maneira de visualizar isso é considerando uma escada em formato de espiral, na qual as linhas de campo (degraus da escada) são perpendiculares ao eixo  $z$  (ou eixo da escada). A relação entre esse padrão espacial de campo e o comportamento resultante no tempo em um  $z$  fixo, à medida que a onda se propaga, é mostrada em uma concepção artística na Figura 12.7.

A regra das mãos para a polarização é mudada, invertendo-se o passo do saca-rolhas padrão. O modelo de escada em espiral serve apenas como um auxílio para visualização. Deve-se lembrar que ainda é uma onda plana uniforme cujos campos em qualquer posição ao longo de  $z$  são infinitos em extensão, no plano transversal.

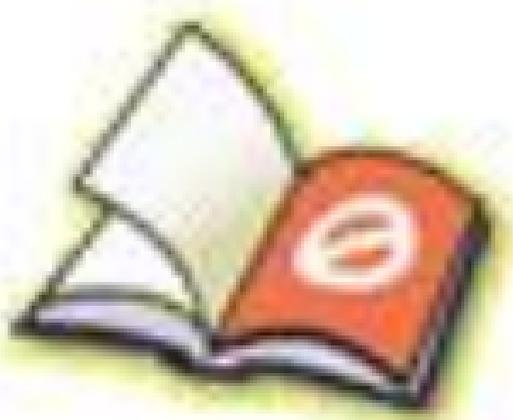
Existem muitos usos para a onda com polarização circular. Talvez o mais óbvio seja a de que a recepção de uma onda que tenha polarização circular não dependa da orientação da antena no plano normal à direção de propagação. Antenas do tipo dipolo, por exemplo, precisam estar orientadas na direção do campo elétrico do sinal que elas recebem. Se sinais com polarização circular são transmitidos, a necessidade de orientação do receptor é consideravelmente flexibilizada. Em óptica, a luz com polarização circular consegue passar por um polarizador de qualquer orientação, resultando assim em uma luz linearmente polarizada em qualquer direção (apesar de se perder metade da potência original dessa maneira). Outros usos envolvem o tratamento da luz linearmente polarizada como uma superposição de ondas com polarização circular, que será descrito em seguida.



**Figura 12.7** Representação de uma onda com polarização circular à direita. O vetor campo elétrico (em branco) gira em direção ao eixo  $y$  à medida que a onda inteira se move atravessando o plano  $xy$  na direção de  $k$ . Essa rotação no sentido anti-horário (quando se olha em direção à fonte de tensão) satisfaz à convenção da rotação temporal dada pela regra da mão direita, conforme descrito neste texto. A onda, entretanto, parece com um parafuso dextrogiro invertido, e por essa razão é tratada como tendo polarização circular à esquerda na outra notação.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



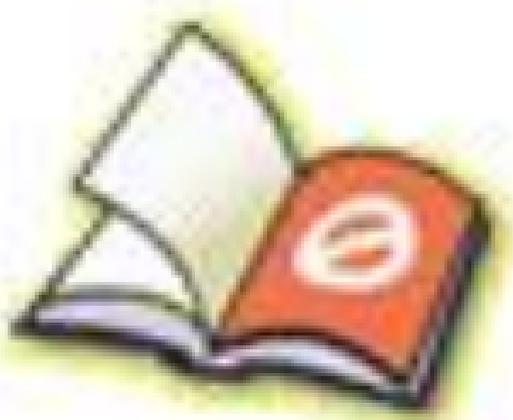
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



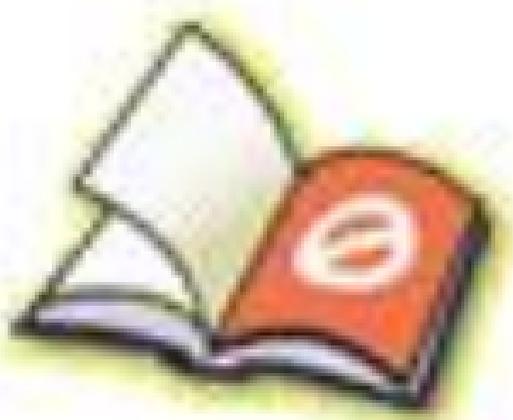
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



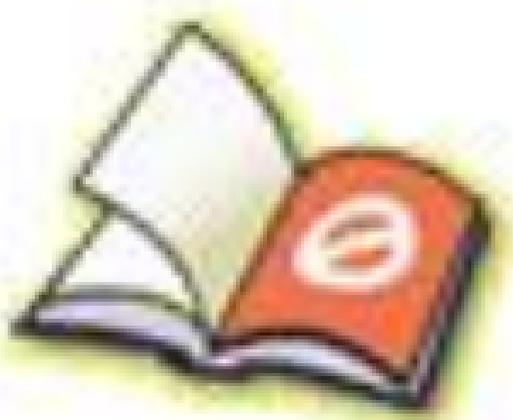
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



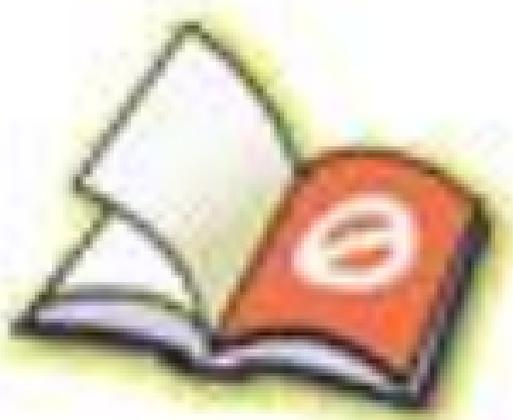
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



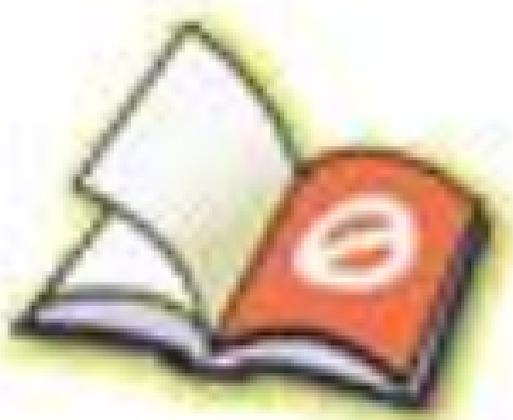
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



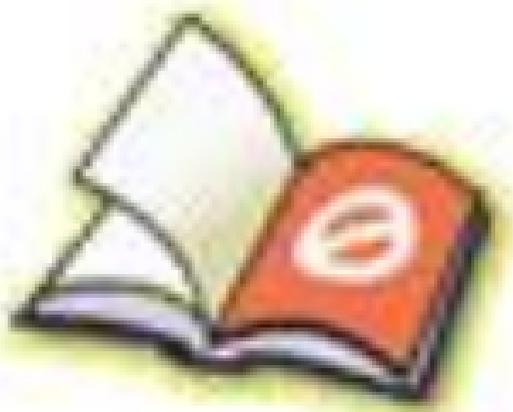
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



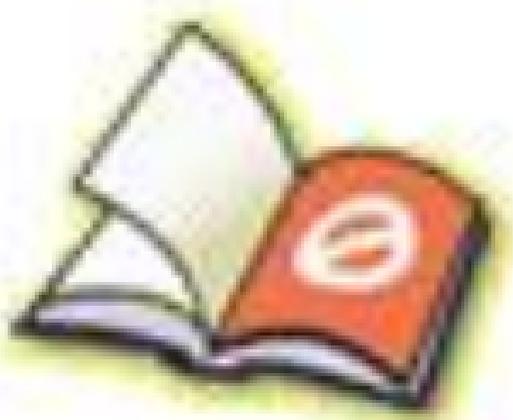
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



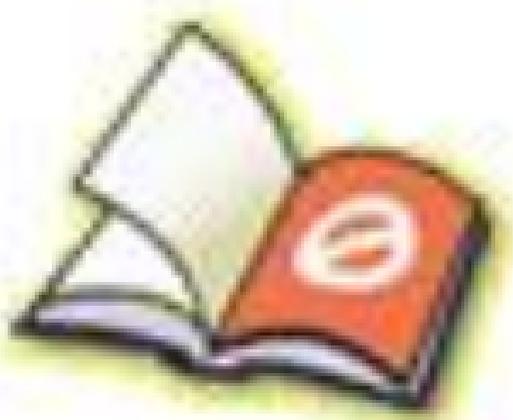
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



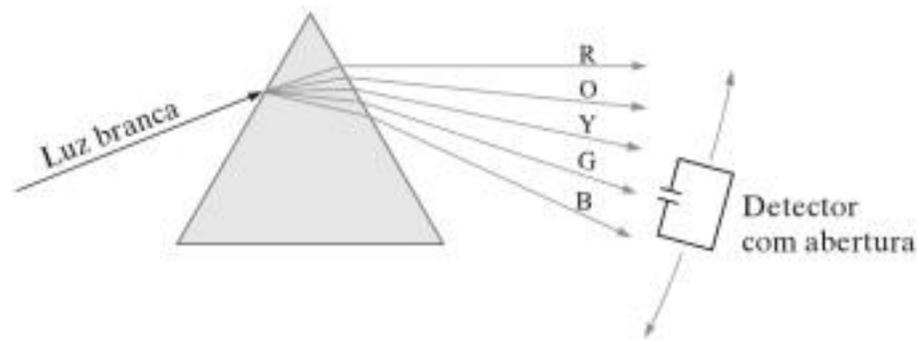
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



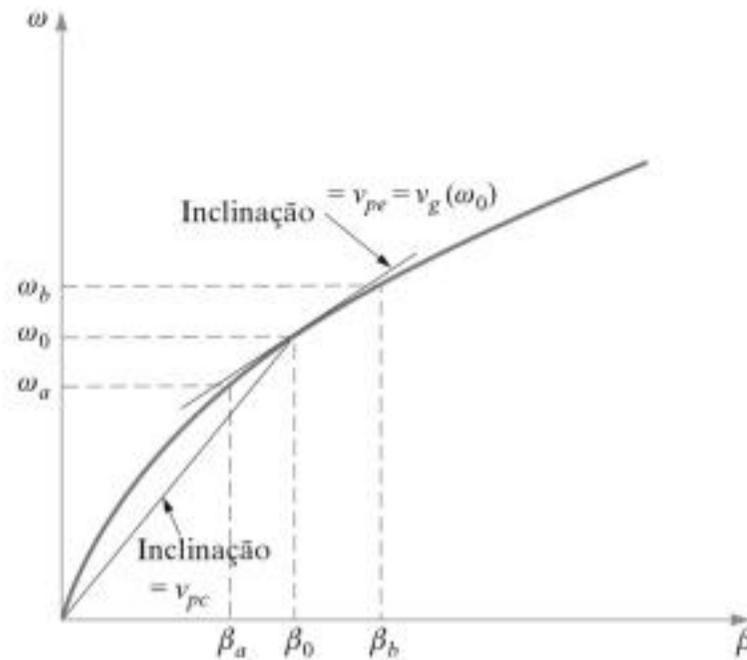
**Figura 13.11** A dispersão angular de um prisma pode ser medida utilizando-se um dispositivo móvel que mede tanto o comprimento de onda quanto a potência. O dispositivo mede a luz através de uma pequena abertura, melhorando assim a resolução do comprimento de onda.

Esta seção lida com o efeito de uma constante dielétrica (ou índice de refração) variável com a frequência em uma onda como se propagasse em um meio sem perdas diferente. Essa situação é muito freqüente, porque uma variação significativa do índice de refração pode ocorrer em frequências que estão longe da ressonância, onde perdas por absorção são desprezíveis. Um exemplo clássico disso é a separação da luz branca em suas componentes coloridas em um prisma de vidro. Nesse caso, o índice de refração dependente da frequência resulta em ângulos ou refrações diferentes para as diferentes cores – por isso, a separação. O efeito de separação de cores produzido por um prisma é conhecido como *dispersão angular* ou, mais especificamente, *dispersão angular cromática*.

O termo *dispersão* implica uma *separação* de componentes distinguíveis de uma onda. No caso do prisma, as componentes são as várias cores que foram espacialmente separadas. Um ponto importante aqui é que a *potência* espectral foi dispersa pelo prisma. Podemos ilustrar essa idéia considerando o que seria necessário para medir a diferença nos ângulos refratados entre, por exemplo, as luzes azul e vermelha. Nesse caso, teria de ser utilizado um detector de potência com uma abertura muito estreita, conforme mostra a Figura 13.11. O detector seria posicionado nas posições das luzes azul e vermelha vindas do prisma, com a abertura estreita permitindo essencialmente que uma cor de cada vez (ou luz em uma faixa espectral muito estreita) passasse pelo detector. O detector mediria a potência no que poderíamos chamar de “pacote espectral”, ou uma fatia muito estreita do espectro de potência total. Quanto menor a abertura, menor a largura espectral do pacote e maior a precisão na medição.<sup>4</sup> É importante para nós pensarmos na potência da onda como subdividida em pacotes espectrais dessa maneira, porque aparecerá proeminentemente na nossa interpretação do tópico principal desta seção, que é a dispersão da onda *no tempo*.

Consideremos agora um meio não magnético sem perdas no qual o índice de refração varie com a frequência. A constante de defasamento de uma onda plana uniforme

<sup>4</sup> Para realizar esse experimento, seria preciso medir também o comprimento de onda. Para isso, seria bom que o detector fosse colocado na saída de um espectrômetro ou de um monocrômetro, cuja fenda de entrada realizasse a função da abertura limitadora de largura de banda.



**Figura 13.12** Diagrama  $\omega$ - $\beta$  para um material no qual o índice de refração aumenta com a frequência. A inclinação de uma reta tangente à curva em  $\omega_0$  é a velocidade de grupo naquela frequência. A inclinação da reta que une a origem ao ponto na curva em  $\omega_0$  é a velocidade de fase em  $\omega_0$ .

nesse meio assumirá a forma

$$\beta(\omega) = k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(\omega)} = n(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (80)$$

Se tomarmos  $n(\omega)$  como uma função que cresce monotonicamente com a frequência (conforme usualmente é o caso), um gráfico de  $\omega$  versus  $\beta$  se pareceria de alguma maneira com a curva mostrada na Figura 13.12. Tal gráfico é conhecido como *diagrama  $\omega$ - $\beta$*  para o meio. Pode-se aprender muito sobre como ondas se propagam em um material pela consideração do formato da curva  $\omega$ - $\beta$ .

Suponha que tenhamos duas ondas em duas frequências,  $\omega_a$  e  $\omega_b$ , que estão se propagando conjuntamente no material e cujas amplitudes sejam iguais. As duas frequências são identificadas na curva da Figura 13.12, juntamente com a frequência central em relação às duas,  $\omega_0$ . As constantes de defasamento correspondentes  $\beta_a$ ,  $\beta_b$  e  $\beta_0$  também são identificadas. Os campos elétricos das duas ondas estão polarizados linearmente na mesma direção (ao longo de  $x$ , por exemplo), enquanto as ondas se propagam na direção progressiva de  $z$ . As duas ondas interferirão uma na outra, produzindo uma onda resultante cuja expressão de campo pode ser encontrada simplesmente somando-se os campos  $\mathbf{E}$  das duas ondas. Essa adição é feita utilizando-se os campos complexos:

$$E_{c,\text{result}}(z, t) = E_0 [e^{-j\beta_a z} e^{j\omega_a t} + e^{-j\beta_b z} e^{j\omega_b t}]$$

Note que devemos usar as formas complexas completas (com a dependência da frequência incluída) diferentemente da forma fasorial, pois as ondas estão em frequências diferentes.

Em seguida, colocamos em evidência o termo  $e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t}$ :

$$\begin{aligned} E_{c,\text{result}}(z,t) &= E_0 e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} [e^{j\Delta\beta z} e^{-j\Delta\omega t} + e^{-j\Delta\beta z} e^{j\Delta\omega t}] \\ &= 2E_0 e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \end{aligned} \quad (81)$$

onde

$$\Delta\omega = \omega_b - \omega_a = \omega_0 - \omega_0$$

e

$$\Delta\beta = \beta_b - \beta_a = \beta_0 - \beta_0$$

A expressão anterior para  $\Delta\beta$  é aproximadamente verdadeira na medida em que  $\Delta\omega$  for pequeno. Isso pode ser visto da Figura 13.12, observando-se como a forma da curva afeta  $\Delta\beta$ , dados espaçamentos uniformes na frequência.

A forma instantânea real de (81) é encontrada por

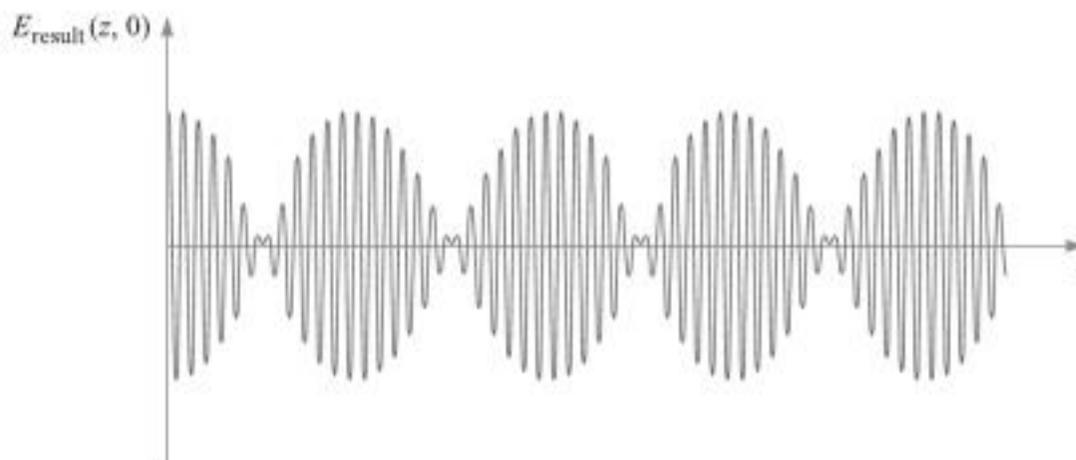
$$\mathcal{E}_{\text{result}}(z,t) = \text{Re}\{E_{c,\text{result}}\} = 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \quad (82)$$

Se  $\Delta\omega$  é realmente pequeno comparado a  $\omega_0$ , reconhecemos (82) como uma onda portadora na frequência  $\omega_0$  que está modulada senoidalmente na frequência  $\Delta\omega$ . As duas ondas originais estão “batendo” conjuntamente para formar uma modulação lenta, conforme é ouvido quando a mesma nota é tocada por dois instrumentos musicais ligeiramente fora do tom. A onda resultante é mostrada na Figura 13.13.

De interesse para nós são as velocidades de fase da onda portadora e da envoltória de modulação. De (82), podemos escrevê-las imediatamente como:

$$v_{pc} = \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad (\text{velocidade da portadora}) \quad (83)$$

$$v_{pe} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \quad (\text{velocidade do envelope}) \quad (84)$$



**Figura 13.13** Gráfico da intensidade do campo elétrico total em função de  $z$  (com  $t = 0$ ) de duas ondas que se propagam conjuntamente e têm frequências diferentes,  $\omega_a$  e  $\omega_b$ , conforme Equação (81). As oscilações rápidas estão associadas com a frequência da portadora  $\omega_0 = (\omega_a + \omega_b)/2$ . A modulação mais lenta está associada com a envoltória ou frequência de batimento em  $\Delta\omega = (\omega_b - \omega_a)/2$ .

Referindo-se ao diagrama  $\omega$ - $\beta$ , Figura 13.12, reconhecemos a velocidade de fase da portadora como a inclinação da linha reta que une a origem ao ponto na curva, cujas coordenadas são  $\omega_0$  e  $\beta_0$ . Reconhecemos a velocidade da envoltória como uma grandeza que se aproxima da inclinação da curva  $\omega$ - $\beta$ , na posição de um ponto de operação especificado por  $(\omega_0, \beta_0)$ . A velocidade da envoltória nesse caso é algo um pouco menor que a velocidade da portadora. À medida que  $\Delta\omega$  tende a zero, a velocidade da envoltória se torna exatamente a inclinação da curva em  $\omega_0$ . Podemos então afirmar o seguinte para nosso próximo exemplo:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega_0} = v_g(\omega_0) \quad (85)$$

A grandeza  $d\omega/d\beta$  é chamada de função *velocidade de grupo* para o material,  $v_g(\omega)$ . Quando calculada em uma frequência específica  $\omega_0$ , representa a velocidade de um grupo de frequências dentro de um pacote espectral de largura que tende a zero, centrado na frequência  $\omega_0$ . Afirmando isso, estendemos nosso exemplo de duas frequências para incluir ondas que têm um espectro contínuo de frequências. Cada componente de frequência (ou pacote) está associada a uma velocidade de grupo na qual a energia naquele pacote se propaga. Uma vez que a inclinação da curva  $\omega$ - $\beta$  muda com a frequência, a velocidade de grupo obviamente será uma função da frequência. A *dispersão da velocidade de grupo* do meio é, em primeira aproximação, a taxa na qual a inclinação da curva  $\omega$ - $\beta$  muda com a frequência. É esse comportamento que é de importância prática crítica para a propagação de ondas moduladas dentro de meio com dispersão, e para se entender o ponto até o qual a envoltória de modulação pode se degradar com a distância propagada.

### EXEMPLO 13.10

Considere um meio no qual o índice de refração varia linearmente com a frequência em certa faixa:

$$n(\omega) = n_0 \frac{\omega}{\omega_0}$$

Determine a velocidade de grupo e a velocidade de fase de uma onda na frequência  $\omega_0$ .

**Solução.** Primeiramente, a constante de defasamento será

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \frac{n_0 \omega^2}{\omega_0 c}$$

Agora

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{2n_0\omega}{\omega_0 c}$$

de forma que

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\omega_0 c}{2n_0 \omega}$$

A velocidade de grupo em  $\omega_0$  é

$$v_g(\omega_0) = \frac{c}{2n_0}$$

A velocidade de fase em  $\omega_0$  será

$$v_p(\omega_0) = \frac{\omega}{\beta(\omega_0)} = \frac{c}{n_0}$$

### 13.8 ALARGAMENTO DE PULSO EM MEIOS DISPERSIVOS

Para vermos como um meio dispersivo afeta uma onda modulada, vamos considerar a propagação de um pulso eletromagnético. Pulsos são utilizados em sinais digitais, onde a presença ou ausência de um pulso em um dado espaço de tempo corresponde a “um” ou “zero” digital. O efeito do meio dispersivo em um pulso é alargá-lo no tempo. Para ver como isso acontece, consideramos o *espectro* do pulso, que é encontrado pela transformada de Fourier do pulso no domínio do tempo. Em particular, suponha que a forma do pulso no tempo seja uma gaussiana, e que tenha campo elétrico dado na posição  $z = 0$  por

$$E(0, t) = E_0 e^{-\frac{1}{2}(t/T)^2} e^{j\omega_0 t} \quad (86)$$

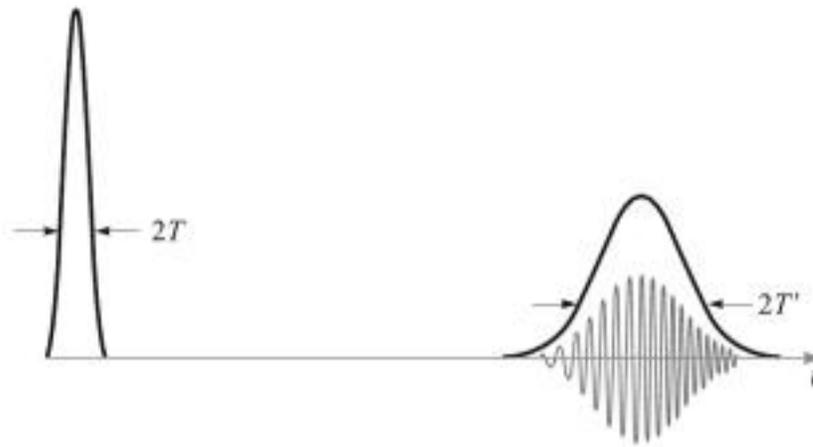
onde  $E_0$  é uma constante,  $\omega_0$  é a frequência da portadora e  $T$  é a meia largura característica da envoltória do pulso. Esse corresponde ao momento no qual a *intensidade* do pulso, ou a intensidade do vetor de Poynting, cai para  $1/e$  do seu valor máximo (note que a intensidade é proporcional ao quadrado do campo elétrico). O espectro de frequências do pulso é a transformada de Fourier de (86), que é

$$E(0, \omega) = \frac{E_0 T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}T^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (87)$$

Note de (87) que o deslocamento de frequência em relação a  $\omega_0$ , no qual a intensidade espectral (proporcional a  $|E(0, \omega)|^2$ ) cai para  $1/e$  do seu máximo, é  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 1/T$ .

A Figura 13.14a mostra o espectro gaussiano de intensidade de um pulso, centrado em  $\omega_0$ , onde as frequências correspondentes às posições de intensidade espectral de  $1/e$ ,  $\omega_a$  e  $\omega_b$  são indicadas. A Figura 13.14b mostra as mesmas três frequências marcadas na curva  $\omega$ - $\beta$  para o meio. Três retas são desenhadas as quais são tangentes à curva nas três posições das frequências. As inclinações das retas indicam as velocidades de grupo em  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  e  $\omega_0$ , indicadas como  $v_{ga}$ ,  $v_{gb}$  e  $v_{g0}$ . Podemos pensar o alargamento de pulsos no tempo como resultante das diferenças nos tempos de propagação dos pacotes espectrais de energia que formam o espectro do pulso. Uma vez que a energia espectral do pulso é mais alta na frequência central  $\omega_0$ , podemos usar esse como ponto de referência em volta do qual o espalhamento adicional da energia ocorrerá. Como exemplo, vamos considerar a diferença nos tempos de chegada (atrasos de grupo) entre as componentes de frequência  $\omega_0$  e  $\omega_b$ , após se propagarem por uma distância  $z$  pelo meio:

$$\Delta\tau = z \left( \frac{1}{v_{gb}} - \frac{1}{v_{g0}} \right) = z \left( \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_b} - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \right) \quad (88)$$



**Figura 13.15** Intensidades de pulsos gaussianos em função do tempo (curvas suaves) antes e depois da propagação em um meio dispersivo, como exemplificado pelo diagrama  $\omega$ - $\beta$  da Figura 13.14b. As oscilações do campo elétrico são mostradas debaixo do segundo traço para demonstrar o efeito trinado à medida que o pulso se espalha. Note a amplitude reduzida do pulso espalhado, que ocorre porque a energia do pulso (a área debaixo de envoltória de intensidade) é constante.

e da envoltória gaussiana. Um pulso como esse, cujo espectro de freqüências é obtido apenas da envoltória do pulso, é conhecido como *limitado pela transformada*.<sup>\*</sup> Em geral, contudo, uma largura de banda de freqüências adicional pode estar presente desde que  $E_0$  possa variar no tempo por uma razão ou outra (tal como ruído de fase que poderia estar presente na portadora). Nesses casos, o alargamento de pulso é encontrado pela expressão mais geral

$$\Delta\tau = \Delta\omega\beta_2z \quad (96)$$

onde  $\Delta\omega$  é a largura de banda espectral equivalente criada por todas as fontes. Claramente são preferidos os pulsos limitados pela transformada para minimizar o alargamento, porque eles terão a menor largura espectral para uma dada largura de pulso.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. DuBroff, R. E., S. V. Marshall e G. G. Skitek. *Electromagnetic Concepts and Applications*, 4ª ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1996. O Capítulo 9 desse texto desenvolve os conceitos aqui apresentados, com exemplos e aplicações adicionais.
2. Iskander, M. F. *Electromagnetic Fields and Waves*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1992. O tratamento para interfaces múltiplas no Capítulo 5 desse texto é particularmente bom.
3. Harrington, R. F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1961. Esse texto avançado proporciona uma boa visão geral dos conceitos de reflexão de ondas no Capítulo 2.
4. Marcuse, D. *Light Transmission Optics*. Nova Iorque: Van Nostrand Reinhold, 1982. Esse texto de nível intermediário proporciona uma abordagem detalhada de guias de onda óticos e propagação de pulsos em meios dispersivos.

<sup>\*</sup> N.T. Do inglês: *transform-limited*.

### PROBLEMAS DO CAPÍTULO 13

- 13.1** Uma onda plana uniforme no ar,  $E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(10^{10}t - \beta z)$  V/m, incide normalmente em uma superfície de cobre em  $z = 0$ . Qual porcentagem da densidade da potência incidente é transmitida para dentro do cobre?
- 13.2** O plano  $z = 0$  define a fronteira entre dois dielétricos. Para  $z < 0$ ,  $\epsilon_{r1} = 5$ ,  $\epsilon''_{r1} = 0$  e  $\mu_1 = \mu_0$ . Para  $z > 0$ ,  $\epsilon'_{r2} = 3$ ,  $\epsilon''_{r2} = 0$  e  $\mu_2 = \mu_0$ . Considere  $E_{x1}^+ = 200 \cos(\omega t - 15z)$  e calcule (a)  $\omega$ ; (b)  $\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle$ ; (c)  $\langle \mathbf{S}_1^- \rangle$ ; (d)  $\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle$ .
- 13.3** Uma onda plana uniforme na região 1 incide normalmente em uma fronteira plana que separa as regiões 1 e 2. Se  $\epsilon''_1 = \epsilon''_2$ , enquanto  $\epsilon'_{r1} = \mu_{r1}^3$  e  $\epsilon'_{r2} = \mu_{r2}^3$ , calcule a razão  $\epsilon'_{r2}/\epsilon'_{r1}$ , se 20% da energia da onda incidente é refletida na fronteira. Existem duas respostas possíveis.
- 13.4** Uma onda plana uniforme de 10 MHz, que possui uma densidade média de potência inicial de  $5 \text{ W/m}^2$ , incide normalmente a partir do espaço livre em uma superfície de um material com perdas no qual  $\epsilon''_2/\epsilon'_2 = 0,05$ ,  $\epsilon'_2 = 5$  e  $\mu_2 = \mu_0$ . Calcule a distância no meio com perdas, na qual a densidade de potência da onda transmitida cai de 10 dB em relação aos  $5 \text{ W/m}^2$  iniciais.
- 13.5** A região  $z < 0$  é caracterizada por  $\epsilon'_r = \mu_r = 1$  e  $\epsilon''_r = 0$ . O campo  $\mathbf{E}$  total é dado como a soma de duas ondas planas uniformes,  $\mathbf{E}_s = 150 e^{-j10z} \mathbf{a}_x + (50 \angle 20^\circ) e^{j10z} \mathbf{a}_x$ . (a) Qual é a frequência de operação? (b) Especifique a impedância intrínseca da região  $z > 0$  que proporcionaria a onda refletida correta. (c) Em que valor de  $z$ ,  $-10 \text{ cm} < z < 0$ , a intensidade do campo elétrico total tem a amplitude máxima?
- 13.6** A região 1,  $z < 0$ , e a região 2,  $z > 0$ , são descritas pelos seguintes parâmetros:  $\epsilon'_1 = 100 \text{ pF/m}$ ,  $\mu_1 = 25 \mu \text{ H/m}$ ,  $\epsilon''_1 = 0$ ,  $\epsilon'_2 = 200 \text{ pF/m}$ ,  $\mu_2 = 50 \mu \text{ H/m}$  e  $\epsilon''_2/\epsilon'_2 = 0,5$ . Se  $\mathbf{E}_1^+ = 5 e^{-\alpha_1 z} \cos(4 \times 10^9 t - \beta_1 z) \mathbf{a}_x$ , calcule: (a)  $\alpha_1$ ; (b)  $\beta_1$ ; (c)  $\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle$ ; (d)  $\langle \mathbf{S}_1^- \rangle$ ; (e)  $\langle \mathbf{S}_2^+ \rangle$ .
- 13.7** As regiões semi-infinitas  $z < 0$  e  $z > 1 \text{ m}$  estão no espaço livre. Para  $0 < z < 1 \text{ m}$ ,  $\epsilon'_r = 4$ ,  $\mu_r = 1$  e  $\epsilon''_r = 0$ . Uma onda plana uniforme com  $\omega = 4 \times 10^8 \text{ rad/s}$  está viajando na direção  $\mathbf{a}_z$  em direção à interface em  $z = 0$ . (a) Encontre a taxa de onda estacionária em cada uma das três regiões. (b) Encontre a localização do  $|\mathbf{E}|$  máximo para  $z < 0$  que está mais próximo de  $z = 0$ .
- 13.8** Uma onda começa no ponto  $a$ , propaga-se 100 m por um dielétrico com perdas para o qual  $\alpha = 0,5 \text{ Np/m}$ , reflete com incidência normal em uma fronteira na qual  $\Gamma = 0,3 + j0,4$ , e então retorna ao ponto  $a$ . Calcule a razão entre a potência final e a potência incidente após essa ida-e-volta.
- 13.9** A região 1,  $z < 0$ , e a região 2,  $z > 0$ , são dielétricos perfeitos ( $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon'' = 0$ ). Uma onda plana uniforme viajando na direção  $\mathbf{a}_z$  tem uma frequência em radianos de  $3 \times 10^{10} \text{ rad/s}$ . Seus comprimentos de onda nas duas regiões são  $\lambda_1 = 5 \text{ cm}$  e  $\lambda_2 = 3 \text{ cm}$ . Qual porcentagem da energia incidente na fronteira que é: (a) refletida; (b) transmitida? (c) Qual é a taxa de onda estacionária na região 1?
- 13.10** Na Figura 13.1, seja a região 2 o espaço livre, enquanto  $\mu_{r1} = 1$ ,  $\epsilon''_{r1} = 0$  e  $\epsilon'_{r1}$  é desconhecido. Calcule  $\epsilon'_{r1}$  se: (a) a amplitude de  $\mathbf{E}_1^-$  é metade daquela de  $\mathbf{E}_1^+$ ; (b)  $\langle \mathbf{S}_1^- \rangle$  é metade de  $\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle$ ; (c)  $|\mathbf{E}_1^-|_{\text{mín}}$  é metade de  $|\mathbf{E}_1^+|_{\text{máx}}$ .

- 13.11** Uma onda plana uniforme de 150 MHz incide normalmente a partir do ar em um material cuja impedância intrínseca é desconhecida. Medições mostram uma taxa de onda estacionária de 3 e o aparecimento de um mínimo de campo elétrico a 0,3 comprimentos de onda à frente da interface. Determine a impedância do material desconhecido.
- 13.12** Uma onda plana uniforme de 50 MHz incide normalmente a partir do ar na superfície de um oceano calmo. Para a água do mar,  $\sigma = 4 \text{ S/m}$ , e  $\epsilon'_r = 78$ . (a) Determine as frações da potência incidente que são refletidas e transmitidas. (b) Qualitativamente, como essas respostas mudarão (se é que vão) com o aumento da frequência?
- 13.13** Uma onda plana com polarização circular à direita incide normalmente a partir do ar, em uma lâmina semi-infinita de plexiglas ( $\epsilon'_r = 3,45$ ,  $\epsilon'' = 0$ ). Calcule as frações da potência incidente que são refletidas e transmitidas. Além disso, descreva a polarização das ondas refletida e transmitida.
- 13.14** Uma onda plana polarizada circularmente à esquerda incide normalmente em uma superfície de um condutor perfeito. (a) Construa a sobreposição das ondas incidente e refletida na forma fasorial. (b) Determine a forma instantânea real do resultado da parte (a). (c) Descreva a onda que é formada.
- 13.15** Considere essas regiões nas quais  $\epsilon'' = 0$ : região 1,  $z < 0$ ,  $\mu_1 = 4 \mu\text{H/m}$ , e  $\epsilon'_1 = 10 \text{ pF/m}$ ; região 2,  $0 < z < 6 \text{ cm}$ ,  $\mu_2 = 2 \mu\text{H/m}$ ,  $\epsilon'_2 = 25 \text{ pF/m}$ ; região 3,  $z > 6 \text{ cm}$ ,  $\mu_3 = \mu_1$  e  $\epsilon'_3 = \epsilon'_1$ . (a) Qual é a frequência mais baixa na qual uma onda plana uniforme incidente a partir da região 1 na fronteira em  $z = 0$  não sofrerá reflexão? (b) Se  $f = 50 \text{ MHz}$ , qual será a taxa de onda estacionária na região 1?
- 13.16** Uma onda plana uniforme no ar incide normalmente em uma placa de dielétrico sem perdas de espessura  $\lambda/8$  e de impedância intrínseca  $\eta = 260 \Omega$ . Determine a taxa de onda estacionária na frente da placa. Encontre também a fração da potência incidente que é transmitida para o outro lado da placa.
- 13.17** Repita o Problema 13.16 para os casos nos quais a frequência é (a) dobrada e (b) quadruplicada. Considere que a impedância da placa independe da frequência.
- 13.18** Uma onda plana uniforme incide normalmente em uma lâmina de vidro ( $n = 1,45$ ) cuja superfície atrás está em contato com um condutor perfeito. Determine, na superfície da frente do vidro, o defasamento devido à reflexão se a espessura do vidro vale (a)  $\lambda/2$ ; (b)  $\lambda/4$ ; (c)  $\lambda/8$ .
- 13.19** São dadas a você quatro lâminas de dielétrico sem perdas, todas com a mesma impedância intrínseca  $\eta$ , mas diferente daquela do espaço livre. A espessura de cada lâmina é de  $\lambda/4$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda medido no material da lâmina. As lâminas devem ser posicionadas paralelamente uma em relação à outra, sendo que a combinação está no caminho de uma onda plana uniforme, que incide normalmente. As lâminas devem ser arranjadas de forma que os espaços de ar tenham espessura igual a zero, um quarto de comprimento de onda ou um meio de comprimento de onda. Especifique um arranjo de lâminas e espaçamentos de ar de forma que (a) a onda seja totalmente transmitida pelo conjunto e (b) o conjunto apresente a maior refletância para a onda incidente. Várias respostas podem existir.

- 13.25** No prisma de Brewster da Figura 13.17, determine para a luz  $s$ -polarizada a fração da potência incidente que é transmitida pelo prisma.
- 13.26** Mostre como um bloco único de vidro pode ser utilizado para girar de  $180^\circ$  um feixe de luz  $p$ -polarizado, sem que a luz sofra (em princípio) perdas por reflexão. A luz é incidente a partir do ar, e o feixe de retorno (também no ar) pode estar deslocado para o lado em relação ao feixe incidente. Especifique todos os ângulos pertinentes e use  $n = 1,45$  para o vidro. Mais de um projeto é possível.
- 13.27** Utilizando a Equação (79) no Capítulo 12 como um ponto de partida, determine a razão entre as velocidades de grupo e de fase de uma onda eletromagnética em um bom condutor. Considere que a condutividade não varia com a frequência.
- 13.28** Para uma pequena faixa de comprimento de onda, o índice de refração de certo material varia aproximadamente de forma linear com o comprimento de onda, para que  $n(\lambda) \doteq n_a + n_b(\lambda - \lambda_a)$ , onde  $n_a$ ,  $n_b$  e  $\lambda_a$  são constantes, e onde  $\lambda$  é o comprimento de onda no espaço livre. (a) Mostre que  $d/d\omega = -(2\pi c/\omega^2)d/d\lambda$ . (b) Usando  $\beta(\lambda) = 2\pi n/\lambda$ , determine a dependência (ou independência) do atraso de grupo em relação ao comprimento de onda em uma unidade de distância. (c) Determine  $\beta_2$  pelo seu resultado da parte (a). (d) Discuta as implicações desse resultado, caso existam, no alargamento do pulso.
- 13.29** Um pulso limitado por transformada com  $T = 5$  ps se propaga em um meio dispersivo para o qual  $\beta_2 = 10$  ps<sup>2</sup>/km. Qual é a distância necessária para que o pulso cresça o dobro da sua largura inicial?
- 13.30** Um pulso limitado por transformada com  $T = 20$  ps se propaga por 10 km, por um meio dispersivo para o qual  $\beta_2 = 12$  ps<sup>2</sup>/km. O pulso se propaga por um segundo meio de 10 km para o qual  $\beta_2 = -12$  ps<sup>2</sup>/km. Descreva o pulso na saída do segundo meio e forneça uma explicação física para o que aconteceu.

## Ondas Guiadas e Radiação

**C**omo uma conclusão do nosso estudo de eletromagnetismo, investigaremos várias estruturas para guiar ondas eletromagnéticas, e exploraremos os princípios pelos quais elas operam. Estão incluídas as linhas de transmissão, que primeiramente exploramos do ponto de vista de suas correntes e tensões no Capítulo 11, e que agora revemos por um ponto de vista dos campos. Ampliamos a discussão para incluir diversos dispositivos que guiam as ondas. Definindo-se de maneira ampla, o guia de ondas é uma estrutura através da qual ondas eletromagnéticas podem ser transmitidas de um ponto a outro e dentro do qual os campos estão até certo ponto confinados. A linha de transmissão está dentro dessa definição, mas é um caso especial que emprega dois condutores, e a onda se propaga em uma configuração de campo totalmente TEM. Os guias de onda em geral partem dessas restrições e podem empregar qualquer quantidade de condutores e dielétricos — ou, como veremos, apenas dielétricos sem condutores.

Em seguida, exploraremos os conceitos básicos da radiação de ondas eletromagnéticas usando antenas. Uma antena é qualquer dispositivo que irradia energia eletromagnética para o espaço, sendo que a energia se origina de uma fonte que a alimenta através de uma linha de transmissão ou um guia de ondas. A antena então serve como uma interface entre a linha que confina o campo e o espaço quando utilizada como um transmissor — ou entre o espaço e a linha quando utilizada como um receptor.

O capítulo começa com uma apresentação de diversas estruturas de linhas de transmissão, com ênfase na obtenção de expressões para as constantes primárias  $L$ ,  $C$ ,  $G$  e  $R$ , para regimes de operação com frequências altas e baixas. Em seguida, começamos nosso estudo sobre guias de ondas primeiramente tendo uma ampla visão de dispositivos de guia de ondas para obter um entendimento físico de como eles trabalham e as condições sob as quais são utilizados. Exploramos então a estrutura de placas paralelas simples e distinguimos entre sua operação como uma linha de transmissão e um guia de ondas. Nesse dispositivo, o conceito de modos de guias de onda é desenvolvido, assim como são as condições sob as quais eles ocorrerão. Estudaremos as configurações de campo elétrico e magnético de modos guiados utilizando modelos simples de ondas planas e a equação de onda. Estudaremos depois estruturas mais complicadas, incluindo guias de onda retangulares, guias dielétricos laminados e fibras óticas.

Nosso estudo de antenas incluirá a derivação dos campos irradiados a partir de um dipolo elementar, começando pelos potenciais vetores retardados que estudamos no Capítulo 10. Abordaremos questões que incluem a eficiência na irradiação de potência de uma antena e os parâmetros que a governam. ■

### 14.1 CAMPOS E CONSTANTES PRIMÁRIAS DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

Começamos estabelecendo a equivalência entre as operações das linhas de transmissão quando consideramos tensão e corrente, do ponto de vista dos campos dentro da linha. Analise, por exemplo, a linha de placas paralelas mostrada na Figura 14.1. Nessa linha, assumimos que a separação entre as placas  $d$  é muito menor que a largura da linha  $b$  (para dentro da página), de forma que os campos elétrico e magnético podem ser considerados uniformes em qualquer plano transversal. Propagação sem perdas é também assumida. A Figura 14.1 mostra a visão lateral, a qual inclui o eixo de propagação  $z$ . Os campos, juntamente com a tensão e a corrente, são mostrados em determinado instante de tempo.

A tensão e a corrente nas formas fasoriais são:

$$V_s(z) = V_0 e^{-j\beta z} \tag{1a}$$

$$I_s(z) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-j\beta z} \tag{1b}$$

onde  $Z_0 = \sqrt{L/C}$ . O campo elétrico em um dado plano transversal na posição  $z$  é aquele do capacitor de placas paralelas:

$$E_{sx}(z) = \frac{V_s}{d} = \frac{V_0}{d} e^{-j\beta z} \tag{2a}$$

O campo magnético é igual à densidade superficial de corrente, considerada uniforme em cada placa [Equação (12), Capítulo 8]:

$$H_{sy}(z) = K_{sz} = \frac{I_s}{b} = \frac{V_0}{bZ_0} e^{-j\beta z} \tag{2b}$$

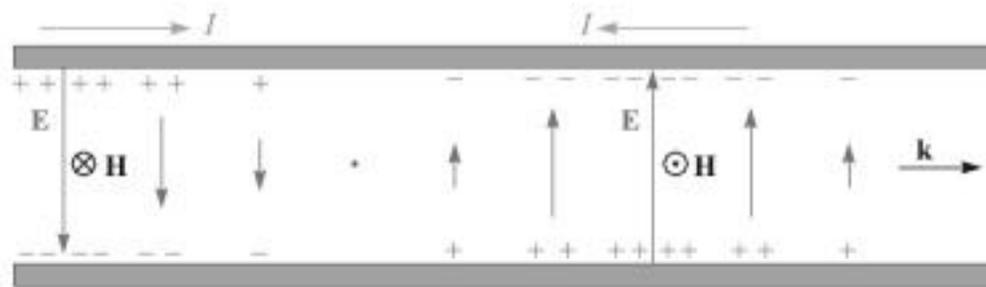


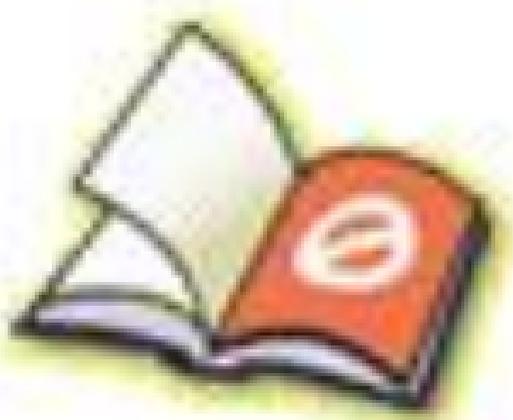
Figura 14.1 Uma onda de linha de transmissão representada pelas distribuições de tensão e de corrente ao longo do comprimento está associada aos campos elétrico e magnético transversos, formando uma onda TEM.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

### 14.1.3 Coaxial (Frequências Intermediárias)

Falta ainda o intervalo de frequências onde a profundidade de penetração não é muito maior nem muito menor que o raio. Nesse caso, a distribuição de corrente é governada por funções de Bessel, porém, a resistência e a indutância interna tornam-se expressões complicadas. Valores são tabulados em livros técnicos, e é necessário utilizá-los para condutores de tamanhos muito pequenos em altas frequências, e para condutores de tamanhos grandes utilizados em transmissão de potência em baixas frequências.<sup>1</sup>

**E14.2.** As dimensões de uma linha de transmissão coaxial são  $a = 4$  mm,  $b = 17,5$  mm e  $c = 20$  mm. A condutividade dos condutores interno e externo é  $2 \times 10^7$  S/m, e as propriedades do dielétrico são  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon'_r = 3$  e  $\sigma/\omega\epsilon' = 0,025$ . Considere que a tangente de perdas é constante com a frequência. Determine: (a)  $L$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $G$  e  $Z_0$  em 150 MHz; (b)  $L$  e  $R$  em 60 Hz.

**Resp.**  $0,30 \mu\text{H/m}$ ;  $113 \text{ pF/m}$ ;  $0,27 \Omega/\text{m}$ ;  $2,7 \text{ mS/m}$ ;  $51 \Omega$ ;  $0,36 \mu\text{H/m}$ ;  $1,16 \text{ m}\Omega/\text{m}$

### 14.1.4 Linha Bifilar (Frequências Altas)

Para a linha de transmissão bifilar da Figura 14.4 com condutores de raio  $a$  e condutividade  $\sigma_c$ , com separação de centro a centro  $d$  em um meio de permeabilidade  $\mu$ , permissividade  $\epsilon'$  e condutividade  $\sigma_c$ , a capacitância foi encontrada no Capítulo 6 [Equação (40), Seção 6.5] como

$$C = \frac{\pi\epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)} \quad (20)$$

ou

$$C \doteq \frac{\pi\epsilon'}{\ln(d/a)} \quad (a \ll d)$$

A indutância externa pode ser encontrada a partir de  $L_{\text{ext}}C = \mu\epsilon'$ . Ela vale

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}(d/2a) \quad (21)$$

ou

$$L_{\text{ext}} \doteq \frac{\mu}{\pi} \ln(d/a) \quad (a \ll d)$$

A condutância por unidade de comprimento pode ser escrita diretamente de uma inspeção da expressão para a capacitância,

$$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)} \quad (22)$$

<sup>1</sup> As funções de Bessel são discutidas dentro do contexto de fibras óticas na Seção 14.7. A distribuição de corrente, a indutância interna e a resistência interna de fios redondos são discutidas (com exemplos numéricos) em Weeks, p. 35-44. Veja as Referências Bibliográficas no final deste capítulo.

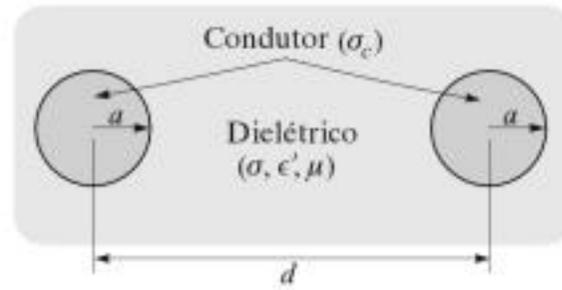


Figura 14.4 Geometria da linha de transmissão bifilar.

A resistência por unidade de comprimento é duas vezes aquela do condutor central do cabo coaxial,

$$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c} \quad (23)$$

Finalmente, utilizando as expressões para a capacitância e para a indutância externa, obtemos um valor para a impedância característica,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{ext}}{C}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cosh^{-1}(d/2a) \quad (24)$$

#### 14.1.5 Linha Bifilar (Frequências Baixas)

Em baixas frequências, em que uma distribuição uniforme de corrente pode ser assumida, devemos modificar novamente as expressões para  $L$  e  $R$ , mas não aquelas para  $C$  e  $G$ . Essas duas últimas são novamente expressas por (20) e (22):

$$C = \frac{\pi \epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

$$G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

A indutância por unidade de comprimento deve ser aumentada de duas vezes a indutância interna do condutor redondo retilíneo,

$$L = \frac{\mu}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \cosh^{-1}(d/2a) \right] \quad (25)$$

A resistência se torna duas vezes a resistência cc de um fio de raio  $a$ , condutividade  $\sigma_c$  e comprimento unitário:

$$R = \frac{2}{\pi a^2 \sigma_c} \quad (26)$$

**E14.3.** Cada condutor de uma linha de transmissão bifilar tem um raio de 0,8 mm e uma condutividade de  $3 \times 10^7$  S/m. Eles são separados por uma distância de centro a centro de 0,8 cm, em um meio para o qual  $\epsilon'_r = 2,5$ ,  $\mu_r = 1$  e  $\sigma = 4 \times 10^{-9}$  S/m. Se a linha opera a 60 Hz, calcule: (a)  $\delta$ ; (b)  $C$ ; (c)  $G$ ; (d)  $L$ ; (e)  $R$ .

**Resp.** 1,2 cm; 30 pF/m; 5,5 nS/m; 1,02  $\mu$ H/m; 0,033  $\Omega$ /m

e as referências lá contidas). Como exemplo, com dimensões restritas de forma que  $1,3 < w/d < 3,3$ , as fórmulas aplicáveis incluem

$$Z_0^{ar} \doteq 60 \ln \left[ 4 \left( \frac{d}{w} \right) + \sqrt{16 \left( \frac{d}{w} \right)^2 + 2} \right] \quad \frac{w}{d} < 3,3 \quad (32)$$

e

$$\epsilon_{r,efet} \doteq \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left( 1 + 10 \frac{d}{w} \right)^{-0,555} \quad \frac{w}{d} > 1,3 \quad (33)$$

Ou, se uma linha que será fabricada tem um valor desejado para  $Z_0$ , a constante dielétrica efetiva (por meio da qual o  $w/d$  necessário pode ser obtido) é encontrada por:

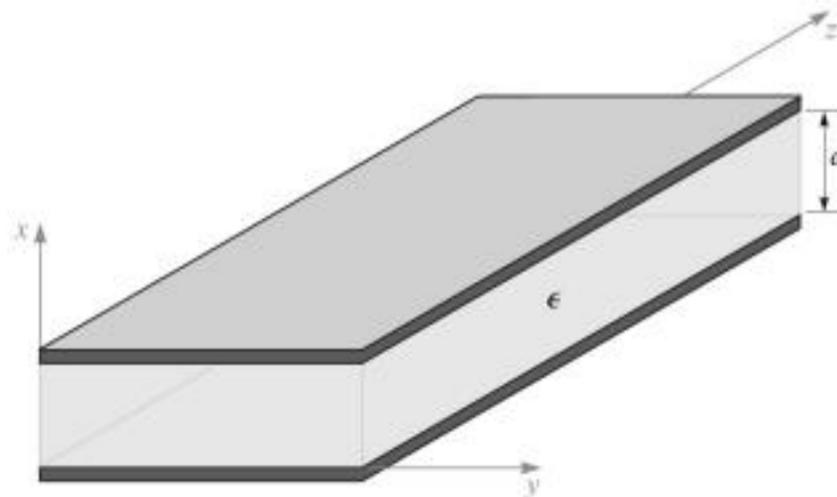
$$\epsilon_{r,efet} \doteq \epsilon_r [0,96 + \epsilon_r (0,109 - 0,004\epsilon_r) (\log_{10}(10 + Z_0) - 1)]^{-1} \quad \frac{w}{d} > 1,3 \quad (34)$$

**E14.4.** Uma linha microfita é fabricada em um substrato de niobato de lítio ( $\epsilon_r = 4,8$ ) de 1 mm de espessura. Se o condutor superior tem 2 mm de largura, calcule (a)  $\epsilon_{r,efet}$ ; (b)  $Z_0$ ; (c)  $v_p$ .

**Resp.** 3,6; 47  $\Omega$ ;  $1,6 \times 10^8$  m/s

## 14.2 OPERAÇÃO BÁSICA DE UM GUIA DE ONDA

Os guias de onda assumem formas muito diferentes, que dependem do propósito do guia e da frequência das ondas que serão transmitidas. A forma mais simples (em termos de análise) é o guia de placas paralelas mostrado na Figura 14.6. Outras formas são os guias tubulares ocos, incluindo os guias de onda retangulares de Figura 14.7 e o guia cilíndrico, mostrado na Figura 14.8. Guias de onda dielétricos, utilizados primariamente em frequências óticas, incluem o guia laminado da Figura 14.9 e a fibra ótica mostrada na Figura 14.10. Cada uma dessas estruturas possui vantagens em relação às outras, dependendo da aplicação e da frequência das ondas a ser transmitidas. Todos os guias, entretanto, exibem os mesmos princípios básicos de operação, os quais exploraremos nesta seção.



**Figura 14.6** Guia de onda de placas paralelas, com placas metálicas em  $x = 0, d$ . Entre as placas está um dielétrico de permissividade  $\epsilon$ .

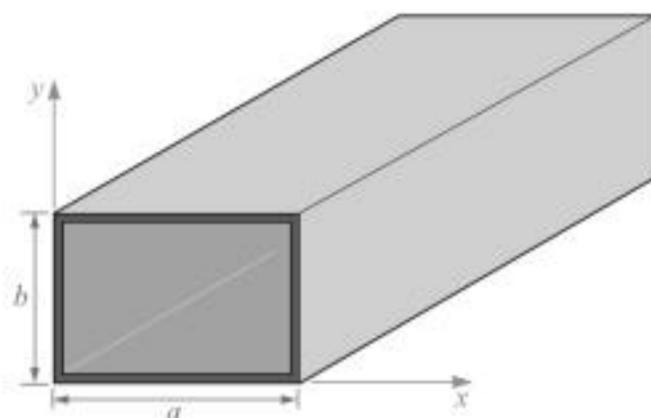


Figura 14.7 Guia de onda retangular.

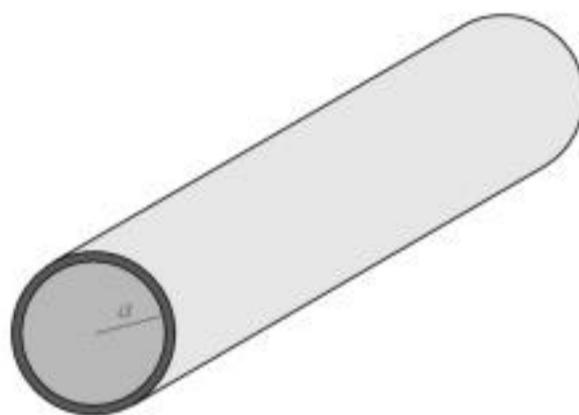


Figura 14.8 Guia de onda cilíndrico.

Para desenvolvermos um entendimento do comportamento do guia de ondas, consideramos os guias de ondas de placas paralelas da Figura 14.6. Primeiro, reconhecemo-nos como uma das estruturas de linha de transmissão que investigamos na Seção 14.1. Dessa forma, a primeira pergunta que aparece é: para começar, qual é a diferença entre um guia de ondas e uma linha de transmissão? A diferença reside na forma dos campos elétrico e magnético na linha. Para ver isso, considere novamente a Figura 14.1, que mostra os campos quando a linha opera como uma linha de transmissão. Como vimos anteriormente,

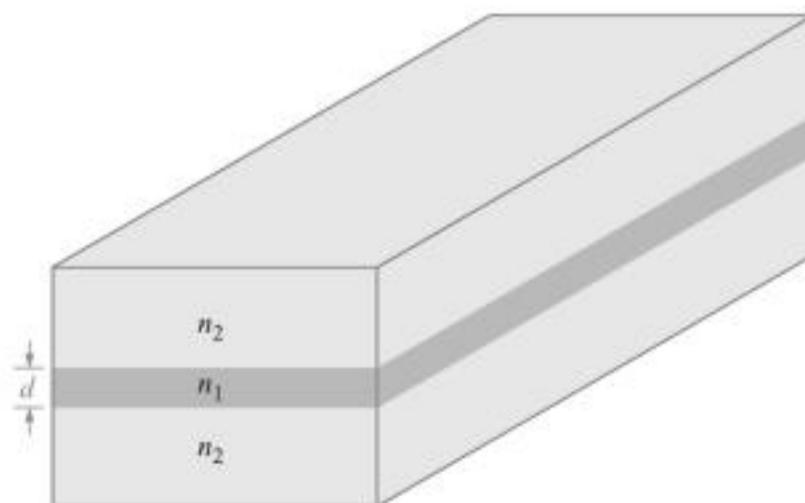
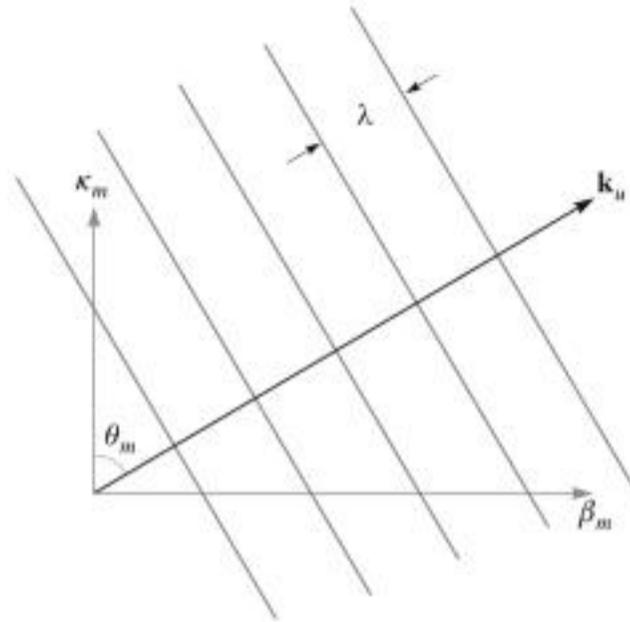


Figura 14.9 Guia de ondas dielétrico laminado simétrico, com a região da lâmina (índice de refração  $n_1$ ) envolvida por dois dielétricos de índices  $n_2 < n_1$ .



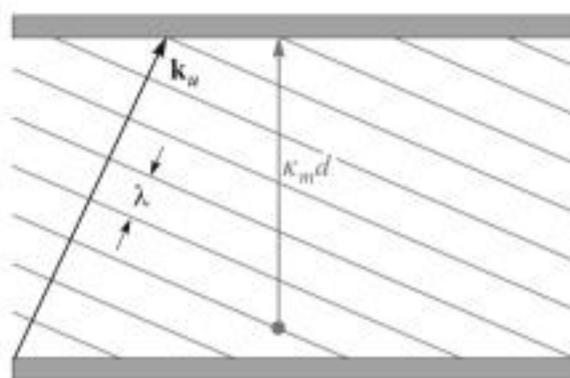
**Figura 14.14** As componentes do vetor de onda ascendente são  $\kappa_m$  e  $\beta_m$ , as constantes de defasamento transversal e axial. Para formar o vetor de onda descendente  $\mathbf{k}_d$ , o sentido de  $\kappa_m$  é invertido.

Na Figura 14.14 mostramos o vetor de onda  $\mathbf{k}_u$  e suas componentes, juntamente com uma série de frentes de onda. Um desenho desse tipo para  $\mathbf{k}_d$  seria o mesmo, exceto pela componente em  $x$ ,  $\kappa_m$ , que seria invertida. Na Seção 13.14 medimos o defasamento por unidade de distância ao longo das direções  $x$  e  $z$  pelas componentes  $k_x$  e  $k_z$ , as quais variaram continuamente à medida que a direção de  $\mathbf{k}$  mudava. Na nossa discussão de guias de onda, introduzimos uma notação diferente, onde  $\kappa_m$  e  $\beta_m$  são usados no lugar de  $k_x$  e  $k_z$ . O subscrito  $m$  é um inteiro que indica o *número do modo*. Isso fornece uma dica sutil de que  $\beta_m$  e  $\kappa_m$  assumirão apenas certos valores discretos que correspondem a certas direções permitidas para  $\mathbf{k}_u$  e  $\mathbf{k}_d$ , de tal forma que nosso requisito de frentes de onda coincidentes seja satisfeito.<sup>4</sup> Pela geometria vemos que, para qualquer valor de  $m$ ,

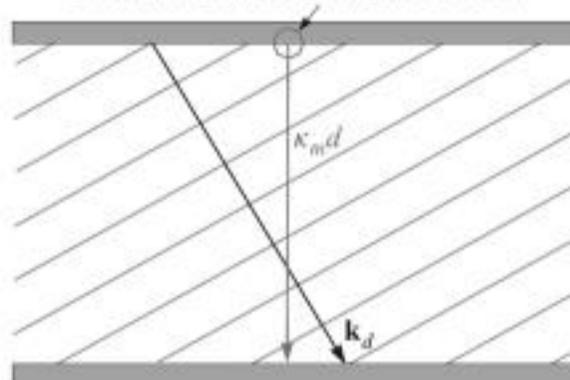
$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \kappa_m^2} \quad (35)$$

A utilização do símbolo  $\beta_m$  para as componentes em  $z$  de  $\mathbf{k}_u$  e  $\mathbf{k}_d$  é apropriado, porque  $\beta_m$  será a constante de defasamento para o  $m$ -ésimo modo de guia de onda, medindo defasamento por distância ao longo do guia. Ele é também utilizado para determinar a velocidade de fase do modo  $\omega/\beta_m$ , e a velocidade de grupo  $d\omega/d\beta_m$ .

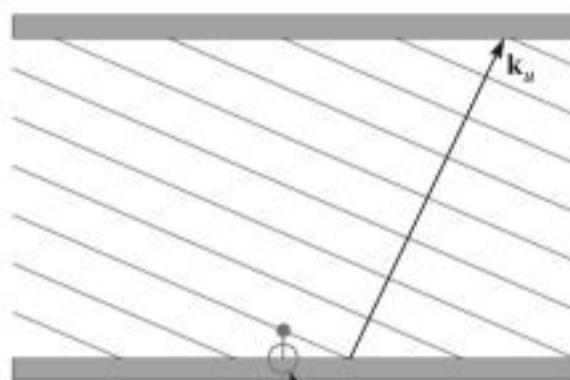
<sup>4</sup> Os subscritos ( $m$ ) não são mostrados em  $\mathbf{k}_u$  e  $\mathbf{k}_d$ , mas estão implícitos. A mudança de  $m$  não afeta as intensidades desses vetores, mas apenas suas direções.



(a)

Reflexão com defasamento 0 ou  $\pi$ 

(b)

Reflexão com defasamento 0 ou  $\pi$ 

(c)

**Figura 14.15** O defasamento resultante ao longo de uma viagem de ida e volta, no guia de placas paralelas, é encontrado, em primeiro lugar, medindo o defasamento transversal entre as placas da onda ascendente inicial (a). Em seguida, o defasamento transversal na onda refletida (descendente) é medido levando em conta o defasamento devido à reflexão na placa superior (b). Finalmente soma-se o defasamento devido à reflexão na placa inferior, retornando assim ao ponto inicial, mas com uma nova onda ascendente (c). A ressonância transversa ocorre se a fase no ponto final é a mesma que aquela no ponto inicial (as duas ondas ascendentes estão em fase).

Logo, o guia suportará modos no comprimento de onda dado até a ordem  $m = 14$ . Uma vez que existirá um modo TE e um modo TM para cada valor de  $m$ , isso dá, sem incluir o modo TEM, um total de 28 modos guiados que estão acima do corte.

A configuração do campo para um dado modo pode ser encontrada pela superposição dos campos de todas as ondas refletidas. Podemos fazer isso para as ondas TE, por exemplo, escrevendo o fasor campo elétrico no guia em termos dos campos incidente e refletido por

$$E_{ys} = E_0 e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - E_0 e^{-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}} \quad (45)$$

onde os vetores de onda  $\mathbf{k}_i$  e  $\mathbf{k}_d$  estão indicados na Figura 14.12. O sinal de menos na frente do segundo termo aparece do defasamento de  $\pi$  na reflexão. Pela geometria descrita na Figura 14.14, escrevemos

$$\mathbf{k}_i = \kappa_m \mathbf{a}_x + \beta_m \mathbf{a}_z \quad (46)$$

e

$$\mathbf{k}_d = -\kappa_m \mathbf{a}_x + \beta_m \mathbf{a}_z \quad (47)$$

Então, usando

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z$$

a Equação (45) se torna

$$E_{ys} = E_0 (e^{-j\kappa_m x} - e^{j\kappa_m x}) e^{-j\beta_m z} = 2jE_0 \text{sen}(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} = E'_0 \text{sen}(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \quad (48)$$

onde a amplitude da onda plana  $E_0$  e a fase total estão embutidas em  $E'_0$ . Na forma instantânea real, (48) se torna

$$E_y(z, t) = \text{Re}(E_{ys} e^{j\omega t}) = E'_0 \text{sen}(\kappa_m x) \cos(\omega t - \beta_m z) \quad (\text{modo TE acima do corte}) \quad (49)$$

Interpretamos isso como uma onda que se propaga no sentido positivo de  $z$  (ao longo do guia), enquanto tem um perfil de campo que varia com  $x$ .<sup>5</sup> O campo do modo TE é o *padrão de interferência* que resulta da superposição das ondas planas ascendentes e descendentes. Note que, se  $\omega < \omega_{cm}$ , então (42) leva a um valor imaginário para  $\beta_m$ , o qual podemos escrever como  $-j|\beta_m| = -j\alpha_m$ . As Equações (48) e (49) tornam-se

$$E_{ys} = E'_0 \text{sen}(\kappa_m x) e^{-\alpha_m z} \quad (50)$$

$$E(z, t) = E'_0 \text{sen}(\kappa_m x) e^{-\alpha_m z} \cos(\omega t) \quad (\text{modo TE abaixo do corte}) \quad (51)$$

Esse modo não se propaga, mas simplesmente oscila em uma frequência  $\omega$ , enquanto exhibe um padrão de campo que decresce em intensidade com o aumento de  $z$ . O coe-

<sup>5</sup> Podemos também interpretar esse campo como aquele de uma onda estacionária em  $x$ , enquanto é uma onda viajante em  $z$ .

ficiente de atenuação  $\alpha_m$  é encontrado a partir de (42) com  $\omega < \omega_{cm}$ :

$$\alpha_m = \frac{n\omega_{cm}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{cm}}\right)^2} = \frac{2\pi n}{\lambda_{cm}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{cm}}{\lambda}\right)^2} \quad (52)$$

Notamos de (39) e (41) que o ângulo da onda plana está relacionado com a frequência de corte e com o comprimento de onda de corte por

$$\cos \theta_m = \frac{\omega_{cm}}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda_{cm}} \quad (53)$$

Dessa forma, vemos que no corte ( $\omega = \omega_{cm}$ )  $\theta_m = 0$ , e as ondas planas apenas refletem-se para a frente e para trás ao longo da seção reta. Não progridem para a frente ao longo do guia. À medida que  $\omega$  é aumentado para além do corte (ou  $\lambda$  é diminuído), o ângulo da onda aumenta, aproximando-se de  $90^\circ$  à medida que  $\omega$  se aproxima de infinito (ou à medida que  $\lambda$  se aproxima de zero). Da Figura 14.14, temos

$$\beta_m = k \sin \theta_m = \frac{n\omega}{c} \sin \theta_m \quad (54)$$

e a velocidade de fase do modo  $m$  será

$$v_{pm} = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{c}{n \sin \theta_m} \quad (55)$$

A velocidade é mínima em  $c/n$  para todos os modos, aproximando-se desse valor nas frequências muito acima do corte;  $v_{pm}$  aproxima-se de infinito à medida que a frequência é reduzida, aproximando-se da frequência de corte. Novamente, a velocidade de fase é a velocidade das fases na direção  $z$ , e o fato de essa velocidade poder exceder a velocidade da luz no meio não é uma violação dos princípios da relatividade, conforme foi discutido na Seção 13.7.

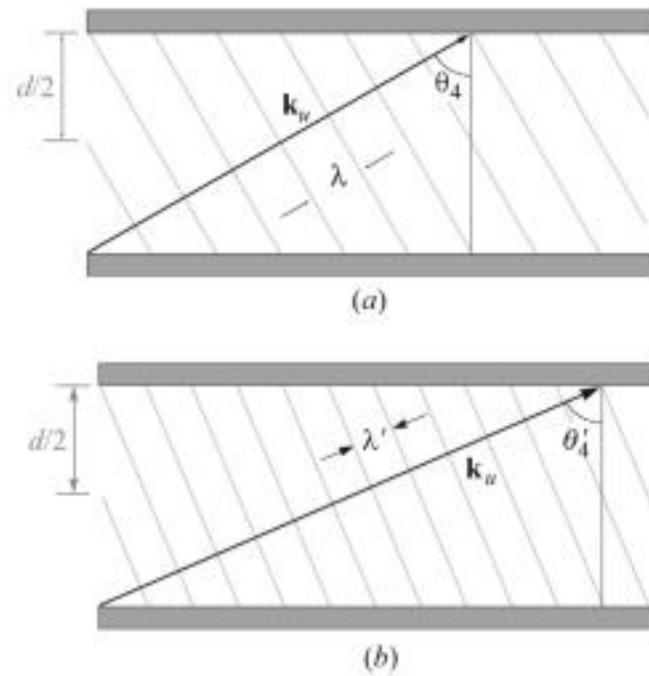
A energia se propagará na velocidade de grupo  $v_g = d\omega/d\beta$ . Utilizando (42), temos

$$v_{gm}^{-1} = \frac{d\beta_m}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[ \frac{n\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} \right] \quad (56)$$

O cálculo da derivada é direto. Realizando-o e tomado o recíproco do resultado, tem-se

$$v_{gm} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} = \frac{c}{n} \sin \theta_m \quad (57)$$

A velocidade de grupo é, portanto, identificada como a projeção da velocidade associada com  $\mathbf{k}_u$  ou  $\mathbf{k}_d$  na direção  $z$ . Isso será menor ou igual à velocidade da luz no meio  $c/n$ , conforme era esperado.



**Figura 14.17** (a) Uma onda plana associada com um modo  $m = 4$ , mostrando um defasamento resultante de  $4\pi$  (dois comprimentos de onda medidos em  $x$ ) que ocorrem ao longo de uma distância  $d$  no plano transversal. (b) À medida que a frequência aumenta, um aumento no ângulo da onda é necessário para manter o defasamento transversal de  $4\pi$ .

O guia de onda é simplesmente uma *cavidade ressonante* unidimensional, na qual uma onda pode oscilar na direção  $x$ , se o comprimento de onda medido no meio for um inteiro múltiplo de  $2d$ , onde o inteiro vale  $m$ .

Agora, à medida que a frequência aumenta, o comprimento de onda diminuirá, e a condição de comprimento de onda igual a um múltiplo inteiro de  $2d$  não é mais alcançada. A resposta do modo é estabelecer componentes em  $z$  de  $\mathbf{k}_u$  e  $\mathbf{k}_d$ , o que resulta no comprimento de onda menor sendo compensado por um aumento no comprimento de onda quando medido na direção  $x$ . A Figura 14.17 mostra esse efeito para o modo  $m = 4$ , no qual o ângulo da onda  $\theta_4$  aumenta constantemente com o aumento da frequência. Com isso, o modo preserva precisamente a forma funcional do seu campo na direção  $x$ , mas estabelece um valor crescente de  $\beta_m$  à medida que a frequência é aumentada. Essa invariância no padrão espacial transversal significa que o modo manterá sua identidade em todas as frequências. A velocidade de grupo, expressa em (57), também varia, o que significa que o ângulo de onda variável com a frequência é um mecanismo de dispersão da velocidade de grupo, conhecido simplesmente como *dispersão do guia de ondas*. Pulsos, por exemplo, que se propagam em um guia de ondas monomodo, vão experimentar o alargamento da maneira considerada na Seção 13.8.

Tendo encontrado o campo elétrico, podemos achar o campo magnético utilizando as equações de Maxwell. Notamos do nosso modelo de onda plana que esperamos obter componentes em  $x$  e em  $z$  de  $\mathbf{H}_s$  para um modo TE. Usamos a equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s \quad (69)$$

e se existir apenas uma componente em  $y$  para  $\mathbf{E}_s$ , temos

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{ys}}{\partial x} \mathbf{a}_z - \frac{\partial E_{ys}}{\partial z} \mathbf{a}_x = \kappa_m E_0 \cos(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \mathbf{a}_z + j\beta_m E_0 \sin(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \mathbf{a}_x \quad (70)$$

Encontramos  $\mathbf{H}_s$  dividindo ambos os lados de (69) por  $-j\omega\mu$ . Executando essa operação em (70), obtemos as duas componentes para o campo magnético:

$$H_{xs} = -\frac{\beta_m}{\omega\mu} E_0 \operatorname{sen}(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \quad (71)$$

$$H_{zs} = j\frac{\kappa_m}{\omega\mu} E_0 \operatorname{cos}(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \quad (72)$$

Juntas, essas duas componentes formam padrões em forma de caminhos fechados para  $\mathbf{H}_s$  no plano  $xz$ , conforme pode ser verificado utilizando os métodos de representação de linhas de força desenvolvidos na Seção 2.6.

É interessante considerar a intensidade de  $\mathbf{H}_s$ , que é encontrada por

$$|\mathbf{H}_s| = \sqrt{\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_s^*} = \sqrt{H_{xs}H_{xs}^* + H_{zs}H_{zs}^*} \quad (73)$$

Fazendo isso utilizando (71) e (72) resulta em

$$|\mathbf{H}_s| = \frac{E_0}{\omega\mu} (\kappa_m^2 + \beta_m^2)^{1/2} (\operatorname{sen}^2(\kappa_m x) + \operatorname{cos}^2(\kappa_m x))^{1/2} \quad (74)$$

Uma vez que  $\kappa_m^2 + \beta_m^2 = k^2$  e aplicando a identidade  $\operatorname{sen}^2(\kappa_m x) + \operatorname{cos}^2(\kappa_m x) = 1$ , (74) se torna

$$|\mathbf{H}_s| = \frac{k}{\omega\mu} E_0 = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\mu} E_0 = \frac{E_0}{\eta} \quad (75)$$

onde  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ . Esse resultado é consistente com nosso entendimento de modos de guia de ondas baseados na sobreposição de ondas planas, no qual a relação entre  $\mathbf{E}_s$  e  $\mathbf{H}_s$  se dá através da impedância intrínseca  $\eta$  do meio.

**E14.8.** Determine a velocidade de grupo do modo  $m = 1$  (TE ou TM) em um guia de placas paralelas preenchido com ar com  $d = 0,5$  cm em  $f = (a)$  30 GHz,  $(b)$  60 GHz e  $(c)$  100 GHz.

**Resp.** 0;  $2,6 \times 10^8$  m/s;  $2,9 \times 10^8$  m/s

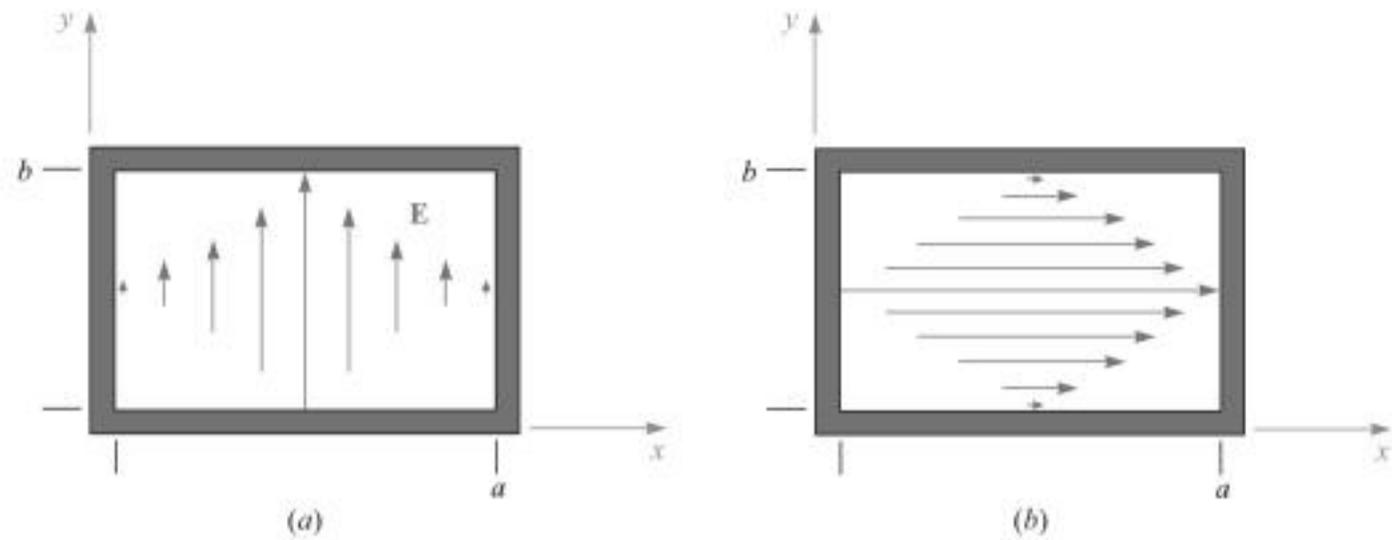
**E14.9.** Observa-se que um modo TE em um guia de placas paralelas possui três máximos no seu padrão de campo elétrico entre  $x = 0$  e  $x = d$ . Qual é o valor de  $m$ ?

**Resp.** 3

## 14.5 GUIAS DE ONDAS RETANGULARES

Nesta seção estudaremos guias de ondas retangulares, uma estrutura amplamente utilizada na região de microondas do espectro eletromagnético. Uma breve análise da estrutura será aqui apresentada, com o objetivo de se entender as características operacionais-chave e os atributos especiais do guia. Sugere-se ao leitor a Referência Bibliográfica 3 para estudos adicionais.





**Figura 14.18** Configurações de campo elétrico para os modos (a)  $TE_{10}$  e (b)  $TE_{01}$  em um guia de ondas retangular.

onde

$$\kappa_{m0} = \frac{m\pi}{a} \quad (81)$$

Os campos nas Equações (78) a (80) são aqueles de um modo genérico de designação  $TE_{m0}$ , onde os subscritos indicam que existem  $m$  meios ciclos do campo elétrico ao longo da dimensão  $x$  e zero de variação em  $y$ . A constante de defasamento possui o subscrito  $m0$ , e é ainda verdade que

$$\kappa_{m0}^2 + \beta_{m0}^2 = k^2$$

A frequência de corte para o modo  $TE_{m0}$  é dada por (41), apropriadamente modificada:

$$\omega_c(m0) = \frac{m\pi c}{na} \quad (82)$$

A constante de defasamento  $\beta_{m0}$  é dada por (42). Todas as implicações no comportamento do modo acima e abaixo do corte são exatamente as mesmas conforme encontramos para o guia de placas paralelas. A análise da onda plana é também realizada da mesma maneira. Os modos  $TE_{m0}$  podem ser modelados como ondas planas que se propagam pelo guia refletindo entre as paredes laterais verticais.

Uma outra possibilidade é a configuração de campo  $TE_{0p}$  mostrada na Figura 14.18b, que apresenta um campo elétrico polarizado horizontalmente. A equação de onda (76) conteria agora o termo  $\partial^2/\partial y^2$ , e o termo  $\partial^2/\partial x^2$  desapareceria. Os campos resultantes seriam aqueles de (78) a (80) após uma rotação de  $90^\circ$ , juntamente com algumas mudanças de notação:

$$E_{xs} = E_0 \text{sen}(\kappa_{0p} y) e^{-j\beta_{0p} z} \quad (83)$$

$$H_{ys} = \frac{\beta_{0p}}{\omega\mu} E_0 \text{sen}(\kappa_{0p} y) e^{-j\beta_{0p} z} \quad (84)$$

$$H_{zs} = -j \frac{\kappa_{0p}}{\omega\mu} E_0 \cos(\kappa_{0p} y) e^{-j\beta_{0p} z} \quad (85)$$

onde

$$\kappa_{0p} = \frac{p\pi}{b} \quad (86)$$

e onde a frequência de corte será

$$\omega_c(0p) = \frac{p\pi c}{nb} \quad (87)$$

É possível a ocorrência de outros modos os quais apresentem variação tanto em  $x$  como em  $y$ . Em geral, a frequência de corte para esses modos é dada por

$$\omega_c(mp) = \sqrt{\left(\frac{m\pi c}{na}\right)^2 + \left(\frac{p\pi c}{nb}\right)^2} \quad (88)$$

Modos que possuem variação em ambas as direções transversais incluem os TE e TM, mas apenas modos TE podem ter variação zero em  $x$  ou em  $y$ .

De interesse prático considerável é o modo que tem a menor frequência de corte. Se as dimensões do guia são tais que  $b < a$ , então uma inspeção de (82) e (88) indica que o corte mais baixo ocorrerá para o modo TE<sub>10</sub>. Esse é o modo dominante (e mais importante) no guia de ondas retangular, porque ele pode se propagar sozinho se a frequência de operação for apropriadamente escolhida.

#### EXEMPLO 14.4

Um guia de ondas retangular preenchido com ar tem dimensões  $a = 2$  cm e  $b = 1$  cm. Determine a faixa de frequências na qual o guia operará em modo único (TE<sub>10</sub>).

**Solução.** Uma vez que o guia é preenchido com ar,  $n = 1$ , e (82) dá, para  $m = 1$ :

$$f_c(10) = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^{10}}{2(2)} = 7,5 \text{ GHz}$$

O próximo modo de ordem mais alta será TE<sub>20</sub> ou TE<sub>01</sub>, os quais, através de (82) e (88), terão a mesma frequência de corte, pois  $a = 2b$ . Essa frequência será o dobro daquela encontrada para TE<sub>10</sub>, ou 15 GHz. Logo, a faixa de frequências de operação na qual o guia terá modo único será  $7,5 \text{ GHz} < f < 15 \text{ GHz}$ .

Uma vez visto como os guias de ondas retangulares trabalham, perguntamos: por que eles são utilizados e quando são úteis? Vamos considerar por um momento a operação de uma linha de transmissão em frequências altas o suficiente para que possam ocorrer modos de guia de onda. O estabelecimento de modos guiados em uma linha de transmissão, conhecido como *moding*, é de fato um problema que precisa ser evitado porque pode causar distorção de sinal. Um sinal que é introduzido em uma linha desse tipo terá sua potência dividida em alguma proporção entre os vários modos. A potência do sinal em cada modo se propaga com uma velocidade de grupo única para aquele modo. Com a potência assim distribuída, ocorrerá distorção em distâncias suficientes à medida que as componentes do sinal entre os modos perdem sincronia umas com as outras, devido aos diferentes atrasos de tempo (atrasos de grupo) associados aos modos diferentes. Encontramos esse conceito no Exemplo 14.3.

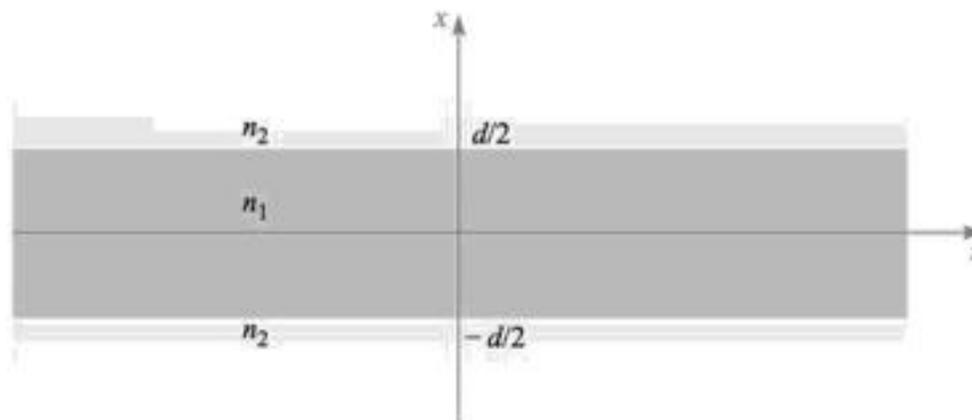
novamente significa que as dimensões transversais do guia devem ser diminuídas para se manter a operação em modo único. Isso pode ser feito até o ponto no qual as perdas por efeito pelicular tornam-se novamente problemáticas (lembre-se de que a profundidade de penetração decresce com o aumento da frequência, além da diminuição da superfície metálica com a diminuição do tamanho do guia). Adicionalmente, os guias tornam-se muito difíceis de serem fabricados, com as tolerâncias para casamento ficando mais restritas. Assim, de novo, à medida que as frequências são aumentadas ainda mais, procuramos por outro tipo de estrutura.

**E14.10.** Especifique a largura mínima  $a$  e a máxima altura  $b$  de um guia retangular preenchido com ar, de forma que ele opere em modo único na faixa de frequências  $15 \text{ GHz} < f < 20 \text{ GHz}$ .

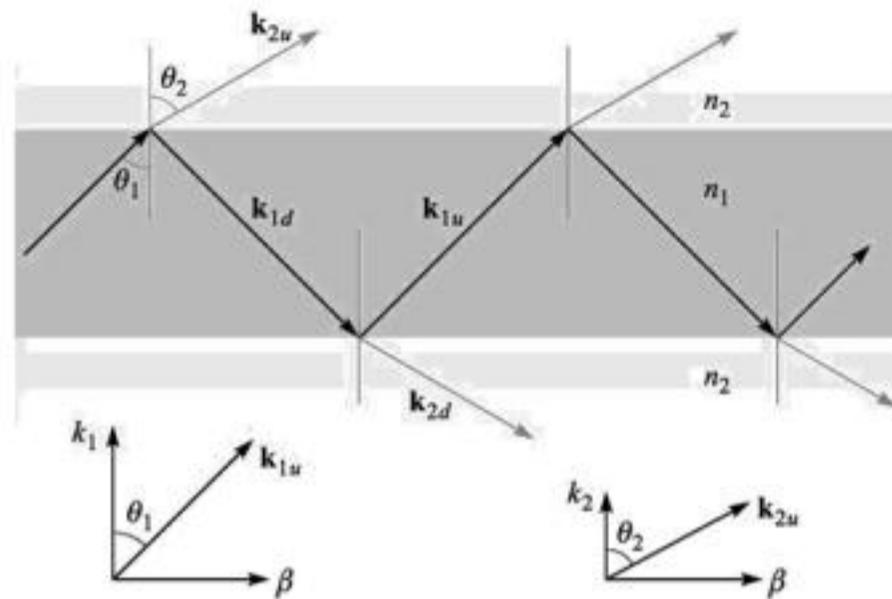
**Resp.** 1 cm; 0,75 cm

### 14.6 GUIAS DE ONDAS DIELÉTRICOS PLANOS

Quando as perdas por efeito pelicular se tornam excessivas, uma boa maneira de removê-las é removendo o metal inteiramente da estrutura e utilizar as interfaces entre os dielétricos como as superfícies de confinamento. Obtemos assim um *guia de ondas dielétrico*. Uma forma básica, o *guia de onda simétrico laminado*, é mostrada na Figura 14.19. A estrutura é assim chamada por causa de sua simetria vertical em relação ao eixo  $z$ . Assume-se que o guia tem largura em  $y$  muito maior que a espessura  $d$  da lâmina, de forma que o problema se torna bidimensional, com os campos presumivelmente variando com  $x$  e com  $z$  enquanto são independentes de  $y$ . O guia laminado funciona de forma muito parecida com o guia de placas paralelas, exceto pelo fato de reflexões de onda ocorrerem nas interfaces entre dielétricos, que possuem índices de refração diferentes,  $n_1$  para a lâmina e  $n_2$  para as regiões envolventes acima e abaixo. No guia dielétrico, a reflexão total é necessária, e o ângulo de incidência deve exceder o ângulo crítico. Conseqüentemente, conforme descrito na Seção 13.6, o índice da lâmina  $n_1$  deve ser maior que o dos materiais em volta,  $n_2$ . Guias dielétricos diferem de guias condutores pelo fato de que a potência não está completamente confinada à lâmina, mas reside parcialmente acima e abaixo.



**Figura 14.19** Estrutura de um guia de ondas dielétrico simétrico laminado, no qual ondas se propagam ao longo de  $z$ . Assume-se que o guia é infinito na direção  $y$ , tornando assim o problema bidimensional.



**Figura 14.20** Geometria da onda plana de uma onda com fuga em um guia de ondas simétrico laminado. Para um modo guiado, a reflexão total ocorre no interior, e as componentes em  $x$  de  $k_{2u}$  e  $k_{2d}$  são imaginárias.

Guias dielétricos são usados primeiramente em frequências óticas (da ordem de  $10^{14}$  Hz). Novamente, as dimensões transversais do guia devem ser mantidas da ordem do comprimento de onda para se atingir a operação monomodo. Vários métodos de fabricação podem ser utilizados para se conseguir isso. Com exemplo, uma placa de vidro pode ser dopada com materiais que aumentarão o índice de refração. O processo de dopagem permite que materiais sejam introduzidos apenas dentro de uma fina camada adjacente à superfície que possui poucos micrômetros de espessura.

Para entender a operação do guia, considere a Figura 14.20, que mostra uma onda se propagando por uma lâmina através de reflexões múltiplas, mas onde a *transmissão parcial* para as regiões superior e inferior ocorre em cada incidência na fronteira. Os vetores de onda são mostrados nas regiões central e superior, juntamente com suas componentes nas direções  $x$  e  $z$ . Como vimos no Capítulo 13, as componentes em  $z$  ( $\beta$ ) de todos os vetores de onda são iguais, conforme deve ser se as condições de fronteira de campo nas interfaces são satisfeitas para todas as posições e por todo o tempo. Transmissão parcial nas fronteiras é uma situação indesejada, pois a potência na lâmina gradualmente se perde por fuga. Temos então uma *onda com fuga* se propagando na estrutura, enquanto precisamos ter um modo guiado. Note que, em cada caso, temos ainda as duas possibilidades de polarização da onda, e a designação resultante dos modos – TE ou TM.

Reflexão total da potência nas fronteiras para as ondas TE ou TM implica, respectivamente, que  $|\Gamma_s|^2$  ou  $|\Gamma_p|^2$  seja unitário, onde os coeficientes de reflexão são dados nas Equações (71) e (69) no Capítulo 13:

$$\Gamma_s = \frac{\eta_{2z} - \eta_{1z}}{\eta_{2z} + \eta_{1z}} \quad (89)$$

similar no guia de placas paralelas. No guia laminado, assim como no guia de placas paralelas, associamos modos de ordem maior com valores crescentes de  $\kappa_1$ .<sup>6</sup>

Nas regiões acima e abaixo da lâmina, as ondas se propagam de acordo com os vetores de onda  $\mathbf{k}_{2u}$  e  $\mathbf{k}_{2d}$  conforme mostra a Figura 14.20. Acima da lâmina, por exemplo ( $x > d/2$ ), o campo elétrico TE será da forma

$$E_{y2x} = E_{02}e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = E_{02}e^{-j\kappa_2 x}e^{-j\beta z} \quad (101)$$

Entretanto,  $\kappa_2 = n_2 k_0 \cos \theta_2$ , onde  $\cos \theta_2$ , dado por (93) é imaginário. Podemos então escrever

$$\kappa_2 = -j\gamma_2 \quad (102)$$

onde  $\gamma_2$  é real e é dado por (utilizando 93)

$$\gamma_2 = j\kappa_2 = jn_2 k_0 \cos \theta_2 = jn_2 k_0 (-j) \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1 \right]^{1/2} \quad (103)$$

A Equação (101) agora se torna

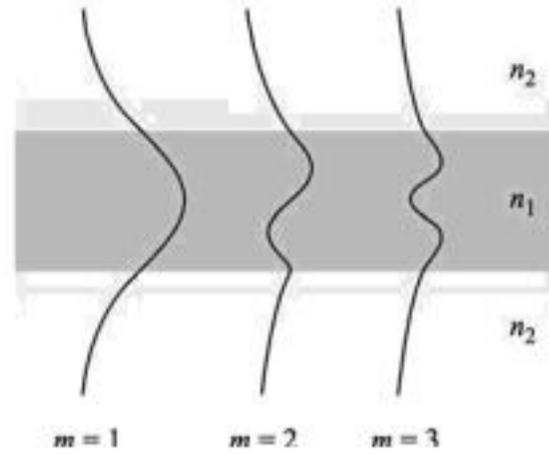
$$E_{y2x} = E_{02}e^{-\gamma_2(x-d/2)}e^{-j\beta z} \quad \left( x > \frac{d}{2} \right) \quad (104)$$

onde a variável  $x$  em (101) foi substituída por  $x - (d/2)$  para posicionar a intensidade do campo  $E_{02}$  na fronteira. Utilizando um raciocínio similar, o campo na região abaixo da superfície inferior, onde  $x$  é negativo, e onde  $\mathbf{k}_{2d}$  está envolvido, será

$$E_{y2x} = E_{02}e^{\gamma_2(x+d/2)}e^{-j\beta z} \quad \left( x < -\frac{d}{2} \right) \quad (105)$$

Os campos expressos em (104) e (105) são aqueles de ondas *superficiais*. Note que eles se propagam apenas na direção  $z$ , de acordo com  $e^{-j\beta z}$ , mas simplesmente reduzem sua amplitude com  $|x|$  crescente, de acordo com o termo  $e^{-\gamma_2(x-d/2)}$  em (104) e o termo  $e^{\gamma_2(x+d/2)}$  em (105). Essas ondas representam uma certa fração da potência total no modo, e vemos uma diferença fundamental entre os guias de onda dielétricos e os guias de onda metálicos: no guia dielétrico, os campos (e a potência guiada) existem por uma seção reta que se estende para além das fronteiras de confinamento, e em princípio eles existem por uma seção reta infinita. Em situações práticas, o decaimento exponencial dos campos acima e abaixo das fronteiras é tipicamente suficiente para tornar os campos desprezíveis numa distância correspondente a poucas espessuras da lâmina a partir de cada fronteira.

<sup>6</sup> Seria apropriado adicionar o subscrito no número do modo  $m$  a  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\beta$  e  $\theta_1$ , pois assim como era verdadeiro para os guias metálicos, vamos obter valores discretos para essas grandezas. Para manter a notação simples, o subscrito  $m$  foi suprimido, e assumiremos como subentendido. Novamente, os subscritos 1 e 2 nesta seção indicam respectivamente as *regiões* da lâmina e da parte envolvente, e não têm nada a ver com o número do modo.



**Figura 14.21** Distribuições da amplitude de campo elétrico pelo plano transversal para os três primeiros modos TE em um guia de ondas simétrico laminado.

A distribuição do campo elétrico total é composta do campo em todas as três regiões e está esboçado na Figura 14.21 para os primeiros modos. Dentro da lâmina, o campo é oscilatório e é de uma forma similar àquela do guia de ondas de placas paralelas. A diferença é que os campos no guia laminado não alcançam zero nas fronteiras, mas se conectam aos campos acima e abaixo da lâmina que se esvaecem. A restrição é a de que os campos TE em cada lado da fronteira (sendo tangentes à interface) devem se casar na fronteira. Especificamente,

$$E_{y1s}|_{x=\pm d/2} = E_{y2s}|_{x=\pm d/2} \quad (106)$$

Aplicar essa condição a (99), (100), (104) e (105) resulta nas expressões finais para o campo elétrico TE no guia de ondas simétrico laminado, para os casos de simetria par e ímpar:

$$E_{se} \text{ (TE par)} = \begin{cases} E_{0p} \cos(\kappa_1 x) e^{-j\beta z} & \left(-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\right) \\ E_{0p} \cos\left(\kappa_1 \frac{d}{2}\right) e^{-\gamma_2(x-d/2)} e^{-j\beta z} & \left(x > \frac{d}{2}\right) \\ E_{0p} \cos\left(\kappa_1 \frac{d}{2}\right) e^{\gamma_2(x+d/2)} e^{-j\beta z} & \left(x < -\frac{d}{2}\right) \end{cases} \quad (107)$$

$$E_{se} \text{ (TE ímpar)} = \begin{cases} E_{0i} \text{sen}(\kappa_1 x) e^{-j\beta z} & \left(-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\right) \\ E_{0i} \text{sen}\left(\kappa_1 \frac{d}{2}\right) e^{-\gamma_2(x-d/2)} e^{-j\beta z} & \left(x > \frac{d}{2}\right) \\ -E_{0i} \text{sen}\left(\kappa_1 \frac{d}{2}\right) e^{\gamma_2(x+d/2)} e^{-j\beta z} & \left(x < -\frac{d}{2}\right) \end{cases} \quad (108)$$

A solução da equação de onda leva (como deveria) a resultados idênticos a esses. São sugeridas ao leitor as Referências Bibliográficas 2 e 3 para os detalhes. O campo magnético para os modos TE consistirá em componentes de  $x$  e  $z$ , conforme aconteceu para o guia de placas paralelas. Finalmente, os campos do modo TM serão quase que os mesmos em forma àqueles para o modo TE, mas com uma rotação simples de  $90^\circ$  na

polarização das componentes da onda plana. Logo, nos modos TM,  $H_y$  aparecerá e terá a mesma forma que  $E_y$  para a TE, conforme apresentado em (107) e (108).

A não ser pelas diferenças nas estruturas do campo, o guia de ondas dielétrico opera de uma maneira que é qualitativamente similar ao guia de placas paralelas. Novamente, um número finito de modos discretos serão permitidos em uma dada frequência, sendo que esse número aumenta com o aumento da frequência. Modos de ordens mais altas são caracterizados por valores sucessivamente menores de  $\theta_1$ .

Uma diferença importante no guia laminado ocorre no corte para qualquer modo. Sabemos que  $\theta = 0$  no corte nos guias metálicos. No caso do guia dielétrico no corte, o ângulo da onda  $\theta_1$  é igual ao ângulo crítico  $\theta_c$ . Assim, à medida que a frequência de um dado modo é aumentada, seu valor de  $\theta_1$  aumenta para além de  $\theta_c$  para a manter a ressonância transversa, enquanto mantém o mesmo número de oscilações de campo no plano transversal.

À medida que o ângulo da onda aumenta, entretanto, o caráter dos campos que se esvaem muda significativamente. Isso pode ser entendido pela consideração da dependência do ângulo da onda com o coeficiente de decaimento esvanecente  $\gamma_2$ , conforme dado por (103). Note nessa equação que enquanto  $\theta_1$  cresce (à medida que a frequência aumenta),  $\gamma_2$  também aumenta, levando a uma queda mais rápida dos campos com a distância acima e abaixo da lâmina. O modo então se torna confinado de forma mais apertada na lâmina, à medida que a frequência é aumentada. Além disso, em uma dada frequência, modos de ordens mais baixas, que possuem ângulos de onda menores, terão valores menores de  $\gamma_2$  conforme indica (103). Conseqüentemente, quando consideramos diversos modos se propagando conjuntamente em uma frequência única, os modos de ordem mais altas carregarão uma porcentagem maior de suas potências nas regiões superior e inferior que envolvem a lâmina que os modos de ordens mais baixas.

As condições sob as quais os modos se propagarão podem ser determinadas pelo uso da condição de ressonância transversa, conforme fizemos para o guia de placas paralelas. Realizamos a análise da viagem transversal de ida e volta na região da lâmina, da mesma maneira que fizemos na Seção 14.3, e obtermos uma equação similar a (37):

$$\kappa_1 d + \phi_{TE} + \kappa_1 d + \phi_{TE} = 2m\pi \quad (109)$$

para ondas TE e

$$\kappa_1 d + \phi_{TM} + \kappa_1 d + \phi_{TM} = 2m\pi \quad (110)$$

para o caso TM. As Equações (109) e (110) são chamadas de *equações dos autovalores* para o guia de ondas dielétrico simétrico laminado. Os defasamentos na reflexão  $\phi_{TE}$  e  $\phi_{TM}$  são as fases dos coeficientes de reflexão  $\Gamma_s$  e  $\Gamma_p$  dados por (89) e (90). Esses são prontamente encontrados, mas acabam sendo funções de  $\theta_1$ . Como sabemos,  $\kappa_1$  também depende de  $\theta_1$ , mas de uma maneira diferente que  $\phi_{TE}$  e  $\phi_{TM}$ . Conseqüentemente, (109) e (110) são *transcendentais* em  $\theta_1$  e não podem ser resolvidas na forma fechada. Em vez disso, métodos numéricos ou gráficos devem ser utilizados (veja as Referências Bibliográficas 4 ou 5). Surgindo desse processo de solução, entretanto, há uma condição de corte bastante simples para qualquer modo TE e TM:

$$k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \geq (m - 1)\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (111)$$

que a frequência é aumentada. Adicionalmente, conforme é verdade no guia de ondas laminado, a fibra suporta um modo que não apresenta corte.

A análise da fibra ótica é complicada, principalmente por causa da seção reta circular, juntamente com o fato de geralmente ser um problema tridimensional. O guia de ondas laminado possuía apenas duas dimensões a ser consideradas. É possível analisar a fibra utilizando raios dentro do núcleo que refletem na fronteira da casca à medida que a luz se propaga pela fibra. Fizemos isso com o guia laminado e obtivemos resultados bem rapidamente. O método é difícil, entretanto, no caso das fibras porque os caminhos dos raios são complicados. Existem dois tipos de raios no núcleo: (1) aqueles que passam pelo eixo da fibra (eixo  $z$ ), conhecidos como raios *meridionais*, e (2) aqueles que não passam pelo eixo, mas descrevem um caminho em forma de espiral, à medida que se propagam ao longo do guia. Esses são conhecidos como raios *oblíquos*. A análise desses, apesar de possível, é entediante. Os modos que aparecem nas fibras podem ser associados com os tipos individuais de raios, ou com a combinação deles, mas é mais fácil obtê-los resolvendo a equação de onda diretamente. Nosso propósito nesta seção é fornecer uma primeira exposição ao problema da fibra ótica (e evitar um tratamento excessivamente longo). Para conseguir isso, vamos resolver o caso mais simples da maneira mais rápida.

A configuração de fibra mais simples é aquela de um índice de grau, porém com valores dos índices do núcleo e da casca muito próximos, ou seja  $n_1 \doteq n_2$ . Essa é a condição de guiamento fraco, cujo efeito simplificador na análise é significativo. Já vimos como os índices do núcleo e da casca no guia de ondas laminado precisam ser muito próximos em termos de valores, para que se atinja a operação monomodo ou com poucos modos. Os fabricantes de fibras levaram esse resultado ao pé da letra, de forma que a condição de guiamento fraco é, na verdade, satisfeita pela maioria das fibras hoje em dia. Dimensões típicas de uma fibra monomodo estão entre 5 e 10  $\mu\text{m}$  para o diâmetro do núcleo, com o diâmetro da casca usualmente de 125  $\mu\text{m}$ . As diferenças entre os índices de refração entre o núcleo e a casca são tipicamente uma pequena fração de 1%.

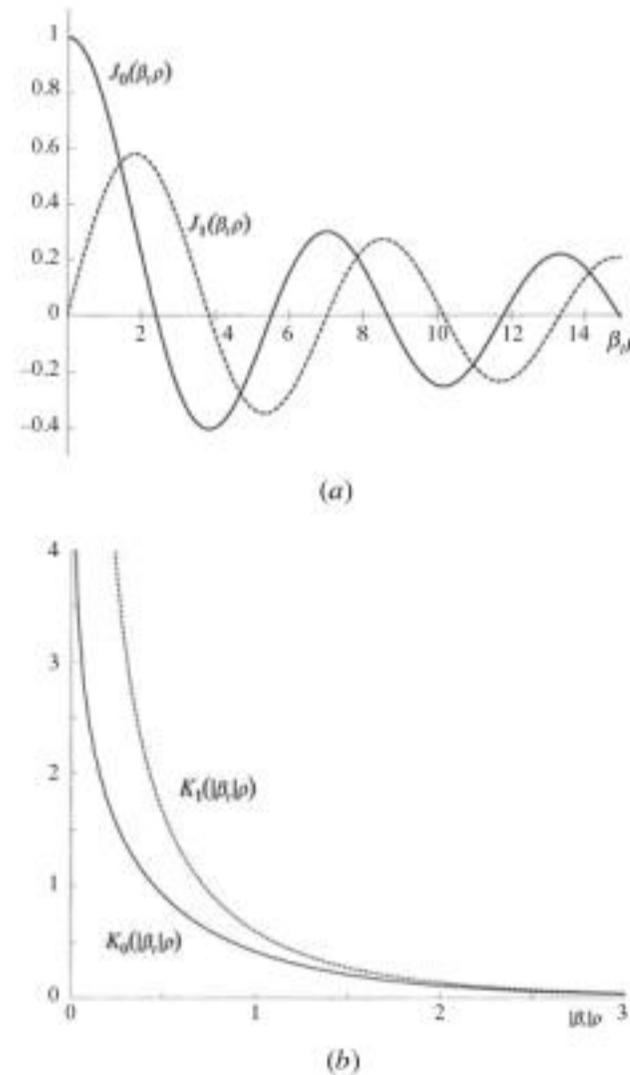
O principal resultado da condição de guiamento fraco é a de que um conjunto de modos aparece no qual cada modo é *linearmente polarizado*. Isso significa que a luz que possui polarização  $x$ , por exemplo, entrará na fibra e se estabelecerá em um modo ou em um conjunto de modos que preservam a polarização em  $x$ . O campo magnético é essencialmente ortogonal a  $\mathbf{E}$  e, nesse caso, estaria na direção  $y$ . As componentes em  $z$  de ambos os campos, apesar de presentes, são muito fracas para serem significativas. Os índices muito próximos do núcleo e da casca levam a caminhos para os raios os quais são essencialmente paralelos ao eixo do guia, desviando apenas ligeiramente. Na verdade, podemos escrever para um dado modo  $E_x \doteq \eta H_y$ , quando  $\eta$  é aproximado como a impedância intrínseca da casca. Logo, na aproximação de guiamento fraco, os campos dos modos da fibra são tratados como ondas planas (não uniformes, é claro). A designação desses modos é  $LP_{lm}$ , que significa linearmente polarizado, com parâmetros inteiros para ordem de  $\ell$  e  $m$ . O último expressa os números de variações nas duas dimensões no plano transversal circular. Especificamente,  $\ell$ , o *número de modo azimutal*, é a metade do número de máximos (ou mínimos) de densidade de potência que ocorrem em um dado raio à medida que  $\phi$  varia de 0 a  $2\pi \cdot m$ , o *número de modo radial*, expressa o número de máximos que ocorrem ao longo de uma linha radial (com  $\phi$  constante) que se estende de zero até o infinito.

Apesar de podermos assumir um campo linearmente polarizado em um sistema de coordenadas cartesianas, somos obrigados a trabalhar em coordenadas cilíndricas por razões óbvias. De uma maneira que nos lembra do Capítulo 7, é possível escrever o

A solução de (117b) para obter a função radial é mais complicada. A Equação (117b) é uma forma da equação de Bessel, cuja solução são funções de Bessel de formas variadas. O parâmetro-chave é a função  $\beta_r \equiv (k^2 - \beta^2)^{1/2}$ , cujo quadrado aparece em (117b). Note que  $\beta_r$  será diferente nas duas regiões: dentro do núcleo ( $\rho < a$ ),  $\beta_r = \beta_{r1} = (n_1^2 k_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ . Dentro da casca ( $\rho > a$ ), temos  $\beta_r = \beta_{r2} = (n_2^2 k_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ . Dependendo das magnitudes relativas de  $k$  e  $\beta$ ,  $\beta_r$  pode ser real ou imaginário. Essas possibilidades levam a duas formas de solução para (117b):

$$R(\rho) = \begin{cases} AJ_\ell(\beta_r \rho) & \beta_r \text{ real} \\ BK_\ell(|\beta_r| \rho) & \beta_r \text{ imaginário} \end{cases} \quad (119)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes.  $J_\ell(\beta_r \rho)$  é a função de Bessel ordinária do primeiro tipo, de ordem  $\ell$  e argumento  $\beta_r \rho$ .  $K_\ell(|\beta_r| \rho)$  é a função de Bessel modificada de segundo tipo, de ordem  $\ell$  e argumento  $|\beta_r| \rho$ . As primeiras duas ordens de cada uma dessas funções são ilustradas nas Figuras 14.22a e b. No nosso estudo, é necessário conhecer precisamente os pontos onde as funções  $J_0$  e  $J_1$  atravessam o zero. Aqueles mostrados na Figura 14.22a são os seguintes: para  $J_0$ , os zeros são 2,405, 5,520, 8,654, 11,792 e 14,931; para  $J_1$  os zeros são 0, 3,832, 7,016, 10,173 e 13,324. Outros tipos de funções de Bessel contribuiriam para as soluções na Equação (119), mas elas apresentam comportamento não físico com o raio e não são incluídas.



**Figura 14.22** (a) Funções de Bessel ordinárias do primeiro tipo, de ordens 0 e 1, e argumento  $\beta_r \rho$ , onde  $\beta_r$  é real. (b) Funções de Bessel modificadas do segundo tipo, de ordens 0 e 1, e argumento  $|\beta_r| \rho$ , onde  $\beta_r$  é imaginário.

= 2,405. Se  $m = 2$  fosse escolhido, obteríamos o número  $V$  de corte para o modo  $LP_{12}$ . Utilizamos o próximo zero da função  $J_0$ , que é 5,520, ou  $V_c(12) = 5,520$ . Dessa maneira, o número de modo radial  $m$  numera os zeros da função de Bessel de ordem  $\ell - 1$ , tomados em ordem crescente de valores.

Quando seguimos o raciocínio que acaba de ser descrito, a condição para operação em monomodo, em uma fibra de índice degrau, é encontrada como

$$V < V_c(11) = 2,405 \quad (128)$$

Então, utilizando (126) juntamente com  $k_0 = 2\pi/\lambda$ , encontramos

$$\lambda > \lambda_c = \frac{2\pi a}{2,405} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (129)$$

como requisito para o comprimento de onda no espaço livre, para que se atinja a operação em monomodo, em uma fibra de índice degrau. A similaridade com a condição de modo único para o guia de ondas laminado [Equação (113)] é aparente. O comprimento de onda de corte  $\lambda_c$  é aquele para o modo  $LP_{11}$ . Seu valor é tomado como uma especificação da maioria das fibras monomodo comerciais.

#### EXEMPLO 14.6

O comprimento de onda de corte de uma fibra de índice degrau é especificada como  $\lambda_c = 1,20 \mu\text{m}$ . Se a fibra opera em um comprimento de onda  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ , quanto vale  $V$ ?

**Solução.** Utilizando (126) e (129), encontramos

$$V = 2,405 \frac{\lambda_c}{\lambda} = 2,405 \left( \frac{1,20}{1,55} \right) = 1,86$$

Os perfis de intensidade dos dois primeiros modos podem ser encontrados utilizando (123a) e (123b), uma vez determinados os valores de  $u$  e  $w$  para cada modo por meio de (125). Para  $LP_{01}$  encontramos

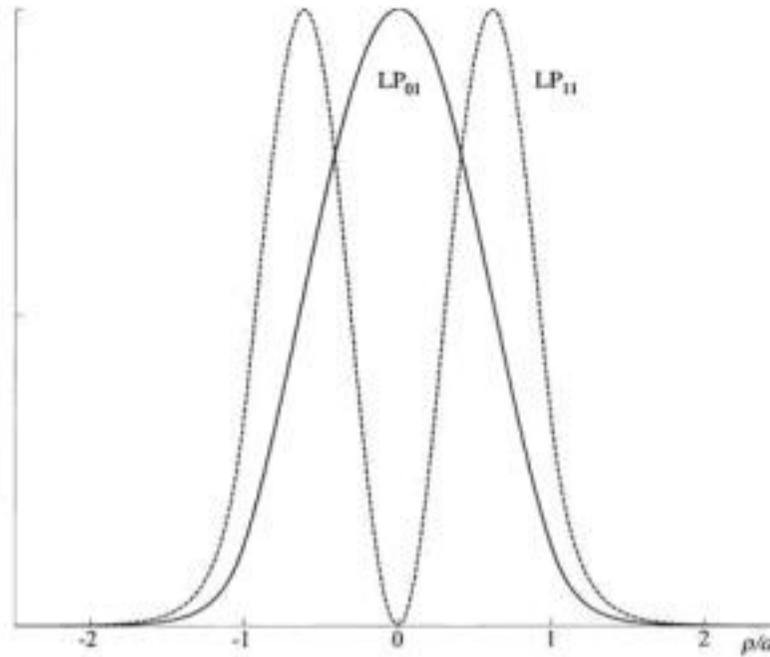
$$I_{01} = \begin{cases} I_0 J_0^2(u_{01}\rho/a) & \rho \leq a \\ I_0 \left( \frac{J_0(u_{01})}{k_0(w_{01})} \right)^2 K_0^2(w_{01}\rho/a) & \rho \geq a \end{cases} \quad (130)$$

e para  $LP_{11}$  encontramos

$$I_{11} = \begin{cases} I_0 J_1^2(u_{11}\rho/a) \cos^2\phi & \rho \leq a \\ I_0 \left( \frac{J_1(u_{11})}{k_1(w_{11})} \right)^2 K_1^2(w_{11}\rho/a) \cos^2\phi & \rho \geq a \end{cases} \quad (131)$$

As duas intensidades para um valor único de  $V$  são representadas em um gráfico em função do raio em  $\phi = 0$ , na Figura 14.23. Notamos mais uma vez o menor confinamento do modo de ordem mais alta ao núcleo, como aconteceu para o guia de ondas laminado.

À medida que  $V$  aumenta (o que se consegue pelo aumento da frequência, por exemplo), os modos existentes se tornam confinados de forma mais restrita ao núcleo, enquanto novos modos de ordens mais altas podem começar a se propagar.



**Figura 14.23** Gráfico de intensidades dadas pelas Equações (130) e (131) dos dois primeiros modos LP, em uma fibra de índice degrau com guiamento fraco, em função do raio normalizado  $\rho/a$ . Ambas as funções foram calculadas na mesma frequência de operação. O confinamento relativamente fraco do modo  $LP_{11}$  comparado àquele do  $LP_{01}$  é evidente.

O comportamento do modo de ordem mais baixa com a variação de  $V$  é descrito na Figura 14.24, onde novamente notamos que o modo se torna mais restritamente confinado à medida que  $V$  aumenta. Na determinação das intensidades, a Equação (125) deve em geral ser resolvida numericamente para se obter  $u$  e  $w$ . Várias aproximações analíticas para a solução numérica exata existem, e a melhor delas é a fórmula de Rudolf-Neumann para o módulo  $LP_{01}$ , válida para a faixa  $1,3 < V < 3,5$ :

$$w_{01} \doteq 1,1428V - 0,9960 \tag{132}$$

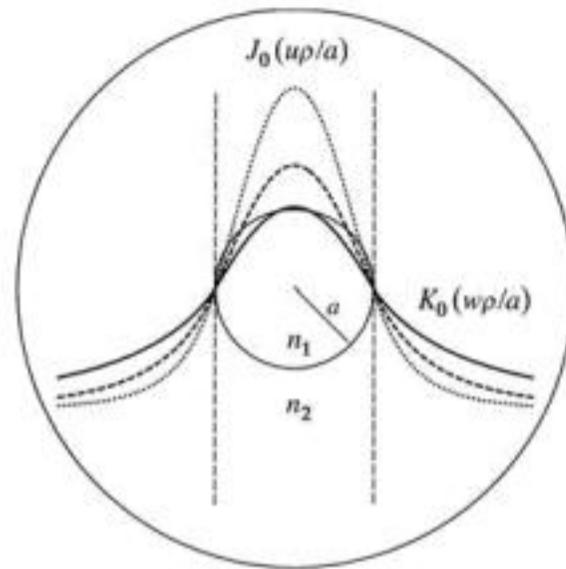
Tendo  $w_{01}$ ,  $u_{01}$  pode ser encontrado por meio de (126), conhecendo-se  $V$ .

Uma outra importante simplificação para o modo  $LP_{01}$  é a aproximação de seu perfil de intensidade pela função Gaussiana. Uma inspeção de qualquer uma das curvas de intensidade da Figura 14.24 mostra uma semelhança com uma Gaussiana, que seria expressa como

$$I_{01} \approx I_0 e^{-2\rho^2/\rho_0^2} \tag{133}$$

onde  $\rho_0$ , chamado de *raio do campo modal*, é definido como o raio a partir do eixo da fibra no qual a intensidade do modo cai para  $1/e^2$  do seu valor no eixo. Esse raio depende da frequência, e na maioria das vezes de  $V$ . Uma aproximação similar pode ser realizada para a intensidade modal fundamental do guia simétrico laminado. Na fibra de índice degrau, o melhor ajuste entre a aproximação por Gaussiana e a intensidade modal real conforme dada em (130) é dada pela fórmula de Marcuse:

$$\frac{\rho_0}{a} \approx 0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6} \tag{134}$$



**Figura 14.24** Gráfico de intensidades para o modo  $LP_{01}$  em uma fibra de índice de grau com guiamento fraco. Curvas são mostradas para  $V = 1,0$  (sólida),  $V = 1,2$  (tracejada) e  $V = 1,5$  (pontilhada), correspondendo a aumentos de frequência nessas proporções. Linhas verticais tracejadas indicam a fronteira núcleo/casca, na qual para todos os três casos, a dependência radial de  $J_0$  no núcleo se conecta à dependência radial de  $K_0$  na casca, conforme demonstrado na Equação (130). A migração de potência modal em direção ao eixo da fibra com o aumento da frequência é evidente.

O raio do campo modal (em um comprimento de onda especificado) é uma outra especificação importante (juntamente com o comprimento de onda de corte) de fibras monomodo comerciais. É importante conhecê-la por diversas razões: em primeiro lugar, quando se emenda ou conecta duas fibras monomodo, uma menor perda na junção será obtida se ambas as fibras tiverem o mesmo raio de campo modal, e se os eixos das fibras estiverem precisamente alinhados. Raios diferentes ou desalinhamento dos eixos resultam no aumento das perdas, mas isso pode ser calculado e comparado pela medição. A tolerância ao alinhamento (desvio permitido em relação ao alinhamento preciso dos eixos) é, de certa forma, relaxada, se as fibras possuírem raios de campos modais maiores. Em segundo lugar, um raio de campo modal menor significa que a fibra tem menor probabilidade de sofrer perdas devido à sua dobra. Finalmente, o raio de campo modal está diretamente relacionado à constante de defasamento modal  $\beta$ , desde que  $u$  e  $w$  sejam conhecidos (encontrados por meio de  $\rho_0$ ).  $\beta$  pode ser encontrado por meio de (120a) ou (120b). Logo, um conhecimento de como  $\beta$  varia com a frequência (levando à quantificação da dispersão) pode ser encontrado medindo-se a variação no raio de campo modal com a frequência. Novamente, as Referências Bibliográficas 4 e 5 (e as referências bibliográficas lá contidas) fornecem maiores detalhes.

**E14.12.** Para a fibra do Exemplo 14.6, o raio do núcleo é dado por  $a = 5,0 \mu\text{m}$ . Encontre o raio de campo modal nos comprimentos de onda (a)  $1,55 \mu\text{m}$ ; (b)  $1,30 \mu\text{m}$ .

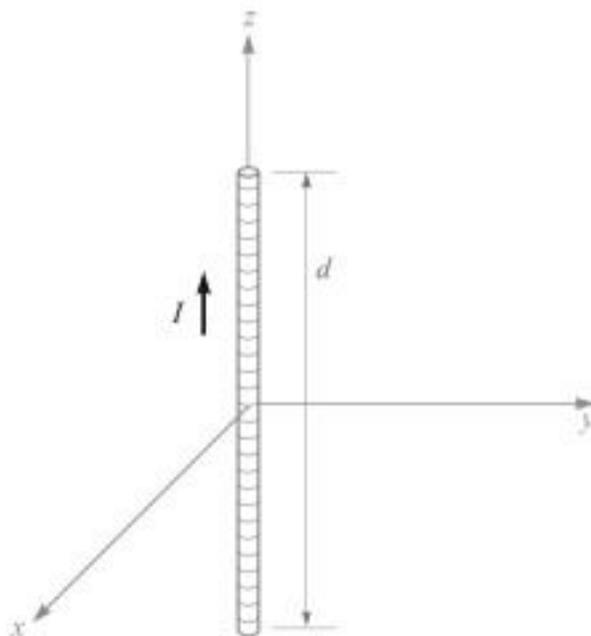
**Resp.**  $6,78 \mu\text{m}$ ;  $5,82 \mu\text{m}$

### 14.8 PRINCÍPIOS BÁSICOS DE ANTENAS

Nesta seção final exploramos alguns conceitos sobre irradiação de energia eletromagnética por meio de uma antena dipolo simples. Uma discussão completa sobre antenas e suas aplicações requereria vários capítulos ou livros inteiros. Nosso objetivo é produzir um entendimento fundamental de como campos eletromagnéticos irradiam a partir de *distribuições de correntes*. Então, pela primeira vez, teremos o campo específico que resulta de uma *fonte* específica variável no tempo. Na discussão de ondas e campos no interior de meios e nos guias de ondas, apenas a movimentação da onda no meio foi investigada, e as fontes dos campos não foram consideradas. A distribuição de corrente em um condutor foi um problema similar, apesar de pelo menos termos relacionado a corrente com uma intensidade assumida de campo elétrico na superfície do condutor. Isso poderia ter sido considerado uma fonte, mas não é uma muito prática, pois é infinita em extensão.

Consideramos agora um filamento de corrente (de seção reta infinitesimalmente pequena) como a fonte, posicionada dentro de um meio infinito sem perdas. O filamento é tomado como tendo um comprimento diferencial, mas deveremos ser capazes de estender os resultados facilmente para um filamento que seja pequeno comparado ao comprimento de onda, mais especificamente menor que aproximadamente um quarto do comprimento de onda total. O filamento diferencial é mostrado na origem e orientado ao longo do eixo  $z$  na Figura 14.25. O sentido positivo da corrente é tomado no sentido de  $\mathbf{a}_z$ . Consideramos uma corrente uniforme  $I_0 \cos \omega t$  nesse pequeno comprimento  $d$  e não nos preocupamos no momento com a aparente descontinuidade em cada extremidade.

Não vamos tentar neste momento descobrir “a fonte da fonte”, mas apenas assumir que a distribuição de corrente não pode ser mudada por qualquer campo que ela produza.



**Figura 14.25** Um filamento diferencial de corrente de comprimento  $d$  é percorrido por uma corrente  $I = I_0 \cos \omega t$ .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Para simplificar a interpretação dos termos entre parênteses, fazemos as substituições  $\omega = 2\pi f$ ,  $f\lambda = v$ ,  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , e  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , produzindo

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \text{sen } \theta e^{-j2\pi r/\lambda} \left( j \frac{2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (135)$$

$$E_{rs} = \frac{I_0 d \eta}{2\pi} \text{cos } \theta e^{-j2\pi r/\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{j2\pi r^3} \right) \quad (136)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d \eta}{4\pi} \text{sen } \theta e^{-j2\pi r/\lambda} \left( j \frac{2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{j2\pi r^3} \right) \quad (137)$$

Essas três equações são indicativas da razão pela qual tantos problemas envolvendo antenas são resolvidos por métodos experimentais em vez de métodos teóricos. Elas resultaram de três passos gerais: uma integração (atipicamente trivial) e duas diferenciações. Esses passos são suficientes para fazer que o elemento de corrente simples e a expressão simples para sua corrente “explodissem”, gerando um campo complicado descrito por (135) a (137). Apesar dessa complexidade, várias observações interessantes são possíveis.

Poderíamos notar primeiramente o fator  $e^{-j2\pi r/\lambda}$  que aparece em cada componente. Isso indica uma propagação no sentido positivo de  $r$  (sentido para fora), afastando-se da origem, com um fator de defasamento  $\beta = 2\pi/\lambda$ . Com isso, o comprimento de onda é  $\lambda$  e a velocidade é  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . Utilizamos o termo *comprimento de onda* agora com um sentido de certa forma mais amplo em relação à definição original, o qual identificou o comprimento de onda de uma onda plana uniforme com a distância entre dois pontos, medida na direção de propagação, nos quais a onda possui valores instantâneos idênticos. Aqui existem complicações adicionais causadas pelos termos entre parênteses, que são funções complexas de  $r$ . Essas variações devem agora ser desprezadas na determinação do comprimento de onda. Isso é equivalente a uma determinação do comprimento de onda e uma grande distância da origem, e podemos demonstrar isso esboçando as componentes de  $H_\phi$  como funções de  $r$  sob as seguintes condições:

$$I_0 d = 4\pi \quad \theta = 90^\circ \quad t = 0 \quad f = 300 \text{ MHz}$$

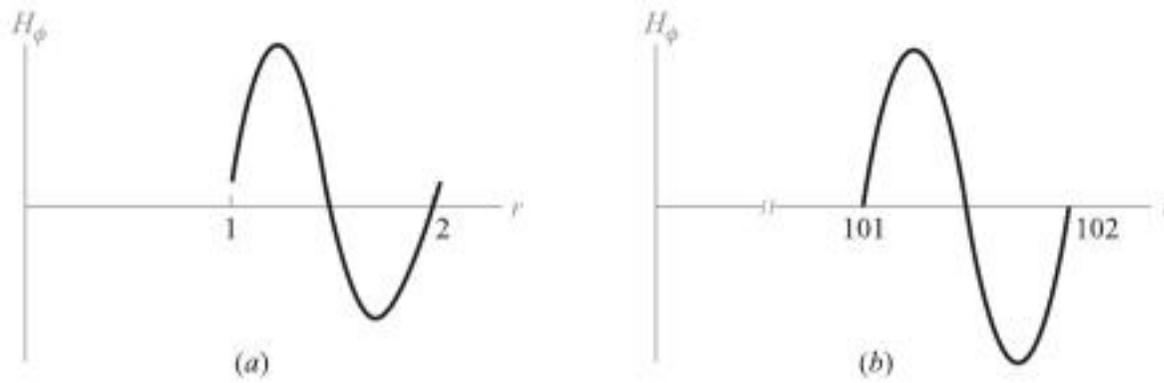
$$v = 3 \times 10^8 \text{ m/s (espaço livre)} \quad \lambda = 1 \text{ m}$$

Logo

$$H_{\phi s} = \left( j \frac{2\pi}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j2\pi r}$$

e a parte real pode ser determinada em  $t = 0$ ,

$$H_\phi = \sqrt{\left( \frac{2\pi}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^4}} \cos [(\text{tg}^{-1} 2\pi r) - 2\pi r]$$



**Figura 14.27** A amplitude instantânea de  $H_\phi$  para o caso especial de um elemento de corrente que possui  $l_0 d = 4\pi$  e  $\lambda = 1$  é representada no gráfico em  $\theta = 90^\circ$  e  $t = 0$  (a) na região  $1 \leq r \leq 2$  perto da antena, e (b) na região  $101 \leq r \leq 102$  distante da antena. A curva à esquerda notadamente não é senoidal, pois, se fosse uma senóide, os pontos em suas extremidades deveriam alcançar o eixo  $r$  precisamente em 1 e 2.

Sabendo que  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$  e que  $\cos(\text{tg}^{-1}x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$ , podemos simplificar esse resultado para

$$H_\phi = \frac{1}{r^2} (\cos 2\pi r + 2\pi r \sin 2\pi r)$$

Os valores obtidos através dessa última equação são representados em gráfico em função de  $r$  na faixa de valores  $1 \leq r \leq 2$  na Figura 14.27a. A curva é notadamente não senoidal. Em  $r = 1$ ,  $H_\phi = 1$ , enquanto em  $r = 2$ , um comprimento de onda depois,  $H_\phi = 0,25$ . Além disso, a curva atravessa o eixo (com inclinação positiva) em  $r = 1 - 0,0258$  e  $r = 2 - 0,0127$ , novamente uma distância que não é igual a um comprimento de onda. Se um esboço similar é feito na faixa de valores  $101 \leq r \leq 102$ , mostrado na Figura 14.27b numa escala de amplitudes diferente, uma onda essencialmente senoidal é obtida, sendo que os valores instantâneos de  $H_\phi$  em  $r = 101$  e  $r = 102$  são 0,000 099 8 e 0,000 099 6. As amplitudes máximas das porções positiva e negativa da forma de onda diferem de menos de 1%, e podemos dizer que para todos os propósitos práticos a onda nessa região é uma onda plana uniforme que apresenta uma variação senoidal com a distância (e tempo, é claro) e um comprimento de onda bem definido. Essa onda evidentemente propaga energia para fora da antena diferencial – vamos calcular essa potência em breve.

Continuando a investigação de (135) e (137), vamos agora dar uma olhada mais cuidadosa nas expressões que contêm os termos variáveis com  $1/r^3$ ,  $1/r^2$  e  $1/r$ . Nos pontos muito próximos do elemento de corrente, o termo  $1/r^3$  deve ser dominante. No exemplo numérico que usamos, os valores relativos dos termos em  $1/r^3$ ,  $1/r^2$  e  $1/r$  na expressão de  $E_{\theta_s}$  são aproximadamente 250, 16 e 1, respectivamente, quando  $r$  é 1 cm. A variação do campo elétrico com  $1/r^3$  deve nos lembrar do campo *eletrostático* do dipolo (Capítulo 4). Esse termo representa uma energia armazenada num campo reativo (capacitivo) e que não contribui para a potência irradiada. O termo com o inverso do quadrado na expressão de  $H_{\phi_s}$  é de forma similar importante apenas na região muito próxima do elemento de corrente, e corresponde ao campo de *indução* do elemento cc dado pela lei de Biot-Savart. Em distâncias correspondentes a 10 ou mais comprimentos de onda a partir do elemento de corrente oscilante, todos os termos, exceto o termo com o inverso da distância ( $1/r$ ), podem ser desprezados e os campos *distantes* ou *irradiados* se tornam

Se tentarmos aprimorar nossos resultados assumindo uma variação senoidal para a amplitude da corrente com a distância ao longo da antena, e se os efeitos de propagação forem incluídos na análise, as integrações necessárias para se encontrar  $\mathbf{A}$  e a potência irradiada tornam-se enormemente mais difíceis. Como queremos ir logo para a última página, vamos apenas observar que, para a antena mais popular no mundo, o dipolo de meia onda ( $d = \lambda/2$ ), a seguinte seqüência de resultados é obtida:

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 \eta}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \quad (141)$$

$$H_{\phi s} = \frac{E_{\theta s}}{\eta} \quad (142)$$

$$R_{\text{rad}} = 30 \left[ \frac{(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2\pi)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(2\pi)^6}{6 \cdot 6!} - \frac{(2\pi)^8}{8 \cdot 8!} + \dots \right] = 73,1 \, \Omega \quad (143)$$

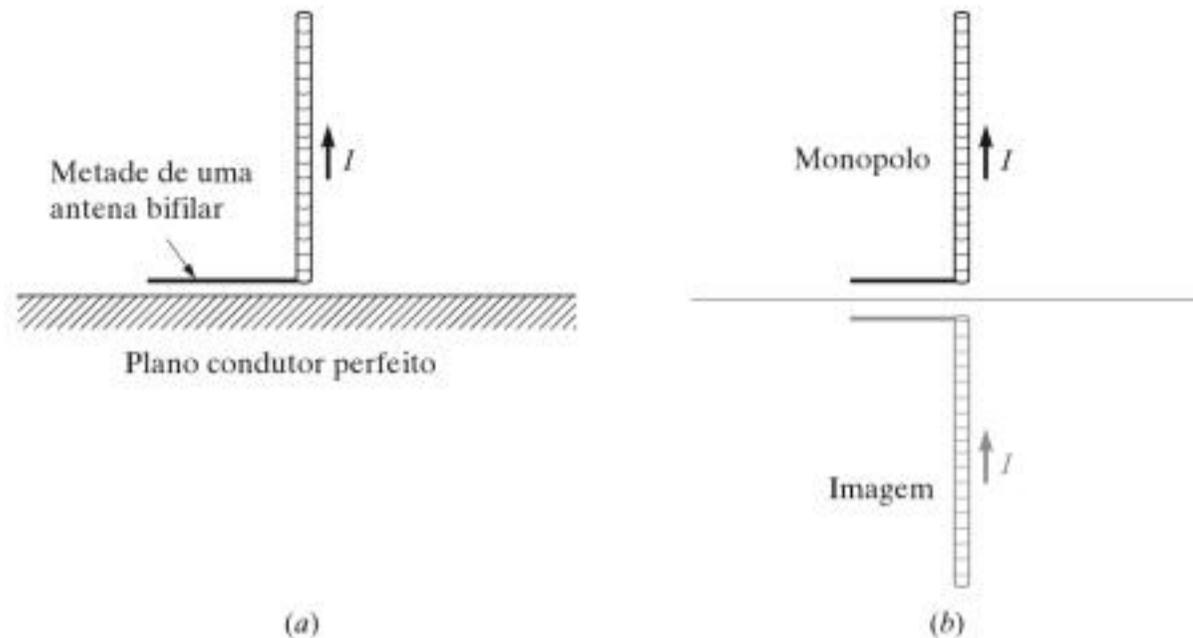
Vamos comparar esse valor exato com os resultados obtidos por meios mais aproximados. Suponha que primeiramente tentemos encontrar a resistência de irradiação assumindo uma distribuição uniforme de corrente e desprezando os efeitos de propagação. O resultado é obtido de (140) com  $d/\lambda = 1/2$ ;  $R_{\text{rad}} = 20\pi^2 = 197,4 \, \Omega$ . Isso é muito maior que  $73,1 \, \Omega$ , mas também consideramos uma corrente muito maior na antena em relação ao que é apresentado na realidade.

O resultado pode ser melhorado pela distribuição linear de corrente ainda ignorando a propagação. A corrente média é metade do valor máximo, a potência é um quarto e a resistência de irradiação cai para  $5\pi^2$  ou  $49,3 \, \Omega$ . Agora, o resultado é muito pequeno, principalmente porque o valor médio da onda triangular é menor que o valor médio da onda senoidal.

Finalmente, se considerarmos uma distribuição senoidal de corrente, temos um valor médio de  $2/\pi$  vezes o máximo, e a resistência de irradiação se torna  $(2/\pi)^2(20\pi^2)$ , ou  $80 \, \Omega$ . Isso é razoavelmente próximo do valor verdadeiro; a discrepância reside na desconsideração dos efeitos de propagação. Em uma antena linear, o efeito de propagação é sempre para causar cancelamento, assim, a sua consideração deve sempre levar a valores menores para a resistência de irradiação. Esse decréscimo é de magnitude relativamente pequena (de  $80$  para  $73,1 \, \Omega$ ), porque os elementos de corrente que tendem a se cancelar um com o outro são aqueles nas extremidades do dipolo, e esses possuem baixas amplitudes. Além disso, o cancelamento é maior na direção ao longo do eixo da antena, onde todos os campos de irradiação são zero para uma antena linear.

Antenas familiares que estão dentro da classificação de dipolos são os elementos utilizados nas antenas receptoras comuns de TV e FM.

Como um exemplo final de antena prática, vamos agrupar alguns fatos sobre a antena *monopolo*. Ela é constituída da metade de um dipolo mais um plano perfeitamente condutor, conforme mostra a Figura 14.30a. O princípio da imagem discutido na Seção 5.5 fornece a imagem mostrada na Figura 14.30b e nos assegura de que os campos acima do plano são os mesmos tanto para o monopolo quanto para o dipolo. Logo, as expressões (138) e (139) são igualmente válidas para o monopolo. O vetor de Poynting é também o mesmo acima do plano, mas a integração para se encontrar a potência total irradiada é calculada apenas na metade do volume. Com isso, a potência irradiada e a resistência



**Figura 14.30** (a) Um monopolo ideal está sempre associado a um plano condutor perfeito. (b) O monopolo somado à sua imagem formam um dipolo.

de irradiação para o monopolo valem metade dos valores correspondentes para o dipolo. Como exemplo, um monopolo no qual é assumida uma distribuição uniforme de corrente tem  $R_{\text{rad}} = 40\pi^2(d/\lambda)^2$ . Uma corrente triangular leva a  $R_{\text{rad}} = 10\pi^2(d/\lambda)^2$ . E a distribuição senoidal de corrente de um monopolo de  $\lambda/4$  leva a  $R_{\text{rad}} = 36,5 \Omega$ .

Antenas monopolo podem ser alimentadas por um cabo coaxial abaixo do plano, tendo seu condutor central conectado à antena através de um pequeno buraco, e tendo seu condutor externo conectado ao plano. Se a região abaixo do plano é inacessível ou inconveniente, o cabo coaxial pode ser deitado sobre o plano e seu condutor externo conectado a ele. Exemplos desse tipo de antena incluem as antenas de transmissão em AM e antenas CB.

**E14.13.** Calcule os valores para a curva mostrada na Figura 14.27a em  $r = 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8$  e  $2$ .

**Resp.** 1,00; 5,19; 2,23; -2,62; -3,22; 0,25

**E14.14.** Uma antena curta com uma distribuição uniforme de corrente colocada no ar tem  $I_0 d = 3 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}$  e  $\lambda = 10 \text{ cm}$ . Encontre  $|E_{\theta s}|$  em  $\theta = 90^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$  e  $r =$ : (a) 2 cm; (b) 20 cm; (c) 200 cm.

**Resp.** 25 V/m; 2,8 V/m; 0,28 V/m

**E14.15.** A antena monopolo da Figura 14.30a tem comprimento  $d/2 = 0,080 \text{ m}$  e pode ser considerada como conduzindo uma distribuição triangular de corrente para a qual a corrente de alimentação  $I_0$  vale 16,0 A em uma frequência de 375 MHz no espaço livre. No ponto  $P(r = 400 \text{ m}, \theta = 60^\circ, \phi = 45^\circ)$  encontre: (a)  $H_{\phi s}$ ; (b)  $E_{\phi s}$ ; (c) a amplitude de  $P_r$ .

**Resp.**  $j1,7 \text{ mA/m}$ ;  $j0,65 \text{ V/m}$ ;  $1,1 \text{ mW/m}^2$

reflexão na interface do dielétrico. (a) Encontre essa frequência. (b) O guia está operando num modo TM único na frequência encontrada na parte (a)? *Dica:* Lembra-se do ângulo de Brewster?

- 14.16** No guia da Figura 14.31 é encontrado que os modos  $m = 1$  que se propagam da esquerda para a direita se refletem totalmente na interface, de forma que nenhuma potência é transmitida na região de constante dielétrica  $\epsilon'_{r2}$ . (a) Determine a faixa de frequências na qual isso ocorrerá. (b) A sua resposta da parte (a) de alguma forma está relacionada à frequência de corte para os modos  $m = 1$  em cada região? *Dica:* Lembra-se do ângulo crítico?
- 14.17** Um guia de ondas retangular tem dimensões  $a = 6$  cm e  $b = 4$  cm. (a) Em qual faixa de frequências o guia operará em modo único? (b) Em qual faixa de frequências o guia suportará *ambos* os modos  $TE_{10}$  e  $TE_{01}$  e nenhum outro mais?
- 14.18** Dois guias de onda retangulares estão unidos ponta com ponta. Os guias possuem dimensões idênticas, onde  $a = 2b$ . Um guia está preenchido com ar. O outro está preenchido com um dielétrico sem perdas caracterizado por  $\epsilon'_r$ . (a) Determine o valor máximo permitido para  $\epsilon'_r$  de forma que uma operação em modo único possa ser assegurada simultaneamente em *ambos* os guias em alguma frequência. (b) Escreva uma expressão para a faixa de frequências na qual uma operação monomodo ocorrerá em ambos os guias. Sua resposta deve ser em termos de  $\epsilon'_r$ , das dimensões do guia conforme necessário, e de outras constantes conhecidas.
- 14.19** Um guia de ondas retangular preenchido com ar deve ser construído para uma operação em monomodo em 15 GHz. Especifique as dimensões do guia,  $a$  e  $b$ , de forma que a frequência de projeto seja 10% mais alta que a frequência de corte para o modo  $TE_{10}$ , enquanto é 10% mais baixa que a frequência de corte para o próximo modo de ordem mais alta.
- 14.20** Utilizando a relação  $\langle S \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\}$  e as Equações (78) a (80), mostre que a densidade média de potência no modo  $TE_{10}$  em um guia de ondas retangulares é dada por:

$$\langle S \rangle = \frac{\beta_{10}}{2\omega\mu} E_0^2 \text{sen}^2(\kappa_{10}x) \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2$$

- 14.21** Integre o resultado do Problema 14.20 pela seção reta do guia,  $0 < x < a, 0 < y < b$ , para mostrar que a potência média em watts transmitida ao longo do guia é dada por:

$$P_{av} = \frac{\beta_{10}ab}{4\omega\mu} E_0^2 = \frac{ab}{4\eta} E_0^2 \text{sen } \theta_{10} \text{ W}$$

onde  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  e  $\theta_{10}$  é o ângulo da onda associado com o modo  $TE_{10}$ . Interprete.

- 14.22** Mostre que o parâmetro de dispersão de grupo,  $d^2\beta/d\omega^2$ , para um dado modo em um guia de ondas de placas paralelas ou retangulares é dado por:

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2} = -\frac{n}{\omega c} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right]^{-3/2}$$

onde  $\omega_c$  é a frequência angular de corte para o modo em questão [note que a forma para a derivada primeira já foi encontrada, resultando na Equação (57)].

- 14.23** Considere um pulso limitado por transformada de frequência central  $f = 10$  GHz, de largura total  $2T = 1,0$  ns. O pulso se propaga em um guia retangular sem perdas monomodo, que é preenchido com ar e no qual a frequência de operação de 10 GHz vale 1,1 vez a frequência de corte do modo  $TE_{10}$ . Utilizando o resultado do Problema 14.14, determine o comprimento do guia necessário para que o pulso se alargue duas vezes o seu valor inicial. Qual passo simples pode ser tomado para reduzir o alargamento do pulso nesse guia, enquanto se mantém a mesma largura inicial do pulso? Informações adicionais para esse problema são encontradas na Seção 13.6.
- 14.24** Um guia de ondas dielétrico simétrico laminado tem uma espessura da lâmina  $d = 10 \mu\text{m}$ , com  $n_1 = 1,48$  e  $n_2 = 1,45$ . Se o comprimento de onda da operação vale  $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ , quais modos se propagarão?
- 14.25** Sabe-se que um guia de ondas simétrico laminado suporta apenas um único par de modos TE e TM num comprimento de onda  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ . Se a espessura da lâmina vale  $5 \mu\text{m}$ , qual é o valor máximo de  $n_1$  se  $n_2 = 3,30$ ?
- 14.26** Em um guia de ondas simétrico laminado,  $n_1 = 1,45$ ,  $n_2 = 1,50$  e  $d = 10 \mu\text{m}$ . (a) Qual é a velocidade de fase de modo  $m = 1$  TE ou TM no corte? (b) Como seu resultado para a parte (a) mudará para modos de ordem mais alta (se é que mudarão)?
- 14.27** Um guia de ondas assimétrico laminado é mostrado na Figura 14.32. Neste caso, as regiões acima e abaixo da lâmina possuem índices de refração diferentes, onde  $n_1 > n_3 > n_2$ . (a) Escreva, em termos dos índices apropriados, uma expressão para o ângulo de onda  $\theta$  menor possível que um modo guiado pode ter. (b) Escreva uma expressão para a velocidade de fase máxima que um modo guiado pode ter nessa estrutura, utilizando parâmetros dados ou conhecidos.
- 14.28** Sabe-se que uma fibra ótica de índice degrau possui modo único em comprimentos de onda  $\lambda > 1,2 \mu\text{m}$ . Uma outra fibra deve ser fabricada a partir dos mesmos materiais, mas deve apresentar modo único em comprimentos de onda  $\lambda > 0,63 \mu\text{m}$ . Por qual porcentagem deve o raio do núcleo da nova fibra ser diferente do antigo, e deve ser maior ou menor?



Figura 14.32 Veja o Problema 14.27.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



## APÊNDICE

# Análise Vetorial

### A.1 COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS

Vamos considerar um sistema de coordenadas ortogonais generalizadas na qual um ponto é localizado pela interseção de três superfícies mutuamente perpendiculares (de forma não especificada),

$$\begin{aligned}u &= \text{constante} \\v &= \text{constante} \\w &= \text{constante}\end{aligned}$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as variáveis do sistema de coordenadas. Se cada variável for aumentada por uma quantidade diferencial e mais três superfícies mutuamente perpendiculares forem desenhadas correspondendo a esses novos valores, um volume diferencial é formado o qual é aproximadamente um paralelepípedo retângulo. Uma vez que  $u$ ,  $v$  e  $w$  não precisam ser medidas pelo comprimento tal como as variáveis de ângulo dos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas, cada uma deve ser multiplicada por uma função genérica de  $u$ ,  $v$  e  $w$  para se obter os lados diferenciais do paralelepípedo. Com isso, definimos os fatores de escala  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ , cada um como uma função das três variáveis  $u$ ,  $v$  e  $w$ , e escrevemos os comprimentos dos lados do volume diferencial como

$$\begin{aligned}dL_1 &= h_1 du \\dL_2 &= h_2 dv \\dL_3 &= h_3 dw\end{aligned}$$

Nos três sistemas de coordenadas discutidos no Capítulo 1, é aparente que as variáveis e fatores de escala são:

Cartesianas:	$u = x$	$v = y$	$w = z$	
	$h_1 = 1$	$h_2 = 1$	$h_3 = 1$	
Cilíndricas:	$u = \rho$	$v = \phi$	$w = z$	
	$h_1 = 1$	$h_2 = \rho$	$h_3 = 1$	(A.1)
Esféricas:	$u = r$	$v = \theta$	$w = \phi$	
	$h_1 = 1$	$h_2 = r$	$h_3 = r \sin \theta$	



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

em termos do comprimento, diferencie das componentes,  $h_1 du$ ,  $h_2 dv$  e  $h_3 dw$ ,

$$dV = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} h_1 du + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} h_2 dv + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} h_3 dw$$

Deste modo, visto que

$$d\mathbf{L} = h_1 du \mathbf{a}_u + h_2 dv \mathbf{a}_v + h_3 dw \mathbf{a}_w \quad \text{e} \quad dV = \nabla V \cdot d\mathbf{L}$$

vemos que

$$\nabla V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} \mathbf{a}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} \mathbf{a}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} \mathbf{a}_w \quad (\text{A.3})$$

As componentes do rotacional de um vetor  $\mathbf{H}$  são obtidas considerando um caminho diferencial primeiramente em uma superfície  $u = \text{constante}$ , e encontrando a circulação de  $\mathbf{H}$  ao longo deste caminho, conforme foi discutido para coordenadas cartesianas na Seção 8.3. A contribuição ao longo do segmento na direção  $\mathbf{a}_v$  é

$$H_v h_2 dv - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} (H_v h_2 dv) dw$$

e aquela ao longo do segmento diretamente oposto é

$$-H_v h_2 dv - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} (H_v h_2 dv) dw$$

A soma dessas duas partes é

$$-\frac{\partial}{\partial w} (H_v h_2 dv) dw$$

ou

$$-\frac{\partial}{\partial w} (h_2 H_v) dv dw$$

e a soma das contribuições dos outros dois lados do caminho é

$$\frac{\partial}{\partial v} (h_3 H_w) dv dw$$

Somando-se esses dois termos e dividindo-se a soma pela área envolvida,  $h_2 h_3 dv dw$ , vemos que a componente em  $\mathbf{a}_u$  do rotacional de  $\mathbf{H}$  é

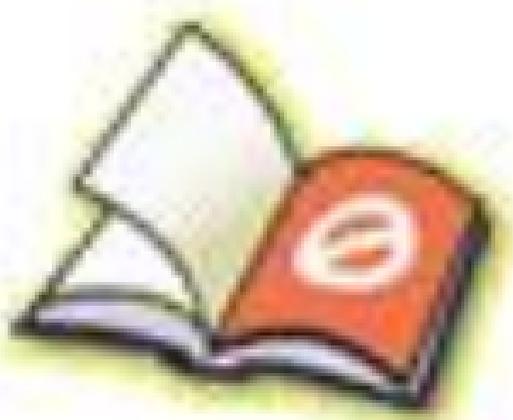
$$(\nabla \times \mathbf{H})_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (h_3 H_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 H_v) \right]$$

e que as outras duas componentes podem ser obtidas por permutação cíclica. O resultado pode ser expresso através de um determinante,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 H_u & h_2 H_v & h_3 H_w \end{vmatrix} \quad (\text{A.4})$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



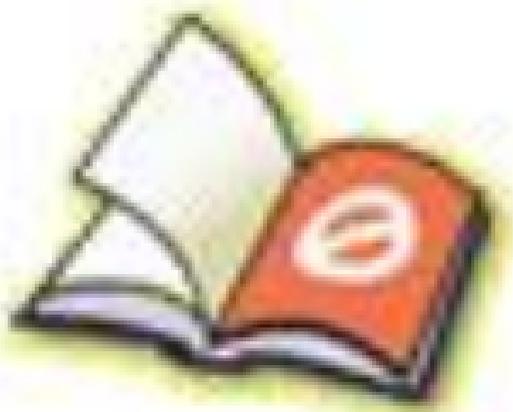
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

## Constantes dos Materiais

A Tabela C.1 lista valores típicos da permissividade relativa  $\epsilon'$ , ou constante dielétrica para materiais isoladores e dielétricos comuns, juntamente com valores representativos para a tangente de perdas. Os valores devem ser considerados apenas como representativos para cada material, e aplicam-se a condições normais de temperatura e umidade e para frequências de áudio muito baixas. A maioria deles foi retirado do *Reference Data for Radio Engineers*.<sup>1</sup> *The Standard Handbook for Electrical Engineers*<sup>2</sup> e *von Hippel*,<sup>3</sup> e esses volumes devem servir como referência para informações adicionais esses e outros materiais.

A Tabela C.2 apresenta a condutividade para um certo número de condutores metálicos, para alguns materiais isolantes e para vários outros materiais de interesse geral. Os valores foram tirados das referências listadas anteriormente, e são aplicados à frequência zero e temperatura ambiente. A lista está na ordem decrescente de condutividade.

Alguns valores representativos da permeabilidade relativa para vários materiais diamagnéticos, paramagnéticos, ferrimagnéticos e ferromagnéticos estão relacionados na Tabela C.3. Eles foram extraídos das referências listadas anteriormente, e os dados para os materiais ferromagnéticos são apenas válidos para densidades de fluxo magnético muito baixas. Permeabilidades máximas podem ser uma ordem de magnitude mais alta.

Valores são dados na Tabela C.4 para a carga e massa de repouso de um elétron, para a permissividade e a permeabilidade do espaço livre e para a velocidade da luz.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 11.

<sup>2</sup> Veja as Referências Bibliográficas do Capítulo 5.

<sup>3</sup> von Hippel, A. R. *Dielectric Materials and Applications*. Cambridge, Mass. e Nova Iorque: The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, 1954.

<sup>4</sup> Cohen, E. R. e Taylor, B. N. *The 1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constants*. Elmsford, N.Y.: Pergamon Press, 1986.

Tabela C.1  $\epsilon_r$  e  $\epsilon''/\epsilon'$ 

Material	$\epsilon_r$	$\epsilon''/\epsilon'$
Ar	1,0005	
Álcool etílico	25	0,1
Óxido de alumínio	8,8	0,000 6
Âmbar	2,7	0,002
Baquelite	4,74	0,022
Titanato de bário	1200	0,013
Dióxido de carbono	1,001	
Ferrite (NiZn)	12,4	0,000 25
Germânio	16	
Vidro	4-7	0,002
Gelo	4,2	0,05
Mica	5,4	0,000 6
Neoprene	6,6	0,011
Náilon	3,5	0,02
Papel	3	0,008
<i>Plexiglas</i>	3,45	0,03
Poliétileno	2,26	0,000 2
Polipropileno	2,25	0,000 3
Poliestireno	2,56	0,000 05
Porcelana (processo seco)	6	0,014
<i>Pyranol</i>	4,4	0,000 5
Vidro pirex	4	0,000 6
Quartzo (fundido)	3,8	0,000 75
Borracha	2,5-3	0,002
Sílica ou SiO <sub>2</sub> (fundido)	3,8	0,000 75
Silício	11,8	
Neve	3,3	0,5
Cloreto de sódio	5,9	0,000 1
Terra (seca)	2,8	0,05
Esteatite	5,8	0,003
<i>Styrofoam</i>	1,03	0,000 1
Teflon	2,1	0,000 3
Dióxido de titânio	100	0,001 5
Água (destilada)	80	0,04
Água (do mar)		4
Água (desidratada)	1	0
Madeira (seca)	1,5-4	0,01

Tabela C.2  $\sigma$

Material	$\sigma$ , S/m	Material	$\sigma$ , S/m
Prata	$6,17 \times 10^7$	Nicromo	$0,1 \times 10^7$
Cobre	$5,80 \times 10^7$	Grafite	$7 \times 10^4$
Ouro	$4,10 \times 10^7$	Silício	2300
Alumínio	$3,82 \times 10^7$	Ferrite (típico)	100
Tungstênio	1,82	Água (do mar)	5
Zinco	$1,67 \times 10^7$	Calcário	$10^{-2}$
Latão	$1,5 \times 10^7$	Argila	$5 \times 10^{-3}$
Níquel	$1,45 \times 10^7$	Água (doce)	$10^{-3}$
Ferro	$1,03 \times 10^7$	Água (destilada)	$10^{-4}$
Bronze fosfórico	$1 \times 10^7$	Terra (areia)	$10^{-5}$
Solda	$0,7 \times 10^7$	Granito	$10^{-6}$
Aço carbono	$0,6 \times 10^7$	Mármore	$10^{-8}$
Prata germânica	$0,3 \times 10^7$	Baquelite	$10^{-9}$
Manganês	$0,227 \times 10^7$	Porcelana (processo seco)	$10^{-10}$
Constantan	$0,226 \times 10^7$	Diamante	$2 \times 10^{-13}$
Germânio	$0,22 \times 10^7$	Poliestireno	$10^{-16}$
Aço inoxidável	$0,11 \times 10^7$	Quartzo	$10^{-17}$

Tabela C.3  $\mu_r$

Material	$\mu_r$	Material	$\mu_r$
Bismuto	0,999 998 6	Limalha de ferro	100
Parafina	0,999 999 42	Aço de máquina	300
Madeira	0,999 999 5	Ferrite (típico)	1000
Prata	0,999 999 81	Liga 45	2500
Alumínio	1,000 000 65	Ferro de transformador	3000
Berílio	1,000 000 79	Ferro sílico	3500
Cloreto de níquel	1,000 04	Ferro (puro)	4000
Sulfato de manganês	1,000 1	Mumetal	20 000
Níquel	50	Sendust	30 000
Ferro fundido	60	Superliga	100 000
Cobalto	60		

Tabela C.4 Constantes físicas

Grandeza	Valor
Carga do elétron	$e = (1,602 177 33 \pm 0,000 00046) \times 10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m = (9,109 3897 \pm 0,000 0054) \times 10^{-31}$ kg
Permissividade do espaço livre	$\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12}$ F/m
Permeabilidade do espaço livre	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m
Velocidade da luz	$c = 2,99792458 \times 10^8$ m/s

## Origens da Permissividade Complexa

Conforme aprendemos no Capítulo 5, um dielétrico pode ser modelado como um arranjo de átomos e moléculas no espaço livre que são polarizados por um campo elétrico. O campo força as cargas ligadas positivas e negativas a se separar em oposição às suas forças de Coulomb de atração, produzindo assim uma cadeia de dipolos microscópicos. As moléculas podem se arranjar de uma maneira ordenada e previsível (tal como em um cristal) ou exibir posicionamento e orientação aleatórios, como aconteceria em materiais amorfos ou líquidos. As moléculas podem ou não exibir momentos de dipolo permanentes (existentes antes do campo ser aplicado) e, se exibirem, usualmente apresentarão orientação aleatória ao longo do volume do material. Como foi discutido na Seção 6.1, o deslocamento de cargas de uma maneira regular, igual quando induzido por um campo elétrico, gera uma polarização macroscópica  $\mathbf{P}$ , definida como o momento de dipolo por unidade de volume:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{N \Delta v} \mathbf{p}_i \quad (\text{D.1})$$

onde  $N$  é o número de dipolos por unidade de volume e  $\mathbf{p}_i$  é o momento de dipolo do  $i$ -ésimo átomo ou molécula, encontrado por

$$\mathbf{p}_i = Q_i \mathbf{d}_i \quad (\text{D.2})$$

$Q_i$  é a positiva das duas cargas ligadas que compõem o dipolo  $i$  e  $\mathbf{d}_i$  é a distância entre as cargas, expressa como um vetor que vai da carga negativa para a positiva. Novamente, consultando a Seção 6.1, o campo elétrico e a polarização estão relacionados por

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (\text{D.3})$$

onde a susceptibilidade elétrica  $\chi_e$  forma a parte mais interessante da constante dielétrica:

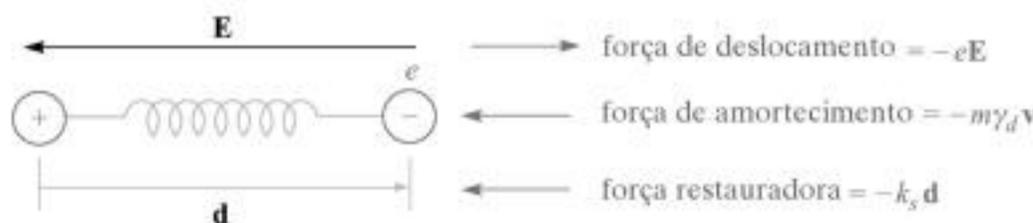
$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (\text{D.4})$$

Logo, para entender a natureza de  $\epsilon_c$ , precisamos entender  $\chi_e$  e, assim, temos de explorar o comportamento da polarização  $\mathbf{P}$ .

Neste caso, consideramos as complicações adicionadas de como os dipolos respondem a um campo harmônico no tempo que se propaga como uma onda pelo material. O resultado de se aplicar uma função forçante desse tipo é que momentos de dipolo *oscilatórios* são criados, e *esses então estabelecem uma onda de polarização que se propaga pelo material*. O efeito é produzir uma função de polarização  $\mathbf{P}(z, t)$ , que tem a mesma forma funcional do campo alimentado  $\mathbf{E}(z, t)$ . As moléculas propriamente ditas não se movem pelo material, mas seus momentos de dipolo oscilatórios coletivamente exibem um movimento de onda, assim como ondas em uma piscina de água são formadas pela movimentação para cima e para baixo da água. Deste ponto a descrição do processo se torna complicada e, em muitos aspectos, além do escopo da nossa discussão atual. Podemos formar um entendimento qualitativo básico, contudo, pela consideração da descrição clássica do processo, que é a de que os dipolos, uma vez oscilando, comportam-se como antenas microscópicas, re-irradiando campos que se propagam conjuntamente ao campo aplicado. Dependendo da frequência, haverá algum defasamento entre o campo incidente e o campo irradiado, em uma dada localização de dipolo. Isso causa um campo resultante (formado pela superposição dos dois) que agora interage com o próximo dipolo. A irradiação a partir desse dipolo se soma ao campo anterior como antes, e o processo se repete de dipolo para dipolo. Os defasamentos acumulados em cada posição são manifestados como uma diminuição equivalente da velocidade de fase da onda resultante. A atenuação do campo pode também ocorrer, a qual, no modelo clássico, é levada em conta pelo cancelamento parcial de fases entre os campos incidente e irradiado.

No nosso modelo clássico, o meio é um conjunto de osciladores de elétrons fixos idênticos, no qual as forças de ligação de Coulomb nos elétrons são modeladas por molas que fixam os elétrons aos núcleos positivos. Consideramos elétrons por simplicidade, mas modelos similares podem ser utilizados para qualquer partícula de carga ligada. A Figura D.1 mostra um oscilador único, localizado na posição  $z$  no material e orientado ao longo de  $x$ . Uma onda plana uniforme, assumida como linearmente polarizada ao longo de  $x$ , se propaga pelo material na direção  $z$ . O campo elétrico na onda desloca o elétron do oscilador na direção  $x$  pela distância representada pelo vetor  $\mathbf{d}$ . Um momento de dipolo é então estabelecido,

$$\mathbf{p}(z, t) = -e\mathbf{d}(z, t) \tag{D.5}$$



**Figura D.1** Modelo do dipolo atômico, com forças de Coulomb entre cargas positivas e negativas modeladas como aquelas de uma mola que tem constante elástica  $k_s$ . Um campo elétrico aplicado desloca o elétron por uma distância  $d$ , resultando em um momento de dipolo  $\mathbf{p} = -e\mathbf{d}$ .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Com as ondas nessa forma, a diferenciação no tempo produz um fator de  $j\omega$ . Conseqüentemente, (D.11) pode ser simplificada e reescrita na forma fasorial:

$$-\omega^2 \mathbf{d}_s + j\omega\gamma_d \mathbf{d}_s + \omega_0^2 \mathbf{d}_s = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_s \quad (\text{D.13})$$

onde (D.4) foi utilizada. Resolvemos agora (D.13) para  $\mathbf{d}_s$ , obtendo

$$\mathbf{d}_s = \frac{-(e/m)\mathbf{E}_s}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma_d} \quad (\text{D.14})$$

O momento de dipolo associado com o deslocamento  $\mathbf{d}_s$  é

$$\mathbf{p}_s = -e\mathbf{d}_s \quad (\text{D.15})$$

A polarização do meio é então encontrada assumindo-se que todos os dipolos sejam idênticos. A Equação (D.1) se torna

$$\mathbf{P}_s = N\mathbf{p}_s$$

a qual, quando usados (D.14) e (D.15) se torna

$$\mathbf{P}_s = \frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma_d} \mathbf{E}_s \quad (\text{D.16})$$

Agora, usando (D.3) identificamos a susceptibilidade associada com a ressonância como

$$\chi_{\text{res}} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma_d} = \chi'_{\text{res}} - j\chi''_{\text{res}} \quad (\text{D.17})$$

As partes real e imaginária da permissividade são agora encontradas pelas partes real e imaginária de  $\chi_{\text{res}}$ . Sabendo-se que

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_{\text{res}}) = \epsilon' - j\epsilon''$$

encontramos

$$\epsilon' = \epsilon_0(1 + \chi'_{\text{res}}) \quad (\text{D.18})$$

e

$$\epsilon'' = \epsilon_0\chi''_{\text{res}} \quad (\text{D.19})$$

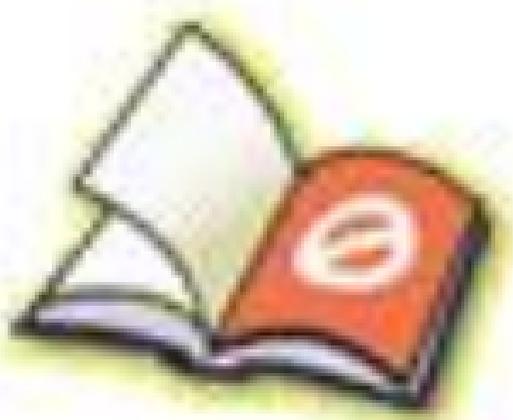
As expressões anteriores agora podem ser utilizadas nas Equações (35) e (36) no Capítulo 12 para calcular o coeficiente de atenuação  $\alpha$  e a constante de defasamento  $\beta$ , para a onda plana à medida que se propaga pelo nosso meio ressonante.

As partes real e imaginária de  $\chi_{\text{res}}$  como funções da frequência são mostradas na Figura D.2, para o caso especial no qual  $\omega \doteq \omega_0$ . A Equação (D.17) nesse caso se torna

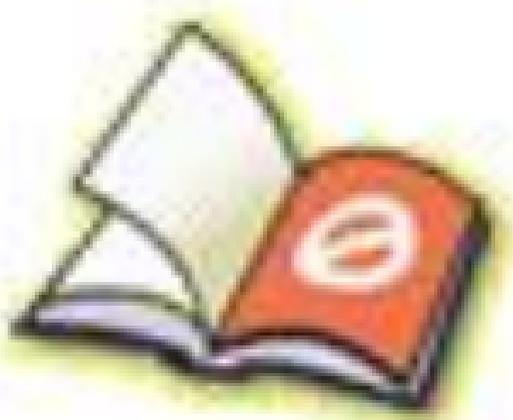
$$\chi_{\text{res}} \doteq -\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega_0 \gamma_d} \left( \frac{j + \delta_n}{1 + \delta_n^2} \right) \quad (\text{D.20})$$

onde o parâmetro *desafinador normalizado*  $\delta_n$  vale

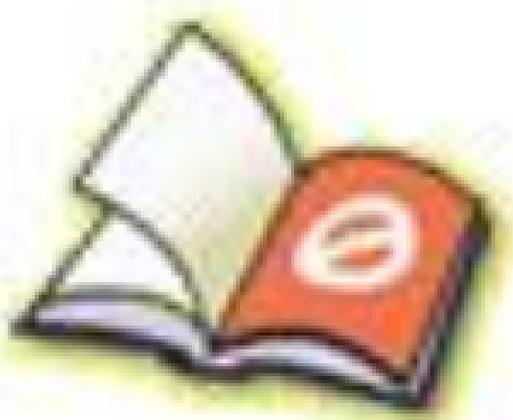
$$\frac{2}{\gamma_d}(\omega - \omega_0) \quad (\text{D.21})$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

# Respostas dos Problemas Ímpares

## Capítulo 1

- 1.1** (a)  $0,92\mathbf{a}_x + 0,36\mathbf{a}_y + 0,4\mathbf{a}_z$  (b) 48,6  
(c)  $-580,5\mathbf{a}_x + 3193\mathbf{a}_y - 2902\mathbf{a}_z$
- 1.3** (7,8, -7,8, 3,9)
- 1.5** (a)  $48\mathbf{a}_x + 36\mathbf{a}_y + 18\mathbf{a}_z$   
(b)  $-0,26\mathbf{a}_x + 0,39\mathbf{a}_y + 0,88\mathbf{a}_z$   
(c)  $0,59\mathbf{a}_x + 0,20\mathbf{a}_y - 0,78\mathbf{a}_z$   
(d)  $100 = 16x^2y^2 + 4x^4 + 16x^2 + 16 + 9z^4$
- 1.7** (a) (1) o plano  $z = 0$ , com  $|x| \leq 2$ ,  $|y| \leq 2$ ; (2) o plano  $y = 0$  com  $|x| \leq 2$ ,  $|z| \leq 2$ ; (3) o plano  $x = 0$ , com  $|y| \leq 2$ ,  $|z| \leq 2$ ; (4) o plano  $x = \pi/2$ , com  $|y| \leq 2$ ,  $|z| \leq 2$  (b) o plano  $2z = y$ , com  $|x| \leq 2$ ,  $|y| \leq 2$ ,  $|z| \leq 1$  (c) o plano  $y = 0$ , com  $|x| \leq 2$ ,  $|z| \leq 2$
- 1.9** (a)  $0,6\mathbf{a}_x + 0,8\mathbf{a}_y$  (b)  $53^\circ$  (c) 26
- 1.11** (a) (-0,3, 0,3, 0,4) (b) 0,05 (c) 0,12 (d)  $78^\circ$
- 1.13** (a) (0,93, 1,86, 2,79) (b) (9,07, -7,86, 2,21)  
(c) (0,02, 0,25, 0,26)
- 1.15** (a) (0,08, 0,41, 0,91) (b) (0,30, 0,81, 0,50)  
(c) 30,3 (d) 32,0
- 1.17** (a) (0,664, -0,379, 0,645)  
(b) (-0,550, 0,832, 0,077) (c) (0,168, 0,915, 0,367)
- 1.19** (a)  $(1/\rho)\mathbf{a}_\rho$  (b)  $0,5\mathbf{a}_\rho$ , ou  $0,41\mathbf{a}_x + 0,29\mathbf{a}_y$
- 1.21** (a)  $-6,66\mathbf{a}_\rho - 2,77\mathbf{a}_\phi + 9\mathbf{a}_z$

(b)  $-0,59\mathbf{a}_\rho + 0,21\mathbf{a}_\phi - 0,78\mathbf{a}_z$

(c)  $-0,90\mathbf{a}_\rho - 0,44\mathbf{a}_z$

**1.23** (a) 6,28 (b) 20,7 (c) 22,4 (d) 3,21

**1.25** (a) 1,10 $\mathbf{a}_\rho + 2,21\mathbf{a}_\phi$  (b) 2,47 (c)  $0,45\mathbf{a}_r + 0,89\mathbf{a}_\phi$

**1.27** (a) 2,91 (b) 12,61 (c) 17,49 (d) 2,53

**1.29** (a)  $0,59\mathbf{a}_r + 0,38\mathbf{a}_\phi - 0,72\mathbf{a}_\theta$

(b)  $0,80\mathbf{a}_r - 0,22\mathbf{a}_\theta - 0,55\mathbf{a}_\phi$

(c)  $0,66\mathbf{a}_r + 0,39\mathbf{a}_\theta - 0,64\mathbf{a}_\phi$

## Capítulo 2

**2.1**  $4,0 \times 10^{-4}$  N

**2.3** 21,5 $\mathbf{a}_x$   $\mu\text{N}$

**2.5** (a) 4,58 $\mathbf{a}_x - 0,15\mathbf{a}_y + 5,51\mathbf{a}_z$  (b) -6,89 ou -22,11

**2.7**  $159,7\mathbf{a}_\rho + 27,4\mathbf{a}_\phi - 49,4\mathbf{a}_z$

**2.9** (a)  $(x + 1) = 0,56[(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2]^{1/2}$

(b) 1,69 ou 0,31

**2.11** (a)  $-1,63 \mu\text{C}$  (b)  $-30,11\mathbf{a}_x - 180,63\mathbf{a}_y - 150,53\mathbf{a}_z$

(c)  $-183,12\mathbf{a}_\rho - 150,53\mathbf{a}_z$  (d) -237,1

**2.13** (a) 82,1 pC (b) 4,24 cm

**2.15** (a)  $3,35 \times 10^{-2}$  C (b)  $1,24 \times 10^6$  C/m<sup>3</sup>

**2.17** (a)  $57,5\mathbf{a}_y - 28,8\mathbf{a}_z$  V/m (b)  $23\mathbf{a}_x - 46\mathbf{a}_z$

**2.19** (a) 7,2 $\mathbf{a}_x + 14,4\mathbf{a}_y$  kV/m

(b) 4,9 $\mathbf{a}_x + 9,8\mathbf{a}_y + 4,9\mathbf{a}_z$  kV/m

- 2.21  $126\mathbf{a}_y \mu\text{N/m}$   
 2.23 (a)  $8,1 \text{ kV/m}$  (b)  $-8,1 \text{ kV/m}$   
 2.25  $-3,9\mathbf{a}_x - 12,4\mathbf{a}_y - 2,5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$   
 2.27 (a)  $y^2 - x^2 = 4xy - 19$  (b)  $0,99\mathbf{a}_x + 0,12\mathbf{a}_y$   
 2.29 (a)  $12,2$  (b)  $-0,87\mathbf{a}_x - 0,50\mathbf{a}_y$   
 (c)  $y = (1/5) \ln \cos 5x + 0,13$

### Capítulo 3

- 3.1 (a) moeda de um centavo:  $+5 \text{ nC}$ ; moeda de cinco centavos:  $0$ ; moeda de 10 centavos:  $0$ ; lata:  $-5 \text{ nC}$  (b) Moedas: mesma coisa como no início; lata:  $-2 \text{ nC}$   
 3.3 (a)  $0,25 \text{ nC}$  (b)  $9,45 \text{ pC}$   
 3.5  $360 \text{ C}$   
 3.7 (a)  $4,0 \times 10^{-9} \text{ nC}$  (b)  $3,2 \times 10^{-4} \text{ nC/m}^2$   
 3.9 (a)  $164 \text{ pC}$  (b)  $130 \text{ nC/m}^2$  (c)  $32,5 \text{ nC/m}^2$   
 3.11  $\mathbf{D} = 0$  ( $\rho \leq 1 \text{ mm}$ );  

$$D_\rho = \frac{10^{-15}}{2\pi^2\rho} [\text{sen}(2000\pi\rho) + 2\pi[1 - 10^3\rho \cos(2000\pi\rho)]] \text{ C/m}^2$$
 ( $1 \text{ mm} \leq \rho \leq 1,5 \text{ mm}$ );  

$$D_\rho = \frac{2,5 \times 10^{-15}}{\pi\rho} \text{ C/m}^2$$
 ( $\rho \geq 1,5 \text{ mm}$ )  
 3.13 (a)  $D_r(r \leq 2) = 0$ ;  $D_r(r = 3) = 8,9 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$   
 $D_r(r = 5) = 6,4 \times 10^{-10} \text{ C/m}^2$   
 (b)  $\rho_{s0} = -(4/9) \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$   
 3.15 (a)  $[(8\pi L)/3][\rho_1^3 - 10^{-9}] \mu\text{C}$  onde  $\rho_1$  está em metros  
 (b)  $4(\rho_1^3 - 10^{-9})/(3\rho_1) \mu\text{C/m}^2$  onde  $\rho_1$  está em metros  
 (c)  $D_\rho(0,8 \text{ mm}) = 0$ ;  $D_\rho(1,6 \text{ mm}) = 3,6 \times 10^{-6} \mu\text{C/m}^2$ ;  $D_\rho(2,4 \text{ mm}) = 3,9 \times 10^{-6} \mu\text{C/m}^2$   
 3.17 (a)  $0,1028 \text{ C}$  (b)  $12,83$  (c)  $0,1026 \text{ C}$   
 3.19  $113 \text{ nC}$   
 3.21 (a)  $8,96$  (b)  $71,67$  (c)  $-2$   
 3.23 (b)  $\rho_{v0} = 3Q/(4\pi a^3)$  ( $0 \leq r \leq a$ );  $D_r = Qr/4\pi a^3$   
 e  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 3Q/(4\pi a^3)$  ( $0 \leq r \leq a$ );  
 $D_r = Q/(4\pi r^2)$  e  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  ( $r > a$ )  
 3.25 (a)  $17,50 \text{ C/m}^3$  (b)  $5\mathbf{a}_r \text{ C/m}^2$  (c)  $320\pi \text{ C}$  (d)  $320\pi \text{ C}$   
 3.27 (a)  $1,20 \text{ mC/m}^3$  (b)  $0$  (c)  $-32 \mu\text{C/m}^2$   
 3.29 (a)  $3,47 \text{ C}$  (b)  $3,47 \text{ C}$   
 3.31  $-3,91 \text{ C}$

### Capítulo 4

- 4.1 (a)  $-12 \text{ nJ}$  (b)  $24 \text{ nJ}$  (c)  $-36 \text{ nJ}$  (d)  $-44,9 \text{ nJ}$   
 (e)  $-41,8 \text{ nJ}$   
 4.3 (a)  $3,1 \mu\text{J}$  (b)  $3,1 \mu\text{J}$   
 4.5 (a)  $2$  (b)  $-2$   
 4.7 (a)  $90$  (b)  $82$

- 4.9 (a)  $8,14 \text{ V}$  (b)  $1,36 \text{ V}$   
 4.11  $1,98 \text{ kV}$   
 4.13  $576 \text{ pJ}$   
 4.15  $-68,4 \text{ V}$   
 4.17 (a)  $-3,026 \text{ V}$  (b)  $-9,678 \text{ V}$   
 4.19  $0,081 \text{ V}$   
 4.21 (a)  $-15,0 \text{ V}$  (b)  $15,0 \text{ V}$   
 (c)  $7,1\mathbf{a}_x + 22,8\mathbf{a}_y - 71,1\mathbf{a}_z \text{ V/m}$   
 (d)  $75,0 \text{ V/m}$   
 (e)  $-0,095\mathbf{a}_x - 0,304\mathbf{a}_y + 0,948\mathbf{a}_z$   
 (f)  $62,8\mathbf{a}_x + 202\mathbf{a}_y - 629\mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$   
 4.23 (a)  $-48\rho^{-4} \text{ V/m}$  (b)  $-673 \text{ pC/m}^3$  (c)  $-1,96 \text{ nC}$   
 4.25 (a)  $V_p = 279,9 \text{ V}$ ,  $\mathbf{E}_p = -179,9\mathbf{a}_\rho - 75,0\mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$ ,  
 $\mathbf{D}_p = -1,59\mathbf{a}_\rho - 0,664\mathbf{a}_\phi \text{ nC/m}^2$ ,  $\rho_{vp} = -443 \text{ pC/m}^3$   
 (b)  $-5,56 \text{ nC}$   
 4.27 (a)  $5,78 \text{ V}$  (b)  $25,2 \text{ V/m}$  (c)  $5,76 \text{ V}$   
 4.29  $1,31 \text{ V}$   
 4.31 (a)  $387 \text{ pJ}$  (b)  $207 \text{ pJ}$   
 4.33 (a)  $(5 \times 10^{-6})/(4\pi r^2)\mathbf{a}_r \text{ C/m}^2$   
 (b)  $2,81 \text{ J}$  (c)  $4,45 \text{ pF}$   
 4.35 (a)  $0,779 \mu\text{J}$  (b)  $1,59 \mu\text{J}$

### Capítulo 5

- 5.1 (a)  $-1,23 \text{ MA}$  (b)  $0$  (c)  $0$ , conforme esperado  
 5.3 (a)  $77,4 \text{ A}$  (b)  $53,0\mathbf{a}_r \text{ A/m}^2$   
 5.5 (a)  $-178,0 \text{ A}$  (b)  $0$  (c)  $0$   
 5.7 (a) densidade de fluxo de massa em  $(\text{kg/m}^2 - s)$  e densidade de massa em  $(\text{kg/m}^3)$  (b)  $-550 \text{ g/m}^3 - s$   
 5.9 (a)  $0,28 \text{ mm}$  (b)  $6,0 \times 10^7 \text{ A/m}^2$   
 5.11 (a)  $\mathbf{E} = [(9,55)/\rho l]\mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$ ,  $V = (4,88)/l \text{ V}$  e  $R = (1,63)/l\Omega$ , onde  $l$  é o comprimento do cilindro (não dado) (b)  $14,64/l \text{ W}$   
 5.13 (a)  $0,147 \text{ V}$  (b)  $0,144 \text{ V}$   
 5.15 (a)  $(\rho + 1)z^2 \cos \phi = 2$   
 (b)  $\rho = 0,10$ ,  $\mathbf{E}(0,10, 0,2\pi, 1,5) = -18,2\mathbf{a}_\rho + 145\mathbf{a}_\phi - 26,7\mathbf{a}_z \text{ V/m}$  (c)  $1,32 \text{ nC/m}^2$   
 5.17 (a)  $\mathbf{D}(z = 0) = -(100\epsilon_0 x)/(x^2 + 4)\mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$   
 (c)  $-0,92 \text{ nC}$   
 5.19 (a) Em  $0 \text{ V}$ :  $2x^2y - z = 0$ . Em  $60 \text{ V}$ :  $2x^2y - z = 6/z$   
 (b)  $1,04 \text{ nC/m}^2$  (c)  $-[0,60\mathbf{a}_x + 0,68\mathbf{a}_y + 0,43\mathbf{a}_z]$   
 5.21 (a)  $1,20 \text{ kV}$  (b)  $\mathbf{E}_p = 723\mathbf{a}_x - 18,9\mathbf{a}_y \text{ V/m}$   
 5.23 (a)  $289,5 \text{ V}$  (b)  $z/[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{1,5} - z/[(x+1)^2 + y^2 + z^2]^{1,5} = 0,222$   
 5.25 (a)  $4,7 \times 10^{-3} \text{ S/m}$  (b)  $1,1 \times 10^{-3} \text{ S/m}$   
 (c)  $1,2 \times 10^{-2} \text{ S/m}$

**Capítulo 6**

- 6.1** (a)  $6,26 \text{ pC/m}^2$  (b)  $1,000176$
- 6.3** (a)  $\mathbf{E} = [(144,9)/\rho] \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$ ,  $\mathbf{D} = (3,28 \mathbf{a}_\rho)/\rho \text{ nC/m}^2$   
 (b)  $V_{ab} = 192 \text{ V}$ ,  $\chi_e = 1,56$  (c)  $[(5,0 \times 10^{-20})/\rho] \mathbf{a}_\rho \text{ C} \cdot \text{m}$
- 6.5** (a)  $80 \text{ V/m}$  (b)  $-60 \mathbf{a}_y - 30 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$  (c)  $67,1 \text{ V/m}$   
 (d)  $104,4 \text{ V/m}$  (e)  $40,0^\circ$  (f)  $2,12 \text{ nC/m}^2$  (g)  $2,97 \text{ nC/m}^2$  (h)  $2,12 \mathbf{a}_x - 2,66 \mathbf{a}_y - 1,33 \mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$   
 (i)  $1,70 \mathbf{a}_x - 2,13 \mathbf{a}_y - 1,06 \mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$  (j)  $54,5^\circ$
- 6.7**  $125 \mathbf{a}_x + 175 \mathbf{a}_y \text{ V/m}$
- 6.9** (a)  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1$  (b)  $W_{E1} = 45,1 \text{ } \mu\text{J}$ ,  $W_{E2} = 338 \text{ } \mu\text{J}$
- 6.11** titanato de bário
- 6.13**  $451 \text{ pF}$
- 6.15** (a)  $3,05 \text{ nF}$  (b)  $5,21 \text{ nF}$  (c)  $6,32 \text{ nF}$  (d)  $9,83 \text{ nF}$
- 6.17** (a)  $143 \text{ pF}$  (b)  $101 \text{ pF}$
- 6.19** (a)  $53,3 \text{ pF}$  (b)  $41,7 \text{ pF}$
- 6.21**  $K_1 = 23,0, \rho_L = 8,87 \text{ nC/m}$ ,  $a = 13,8 \text{ m}$ ,  
 $C = 35,5 \text{ pF}$
- 6.23** (a)  $473 \text{ nC/m}^2$  (b)  $-15,8 \text{ nC/m}^2$
- 6.25** Valor exato:  $57 \text{ pF/m}$
- 6.27** Valor exato:  $11 \epsilon_0 \text{ F/m}$
- 6.29** (b)  $C \approx 110 \text{ pF/m}$  (c) O resultado não mudaria.
- 6.31** (a)  $3,64 \text{ nC/m}$  (b)  $206 \text{ mA}$

**Capítulo 7**

- 7.1** (a)  $-8 \text{ V}$  (b)  $8 \mathbf{a}_x - 8 \mathbf{a}_y - 24 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$   
 (c)  $-4xz(z^2 + 3y^2) \text{ C/m}^3$   
 (d)  $xy^2z^3 = -4$  (e)  $y^2 - 2x^2 = 2$  e  $3x^2 - z^2 = 2$   
 (f) Não
- 7.3**  $f(x,y) = -4e^{2x} + 3x^2, V(x,y) = 3(x^2 - y^2)$
- 7.5** (b)  $A = 112,5, B = -12,5$  ou  
 $A = -12,5, B = 112,5$
- 7.7** (a)  $-106 \text{ pC/m}^3$  (b)  $\pm 0,399 \text{ pC/m}^2$  (dependendo de qual lado da superfície é considerado)
- 7.9** (a) sim, sim, sim, não (b) Na superfície de  $100 \text{ V}$ , não para todas. Nas superfícies de  $0 \text{ V}$ , sim, exceto para  $V_1 + 3$ . (c) Apenas  $V_2$  é
- 7.11** (a)  $33,33 \text{ V}$  (b)  $[(100)/3] \mathbf{a}_z + 50 \mathbf{a}_y \text{ V/m}$
- 7.13** (a)  $1,01 \text{ cm}$  (b)  $22,8 \text{ kV/m}$  (c)  $3,15$
- 7.15** (a)  $(-2,00 \times 10^4) \phi + 3,78 \times 10^3 \text{ V}$   
 (b)  $[(2,00 \times 10^4)/\rho] \mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$   
 (c)  $(2,00 \times 10^4 \epsilon_0/\rho) \mathbf{a}_\phi \text{ C/m}^2$   
 (d)  $[(2,00 \times 10^4)/\rho] \text{ C/m}^2$   
 (e)  $84,7 \text{ nC}$

- (f)  $V(\phi) = 28,7 \phi + 194,9 \text{ V}$ ,  $\mathbf{E} = -(28,7)/\rho \mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$ ,  $\mathbf{D} = -(28,7 \epsilon_0)/\rho \mathbf{a}_\phi \text{ C/m}^2$ ,  $\rho_s = (28,7 \epsilon_0)/\rho \text{ C/m}^2$ ,  $Q_b = 122 \text{ pC}$  (g)  $471 \text{ pF}$

- 7.17** (a)  $12,5 \text{ mm}$  (b)  $26,7 \text{ kV/m}$  (c)  $4,23$  (com  $\rho_s = 1,0 \text{ } \mu\text{C/m}^2$  dado)
- 7.19** (a)  $\alpha_A = 26,57^\circ$ ,  $\alpha_B = 56,31^\circ$  (b)  $23,3 \text{ V}$
- 7.21** (a)  $833,3r^{-0,4} \text{ V}$  (b)  $833,3r^{-0,4} \text{ V}$
- 7.23**  $71,9173 \text{ V}$
- 7.25**  $12,5 \text{ V}$
- 7.27** (a) Não (b) Sim (c) Sim (d) Não (e) Não
- 7.29**  $38 \text{ V}$
- 7.31**  $40 \text{ V}$
- 7.33** (b)  $90 \text{ V}$
- 7.35** sentido anti-horário começando acima à esquerda:  
 (a)  $48, 42, 19, 34, 19, 42, 48$  (b)  $48, 40, 19, 30, 19, 40, 48$  (c)  $47,3, 37,1, 17,4, 27,4, 17,4, 37,1, 47,3$

**Capítulo 8**

- 8.1** (a)  $-294 \mathbf{a}_x + 196 \mathbf{a}_y \text{ } \mu\text{A/m}$   
 (b)  $-127 \mathbf{a}_x + 382 \mathbf{a}_y \text{ } \mu\text{A/m}$   
 (c)  $-421 \mathbf{a}_x + 578 \mathbf{a}_y \text{ } \mu\text{A/m}$
- 8.3** (a)  $\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \left[ 1 - \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right] \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$   
 (b)  $1/\sqrt{3}$
- 8.5**  $\mathbf{H} = \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \frac{2}{y^2 + 2y + 5} - \frac{2}{y^2 - 2y + 5} \right)^2 + \left( \frac{y-1}{y^2 - 2y + 5} - \frac{y+1}{y^2 + 2y + 5} \right)^2 \right]^{1/2}$
- 8.7** (a)  $0,53 \mathbf{a}_x + 0,80 \mathbf{a}_y + 0,27 \mathbf{a}_z$  (b)  $5,73 \text{ } \mu\text{A/m}$   
 (c)  $\pm(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z)/\sqrt{3}$
- 8.9**  $-1,50 \mathbf{a}_y \text{ A/m}$
- 8.11**  $2,0 \text{ A/m}$ ,  $933 \text{ mA/m}$ ,  $360 \text{ mA/m}$ ,  $0$
- 8.13** (e)  $H_z(a \leq \rho \leq b) = k_b$ ;  $H_z(\rho \geq b) = 0$
- 8.15** (a)  $45e^{-150\rho} \mathbf{a}_z \text{ kA/m}^2$   
 (b)  $12,6[1 - (1 + 150\rho_0)e^{-150\rho_0}] \text{ A}$   
 (c)  $\frac{2,00}{\rho} [1 - (1 + 150\rho)e^{-150\rho}] \text{ A/m}$
- 8.17** (a)  $2,2 \times 10^{-1} \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$  (do lado de dentro),  
 $2,3 \times 10^{-2} \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$  (do lado de fora)  
 (b)  $3,4 \times 10^{-1} \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$   
 (c)  $1,3 \times 10^{-1} \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$  (d)  $-1,3 \times 10^{-1} \mathbf{a}_z \text{ A/m}$

- 8.19 0  
 8.21  $530\mathbf{a}_x + 460\mathbf{a}_y - 148\mathbf{a}_z$   
 8.23 (a)  $60\rho\mathbf{a}_z$  A/m<sup>2</sup> (b)  $40\pi$  A (c)  $40\pi$  A  
 8.25 (a)  $-259$  A (b)  $-259$  A  
 8.27 (a)  $2(x + 2y)/z^3\mathbf{a}_x + 1/z^2\mathbf{a}_z$  A/m (b) o mesmo da parte (a) (c)  $1/8$  A  
 8.29 (a)  $1.59 \times 10^7\mathbf{a}_z$  A/m<sup>2</sup> (b)  $7.96 \times 10^6\rho\mathbf{a}_\phi$  A/m,  $10\rho\mathbf{a}_\phi$  Wb/m<sup>2</sup> (c) conforme esperado  
 (d)  $1/(\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$  A/m,  $\mu_0/(\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$  Wb/m<sup>2</sup>  
 (e) conforme esperado  
 8.31 (a)  $0.392 \mu\text{Wb}$  (b)  $1.49 \mu\text{Wb}$  (c)  $27 \mu\text{Wb}$   
 8.35 (a)  $-40\phi$  A ( $2 \leq \rho \leq 4$ ),  $0$  ( $\rho \geq 4$ )  
 (b)  $40\mu_0 \ln(3/\rho)\mathbf{a}_z$  Wb/m  
 8.37  $[120 - (400/\pi)\phi]$  A ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ )  
 8.39 (a)  $-30\mathbf{a}_y$  A/m (b)  $30y - 6$  A  
 (c)  $-30\mu_0\mathbf{a}_y$  Wb/m<sup>2</sup> (d)  $\mu_0(30x - 3)\mathbf{a}_z$  Wb/m  
 8.41 (a)  $-100\rho/\mu_0\mathbf{a}_\phi$  A/m,  $-100\rho\mathbf{a}_\phi$  Wb/m<sup>2</sup>  
 (b)  $-\frac{200}{\mu_0}\mathbf{a}_z$  A/m<sup>2</sup> (c)  $-500$  MA (d)  $-500$  MA  
 8.43  $A_z = \frac{\mu_0 I}{96\pi} \left[ \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 25 \right) + 98 \ln \left( \frac{5a}{\rho} \right) \right] \text{Wb/m}$

### Capítulo 9

- 9.1 (a)  $(0.90, 0, -0.135)$  (b)  $3 \times 10^5\mathbf{a}_x - 9 \times 10^4\mathbf{a}_z$  m/s  
 (c)  $1.5 \times 10^{-5}$  J  
 9.3 (a)  $0.70\mathbf{a}_x + 0.70\mathbf{a}_y - 0.12\mathbf{a}_z$  (b)  $7.25$  fJ  
 9.5 (a)  $-18\mathbf{a}_x$  nN (b)  $19.8\mathbf{a}_z$  nN (c)  $36\mathbf{a}_x$  nN  
 9.7 (a)  $-35.2\mathbf{a}_y$  nN/m (b) 0 (c) 0  
 9.9  $4\pi \times 10^{-5}$  N/m  
 9.13 (a)  $-1.8 \times 10^{-4}\mathbf{a}_y$  N · m  
 (b)  $-1.8 \times 10^{-4}\mathbf{a}_y$  N · m  
 (c)  $-1.5 \times 10^{-5}\mathbf{a}_y$  N · m  
 9.15  $(6 \times 10^{-6})[b - 2 \text{tg}^{-1}(b/2)]\mathbf{a}_y$  N · m  
 9.17  $\Delta w/w = \Delta m/m = 1.3 \times 10^{-6}$   
 9.19 (a)  $77.6y\mathbf{a}_z$  kA/m (b)  $5.15 \times 10^{-6}$  H/m  
 (c)  $4.1$  (d)  $241y\mathbf{a}_z$  kA/m (e)  $77.6\mathbf{a}_x$  kA/m<sup>2</sup>  
 (f)  $241\mathbf{a}_x$  kA/m<sup>2</sup> (g)  $318\mathbf{a}_x$  kA/m<sup>2</sup>  
 9.21 (Use  $\chi_m = 0.003$ ) (a)  $47.7$  A/m (b)  $6.0$  A/m  
 (c)  $0.288$  A/m  
 9.23 (a)  $637$  A/m,  $1.91 \times 10^{-3}$  Wb/m<sup>2</sup>,  $884$  A/m  
 (b)  $478$  A/m,  $2.39 \times 10^{-3}$  Wb/m<sup>2</sup>,  $1.42 \times 10^3$  A/m  
 (c)  $382$  A/m,  $3.82 \times 10^{-3}$  Wb/m<sup>2</sup>,  $2.66 \times 10^3$  A/m  
 9.25 (a)  $1.91/\rho$  A/m ( $0 \leq \rho \leq \infty$ )  
 (b)  $(2.4 \times 10^{-6}/\rho)\mathbf{a}_\phi$  T ( $\rho \leq 0.01$ ),  
 $(1.4 \times 10^{-5}/\rho)\mathbf{a}_\phi$  T ( $0.01 \leq \rho \leq 0.02$ )  
 $(2.4 \times 10^{-6}/\rho)\mathbf{a}_\phi$  T ( $\rho \geq 0.02$ ) ( $\rho$  em metros)  
 9.27 (a)  $-4.83\mathbf{a}_x - 7.24\mathbf{a}_y + 9.66\mathbf{a}_z$  A/m  
 (b)  $54.83\mathbf{a}_x - 22.76\mathbf{a}_y + 10.34\mathbf{a}_z$  A/m

- (c)  $54.83\mathbf{a}_x - 22.76\mathbf{a}_y + 10.34\mathbf{a}_z$  A/m  
 (d)  $-1.93\mathbf{a}_x - 2.90\mathbf{a}_y + 3.86\mathbf{a}_z$  A/m  
 (e)  $102^\circ$  (f)  $95^\circ$

- 9.29  $10.5$  mA  
 9.31 (a)  $2.8 \times 10^{-4}$  Wb (b)  $2.1 \times 10^{-4}$  Wb  
 (c)  $\approx 2.5 \times 10^{-4}$  Wb  
 9.33 (a)  $23.9/\rho$  A/m (b)  $3.0 \times 10^{-4}/\rho$  Wb/m<sup>2</sup>  
 (c)  $5.0 \times 10^{-7}$  Wb  
 (d)  $23.9/\rho$  A/m,  $6.0 \times 10^{-4}/\rho$  Wb/m<sup>2</sup>,  $1.0 \times 10^{-6}$  Wb  
 (e)  $1.5 \times 10^{-6}$  Wb  
 9.35 (a)  $20/(\pi r \text{sen } \theta)\mathbf{a}_\phi$  A/m (b)  $1.35 \times 10^{-4}$  J  
 9.37  $0.17 \mu\text{H}$   
 9.39 (a)  $(1/2)w\mu_0 K_0^2$  J/m (b)  $\mu_0 d/w$  H/m  
 (c)  $\Phi = \mu_0 d K_0$  Wb  
 9.41 (a)  $33 \mu\text{H}$  (b)  $24 \mu\text{H}$   
 9.43 (b)  

$$L_{\text{int}} = \frac{2W_H}{I^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \left[ \frac{d^4 - 4a^2c^2 + 3c^4 + 4c^4 \ln(a/c)}{(a^2 - c^2)^2} \right]$$

### Capítulo 10

- 10.1 (a)  $-5.33 \text{sen } 120\pi t$  V (b)  $21.3 \text{sen } (120\pi t)$  mA  
 10.3 (a)  $-1.13 \times 10^5 [\cos(3 \times 10^8 t - 1) - \cos(3 \times 10^8 t)]$  V (b) 0  
 10.5 (a)  $-4.32$  V (b)  $-0.293$  V  
 10.7 (a)  $(-1.44)/(9.1 + 39.6t)$  A  
 (b)  $-1.44 \left[ \frac{1}{61.9 - 39.6t} + \frac{1}{9.1 + 39.6t} \right]$  A  
 10.9  $2.9 \times 10^3 [\cos(1.5 \times 10^8 t - 0.13x) - \cos(1.5 \times 10^8 t)]$  W  
 10.11 (a)  $\left( \frac{10}{\rho} \right) \cos(10^5 t)\mathbf{a}_\rho$  A/m<sup>2</sup> (b)  $8\pi \cos(10^5 t)$  A  
 (c)  $-0.8\pi \text{sen}(10^5 t)$  A (d)  $0.1$   
 10.13 (a)  $\mathbf{D} = 1.33 \times 10^{-13} \text{sen}(1.5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_y$  C/m<sup>2</sup>,  $\mathbf{E} = 3.0 \times 10^{-3} \text{sen}(1.5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_y$  V/m  
 (b)  $\mathbf{B} = (2.0)b \times 10^{-11} \text{sen}(1.5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_z$  T,  
 $\mathbf{H} = (4.0 \times 10^{-6})b \text{sen}(1.5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_z$  A/m  
 (c)  $4.0 \times 10^{-6} b^2 \cos(1.5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_y$  A/m<sup>2</sup>  
 (d)  $\sqrt{5.0} \text{ m}^{-1}$   
 10.15  $\mathbf{B} = 6 \times 10^{-5} \cos(10^{10} t - \beta x)\mathbf{a}_z$  T,  $\mathbf{D} = -(2\beta \times 10^{-10}) \cos(10^{10} t - \beta x)\mathbf{a}_y$  C/m<sup>2</sup>,  
 $\mathbf{E} = -1.67 \beta \cos(10^{10} t - \beta x)\mathbf{a}_y$  V/m,  $\beta = \pm 600$  rad/m  
 10.17  $a = 66 \text{ m}^{-1}$   
 10.21 (a)  $\pi \times 10^9 \text{sec}^{-1}$   
 (b)  $\frac{500}{\rho} \text{sen}(10\pi z) \text{sen}(\omega t)\mathbf{a}_\rho$  V/m

- 10.23** (a)  $\mathbf{E}_{N1} = 10 \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z$  V/m  
 $\mathbf{E}_{t1} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t)$  V/m  
 $\mathbf{D}_{N1} = 200 \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z$  pC/m<sup>2</sup>  
 $\mathbf{D}_{t1} = (600\mathbf{a}_x + 400\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t)$  pC/m<sup>2</sup>  
 (b)  $\mathbf{J}_{N1} = 40 \cos(10^9 t) \mathbf{a}_z$  mA/m<sup>2</sup>  
 $\mathbf{J}_{t1} = (120\mathbf{a}_x + 80\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t)$  mA/m<sup>2</sup>  
 (c)  $\mathbf{E}_{t2} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t)$  V/m  
 $\mathbf{D}_{t2} = (300\mathbf{a}_x + 200\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t)$  pC/m<sup>2</sup>  
 $\mathbf{J}_{t2} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y) \cos(10^9 t)$  mA/m<sup>2</sup>  
 (d)  $\mathbf{E}_{N2} = 20,3 \cos(10^9 t + 5,6^\circ) \mathbf{a}_z$  V/m  
 $\mathbf{D}_{N2} = 203 \cos(10^9 t + 5,6^\circ) \mathbf{a}_z$  pC/m<sup>2</sup>  
 $\mathbf{J}_{N2} = 20,3 \cos(10^9 t + 5,6^\circ) \mathbf{a}_z$  mA/m<sup>2</sup>

- 10.25** (b)  $\mathbf{B} = \left(t - \frac{z}{c}\right) \mathbf{a}_y$  T  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \left(t - \frac{z}{c}\right) \mathbf{a}_y$  A/m  
 $\mathbf{E} = (ct - z) \mathbf{a}_x$  V/m  $\mathbf{D} = \epsilon_0(ct - z) \mathbf{a}_x$  C/m<sup>2</sup>

**Capítulo 11**

- 11.1** (a)  $\gamma = 0,104 + j2,40$  m<sup>-1</sup>,  
 $\alpha = 0,104$  Np/m,  $\beta = 2,40$  rad/m,  $\lambda = 2,62$  m,  
 $Z_0 = 100 - j4,0$  Ω (b) 12,5%  $2,75 \times 10^3$  graus  
**11.3** (a) 96 pF (b)  $1,44 \times 10^8$  m/s (c) 3,5 rad/m  
 (d)  $\Gamma = -0,09$ ,  $s = 1,2$   
**11.5** (a) 83,3 nH/m, 33,3 pF/m (b) 65 cm  
**11.7** 7,9 mW  
**11.9** (a)  $\lambda/8$  (b)  $\lambda/8 + m\lambda/2$   
**11.11** (a)  $V_{\theta}^2/R_L$  (b)  $R_L V_{\theta}^2/(R\ell + R_L)^2$   
 (c)  $V_{\theta}^2/R_L$  (d)  $(V_{\theta}^2/R_L) \exp(-2\ell\sqrt{RG})$   
**11.13** (a) 6,28  $\times 10^8$  rad/s (b)  $4 \cos(\omega t - \pi z)$  A  
 (c) 0,287  $\angle$  1,28 rad (d)  $57,5 \exp[j(\pi z + 1,28)]$  V  
 (e)  $257,5 \angle 36^\circ$  V  
**11.15** (a) 104 V (b)  $52,6 - j123$  V  
**11.17**  $P_{25} = 2,28$  W,  $P_{100} = 1,16$  W  
**11.19** 16,5 W  
**11.21** (a)  $s = 2,62$  (b)  $Z_L = 1,04 \times 10^3 + j69,8$  Ω  
 (c)  $z_{\max} = -7,2$  mm  
**11.23** (a) 0,037λ ou 0,74 m (b) 2,61 (c) 2,61(d)  $0,463\lambda$   
 ou 9,26 m  
**11.25** (a)  $495 + j290$  Ω (b)  $j98$  Ω  
**11.27** (a) 2,6 (b)  $11 - j7,0$  mS (c) 0,213λ  
**11.29**  $47,8 + j49,3$  Ω  
**11.31** (a) 3,8 cm (b) 14,2 cm  
**11.33** (a)  $d_1 = 7,6$  cm,  $d = 17,3$  cm (b)  $d_1 = 1,8$  cm,  
 $d = 6,9$  cm  
**11.35** (a) 39,6 cm (b) 24 pF

- 11.37**  $V_L = (2/3)V_0$  ( $\ell/v \leq t \leq \infty$ ) e vale zero para  
 $t < \ell/v$ .  $I_B = (V_0/75)$  para  $0 \leq t \leq \infty$ .

**11.39**

$$\frac{\ell}{v} < t < \frac{5\ell}{4v} : V_1 = 0,44 V_0$$

$$\frac{3\ell}{v} < t < \frac{13\ell}{4v} : V_2 = -0,15 V_0$$

$$\frac{5\ell}{v} < t < \frac{21\ell}{4v} : V_3 = 0,049 V_0$$

$$\frac{7\ell}{v} < t < \frac{29\ell}{4v} : V_4 = -0,017 V_0$$

As tensões entre esses valores valem zero.

**11.41**

$$0 \leq t \leq \frac{\ell}{2v} : V_L = 0$$

$$\frac{\ell}{2v} \leq t \leq \frac{3\ell}{2v} : V_L = \frac{V_0}{2}$$

$$t \geq \frac{3\ell}{2v} : V_L = V_0$$

**Capítulo 12**

- 12.3** (a) 0,33 rad/m (b) 18,9 m (c)  $-3,76 \times 10^3 \mathbf{a}_z$  V/m  
**12.5** (a)  $\omega = 3\pi \times 10^8$  sec<sup>-1</sup>,  $\lambda = 2$  m, e  $\beta = \pi$  rad/m  
 (b)  $-8,5\mathbf{a}_x - 9,9\mathbf{a}_y$  A/m (c) 9,08 kV/m  
**12.7**  $\beta = 25$  m<sup>-1</sup>,  $\eta = 278,5$  Ω,  $\lambda = 25$  cm,  
 $v_p = 1,01 \times 10^8$  m/s,  $\epsilon_R = 4,01$ ,  $\mu_R = 2,19$  e  
 $\mathbf{H}(x, y, z, t) = 2 \cos(8\pi \times 10^8 t - 25x) \mathbf{a}_y$   
 $+ 5 \sin(8\pi \times 10^8 t - 25x) \mathbf{a}_z$  A/m  
**12.9** (a)  $\beta = 0,4\pi$  rad/m,  $\lambda = 5$  m,  $v_p = 5 \times 10^7$  m/s e  
 $\eta = 251$  Ω (b)  $-403 \cos(2\pi \times 10^7 t)$  V/m  
 (c) 1,61  $\cos(2\pi \times 10^7 t)$  A/m  
**12.11** (a) 0,74 kV/m (b)  $-3,0$  A/m  
**12.13**  $\mu = 2,28 \times 10^{-6}$  H/m,  $\epsilon' = 1,07 \times 10^{-11}$  F/m e  
 $\epsilon'' = 2,90 \times 10^{-12}$  F/m  
**12.15** (a)  $\lambda = 3$  cm,  $\alpha = 0$  (b)  $\lambda = 2,95$  cm,  
 $\alpha = 9,24 \times 10^{-2}$  Np/m (c)  $\lambda = 1,33$  cm,  
 $\alpha = 335$  Np/m  
**12.17**  $\langle S_z \rangle(z = 0) = 315 \mathbf{a}_z$  W/m<sup>2</sup>,  
 $\langle S_z \rangle(z = 0,6) = 248 \mathbf{a}_z$  W/m<sup>2</sup>  
**12.19** (a)  $\omega = 4 \times 10^8$  rad/s  
 (b)  $\mathbf{H}(\rho, z, t) = (4,0/\rho) \cos(4 \times 10^8 t - 4z) \mathbf{a}_\phi$  A/m  
 (c)  $\langle S \rangle = (2,0 \times 10^{-3}/\rho^2) \cos^2(4 \times 10^8 t - 4z) \mathbf{a}_z$   
 W/m<sup>2</sup> (d)  $P = 5,7$  kW

- 12.21** (a)  $H_{\phi_1}(\rho) = (54,5/\rho)(10^4\rho^2 - 1)$  A/m  
 $(0,01 \leq \rho \leq 0,012)$ ,  $H_{\phi_2}(\rho) = (24/\rho)$  A/m  
 $(\rho \geq 0,012)$ ,  $H_{\phi} = 0$  ( $\rho \leq 0,01$  m)  
 (b)  $\mathbf{E} = 1,09\mathbf{a}_z$  V/m  
 (c)  $\langle S \rangle = -(59,4/\rho)(10^4\rho^2 - 1)\mathbf{a}_\rho$  W/m<sup>2</sup>  
 $(0,01 \leq \rho \leq 0,012$  m),  $-(26/\rho)\mathbf{a}_\rho$  W/m<sup>2</sup> ( $\rho \geq 0,12$  m)
- 12.23** (a)  $1,4 \times 10^{-3}\Omega/\text{m}$  (b)  $4,1 \times 10^{-2}\Omega/\text{m}$   
 (c)  $4,1 \times 10^{-1}\Omega/\text{m}$
- 12.25**  $f = 1$  GHz,  $\sigma = 1,1 \times 10^5$  S/m
- 12.27** (a)  $4,7 \times 10^{-8}$  (b)  $3,2 \times 10^3$  (c)  $3,2 \times 10^3$
- 12.29** (a)  $\mathbf{H}_s = (E_0/\eta_0)(\mathbf{a}_y - j\mathbf{a}_x)e^{-j\beta z}$   
 (b)  $\langle S \rangle = (E_0^2/\eta_0)\mathbf{a}_z$  W/m<sup>2</sup> (assumindo que  $E_0$  é real)
- 12.31** (a)  $L = 14,6\lambda$  (b) Esquerda
- 12.33** (a)  $\mathbf{H}_s = (1/\eta)[-18e^{j\phi}\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$  A/m  
 (b)  $\langle S \rangle = 275 \text{ Re} \{ (1/\eta^*) \}$  W/m<sup>2</sup>

### Capítulo 13

- 13.1** 0,01%
- 13.3** 0,056 e 17,9
- 13.5** (a)  $4,7 \times 10^8$  Hz (b)  $691 + j177\Omega$  (c)  $-1,7$  cm
- 13.7** (a)  $s_1 = 1,96$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = 1$  (b)  $-0,81$  m
- 13.9** (a)  $6,25 \times 10^{-2}$  (b) 0,938 (c) 1,67
- 13.11**  $641 + j501\Omega$
- 13.13** Onda refletida: polarização circular à esquerda; fração da potência: 0,09. Onda transmitida: polarização circular à direita; fração da potência: 0,91
- 13.15** (a) 1,2 GHz (b) 1,27
- 13.17** (a)  $s = 2,13$  e  $1 - |\Gamma|^2 = 0,87$  (b)  $s = 1$  e  $1 - |\Gamma|^2 = 1$
- 13.19** (a)  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$  ou  $d_1 = d_3 = 0$ ,  $d_2 = \lambda/2$   
 (b)  $d_1 = d_2 = d_3 = \lambda/4$
- 13.21** (a) Potência refletida: 15%. Potência transmitida: 85% (b) Onda refletida: polarização s. Onda transmitida: polarização elíptica à direita.

$$\mathbf{13.23} \quad n_0 = (n_1/n_2)\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$\mathbf{13.25} \quad 0,76$$

$$\mathbf{13.27} \quad 2$$

$$\mathbf{13.29} \quad 4,3 \text{ km}$$

### Capítulo 14

#### 14.1

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[ \frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{b^2 - (3/4)c^2}{(c^2 - b^2)} \right] J$$

$$\mathbf{14.3} \quad 14,2 \text{ pF/m}, 0,786 \mu\text{H/m}, 0, 0,023 \Omega/\text{m}$$

$$\mathbf{14.5} \quad (a) 2,8 \text{ (b) } 5,85 \times 10^{-2}$$

$$\mathbf{14.7} \quad (a) 5,0 \text{ (b) } 1,6$$

$$\mathbf{14.9} \quad 9$$

$$\mathbf{14.11} \quad 9$$

$$\mathbf{14.13} \quad 1,5 \text{ ns}$$

$$\mathbf{14.15} \quad (a) 12,8 \text{ GHz (b) Sim}$$

$$\mathbf{14.17} \quad (a) 2,5 \text{ GHz} \leq f \leq 3,75 \text{ GHz (preenchido com ar)}$$

$$(b) 3,75 \text{ GHz} \leq f \leq 4,5 \text{ GHz (preenchido com ar)}$$

$$\mathbf{14.19} \quad a = 1,1 \text{ cm}, b = 0,90 \text{ cm}$$

$$\mathbf{14.23} \quad 72 \text{ cm}$$

$$\mathbf{14.25} \quad 3,32$$

$$\mathbf{14.27} \quad (a) \theta_{\min} = \text{sen}^{-1}(n_2/n_1) \text{ (b) } v_{p,\max} = c/n_3$$

$$\mathbf{14.29} \quad \text{maior que}$$

$$\mathbf{14.31} \quad (a) -0,284\mathbf{a}_x - 0,959\mathbf{a}_z \text{ (b) } 0,258$$

$$\mathbf{14.33} \quad (a) -j(1,5 \times 10^{-2})e^{-j1000}\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

$$(b) -j(1,5 \times 10^{-2})e^{-j1000}\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

$$(c) -j(1,5 \times 10^{-2})(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \text{ V/m}$$

$$(d) -(1,24 \times 10^{-2})(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \text{ V/m}$$

$$(e) 1,75 \times 10^{-2} \text{ V/m}$$

$$\mathbf{14.35} \quad (a) 85,4 \text{ A (b) } 5,03 \text{ A}$$

$$\mathbf{14.37} \quad (a) 0,2e^{-j1000\pi} \text{ V/m (b) } 0,2e^{-j1000\pi}e^{j0,5\pi} \text{ V/m (c) } 0$$

# ÍNDICE

## A

- Adição de vetores, [3](#), [33](#)
- Admitância paralela equivalente, [343](#)
- Alargamento de pulso, [471–475](#)
- Álgebra vetorial, [2–3](#)
- Amplitude complexa, [341–342](#)
- Amplitudes de ondas viajantes progressivas, [403](#)
- Amplitudes de ondas viajantes regressivas, [403](#)
- Análise de onda plana, [494](#)
- Análise do guia de placas paralelas, [503–506](#)
- Análise transiente de linhas de transmissão, [375–388](#)
- Analogias de correntes, [165](#)
- Ângulo de Brewster, [464](#)
- Ângulo de incidência, [466](#)
- Ângulo de polarização, [464](#)
- Ângulo do fator de potência, [411](#)
- Antena curta, [533](#)
- Antena dipolo de meia onda, [535](#)
- Antena dipolo, [534](#), [536](#)
- Antenas monopólo, [535–536](#)
- Antenas
  - curta, linha bifilar para, [532](#)
  - definição de, [480](#)
  - dipolo de meia onda, [535](#)
  - dipolo, [534](#), [536](#)
  - monopolo, [535–536](#)
  - princípios básicos de, [527](#)
- Aproximação por baixas perdas, [345–346](#)
- Aproximação quase-TEM, [488](#)
- Atenuação, com distância de propagação, [345](#)

## B

- Banda de condução, [119](#)
- Bandas de valência, [119](#)
- Bom condutor, [416](#)
- Bom dielétrico, [410–412](#)
- Braço de alavanca, [268](#)

## C

- Cabo coaxial, [221](#), [252](#)
- Caminho circular, [86](#)
- Caminho fechado, [94](#), [308](#)
- Caminho fechado incremental, [226](#)
- Caminho interior, [233](#)
- Caminho radial, [86](#)
- Campo de força, [30](#)
- Campo de indução, [531](#)
- Campo elétrico
  - ao redor de uma linha de cargas infinita, [216](#)
  - intensidades das componentes, [426](#)
  - no plano  $xy$  de uma onda plana polarizada circularmente à direita, [427](#)
  - torque produzido por um, [271](#)
- Campo elétrico fasorial, [400](#)
- Campo elétrico polarizado, [397](#)
- Campo elétrico uniforme, [82](#)
- Campo eletrostático
  - densidade de energia, [106–109](#)
  - do dipolo, [531](#)
  - do dipolo pontual, [104](#)
- Campo magnético, [307](#)
- Campo magnético em movimento, [307](#)
- Campo não conservativo, [95](#)
- Campo potencial, vetor magnético diferencial, [245](#)
- Campos. *Veja também* Campo elétrico; Campo magnético; Campo potencial
  - escalares, [2](#)
  - estáticos, [26](#), [94](#)
  - carga pontual, [82](#), [89](#), [90](#), [91](#)
  - configuração espacial, [427](#)
  - conservativo, [94](#)
  - da linha de carga, [37](#), [38](#)
  - de uma lâmina de cargas, [43](#), [44](#)
  - devido a uma distribuição volumétrica contínua de cargas, [34](#)
  - distantes, [531](#)
  - elétrico fasorial, [400](#)
  - eletrostático, [104](#), [106](#), [108](#), [531](#)
  - estacionário, [247](#)
  - fator de preenchimento de campo, [489](#)
  - força, [30](#)
  - indução, [531](#)
  - internos, [146](#)
  - linhas de força e esboços de, [45–46](#)
  - magnético em movimento, [307](#)
  - magnético estacionário, [239](#), [244](#)
  - magnético, [215](#), [222](#), [291](#), [307](#)
  - Mapa de campo quadrado curvilíneo, [163](#)
  - mapa, [195](#)
  - não conservativo, [95](#)
  - raio de campo modal, [525](#)
  - superfícies equipotenciais, [91](#), [160–161](#), [192](#)
  - uniforme, [82](#)
  - valores instantâneos, [404](#), [439](#)
  - vetoriais, [2](#), [9](#)
  - vetorial ou escalar, [2](#)
- Campos de linhas de transmissão
  - bifilar (altas frequências), [486–487](#)
  - bifilar (baixas frequências), [487](#)
  - coaxial (altas frequências), [483–484](#)
  - coaxial (baixas frequências), [485](#)
  - coaxial (frequências intermediárias), [486](#)
  - e constantes primárias, [481–490](#)
  - linha microfita (baixas frequências), [488–490](#)
- Campos distantes, [531](#)
- Campos elétricos estáticos, [26](#)
- Campos externos, [146](#)
- Campos irradiados, [531](#)
- Cancelamento, [233](#)
- Capacitância
  - da junção, [187](#)
  - de linha de transmissão preenchida com ar, [488](#)
  - de linhas de transmissão, [333–334](#)
  - de placas paralelas, [178](#)

- de uma linha de dois fios, 155
  - exemplo numérico de, para um condutor cilíndrico, 158
  - exemplos de, 152
  - microfita, 489
  - parciais, 151
  - razão entre a carga em um condutor e a diferença de potencial, 149
  - um cone, 183
  - Capacitor
    - coaxial, 63
    - energia armazenada em, 109, 136
    - placas paralelas, 150, 154, 315
  - Carga em movimento, 260–261
  - Carga livre, 140, 144
  - Carga normalizada e estube de curto-circuito, 374
  - Carga total, 36
  - Cargas, 314
  - Cargas ligadas, 137, 140, 142, 277
  - Cargas pontuais
    - campo de, 90
    - campo potencial, 91, 93
    - distribuição simétrica de, 34
    - lei de Gauss e, 58
  - Carta de Smith
    - componentes da, 368
    - descrição, 364–373
    - redução fotográfica da, 370
  - Casamento de meia onda, 449
  - Casamento de quarto de onda, 360, 451
  - Casca de baixo índice, 517
  - Cavidade ressonante, 505
  - Circuito c.c., 94
  - Circuito fechado, 267
  - Circuito magnético, 284–289
  - Circulação, 228
  - Circulação no sentido anti-horário, 339, 26–29
  - Circulação no sentido horário, 339
  - Circulação por unidade de área, 229
  - Coefficiente de atenuação, 345, 405
  - Coefficiente de ganho, 405
  - Coefficiente de reflexão, 351, 437
  - Coefficiente de transmissão, 351, 437
  - Componente escalar, 7, 11
  - Componente vetorial, 11
  - Componentes, 7
  - Componentes esféricas, 529
  - Componentes vetoriais e vetores unitários, 5–8
  - Comprimento de onda, 340–341, 399, 530
    - polares, 365
    - triedro direto, 4
  - Comprimento de onda de corte, 499, 524
  - Condição de guiamento fraco, 518
  - Condição de Heaviside, 346–347
  - Condições de fronteira
    - condutores, 123–126
    - magnéticas, 281–283
    - materiais dielétricos, 143, 148
    - superfícies equipotenciais, 174
  - Condições senoidais de regime permanente, 342
  - Condutividade, 121, 131
  - Condutores. *Veja também*
    - Semicondutores
      - bons, 416
      - bons, propagação em, 416–423
      - cilíndrico, 158
      - cilíndricos coaxiais, 62
      - condições de fronteira, 123, 125, 126
      - de movimento, 311
      - estrutura em bandas de, 119
      - filamentar, 315
      - metálicos, 118, 119, 121
      - perfeito, 166, 310
      - propriedades, 123
      - supercondutividade, 121
  - Configuração do campo elétrico, 424
  - Configuração do campo magnético, 424
  - Configuração espacial de campo, 427
  - Constante de defasamento, 340
  - Constante de propagação, 343, 405, 453
  - Constante de separação, 189
  - Constante dielétrica, 141, 489
  - Constante dielétrica efetiva, 489
  - Constantes de defasamento transversal, 495
  - Constantes de defasamento transversal axial, 495
  - Constantes de materiais, 551–553
  - Constantes primárias, 334
  - Coordenadas cartesianas
    - caminho fechado incremental em, 226
    - elemento de volume diferencial, 5, 69
  - Coordenadas e sistemas de coordenadas
    - cartesianas, 4–6, 18, 21, 69, 226
    - cilíndricas circulares, 14, 15
    - cilíndricas, 17, 18, 181
    - curvilíneas, 542–545
    - esféricas, 20, 21
  - Coordenadas polares da carta de Smith, 365
  - Corrente
    - analogias de, 165
    - condução, 315
    - continuidade da, 116–118
    - de Ampère, 277
    - de deslocamento, 313–317
    - densidade de corrente de convecção, 116, 262
    - densidade de deslocamento, 314
    - distribuições, 527
    - elemento diferencial, 245, 261–263, 265
    - em função do tempo, 387
    - filamentar, 115, 225
    - filamento de corrente de comprimento finito, 216
    - filamento diferencial, 527
    - filamentos, 221
    - forças, 261, 262, 264, 267
    - lei de Kirchoff, 334
    - ligada, 277
    - negativa, 339
    - portadores de, 130–131
    - positiva, 339
    - relação com a tensão, 338
    - sentidos de ondas, 339
    - superficial, 225
    - total, 278
  - Corrente de condução, 315
  - Corrente de convecção, 116
  - Corrente de deslocamento, 313–317
  - Corrente livre total, 278
  - Corrente por unidade de área envolvida, 227
  - Curto-circuito, 310
  - Curva de magnetização, 287
- ## D
- Decibéis (dB), 349
  - Defasamento devido a reflexão, 497
  - Defasamento por unidade de distância, 340
  - Defasamento por unidade de tempo, 340
  - Defasamento resultante, 497
  - Defasamento transversal, 497
  - Defasamentos, 497, 498, 505
  - Densidade de carga, 185
  - Densidade de carga ligada, 144

- Densidade de corrente  
 de convecção, [116](#)  
 de deslocamento, [314](#)  
 e propagação de ondas, [421](#)  
 superficial, [213](#)  
 tipo de, [314](#)  
 uniforme, [122](#)
- Densidade de energia  
 no campo eletrostático, [106](#), [108](#)  
 no campo magnético, [291](#)
- Densidade de fluxo de deslocamento, [52](#)
- Densidade de fluxo elétrico, [51–53](#), [56](#)
- Densidade de fluxo magnético, [310](#)
- Densidade do fluxo, [52](#), [74](#)
- Densidade linear de cargas, [38](#), [158](#)
- Densidade linear uniforme de carga, [38](#), [93](#)
- Densidade superficial corrente/carga, [43](#), [213](#), [320](#)
- Densidade superficial uniforme, [213](#)
- Densidade volumétrica de carga, [34](#), [35](#), [227](#)
- Descontinuidades, [350–353](#)
- Diagrama  $\omega$ - $\beta$ , [467](#), [468](#)
- Diagramas de reflexão de corrente, [380–381](#), [382](#)
- Diagramas de reflexão de tensão, [378–379](#), [382](#), [385](#)
- Diagramas de reflexão, [383](#), [386](#)
- Dielétrico, [51](#)
- Dielétricos perfeitos, [143](#), [407](#)
- Diferença de atraso de grupo, [502](#)
- Diferença de potencial, [87–89](#), [90](#)
- Dimensão espacial, [425](#)
- Dimensões de tempo, [425](#)
- Dipolo  
 campo eletrostático do, [531](#)  
 elétrico diferencial, [271](#)  
 elétrico, [101](#), [102](#), [105](#)  
 magnético, [270](#), [277](#)  
 pontual, [105](#)
- Dipolos magnéticos, [277](#)
- Dispersão angular, [467](#)
- Dispersão angular cromática, [467](#)
- Dispersão da velocidade de grupo, [470](#)
- Dispersão de onda, [467](#)
- Dispersão do guia de onda, [505](#)
- Dispersão modal, [502](#), [510](#)
- Distância propagada, [345](#)
- Distribuições de amplitude do campo elétrico, [515](#)
- Distribuições de correntes, [527](#)
- Distribuições simétricas de cargas e a lei de Gauss, [55](#), [57](#), [59](#)
- Divergente, [543–545](#)
- Divisão de tensão, [378](#)
- Domínios, [275](#)
- ## E
- Efeito Hall, [261](#)
- Efeito pelicular, [416–423](#)
- Elemento de volume diferencial  
 em coordenadas cartesianas, [5](#)  
 no sistema de coordenadas cilíndricas circulares, [15](#)  
 no sistema de coordenadas esféricas, [20](#)
- Elemento diferencial de corrente, [245](#), [261–266](#), [265–267](#)
- Elemento vertical de corrente, [532](#)
- Elementos concentrados, [331](#)
- Elementos distribuídos, [331](#)
- Eletricidade, [27](#)
- Elétrons  
 carga, [28](#)  
 condução, [120](#)  
 de valência, [119](#)  
 em órbitas, [277](#), [278](#)  
 em semicondutores, [130–131](#)  
 forças de Coulomb, [261–262](#), [555](#)  
 livres, [120](#), [406](#), [409](#)  
 modelo atômico de, [273–275](#)  
 velocidade de, [37](#)
- Eletrostática, [70–71](#)
- Energia e potencial, [80](#)
- Energia  
 armazenada em capacitores, [109](#), [136](#)  
 armazenada em linhas de transmissão, [361](#)  
 armazenada no campo magnético, [297](#)  
 cinética, [106](#), [260](#)  
 eletromagnética, [418](#), [480](#), [527](#)  
 espectral, [471](#), [472](#), [475](#)  
 incidente, [437](#), [444](#)  
 magnética, [295](#)  
 magnetoidrodinâmica, [187](#)  
 no campo eletrostático, [106](#)  
 potencial. *Veja também* Energia potencial quântica, [558](#)
- Energia potencial, [80](#), [106](#), [137](#), [290–292](#), [294](#)  
 bidimensional, [197](#)  
 campos potenciais  
 de um anel de densidade linear uniforme de carga, [93](#)  
 de um sistema de cargas, [91](#)  
 de uma carga pontual, [89–91](#), [93](#)  
 dois planos radiais infinitos com um ângulo interior, [181](#)  
 somatório infinito de, [193](#)  
 superfícies equipotenciais, [97](#), [192](#)  
 um cone, [183](#)
- Enlace de fluxo, [292](#), [312](#)
- Envoltória do pulso, [474](#)
- Equação de força de Lorentz, [260](#)
- Equação de Helmholtz, [404](#)
- Equação de onda, [503–507](#)
- Equação vetorial de Helmholtz, [402](#)
- Equações de autovalores, [516](#)
- Equações de Laplace  
 derivação das, [173](#)  
 em coordenadas cilíndricas, [181](#)  
 exemplos da solução das, [177](#)  
 solução produto das, [188](#)
- Equações de linhas de transmissão, [334–336](#), [343–345](#)
- Equações de Maxwell  
 e lei de Gauss, [71](#)  
 na forma fasorial, [401](#)  
 na forma integral, [319–320](#)  
 na forma pontual, [317–318](#)
- Equações de Maxwell para regiões sem fronteiras, [320](#)
- Equações de ondas gerais, [336](#)
- Equações de Poisson  
 derivação das, [173–175](#)  
 exemplos de solução da, [184–187](#)
- Equações telegráficas, [336](#)
- Esboço de linhas de força, [46](#)
- Escalares e vetores, [1–2](#)
- Espaço livre  
 campos elétricos estáticos no, [26](#)  
 comprimento de onda no, [399](#)  
 equação vetorial de Helmholtz no, [402](#)  
 número de onda no, [399](#)  
 permeabilidade do, [237](#)  
 permissividade do, [27](#)  
 propagação de onda no, [396–404](#)
- Espectro de potência, [472](#)
- Espectro de potência de um pulso gaussiano, [472](#)
- Espectro de potência normalizado, [472](#)
- Espectro do pulso, [471](#)
- Estado de polarização, [425](#)
- Estrutura de bandas de energia, [119](#)
- Estube de curto-circuito, [374](#)

**F**

Faixa espectral livre, 450  
 Farads, 150  
 Fase do coeficiente de reflexão, 356  
 Fase transiente, 445  
 Fator, 1  
 Fator de preenchimento de campo, 489  
 Fem de movimento, 311  
 Fem, 307, 308, 311  
 Fenômeno de onda, 331  
 Fenômeno macroscópico, 35  
 Fibra de índice degrau, 517  
 Fibra ótica, 517–526  
 Filamento de corrente, 527  
 Filamento de corrente de comprimento finito, 216  
 Filamento reto infinitamente longo, 214, 215  
 Filamentos de corrente, 221  
 Filamentos infinitos paralelos, 267  
 Fluxo de deslocamento, 52  
 Fluxo elétrico, 53  
 Fluxo magnético e densidade de fluxo magnético, 237–239  
 Fluxo total, 56  
 Fonte, 69  
 Força eletromotriz (fem), 307, 308, 311  
 Força magnetomotriz, 284  
 Força vetorial, 28  
 Forças
 

- coerciva, 287
- corrente, 261–267
- de Coulomb, em elétrons, 261, 555
- elétrons, 120
- em cargas em movimento, 260
- em elemento diferencial de corrente, 261–265
- em materiais magnéticos, 290–292
- em um circuito fechado, 267–273
- em uma carga, 29–30, 86
- entre elementos diferenciais de corrente, 265–267
- equação de Lorentz, 260
- momento de uma, 268
- vetor de, 28

 Formas instantâneas reais do campo elétrico, 399  
 Fórmula de Marcuse, 525  
 Formula de Rudolf-Neumann, 525  
 Forno de microondas, 409  
 Frente de onda, 332  
 Frequência de batimento, 469  
 Frequência de corte, 493, 498, 508–509  
 Frequência de ressonância, 556

Frequência espacial, 340, 399  
 Frequência normalizada, 523  
 Frequência temporal, 340  
 Função da velocidade de grupo, 470  
 Função de valor duplo, 192  
 Funções de Bessel, 486, 520

**G**

Gauss, 237  
 Geometria de linha de transmissão coaxial, 484  
 Geometria do dipolo elétrico, 102 (geometria do problema de um dipolo)  
 Geometria para incidência de onda plana, 457  
 Gradiente, 98, 543–545  
 Gradiente de potencial, 95, 98, 99  
 Gráfico de intensidade, 525, 526  
 Gráficos de intensidades de fibras de índice de grau de guiamento fraco, 525, 526  
 Guia de onda de placas paralelas, 490, 492
 

- análise de ondas planas no, 494–503
- forma simples do, 490
- propagação de ondas planas, em modo guiado, 494
- propagação de ondas planas, por reflexão oblíqua, 492
- representação por ondas planas de modos TM e TEM, 493

 Guia de onda dielétrico laminado, 464, 491, 511, 516  
 Guias de onda dielétricos simétricos laminados, 491, 511, 516  
 Guias de onda retangulares, 491, 506–511  
 Guias de ondas
 

- cilíndrico, 491
- descrição, 480
- dielétrico simétrico laminado, 491, 511, 516
- dielétrico laminado, 464, 491, 511, 516
- dielétricos planos, 511–517
- fibra ótica, 492
- óticos, 463
- placas paralelas, 490, 492
- retangular, 491, 508
- simétrico laminado, 511, 512, 515

**H**

Henry, 237, 293  
 Histerese, 141, 275, 287

**I**

Identidades vetoriais, 545  
 Imagem, 129  
 Impedância de carga complexa, 350  
 Impedância
 

- característica, 338–339
- carga normalizada, 365
- de entrada, 447
- de onda, 358, 447
- e linha com uma fenda, 353–354
- efetiva, 459
- impedância de carga complexa, 350, 354
- interna complexa, 358
- intrínseca, 403
- normalizada, 368, 371
- série equivalente, 343

 Impedâncias efetivas, 460  
 Incidência normal, 434–441  
 Incidência oblíqua, 453  
 Índice de refração, 449, 468  
 Indutância
 

- externa, 483, 485, 487
- interna, 296–297, 375, 485, 487
- linhas de transmissão, 239, 333–334
- mútua, 292–298
- própria, 293

 Indutores, 296–297  
 Integral de linha, 82–84  
 Integral de superfície fechada, 94  
 Intensidade, 13  
 Intensidade de campo elétrico
 

- como funções da distância, 185
- e a lei ao inverso do cubo, 105
- em uma região cilíndrica, 122

 Intensidade de campo elétrico de movimento, 311  
 Intensidade de campo elétrico total, 33  
 Intensidade do campo magnético (H)
 

- causada por um filamento de corrente de comprimento finito, 216
- como função do raio em uma linha de transmissão coaxial infinitamente longa, 222
- linhas de força de, em volta de um filamento reto infinitamente longo, 215

produzido por um elemento diferencial de corrente, 211  
 rotacional do, ao redor de um filamento infinitamente longo, 229  
 taxa de variação espacial de, 226  
 Intensidade do pulso, 471  
 Intensidade espectral, 471  
 Interface dielétrica, 145  
 Interfaces múltiplas, 445  
 Interferômetro de Fabry-Perot, 449–450  
 Interpretação, 82  
 Irrotacional, 252  
 Isolante, 119  
 Isotrópicos, 121

## L

Laço de histerese, 287–288  
 Lacunas, 130–131  
 Lâmina infinita de cargas, 43  
 Laplaciano de um vetor, 249, 400  
 Laplaciano de  $V$ , 174  
 Lei circuital de Ampère  
 aplicações diferenciais, 231  
 determinar a taxa de variação espacial de  $H$ , 226  
 e o teorema de Stokes, 236  
 equações de Maxwell da, 232  
 na forma pontual, 248  
 Lei das correntes de Kirchoff, 334  
 Lei das tensões de Kirchoff, 334  
 Lei de Ampère para o elemento de corrente  
 Veja lei de Biot-Savart  
 Lei de Biot-savart, 210–214, 216  
 Lei de Coulomb, 33, 549  
 Lei de Faraday, 306–312, 317, 320  
 Lei de Gauss  
 aplicação da, para o campo de uma carga pontual, 58  
 distribuições simétricas de cargas, 59  
 e a primeira equação de Maxwell, 71  
 forma pontual, 71  
 Lei de Hooke, 556  
 Lei de Lenz, 307  
 Lei de Ohm, 320  
 na forma pontual, 121  
 para correntes contínuas, 165  
 Lei de Snell, 459, 462, 464–465  
 Lei do inverso do cubo, 105  
 Lei do inverso do quadrado, 91, 105

Lei do paralelogramo, 3, 83  
 Leis do campo, 247  
 Leis do campo magnético estacionário, 247–253  
 Linha coaxial com uma fenda, 372  
 Linha com uma fenda, 353  
 Linha de cargas  
 campo de, 37, 42, 43  
 densidade, 107  
 densidade uniforme, 38, 93  
 equivalentes, 158  
 infinita, 41, 86, 166, 216  
 infinita e uniforme, 42  
 largura diferencial, 43  
 linha de carga equivalente, 158  
 potencial de, 155  
 seção reta de, 45  
 Linha de transmissão coaxial, 222  
 Linha formadora de pulsos, 386  
 Linha microfita, 489  
 Linha sem distorção, 346  
 Linha sem perdas, 332  
 Linha uniforme de cargas infinita, 42, 62  
 Linhas, 333, 346. *Veja também* Linhas de transmissão  
 Linhas de força  
 da intensidade de campo magnético em volta de um filamento retilíneo infinitamente longo, 215  
 e quadrados curvilíneos, 162  
 e superfície equipotencial, 127  
 equação de, 47  
 Linhas de transmissão  
 admitância paralela equivalente em, 343  
 análise transiente de, 375–388  
 bifilar, geometria de, 487  
 casada em ambas as extremidades, 360  
 circuito básico, 332  
 coaxial infinitamente longa, intensidade de campo magnético como função do raio, 222  
 configuração de comprimento finito e seu circuito equivalente, 358  
 constantes primárias de, 334  
 de comprimento finito, 357–360  
 energia armazenada em, 361  
 equações de onda gerais para, 336  
 exemplos de, 360–364  
 fenômenos de onda em, 331  
 geometria de, coaxial, 484

impedância série equivalente em, 343  
 indutância, 239, 333–334  
 inicialmente carregada, 384–385  
 linha formadora de pulsos, 386  
 métodos gráficos para, 364–375  
 modelo de elementos  
 concentrados com perdas, 335  
 modelo de elementos  
 concentrados para, 333  
 placas paralelas, geometria de, 482  
 sem perdas, terminada por uma carga casada, 376  
 Linhas de transmissão de placas paralelas no, 482

## M

Magnetização e permeabilidade, 276–281  
 Mapas  
 de campo, 163, 164, 195, 216  
 de um campo quadrado curvilíneo, 163–164, 166, 198  
 Materiais antiferromagnéticos, 275–276  
 Materiais diamagnéticos, 274  
 Materiais dielétricos  
 condições de fronteira para materiais dielétricos perfeitos, 143  
 e o fluxo elétrico, 53  
 natureza dos, 137  
 perfeitos, 143  
 Materiais doadores, 131  
 Materiais ferrimagnéticos (ferrites), 276, 406  
 Materiais ferromagnéticos, 275  
 Materiais magnéticos  
 energia potencial e forças em, 290–292  
 natureza dos, 273–276  
 Materiais  
 anisotrópicos, 121  
 antiferromagnéticos, 275–276  
 constantes de certos, 551–553  
 diamagnético, 274  
 dielétricos, 53, 137–142, 143–149  
 doadores, 131  
 ferrimagnéticos (ferrites), 276, 406  
 ferromagnéticos, 275  
 isotrópicos, 121  
 magnéticos, 273–276, 290–292  
 paramagnéticos, 275  
 superparamagnéticos, 276

Máxima amplitude de tensão, 356  
 Medidor de rotacional, 229  
 Meia largura temporal, 472  
 Meio anisotrópico, 429  
 Meios dispersivos  
   alargamento de pulsos em, 471–475  
   propagação de ondas em, 465–471  
 Método das imagens, 128–130  
 Método de relaxamento, 201  
 Método Interativo, 198  
 Métodos de casamento de impedância, 351  
 Mínima amplitude de tensão, 356  
 Mobilidade, 120  
*Moding*, 509, 510  
 Modo transversal elétrico (TE), 493  
 Modo transversal eletromagnético (TEM), 493, 510  
 Modo transversal magnético (TM), 493  
 Modos em guias de ondas, 493  
 Modos híbridos, 493  
 Molécula apolar, 137  
 Moléculas polares, 137  
 Momento de dipolo magnético, 270  
 Momento de dipolo magnético por unidade de volume, 277  
 Momento de dipolo por unidade de volume, 138, 277  
 Momento magnético, 273–275  
 Momentos do dipolo, 102, 105, 139, 270  
 Multiplicação de um vetor, 3  
 Multiplicação de vetores, 3, 9  
 Múltiplos de meio comprimento de onda, 439  
 Multipólos, 105

**N**

Núcleo de alto índice, 517  
 Número de modo, 495  
 Número de modo azimutal, 518  
 Número de modo radial, 518  
 Número de onda, 399

**O**

Observador, 312  
 Ohm, 121  
 Onda de tensão inicial, 378  
 Onda de tensão, 384  
 Onda estacionária, 343  
 Onda incidente, 435, 498

Onda linearmente polarizada, 424  
 Onda plana polarizada circularmente à direita, 427  
 Onda polarizada circularmente à direita, 428  
 Ondas, 339  
 Ondas “Incidentes oblíquas incidentes”, 462–465  
 Ondas em linhas de transmissão, 481  
 Ondas planas  
   análise, 494–503  
   geometria para incidência, 457  
   polarizadas circularmente à direita, 427  
   propagação em modo guiado, 494  
   propagação para, direções genéricas em, 453–456  
   propagação por reflexão oblíqua, 492  
   reflexão, 456–457  
   reflexão, uniformes de, 434–441  
   representação de modos TM e TEM, 493  
   uniformes, 397, 434–441, 454  
 Ondas que se propagam conjuntamente, 469  
 Ondas refletidas, 435, 436  
 Ondas senoidais, 341–343  
 Ondas superficiais, 514  
 Ondas transmitidas, 435, 436  
 Ondas transversas eletromagnéticas (TEM), 397, 481  
 Operação básica de um guia de ondas 490–494  
 Operador nabla, 72  
 Operador vetorial, 72–73  
 Operadores escalares, 72  
 Origens da permissividade complexa, 554–560

**P**

Pacotes espectrais, 467  
 Padrão de interferência, 500  
 Padrão horizontal, 532  
 Padrão vertical, 532  
 Parafuso dextrogiro, 12  
 Parâmetro de dispersão, 473  
 Perdas por efeito pelicular, 347  
 Permeabilidade  
   complexa, 406  
   definição de, 279  
   e magnetização, 276–281  
   espaço livre, 237  
   relativa, 279

**Permissividade**

complexa, 405–406, 554–560  
 do dielétrico homogêneo, 150  
 do espaço livre, 27  
 e capacitância, 292  
 em meio anisotrópicos, 429  
 materiais isotrópicos em, 454  
 múltiplos dielétricos de, 153  
 relativa, 141–143  
 Placa de quarto de onda, 429  
 Plano condutor, 129, 130  
 Plano condutor infinito, 129  
 Plano de incidência, 457  
 Plano transversal, 397  
 Planos radiais, 181  
 Planos radiais infinitos, 181  
 Polarização, 138, 139, 554.  
   *Veja também* Polarização s  
   ângulo, 464  
   circular, 426, 427  
   circular à direita, 427  
   circular à esquerda, 427  
   de onda, 423–430  
   elíptica, 426  
   elíptica à direita, 427  
   elíptica à esquerda, 427  
   estado, 425  
   linear, 426, 518  
   paralela, 457  
   perpendicular, 457–458  
   transverso elétrico (TE), 458  
   transverso magnético (TM), 457  
 Polarização p, 457, 459–460, 464, 498  
 Polarização s, 457, 458–460, 464, 498  
 Polarização transversa elétrica (TE), 457  
 Polarização transversa magnética (TM), 457  
 Potência da onda incidente, 351  
 Potência de perdas, 349  
 Potência de perdas média, 421  
 Potência espectral, 467  
 Potência instantânea, 347  
 Potência média no tempo, 347  
 Potência refletida, 352  
 Potenciais escalar e vetor magnéticos, 240  
 Potenciais retardados, 321–325  
 Potenciais variáveis no tempo, 321  
   *Veja também* potenciais retardados  
 Potencial  
   absoluto, 88  
   campo potencial vetor magnético, 245

eletrostático, 238, 241  
 energia  $e$ , 80  
 escalar magnético, 240, 241, 243, 284  
 retardado, 321–325  
 variável no tempo, 321  
 vetor magnético, 243–246  
 Princípio da conservação, 116  
 Prisma temporal, 472  
 Problema básico de duas interfaces, 446  
 Problema de três interfaces, 452  
 Processo de defasagem, 556  
 Produto escalar de vetores unitários, em sistemas de coordenadas cartesianas, 18, 21  
 em sistemas de coordenadas cilíndricas, 18  
 em sistemas de coordenadas esféricas, 21  
 Produto escalar, 9–11, 72  
 Produto vetorial, 12, 13  
 Profundidade de penetração, 409, 418  
 Projeção, 11  
 Propagação com poucas perdas, 345–347  
 Propagação de onda  
 e densidade de corrente, 421  
 em dielétricos, 404–412  
 em meios dispersivos, 465–471  
 no espaço livre, 396–404  
 ondas linearmente polarizadas, 424  
 Propagação de ondas planas  
 em direções genéricas, 453–456  
 em modo guiado, 494  
 Propagação sem perdas, 336–340, 345–347  
 Propagação, ondas com fuga, 512  
 Propagação. *Veja também* propagação sem perdas  
 baixas perdas, 345–347  
 de linhas de transmissão, 332–334  
 em bons condutores, 416–423  
 Propriedade associativa, 3  
 Propriedade comutativa, 3, 9  
 Propriedade conservativa, 91  
 Propriedade distributiva, 10  
 Pulso limitado por transformada, 475

**Q**

Quadrados curvilíneos e linhas de força, 162

**R**

Raio do campo modal, 525  
 Raios meridionais, 518  
 Raios oblíquos, 518  
 Razão entre índices de refração, 467  
 Receptores, 131  
 Rede, 333  
 Rede formadora de pulsos, 333  
 Rede inicialmente carregada, 333  
 Reflexão de ondas  
 em descontinuidades, 350–353  
 em interfaces múltiplas, 445–453  
 Reflexão de ondas de tensão, 350  
 Reflexão de ondas planas uniformes, 434–441  
 Reflexão em onda plana, 456–457  
 Reflexão interna total, 462  
 Reflexão total, 462–465  
 Reflexão total de potência, 462  
 Regra das mãos, 427–428  
 Relação entre fase e tempo, 411  
 Relutância, 285  
 Representação por ondas planas de modos TM e TEM, 493  
 Resistência, 122, 285  
 Ressonância transversa, 496, 497, 522  
 Retardo, 429  
 Rotacional, 225, 227, 228, 229, 230, 231, 543–545

**S**

Segunda lei de Newton, 556  
 Semicondutores, 120, 130–132  
 Sentidos de correntes em ondas, 339  
 Séries de Fourier, 194  
 Siemens (S), 120  
 Simetria e Lei de Gauss, 61  
 Sistema de coordenadas do tipo triedro direto, 4  
 Sistema de coordenadas esféricas, 19–20, 21  
 Sistemas de coordenadas cartesianas  
 descrição, 3–6  
 produtos escalares de vetores unitários nas, 18, 21  
 tipo triedro direto, 5  
 vetores unitários de, 6  
 Sistemas de coordenadas cilíndricas, 18  
 Situação de regime estacionário, 445  
 Solenóide de  $n$ -voltas de comprimento finito, 224  
 Solenóide ideal, 224

Solenóide ideal de comprimento finito, 224  
 Sorvedouro, 69  
 Spin, 273–275  
 Spin do elétron, 273–275  
 Spin do núcleo, 273  
 Supercondutividade, 121  
 Superfície das coordenadas cilíndricas circulares, 15  
 Superfície de meio potencial, 158  
 Superfície fechada, 139  
 Superfície gaussiana  
 definição da, 57  
 para uma linha uniforme de cargas infinitas, 62  
 tamanho diferencial da, 64–65  
 Superfícies  
 condutoras, 43  
 coordenadas constantes, 196  
 em sistemas de coordenadas cilíndricas e cartesianas, 15  
 equipotenciais, 91, 156, 160–161, 192  
 esféricas, 20  
 fronteiras, 172, 175  
 incrementais, 232  
 mutuamente perpendiculares, 19–20  
 perpendiculares, 16  
 Superfícies equipotenciais  
 cilindros circulares, 156  
 condições de fronteira, 174  
 entre dois condutores, 160  
 no campo potencial de uma carga pontual, 91  
 para o campo potencial, 192  
 Susceptibilidade elétrica, 141  
 Susceptibilidade magnética, 279

**T**

Tangente de perdas, 406, 410  
 Taxa de onda estacionária, 441–445  
 Taxa de onda estacionária para a tensão (VSWR), 343, 353–354, 357  
 Taxa de variação espacial, 65  
 Tempo de relaxação, 148  
 Tensão  
 circuito cc simples, 94  
 complexa instantânea, 342  
 de linhas de transmissão, 340  
 fasorial, 342  
 formas instantâneas reais de, 340  
 Hall, 261  
 lei de Kirchoff para, 94

- relação entre corrente e tensão, 338
  - senoidal, 339–340
  - Tensão induzida, 312
  - Tensão no resistor em função do tempo, 387
  - Teorema da divergência, 72–74
  - Teorema da unicidade, 175–177
  - Teorema de Poynting, 413–416
  - Teorema de Stokes, 232–236
  - Terceira equação de Newton, 547
  - Tesla, 237
  - Toróide de  $n$  voltas, 225
  - Toróide ideal, 225
  - Torque, 268, 269
  - Trabalho
    - diferencial, 81
    - direção  $e$ , 81
    - Lei circuital de Ampère para, 218
    - no deslocamento de uma carga, 82–83, 86–88, 106
    - total, 10
  - virtual, 292
  - Transformação de impedância, 452
  - Transientes, 375
  - Transmissão de potência e caracterização de perdas, 346–350
  - Transmissão parcial, 512
  - Transmissão total, 462–465
  - Trinado, 474
  - Tubo de fluxo, 161
- U**
- Unidades, 546–550
- V**
- Vácuo, 26
  - Valores instantâneos de campo, 404
  - Valores instantâneos do campo total, 439
  - Variáveis cartesianas, 17
- W**
- Variáveis das coordenadas cilíndricas, 17
  - Velocidade
    - de deriva, 120
    - de elétrons, 37
    - de fase, 340, 399
    - de grupo, 346
    - de onda, 337
    - dispersão da, de grupo, 470
    - função, de grupo, 470
  - Vetor, 2
  - Vetor de Poynting, 454, 471, 533, 535
  - Vetor de superfície, 10
  - Vetores coplanares, 3
  - Vetores unitários, 6
  - Volt, 30, 88
  - Webers, 244